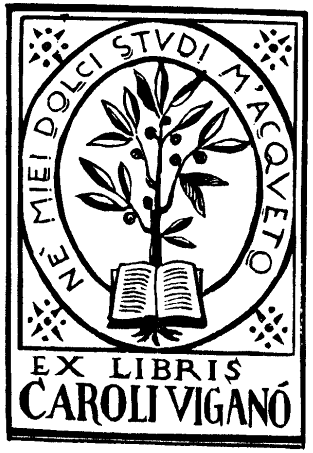


MECHANICA FLUIDORUM

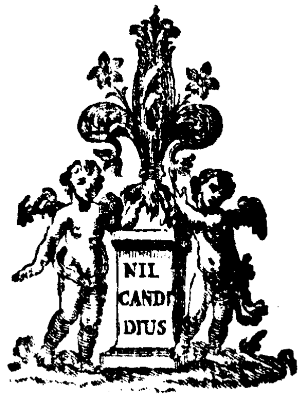
SIVE

DE AEQUILIBRIO ET MOTU CORPORUM FLUIDORUM

TRACTATUS

IN ACADEMICIS PRAELECTIONIBUS SUIS EXPOSITUS

A D. OCTAVIANO CAMETTI
ABBATE VALLUMBROSANO
IN PISANA UNIVERSITATE
MATHESEOS PUBLICO PROFESSORE
ET REGIAE LUGDUNENSIS
ACADEMIAE SOCIO.



FLORENTIAE MDCCLXXVII.

EX TYPOGRAPHIA STECCHI ET PAGANI
SUPERIORUM FACULTATE.

PRAEFATIO

MEchanica Fluidorum dividitur in duas partes, quarum una verſatur circa preſſiones, et varia aequilibria ſtagnantium fluidorum, altera autem circa illorum motum. Pars prima dicitur *Hydroſtatica*, et ſecunda *Hydraulica* appellatur. Archimedes (a) inter veteres primus fuit, qui tradidit Hydroſtaticae rudimenta; quippe nedum invenit, punctum quodlibet maſſae fluidae in aequilibrio conſtitutae aequaliter omni ex parte premi, ſed etiam ſitum, aut poſitionem determinavit, quam ſolidum inſidens fluido, habere debet, ut ipſi innatet. Verum haec ab ipſo ſparſa ſemina longo temporis intervallo ſterilia iacuerunt, uſquedum a ſagaci Galilaei ingenio faecundata, inciperent germinare. Hoc enim magnum Italiae noſtrae Lumen principia archimedea non ſolum expoſuit, ac luculentius explanavit, verum etiam novis acceſſionibus auxit, et illuſtravit. Imo cum ipſe philoſophos monuiſſet, aquam non ultra altitudinem octodecim cubitorum in antliis, ut loquuntur, ſuctoriis attolli poſſe, effecit ut eius diſcipulus Torricellius (b) in phae-

(a) In libro de inſidentibus humido.
(b) De motu gravium naturaliter deſcendentium.

phaenomenis explicandis feliciter pondus aeris adhiberet, vulgatumque errorem Veterum profligaret, qui suspensionem liquorum in tubis horrori vacui adscribebant. Cum enim suspicaretur, limitatam hanc altitudinem aquae in antliis a pondere externi aeris oriri posse, ut hac de re postea certior fieret, mercurio experimentum instituit, comperitque eventum consilio respondisse.

Quod vero pertinet ad Hydraulicam, haec antiquis temporibus non admodum exculta fuit, nec notabilia incrementa cepit. Equidem non me latet, Ctesibium, et Heronem varios lusus, machinasque hydraulicas construxisse, quae partim oblectationi, et partim humanae vitae commodis inserviebant; at hoc ad summum probare potest, aliquo saltem modo eis innotuisse effectus illos, qui oriuntur ab aeris pressione, etsi veras causas, et accuratas mensuras in rebus hydraulicis ignorarent. Pariter licet Frontinus (a), aliique veteres (ut putant aliqui) cognovissent, velocitatem aquarum ex vase, aut castello aliquo effluentium augeri ob auctam aquae altitudinem supra locum, ex quo aqua effluit; nihilominus tamen negari nequit, illos omnino ignoravisse, in qua altitudinum ratione velocitates aquae soleant variare.

Benedictus Castellius (b) alter discipulus Galilaei,

(a) De Aquaeductis Urbis Romae commentarius.
(b) Della misura dell'acque correnti stampato l'anno 1628.

laei, qui fluminum, aquarumque doctrinam non solum demonstratione, verum etiam opere confirmavit, primus fuit inter Recentiores, qui de proportione inter aquae velocitates, et eius altitudines cogitavit; veram tamen non deprehendit, putans aquae velocitatem in ea ratione augeri, in qua altitudines eius crescunt. Neque hoc mirum videri debet; quippe lex ista nullo alio modo poterat definiri, quam per effluxum aquae ex vase per minimum orificium in eius latere, vel in fundo. Id autem cum Torricellius (a) pro ea, qua erat ingenii acie praeditus, detexisset; physicis potius experimentis, quam mechanicis rationibus demonstravit, aquae velocitates esse in subduplicata eius altitudinum ratione. Inventum hoc torricellianum tamquam rationi, et experientiae consonum cum Mariotto (b) amplexus est Gulielminus (c), qui dein ipsum maxima cum Principum, et populorum utilitate currentibus aquis fluminum applicavit (d). Imo inventum hoc Torricellii mechanicis etiam rationibus a pressionum doctrina sumptis conatus est ostendere Varignonius (e), cuius methodum postea Hermannus (f) quoque est imitatus.

Ve-

(a) De motu gravium naturaliter descendentium typ. edit. anno 1644.
(b) Traité sur le mouvement des Eaux discours III. Reg. III. publié l' ann. 1686.
(c) Aquarum fluentium mensura nova methodo inquisita typ. edit. 1687.
(d) Della natura de Fiumi stampato in Bologna l'anno 1697.
(e) Hist. de l'Accad. Roy., an. 1703.
(f) Phoronomia art. 360. pag. 215 typ. edit. 1716.

Velocitate relativa fluentis aquae hoc modo inventa, adhuc supererat inquirenda eius velocitas absoluta, de cuius mensura nondum Hydraulici conveniebant. Cum autem arbitrarentur, mensuram hanc posse determinari per longitudinem columnae aquae, quae per datum foramen tempore dato transit; idcirco ad illam investigandam experimenta plurima instituerunt. Et quidem Newtonus (a) non alia methodo hanc mensuram detegere est conatus, quam comparando eius theoriam cum quantitate aquae experimentis determinata. Ut autem modus a viro summo adhibitus percipiatur, fingendum imprimis cum ipso est vas aliquod verticale, habens in eius fundo minimum orificium in tenui lamina excavatum, per quod effluere possit aqua. Fingendum est praeterea *tantum* aquae vasi superne affundi, quantum interea effluit per foramen, seu, quod idem est, aquam supra centrum foraminis constitutam in eadem semper altitudine permanere. Hoc posito, idem Auctor integram massam aquae dividit in duas partes, quarum prima figuram habet solidi generati ex rotatione hyperbolae quarti gradus circa rectam lineam verticalem, quae per foraminis centrum transit; altera autem pars est reliqua eius portio, quae in vase remanet. Ponit ulterius, sola strata horizontalia aquae componentis hyperboloidem actu descendere ad foramen usque; reliquam vero aquam

(a) Philosophiae Naturalis Principia Mathematica edita an. 1687.

aquam, quae hoc solidum omni ex parte ambit, prorsus immotam esse, velut si in glaciem versa foret, adeo ut in aquae medio fiat quaedam species cataractae, vel infundibuli, quod continuo renovatur, dum ex adverso alia lateralis perpetuo stagnans manet. Denique theoriam his hypothesibus superstructam comparando cum quantitate aquae per orificium dato tempore effluentis, concludit, aquae velocitatem in ipso foramine eam esse, quam acquirere potest grave cadendo, et motu suo describendo dimidiam altitudinem aquae, eidem foramini incumbentis.

Cum autem ex una parte vir perspicacissimus plane sciret, aquam e vasis foramine erumpentem reipsa habere velocitatem, non quidem dimidiae, sed toti potius altitudini convenientem, et ex alia detexisset, venam aquae ita contrahi prae foramine, ut minima eius sectio medietatem foraminis ferme aequaret; propterea in secunda sui Operis editione mutavit (a) sententiam suam, et foraminis loco substituendo sectionem contractae venae, intulit, aquae velocitatem per foramen exilientis esse aequalem illi, quam acquirere potest grave cadendo, et motu suo describendo altitudinem totam aquae foramini incumbentis. Unde salva manente theoria ab ipso iam constituta in priori sui Operis editione, utrique phaenomeno velocitatis, et quantitatis aquae

 dato

(a) Philosophiae Naturalis Principia Mathematica edita ann. 1714.

dato tempore effluentis, quae sibi contradicere videbantur, omnimode satisfecit.

Verum enim vero cataracta a Newtono excogitata tum experientiis, tum primis etiam hydraulicae legibus adversatur; siquidem hae ostendunt, particulas omnes aquae, ne illis quidem exceptis, quae vasis lateribus adhaerescunt, omni ex parte confluere ad foramen. Praeterea sectio contractae venae non est in omnibus experimentis dimidia foraminis, per quod effluit, nec sibimet constans ubique manet; sed pro diversa amplitudine orificii, atque crassitie laminae, cui foramen inest, semper mutari solet, et ideo contractioni venae aqueae nulla potest accurata superstrui theoria.

Haec duo incommoda, quae occurrunt in methodo Newtoniana in causa fuerunt, ut inde Daniel Bernoullius (a) de invenienda altera methodo cogitaret. Hic autem Auctor imprimis ponit, extimam superficiem aquae contentae in vase, quod sensim evacuatur, situm horizontalem perpetuo conservare. Ponit praeterea, quod si tota massa fluida mente dividi concipiatur in strata horizontalia numero infinita, et habentia idem volumen, haec, dum vas evacuatur, semper contigua esse debeant. Ponit tertio, particulas omnes fluidi, quae idem componunt stratum, aeque veloces esse, illas vero, ex quibus constant diversa strata, velocitates habere reciproce proportionales respondentibus amplitudinibus ipsius vasis. Quarto denique ut determinet motum cuiusvis strati, utitur principio conservationis virium vivarum, quod ipse etiam Hugenius demonstravit, et quo assumitur, *si pondera quotlibet vi gravitatis suae moveri incipiant, singulorum velocitates ubique tales fore, ut producta ex earum quadratis in suas massas collecta, sint proportionalia altitudini verticali, per quam centrum gravitatis ex corporibus compositae descendit, multiplicatae per massas omnium*. Putat siquidem vir doctissimus hoc principium quoque posse diversis stratis eiusdem fluidi applicari. Quandoquidem cum haec strata per gradus insensibiles mutuo in se se agant, quin se percutiant; utique in massa fluida composita ex his stratis illud ipsum eveniat oportebit, quod solet accidere in systemate plurium corporum solidorum, quae per rectas lineas inflexibiles mutuo in se se agunt, et certam quamdam quantitatem motus distribuunt inter se.

(a) Danielis Bernoullii Hydrodynamica edita ann. 1738.

Sed quamvis valeat hoc principium pro regulis motuum eruendis ex percussione, si modo corpora quae se collidunt, perfecte elastica esse ponantur; nemo tamen, quod sciam, hactenus demonstravit ipsum valere quoque pro investigandis regulis motuum a propria gravitate ortorum, ac propterea etiam posse in corporibus non elasticis, ac praecipue in fluidis adhiberi. Ponitur quoque in hoc principio, particulas omnes fluidi nullum alium habere motum quam verticalem, cum tamen ipsae, prae-

praesertim dum propius accedunt ad fundum vasis, diversis obliquis motibus ferri soleant. Videtur quoque non levi incommodo laborare hypothesis, qua assumitur, particulas omnes eiusdem strati aeque veloces esse. Cum enim fluidum prope vasis latera constitutum, ob resistentiam frictionis, descendat tardius quam in medio; evidens est, non omnes particulas componentes unum idemque stratum velocitates omnino habere aequales.

Cum itaque Mac-Laurinius (a), et Ioannes Bernoullius (b) Danielis pater, eius theoriam incommodis hisce obnoxiam comperissent, conati sunt singuli aliam tradere huius problematis solutionem, quam magis directam, magisque primis mechanicae regulis consonam reputabant. Malo autem fato, quod ex ipsa rei natura prodit, factum est, ut etiam theoriae ab ipsis excogitatae, sint pluribus arbitrariis hypothesibus involutae. Ac re quidem vera mente concipit Mac-Laurinius integrum pondus fluidi in tres partes divisum esse, quarum prima impendatur in accelerandum motum fluidi intra vas, altera intra foramen, et tertia denique in eius fundum unice comprimendum. Contra vero Ioannes Bernoullius pro hypothesi assumit, integrum pondus fluidi impendi solum ad motus accelerationem in eius particulis producendam, totamque earum velocitatem

(a) Traité des Fluxions publié l'ann. 1742.
(b) Hydraulique de M. Jean Bernoulli publié l'ann. 1743.

(etiam dum a maiori ad minorem transeunt sectionem) a solo pondere proficisci.

Hae sunt, quas Hydraulica sibi iam fecerat accessiones, quando ab incomparabili Alembertio (a) inventis aliis aucta fuit. Hic enim ut leges motus fluidi investigaret, adhibuit illud idem principium generale, quo antea usus fuerat in detegendo motu plurium corporum solidorum, quae mutuo in se se agunt. Et quamvis ipse pariter illas omnes hypotheses sibi fingat, quas Daniel Bernoullius in sua Hydrodynamica excogitavit; longe diversam tamen methodum est sequutus. Porro huius methodi beneficio devenit tandem ad aequationes motum fluidi exprimentes, a quibus veluti manu ductus, non solum expedite, et eleganter problemata illa solvit, quae fuerant iam ab aliis Geometris resoluta, sed etiam plurima alia nova, et difficillima, quae prima fronte insolubilia videbantur. Fatetur autem vir sagacissimus, quidquid in hac materia dici potest, duabus ad minus esse hypothesibus limitatum. Prima est, quod descendente fluido intra vas, omnia eius strata sint semper invicem parallela. Altera est, quod omnes particulae cuiusvis strati verticalem solummodo motum habeant, et aequalibus velocitatibus progrediantur.

Quae cum ita sint, quisque sibi facile suadebit, quam parum spei supersit, absque ulla hypothesi phy-

(a) Traité des fluides publié l'ann. 1744.

physica leges motuum pro fluidis ad regulas Geometriae purae aliquando redactum iri, cum vel in limine ipso effugerint perspicaciam viri ingenio praepollentis. Neque ego puto, quae sum in hoc Opere traditurus, omnem rigorem mathematicum pati posse; principia enim, quibus mea quoque innititur theoria, physica sunt, et non nisi ut veris proxima accipienda; admissis autem principiis, geometrica erunt omnia, nullisque obnoxia restrictionibus, et ideo necessario inter se nexu etiam cohaerebunt.

Expositis iis, quae ad alios pertinent, aequum est, ut de rebus quoque a me pertractatis rationem reddam. Breviter igitur, quantum potero, momenta suscepti Operis indicabo. Quia penitus ignoramus figuram, exilitatem, et mutuam dispositionem particularum, ex quibus fluidum est compositum; liquet, naturam fluidi non permittere, ut *a priori*, uti aiunt, determinetur lex pressionis, quam solent eius particulae superiores in inferiores alias exercere, et ideo non licebit de illa aliter iudicare quam *a posteriori*, seu ex phaenomenis, quae constanter in quovis stagnante fluido observantur. Et quia constans nos docet experientia, quod quando fluidum contentum duobus tubis verticalibus aequalium diametrorum, et ope alterius intermedii inter se communicantibus, est immotum, tunc ambae eius superficies in eodem sunt plano horizontali; ideo hoc experimento tamquam principio utor in Hydrostatica ad detegendam pressionis legem, quae in stagnante flui-

do observatur. Et sane principio hoc admisso, ostendo primum, quamlibet particulam immoti fluidi a circumiectis aequaliter omni ex parte premi, extimamque proinde eiusdem fluidi superficiem nil aliud esse quam portionem sphaericae superficiei, cuius centrum est idem cum centro terrae. Dein Bezoutii (a) semitis inhaerendo, etiam determino vim pressionis horizontalis, et verticalis, quam fluidum contentum vase exercet in eius latera, et in fundum.

Mensura vis pressionis hoc modo determinata, transeo ad gravitatem, et vim elasticam aeris stabiliendam. Gravitas aeris, antiquis nota, et experimentis etiam confirmata (b), nullius ferme erat usus in phaenomenis explicandis usque ad tempora Torricellii. Ipse Galilaeus, qui Aristotele duce, aerem in lagena accumulatum ponderavit (c), nunquam suspicatus est aquam ab eius pondere in antliis sustineri. Quod vero spectat ad aeris vim elasticam, eius effectum sub oculis habuit Galilaeus, dum ponderavit compressum aerem in lagena. Imo ipsemet Aristoteles (d) cum utres inflatos graviores esse quam vacuos deprehendit, compresso aere usus est; non enim aliter eorum pondera aucta fuissent. Nihilominus tamen de aeris elasticitate nemo ante Boileum egit; hic siquidem primus fuit, qui eam distincte ex-

(a) Cours de Matematiques. Tom. 4. pag. 365.
(b) Aristoteles de coelo. lib. 4. cap. 4.
(c) Dialog. 1. Mechan.
(d) Aristoteles de coelo. lib. 4. cap. 4.

exposuit, et experimentis etiam confirmavit (a). Talis autem est aeris vis elastica, ut si aliqua eius massa modo maiori, modo minori pondere sit gravata, eiusdem volumen ut plurimum minuatur in ea ratione, in qua pondus comprimens augetur, ac proinde locorum distantiae a superficie extima atmosphaerae spectandae erunt ut totidem logarithmi densitatum aeris in eisdem locis. Variae hinc sequuntur theoriae huius applicationes ad suspensionem mercurii in Barometro, ad aquae effluxum in Siphone, et ad eius elationem in Antlia suctoria, aut aspirante.

Aliam tandem aggredior theoriam duplici quidem, solidorum nempe, et fluidorum mechanica superstructam. Agit haec de motu, et aequilibrio corporum solidorum, quae fluidis sunt immersa. Porro, ut solidum insidens fluido aequilibrium cum hoc servet, aut ipsi innatet, duo necessario requiruntur. Primum est, quod fluidum comprehensum sub volumine partis solidi, quae immersa manet, tantundem ponderet, quantum solidum. Alterum est, quod centra gravitatis solidi, et eius immersae partis in eadem sint recta linea verticali.

Quod spectat ad aliam partem huius mechanicae fluidorum, principii loco assumo, superficiem supremam fluidi contenti in vase, quod sensim evacuatur per aliquod orificium, manere semper horizon-

(a) Exper. Phys. Mechan. et alibi.

zontalem. Hoc autem posito, expendo motum fluidi per foramen aliquod erumpentis, et per solas mechanicae leges probo, quod si foramen sit infinite parvum relate ad amplitudinem vasis, guttula illa fluidi, quae omnium prima e vase erumpit, sollicitatur ad exitum vi constanti, ac proinde motu uniformiter accelerato transit per orificium; at statim ac tota e vase effluxit, velocitatem acquirit convenientem toti altitudini fluidi eidem foramini incumbentis. Deinde ostendo reliquas aquae guttulas, quae post primam effluunt per foramen, motu aequabili per hoc ferri cum ea quidem velocitate, quae debetur altitudini fluidi supra ipsum. Hoc quoque saltem quamproxime habet locum, dum foramen per quod emanat liquor, prae amplitudine vasis est valde parvum, dummodo tamen eiusdem ratio ad amplitudinem vasis non maior sit, quam ratio 1 ad 20. Propterea initio fluxus, seu quamdiu liquoris motus est uniformiter acceleratus, vis eum impellens ad effluxum aequalis est ponderi columnae fluidae eidem foramini incumbentis; at in momento immediate post hoc initium, seu quando liquor est motum aequabilem iam adeptus, vis quae liquorem sollicitat ad effluxum, dupla est ponderis columnae fluidae, quae imminet orificio.

Modo superest inquirendum, an dum liquor contentus vase exit per orificium infinite parvum, aut valde parvum, revera eius motus theoriae hucusque expositae sit conformis. Danıel Bernoullius (a) obser-

(a) Hydrodynamica sect. 4. art. 3. pag. 62.

ſervavit, particulas cerae hiſpanicae cum aqueis permixtas una cum aqua in cylindrico vaſe vitreo ſic moveri, ut quae foraminis centro inſiſtunt, recta ad ipſum tendant, aliae vero omnes hinc inde poſitae, initio quidem deſcendant motu propemodum verticali; at cum propius accedunt ad fundum vaſis, tunc curſum ſuum flectentes, variis obliquis motibus confluant ad foramen. Hoc ipſum quoque Boſſutius (a) expertus fuit in cylindrico vaſe vitreo, in cuius latere orificium valde parvum erat; particulae enim aquae ſenſibiliter confluebant ad verticale hoc orificium eadem lege, qua in Bernoulliano experimento ad horizontale alterum concurrebant. Hinc in utroque caſu vena aquae proſilientis paullo infra foramen evadit *gracilior*, quam in eius ortu, ſive *in ipſo foramine*. Ratio autem, quae intercedit inter diametrum foraminis, et diametrum contractae venae non ſemper eadem obſervatur, ſed eo minor fieri deprehenditur, quo maior eſt craſſities laminae, cui foramen ineſt, adeo ut tandem evadat ratio aequalitatis, ſi foraminis nudi loco brevis tubulus cylindricus ſubſtituatur. Manente vero eadem craſſitie laminae, cui foramen ineſt, contractio venae eſt eo minor, quo maior viciſſim eſt ratio foraminis ad amplitudinem vaſis, et ideo ſi foramen ita augeri concipiatur, ut amplitudinem vaſis aequet, hoc eſt ſi ratio foraminis ad amplitudinem vaſis evadat ratio ae-

(a) Traité D. Hydrodynamique Tom. 2. art. 3. pag. 2.

aequalitatis; tunc venae contractio penitus evaneſcat.

Vena aquae effluentis per nudum foramen in tenui lamina excavatum inaequaliter denſa eſt, et denſitas eius creſcit pergendo ab orificio uſque ad eius maximam contractionem, ubi rurſus acquirit conſiſtentiam naturalem. Huius autem phaenomeni ratio eſt, quia nonnullae eius particulae ita oblique dirigunt ſuos curſus foramen verſus, ut arceant ab effluxu aliquas vicinarum. Et quia (ut ſuo loco oſtendam) plures particulae arceantur ab exitu per nudum foramen, quam per brevem tubulum eidem foramini applicatum; propterea plus aquae tempore dato fluit per tubum, quam per foramen.

A vena aquae effluentis per minimum orificium ad alteram tranſeo, quae exilit per foramen non valde parvum relate ad amplitudinem vaſis. Et quoniam hoc in caſu particulae aquae poſitae in orificio, pro diverſis earum diſtantiis ab aquae extima ſuperficie diverſas quoque habent velocitates; idcirco imprimis quaero velocitatem huius venae, eaque inventa, determino vim, qua ſphaeram, cylindrum, et planum ferit. His plurima etiam addo tum circa ſemitam, quam deſcribit aqua proſiliens per foramen, aut lumen tubi ſecundum rectam horizontalem, aut horizonti quomodolibet inclinatam, tum etiam circa temporum proportionem, quibus diverſa vaſa cylindrica aquae plena per aequalia, et inaequalia foramina evacuantur.

 Quae

Quae hactenus sunt exposita viam sternunt ad mensuram inveniendam resistentiae fluidorum. Corpus, quod in stagnanti fluido promovetur, duo praestare solet; primo enim dividit partes fluidi, secundo illis communicat velocitatem, cum qua etiam post cessatam corporis actionem inter se moventur. Divisioni partium fluidi resistit earum tenacitas, aut cohaesio; communicationi autem velocitatis resistit inertia, aut reactio partium earundem. Quapropter fluidi resistentia ex duplici causa oritur, ex tenacitate nimirum, et inertia eius particularum. Hic autem expendo primum omnes retardationes, quas corpus motum in fluido ob inertiam huius patitur. Transeo dein ad illas examinandas, quas pati solet ob solam eius partium tenacitatem. Determino tandem tam motus retardationes ab hisce duabus caussis simul agentibus oriundas, quam punctum spatii, ubi corpus vel dimidiam, vel totam amittit velocitatem, qua initio motus in fluido ferebatur. Et quia tota haec theoria praecipuis proprietatibus Logarithmicae est innixa; idcirco septem Lemmata praemittuntur, in quibus huius curvae principalia symptomata demonstrantur. Posita vero hac doctrina logarithmorum, facile mihi fuit illa omnia theoremata demonstrare, quae Gravesandius agens de resistentia fluidorum in nonnullis Physicae suae scholiis brevius, et obscurius quam par erat demonstravit.

Iuxta theoriam a nobis expositam, resistentia, quam ab inertia fluidi subit planum motu sibi semper parallelo latum in eodem fluido quiescente, aequalis est ponderi cylindri ex eodem fluido, cuius basis est idem planum, et cuius altitudo est dupla illius, ex qua grave in vacuo descendendo acquirere potest velocitatem, qua planum in fluido promovetur. Id autem solum obtinet in hypothesi, quod particulae fluidi statim ac a plano exceperint percussionem, vel evanescant, vel ad latera deflectentes locum praebeant ictibus insequentium. Cum vero particulae fluidi immediate post percussionem nec in nihilum abeant, neque ad latera flecti possint, ideo hac re solum considerata, resistentia vera, seu actualis maior theoretica esse deberet.

Hinc haud parvam admirationem movebunt experimenta a tribus viris doctissimis nuper capta (a) ex quibus resistentiam veram, sive actualem duplo minorem theoretica esse colligitur. Siquidem illa ostendunt, resistentiam perpendicularem, et directam planae superficiei, quae sibi semper parallela movetur intra fluidum indefinitum, aequalem esse ponderi columnae ex eodem fluido, quae superficiem percussam pro basi habet, et pro altitudine illam, quae debetur velocitati, cum qua eadem fit percussio.

Puto tamen, ni fallor, hanc notabilem differentiam, quae in illis experimentis detecta fuit inter

(a) Nouvelles esperiences sur la resistence des fluides par MM. d'Alembert, le Marquis de Condorcet, & l'Abbé Bossut. A Paris 1777.

ter actualem, et theoreticam reſiſtentiam, magna ſaltem ex parte oriri ex motu, qui ab ipſo ictu imprimitur fluido quieſcenti. Sicuti enim dum fluidum in motu poſitum perpendiculariter, et directe ferit planam, et immotam aliquam ſuperficiem, plures eius particulae poſt percuſſionem eadem via qua iverant, revertentes, motum, et ictum minuunt inſequentium: ita dum plana aliqua ſuperficies in quieſcente fluido promovetur, plures huius particulae percuſſae ab illa, ſecundum viam qua facta in ipſis impreſſio fuit, progredientes, ad ſimilem motum concitant viciniores, quae proinde planae ſuperficiei intra fluidum incedenti reſiſtere minus debent, quam ſi omnino immotae eſſent.

Ex analogia, quae obſervatur inter motum venae aqueae e vaſe per orificium, aut tubulum emanantis, et motum aquae in fluminis alveo decurrentis, liquet doctrinam hactenus demonſtratam poſſe etiam curſui fluminum applicari. Itaque imprimis ago de libero curſu fluminum, qualis nimirum futurus eſſet, ſi in eorum alveis nihil foret, quod motum ab aqua fluminis iam conceptum aut minueret, aut elideret. Tranſeo dein ad expendendos curſus fluminum impeditos, ubi in totidem theorematis expono omnes regulas generales a Guglielmino propoſitas circa aquarum motus in reſiſtentibus alveis progredientium. Poſt haec ſuccedunt propoſitiones variae circa modum, quo ſolet flumen convenientem alveum ſibi efficere tam per fundi excavationem, quam per depoſitionem materiae extraneae in eo factam. Progredior inde ad mutationes, quae propter obiectam flumini cataractam, in eius alveo producuntur. Fateor quidem, quod ob oppoſitam flumini cataractam, paullatim attolli debeat eius fundus; nego tamen eundem fore ad tantam altitudinem evehendum, ut novus fundus congruere tandem debeat cum illo plano, quod per faſtigium cataractae traduci poteſt fundo veteri parallelum. Quapropter a cataractis non imminet tantum mali, quantum vulgo exiſtimatur. Poſtremo hic Tractatus clauditur theoria de effectibus illis agente, qui ab unione, et diviſione fluminum producuntur. In ea vero ex datis altitudinibus, et latitudinibus duorum fluminum ſenſibiliter horizontalium quaero altitudinis incrementum, quod illorum alterutrum adipiſcetur, poſtquam alterius aquas in alveo ſuo exceperit. Oſtendo pariter ex adverſo quantum erit altitudo fluminis minuenda, poſteaquam deducta ex eo fuerit quantitas data aquae, ſimulque infero, diductionem aquae fluminis in canalem de induſtria excavatum ad alluviem ab agris finitimis avertendam, plus detrimenti, quam commodi allaturam eſſe.

Haec ſunt praecipua capita, de quibus ago in hoc Tractatu, qui quamvis ut phyſicus potius, quam mathematicus ſit cenſendus; conatus ſum tamen in eo tradendo ſequi ordinem Geometricum, ſive ita omnia pertractare, ut ex primis praemiſſis ſingula dedu-

deducantur, nihilque non demonstratum post se relinquant. Id autem non alia ex causa praestiti, quam ut veritates, quae in propositionibus exponuntur, melius perciperentur, sicque illis adolescentibus opem ferrem, qui ultra synthesim non progressi dabunt operam rei aquariae. Si res successerit ex sententia, voti me compotem existimabo; sin minus, nemo me, uti arbitror, reprehendet, quod ad commodum hoc praestandum summam, quantum potui, diligentiam adhibuerim.

MECHANICAE FLUIDORUM

PARS PRIMA

CAPUT I.

De natura corporum fluidorum, eorundemque aeque ac solidorum specifica gravitate.

DEFINITIO I.

1. *Fluidum* est corpus omne, cujus particulae cedunt cuicunque minimae impressioni, et cedendo, moventur facile inter se.

COROLLARIUM I.

2. Particulae ergo fluidi cujuscunque summe mobiles esse debent, ideoque cum invicem separatae, tum etiam ita exiguae molis erunt, ut nequeant humanis sensibus internosci, atque distingui.

COROLLARIUM II.

3. Hinc quotiescunque particulae dati corporis videri a nobis, aut tangi possunt, ipsum non poterit corpus fluidum appellari. Ita licet farina constet particulis minutissimis, quae levi digito moveantur; nihilominus quia ipsae duobus digitis interceptae, atque compressae, facile sentiuntur; farina nequit corpus fluidum appellari. At si particulae ejus fiant postea tam exiguae, ut non amplius possint humanis sensibus internosci, atque distingui, veluti accidit quando panis attritus dentibus, et subactus actioni ventriculi, et intestinorum, in chylum, et sanguinem transmutatur; tunc proprietates, nomenque fluidi adipiscitur.

COROLLARIUM III.

4. Particulae quoque fluidi esse debent summe tersae, ac levigatae. Nam si scabritie aliqua donarentur, ipsae non possent sine frictione aliqua promoveri, atque ita non cederent cuicunque minimae, ac nobis insensibili impressioni, nec cedendo, moverentur facile inter se, quod (1) est absurdum.

COROLLARIUM IV.

5. Quin etiam magnitudo illarum contactus minima esse debet. Cum enim (1) cedant cuicunque minimae, ac nobis insensibili impressioni, et cedendo, moveantur facile inter se; ipsae habebunt quoque minimam cohaesionem. Atqui cohaesio ex densitate particularum, et ex mutui contactus magnitudine ortum ducit; ergo et magnitudo illarum contactus minima esse debet.

SCHOLION I.

6. Haec sunt, quae de particulis corporis perfecte fluidi certo scimus, si tamen inter fluida, quae in rerum natura sunt, perfectum fluidum actu detur. Omnia enim fluida, quae cognoscimus, praedita sunt sensibili cohaesione. Haec autem cohaesio in variis fluidis est diversa, et saepe etiam in eodem fluido, ob calorem, frigus, et physicas alias causas, minuitur, vel augetur.

SCHOLION II.

7. Quod autem pertinet ad figuram, exilitatem, et mutuam dispositionem particularum, ex quibus fluidum est compositum, haec veluti dubia, et incerta physicis relinquemus, nobisque sufficiet nosse, figuras particularum cuiusvis fluidi, quaecunque eae sint, non obstare summae earum mobilitati.

SCHOLION III.

8. Quamvis omnimode ignoremus figuram, exilitatem, et mutuam dispositionem particularum corporum fluidorum, novimus tamen ipsas esse eiusdem indolis, ac naturae cum illis corporum solidorum; nam fluida saepe in solida, et solida in fluida verti solent. Atqui particulae corpora solida componentes, pro ratione materiae quam continent, graves sunt; igitur etiam illae, ex quibus fluida coalescunt, gravitatem habebunt quantitati materiae, quam continent, proportionalem. Unde si aliae aliis sint verticaliter insistentes, inferiores a superiorum ponderibus comprimentur.

DEFINITIO II.

9. *Fluidum incompressibile* illud est, quod utcunque pressum reduci nequit in spatium minus illo, quod solet naturaliter occupare. *Fluidum compressibile* illud est, quod aliqua vi compressum reduci potest in spatium minus illo, quod solet naturaliter occupare.

DEFINITIO III.

10. *Fluidum elasticum* illud est, quod nedum indesinenter expandere se conatur, sed etiam in spatium maius illo, quod antea occupaverat, se expandit, quoties a nullo ambiente corpore impeditur. Conatus autem hic expansivus, qui indesinenter a fluido exercetur, eius *elaterium*, seu *vis elastica* nuncupatur.

DEFINITIO IV.

11. Duo corpora, sive solida, sive fluida dicuntur *habere eandem specificam gravitatem*, sive *esse in specie aeque gravia*, si sub aequali volumine contineant aequale pondus.

SCHOLION

12. Sint duo globi aequales, quorum diameter scilicet unius pedis; alter ligneus, alter ex cera factus, et contineant ambo aequale pondus; ipsi habebunt quoque eandem specificam gravitatem, sive erunt in specie aeque graves.

DEFINITIO V.

13. Corpus *specifice gravius est*, quod sub eodem volumine maius continet pondus, quam alterum. Corpus *specifice levius est*, quod sub eodem volumine minus pondus continet, quam alterum.

SCHOLION

14. Sint duo globi aequales, quorum diameter scilicet unius pedis; alter plumbeus, alter ligneus. Quia plumbeus continet maius pondus, quam ligneus, etiam specifice gravior erit, et ligneus specifice levior.

DEFINITIO VI.

15. Duo corpora dicuntur *habere eandem densitatem*, si sub eodem volumine contineant aequalem massam, aut materiae quantitatem.

DEFINITIO VII.

16. *Corpus densius est*, quod sub eodem volumine continet maiorem massam, quam alterum. *Corpus rarius est*, quod sub eodem volumine continet minorem massam, quam alterum.

DEFINITIO VIII.

17. *Fluidum homogeneum* illud est, cuius densitas per universam massam est uniformis. Talia sunt ferme omnia fluida nobis nota.

DEFINITIO IX.

18. *Fluidum heterogeneum* illud est, cuius densitas per universam massam est difformis. Tale fluidum est atmosphaera, cuius partes magis remotae a superficie terrae, sunt inferioribus rariores. Docet enim experientia, aerem in altiorum montium verticibus constitutum, esse rariorem illo, qui in vallibus, et in maris littore collocatur.

SCHOLION

19. Cum deinceps de fluidis erit sermo, eadem (nisi aliter moneatur) semper esse incompressibilia, homogenea, et non elastica supponentur.

PROPOSITIO I.

20. *Si duo corpora* A *et* B (*Fig.* 1.) *volumine inaequalia, eandem habuerint specificam gravitatem; pondus corporis* A *erit ad pondus corporis* B, *ut volumen primi* A *ad volumen secundi* B.

Quoniam corpora A et B eandem (ex hyp.) habent specificam gravitatem, utique si eorum volumina aequarentur, etiam pondera (11) aequalia essent. At si volumen corporis A duplo maius esset volumine alterius B, tunc dividi illud posset in volumina duo aequalia tum inter se, tum etiam volumini alterius B, et cum hoc quoque aequaliter (11) ponderantia; ideoque pondus corporis A esset pariter duplum ponderis alterius B. Eadem ratione, si volumen corporis A esset triplo, aut quadruplo maius volumine alterius B; etiam pondus corporis A triplum, aut quadruplum esset ponderis alterius B; et sic deinceps. Propterea generatim pondus corporis A erit ad pondus corporis B, ut volumen primi A ad volumen secundi B.

PROPOSITIO II.

21. *Si duo corpora* A *et* B (*Fig.* 2.) *volumine aequalia, diversam habeant densitatem; densitas corporis* A *erit ad densitatem corporis* B, *ut pondus primi* A *ad pondus secundi* B.

Corpus A (16) dicitur duplo densius alio B, si eius massa sit dupla illius, quam continet aliud B; dicitur triplo densius, si tripla; quadruplo densius, si quadrupla; et sic deinceps. Igitur densitates corporum A et B in ea crescunt ratione, in qua augentur eorum massae; ideoque densitas corporis A erit ad densitatem corporis B, ut massa primi A ad massam secundi B. Sed etiam pondus corporis A est ad pondus corporis B, ut massa corporis A ad massam corporis B; ergo et densitas corporis A erit ad densitatem corporis B, ut pondus primi A ad pondus secundi B.

PROPOSITIO III.

22. *Si duo corpora* A *et* B (*Fig.* 2.) *volumine aequalia, habeant diversas specificas gravitates; gravitas specifica primi* A *erit ad specificam gravitatem secundi* B, *ut pondus primi* A *ad pondus secundi* B.

Corpus A (13) dicitur esse duplo gravius in specie alio B, si eius pondus sit duplum illius, quod continet aliud B; dicitur triplo gravius, si triplum; quadruplo gravius, si quadruplum; et sic semper. Ergo specificae gravitates corporum A et B in ea ratione crescunt, in qua augentur pondera eorundem; ideoque gravitas specifica corporis A erit ad illam corporis B, ut pondus primi A ad pondus secundi B.

COROLLARIUM

23. Cum etiam densitas corporis A sit (21) ad densitatem corporis B, ut pondus corporis A ad pondus alterius B; consequens est, ut etiam gravitas specifica corporis A sit ad illam corporis B, ut densitas corporis A ad densitatem corporis B.

PROPOSITIO IV.

24. *Pondera duorum corporum* A *et* B (*Fig.* 3.) *sunt in ratione composita gravitatis specificae corporis* A *ad gravitatem specificam corporis* B, *et voluminis corporis* A *ad volumen corporis* B. Gra-

Gravitas ſpecifica corporis A ſit ad gravitatem ſpecificam corporis B, ut D ad E, et volumen corporis A ſit ad volumen corporis B, ut E ad F. Hoc poſito, finge alterum corpus C eiuſdem eſſe voluminis cum primo A, et eiuſdem ſpecificae gravitatis cum alio B. Cum ergo corpora A et C volumina aequalia habeant, pondus corporis A erit (22) ad pondus corporis C, ut gravitas ſpecifica corporis A ad ſpecificam gravitatem corporis C, vel B, ſive ut D ad E. Rurſus quia corpora C et B eandem habent ſpecificam gravitatem, pondus corporis C erit ad pondus corporis B (20), ut volumen corporis C, vel A ad volumen corporis B, ſive ut E ad F; ergo ex aequo, pondus corporis A erit ad pondus corporis B, ut D ad F. Eſt autem D ad F in ratione compoſita D ad E, et E ad F; ergo etiam pondus corporis A erit ad pondus corporis B in ratione compoſita gravitatis ſpecificae corporis A ad gravitatem ſpecificam corporis B, et voluminis corporis A ad volumen corporis B.

Corollarium I.

25. Quia gravitas ſpecifica corporis A eſt (23) ad gravitatem ſpecificam corporis B, ut denſitas corporis A ad denſitatem corporis B; etiam pondus corporis A erit ad pondus corporis B in ratione compoſita denſitatis corporis A ad denſitatem corporis B, et voluminis corporis A ad volumen corporis B.

Corollarium II.

26. Si itaque conſtruantur duo rectangula M et N (Fig. 4.), quorum baſes G et g referant ſpecificas gravitates corporum A et B, altitudines autem V et u exponant volumina eorundem; pondus corporis A erit ad pondus corporis B, ut rectangulum M ad rectangulum N. Sunt enim haec rectangula in ratione compoſita baſis G ad baſim g, et altitudinis V ad altitudinem u, hoc eſt in ratione compoſita gravitatis ſpecificae corporis A ad gravitatem ſpecificam corporis B, et voluminis corporis A ad volumen corporis B. Sed in hac compoſita ratione (24) eſt quoque pondus corporis A ad pondus corporis B; ergo et pondus corporis A erit ad pondus corporis B, ut rectangulum M ad aliud N.

PROPOSITIO V.

27. Si *aequalia ſint pondera corporum* A *et* B (*Fig.* 4.); *illorum ſpecificae gravitates erunt inverſe ut volumina eorundem. Et ſi illorum ſpecificae gravitates ſint inverſe ut volumina eorundem; etiam pondera aequalia erunt.*

I. Fiant rectangula M et N, quorum baſes G et g exponant ſpecificas gravitates corporum A et B, altitudines autem V et u referant volumina eorundem. Hoc poſito, erit (26) pondus corporis A ad pondus corporis B, ut rectangulum M ad aliud N. Sed (ex hyp.) ſunt aequalia pondera corporum A et B; igitur aequabuntur etiam rectangula M et N. Sed aequalia rectangula reciprocant baſes, et altitudines; ergo G erit ad g, ut u ad V. Atqui (ex conſtr.) G eſt ad g, ut gravitas ſpecifica corporis A ad gravitatem ſpecificam corporis B, et (ex conſtr.) u eſt ad V, ut volumen corporis B ad volumen corporis A; ergo etiam gravitas ſpecifica corporis A erit ad illam corporis B, ut volumen corporis B ad volumen corporis A, ideoque ſpecificae gravitates corporum A et B erunt inverſe ut volumina eorundem.

II. Quia gravitates ſpecificae corporum A et B (ex hyp.) ſunt inverſe ut volumina eorundem; gravitas ſpecifica corporis A erit ad illam corporis B, ut volumen corporis B ad volumen corporis A, hoc eſt G erit ad g, ut u ad V, conſequenter rectangulum M aequabitur ipſi N. Sed pondus corporis A eſt (26) ad pondus corporis B, ut rectangulum M ad aliud N; ergo et pondus corporis A aequabitur ponderi alterius B.

CAPUT II.

De menſura vis preſſionis, quae a particulis fluidi in aequilibrio poſiti exercetur in alias circumiectas; atque in fundum vaſis, quo idem fluidum continetur.

DEFINITIO X.

28. Hydroſtatica eſt ſcientia, quae agit de fluidorum corporum aequilibrio.

Scholion

29. Hoc aequilibrium ortum ducit ab eliſione omnium virium, quae ſimul agunt premendo vel particulas ipſas fluidi, vel latera, et fundum vaſis, quo fluidum continetur, vel denique corpus ſolidum ipſi immerſum.

Scholion II.

30. Si nota eſſet figura, et mutua diſpoſitio particularum, ex quibus fluidum eſt compoſitum, tunc etiam poſſet per principia mechanica determinari lex preſſionis, quam ſervat fluidum in aequilibrio conſtitutum; nam data figura, et mutua diſpoſitione plurium cor-

corporum inter ſe iunctorum, et exiſtentium in aequilibrio, ſemper poteſt determinari actio mutua eorundem. Atqui nos latet (7) figura, et mutua diſpoſitio particularum, ex quibus fluidum coaleſcit; ergo nec etiam poterit per principia mechanica determinari lex preſſionis, quam ſervat fluidum in aequilibrio conſtitutum. Supereſt ergo ut videamus, an haec lex ſaltem poſſit aliquo experimento cuivis obvio determinari.

EXPERIMENTUM

31. Si ex tribus tubis D A B C, B C E F, E F G H (Fig. 5. 6) aequalium diametrorum fiat canalis D A B F G H, et aqua infundatur verticali tubo D A B C; haec, percurſo tubo B C E F, aſcendet ſtatim per verticalem alterum E F G H. Ceſſante vero hac infuſione, aqua in canali poſita non quieſcit, niſi prius in verticalibus tubis D A B C, E F G H eandem obtineat altitudinem, ſeu niſi eius ſuperficies M N, S V in eodem ſint plano horizontali.

Scholion

32. En ergo quod circa aequilibrium fluidorum conſtans nos docet experientia, quaecunque ſit inclinatio tubi B C E F, et quodcunque ſit fluidum poſitum in canali D A B F G H. Reliquum eſt modo, ut ex hac ſola, et cuivis obvia immoti fluidi proprietate determinetur lex preſſionis, quam ſervat fluidum in aequilibrio conſtitutum.

PROPOSITIO VI.

33. *Fluido manente immoto, eius particulae inferiores exerunt omnes partes verſus preſſionem illam, quam ſubeunt a gravitate fluidi ſuperioris.*

Canali D A B F G H (Fig. 5. 6) inſitum ſit fluidum N M B F V S, quo manente immoto, ſuperficies eius M N, S V in eodem (31) erunt plano horizontali. Iam ſi per quodlibet punctum I traduci intelligatur horizontale planum I O; tunc quia ſuperficies I K, L O fluidi K I B F O L ſunt poſitae in hoc plano, fluidum idem (31) erit in aequilibrio, et ideo eius pondus conferre nequit ad ſuſtinendas columnas M K, S O, quae propterea in aequilibrio adhuc eſſent, etiamſi fluidum K I B F O L ex improviſo amitteret gravitatem. Fluidum ergo K I B F O L ſpectandum eſt unice velut medium, cuius ope columnae M K, S O ita communicant inter ſe, ut ipſum in columnam S O transferat eam preſſionem, quam particulae fluidi K I B C verticaliter ſubeunt a gravitate columnae M K, et viceverſa in co-

lumnam

lumnam M K transferat eam preſſionem, quam particulae fluidi O L E F verticaliter ſubeunt a gravitate columnae S O. Atqui fluidum K I B F O L has preſſiones transferre nequit in verticales columnas S O, M K, niſi prius ipſae aequaliter propagentur per fluidum contentum tubo B C E F; igitur preſſiones, quas particulae fluidorum K I B C, O L E F verticaliter ſubeunt a gravitate columnarum M K, S O, aequaliter propagantur per fluidum contentum tubo B C E F. Id autem evenit ſemper, quaecunque ſit inclinatio tubi B C E F; ergo particulae fluidi inferiores exerunt omnes partes verſus, et quidem aequaliter preſſionem illam, quam ſubeunt a gravitate fluidi ſuperioris.

PROPOSITIO VII.

34. *Particula quaevis* H (*Fig.* 7.) *fluidi immoti, et contenti vaſe* A B C D, *deorſum premitur a pondere filamenti* F H, *eidem verticaliter inſiſtentis.*

Finge integram maſſam fluidam A B C D, unico filamento F H excepto, in ſolidam ita verti, ut nec volumen, nec locum mutet. Hoc facto, particula H in eodem compreſſionis ſtatu perſeverabit, in quo antea reperiebatur. Atqui dum ſolum filamentum F H eſt fluidum, particula H deorſum premitur (8) a pondere filamenti F H; ergo etiam deorſum eodem pondere premebatur, dum tota maſſa erat fluida.

PROPOSITIO VIII.

35. *Particula quaevis* H (*Fig.* 7.) *fluidi immoti, et contenti vaſe* A B C D, *omnes partes verſus exerit preſſionem omnino aequalem ponderi filamenti* F H, *eidem verticaliter inſiſtentis.*

Particula inferior H (33) omnes partes verſus eam exerit preſſionem, quam verticaliter deorſum ſubit a gravitate fluidi ſuperioris. Sed preſſio quam verticaliter deorſum ſubit a gravitate fluidi ſuperioris, aequatur ponderi (34) filamenti F H; ergo particula eadem H omnes partes verſus exerit preſſionem omnino aequalem ponderi filamenti F H.

Corollarium I.

36. Ergo particula eadem H vicinas alias, a quibus omni ex parte tangitur, comprimet vi aequali ponderi filamenti F H.

Corollarium II.

37. Et quia preſſione hac non obſtante, particulae intermediam H tangentes, non moventur de locis ſuis; conſequens eſt, ut ipſae

vi-

viciſſim comprimant aliam H vi, quae aequatur ponderi filamenti F H. Ex harum autem aequalium, et directe oppoſitarum virium eliſione oritur in tota maſſa fluida aequilibrium.

Corollarium III.

38. Quoniam perinde eſt, ſive particula H prematur a pondere filamenti F H ſuperius incumbentis, ſive a vi alia verticali, quae eidem ponderi ſit aequalis; utique ſi particula H prematur vi qualibet verticali, eadem ſimiliter premet vicinas alias, a quibus tangitur omni ex parte, et viceverſa aequaliter, ſive eadem vi ab illis omnibus comprimetur.

PROPOSITIO VIII.

39. *Si vaſe* M N O P (*Fig. 8.*) *contineatur immotum fluidum* L N O S; *eius ſuperficies ſuprema erit horizontalis.*

Curva L B S referat ſupremam immoti fluidi ſuperficiem, et in ea ſumpta particula quavis B, eius vis gravitatis exponatur per rectam verticalem B F. Deinde acceptis hinc inde a puncto B duobus curvae contiguis elementis B C, B A, quae velut rectae lineae ſunt habenda, ad illa ex puncto F agantur parallelae F A, F C, ut ita emergat parallelogrammum A B C F. Particula B (ex conſtr.) verticaliter deorſum premitur vi B F. Sed haec vis eundem effectum edit, quem binae ſimul vires B A, B C; ergo particula B cenſenda eſt velut preſſa his duabus viribus ſimul ſumptis. Sed hiſce viribus non obſtantibus, particula eſt immota; conſequens ergo erit, ut vires B A, B C elidantur a duabus aliis, quae ſint ipſis directe oppoſitae, et aequales. Sed huiuſmodi vires nequeunt eſſe aliae praeter illas, quas duae propinquae particulae hinc inde aliam B tangentes, in eam exerunt iuxta directiones A B, C B; ergo hae duae particulae comprimunt aliam B viribus A B, C B. Sed hae duae particulae (38) viribus aequalibus comprimunt aliam B; ergo aequales erunt rectae A B, C B, et ideo parallelogrammum A B C F omnia latera aequalia habebit, ac propterea angulus F B A aequabitur F B C. Atqui angulus A B C, quem continent duo curvae contigua elementa B A, B C, deficit a duobus rectis quantitate infinite parva; ergo aequales anguli F B A, F B C quamproxime recti erunt, et ſic gravitatis directio B F erit perpendicularis ad duo curvae L B S elementa contigua B A, B C. Simili modo oſtendam, directionem gravitatis omnium aliarum particularum perpendicularem eſſe ad reliqua alia omnia elementa ſuperficiei L B S; ergo ipſa erit quoque perpendicularis huic ſuperficiei. Sed cum directio gravitatis eſt perpendicularis ad aliquam ſuperficiem, haec dicitur horizontalis; ergo et ſuperficies L B S erit horizontalis.

Cor.

Corollarium

40. Unde ſi Tellus ſphaerica ſupponatur, et gravium directiones dirigantur ad eius centrum; immoti fluidi ſuperficies L B S erit pars ſphaericae ſuperficiei, Telluri concentricae. Sola enim ſuperficies ſphaerica talis eſt, ut rectae omnes perpendiculariter ad illam ductae, conveniant ſimul ad eius centrum. Sed directiones gravitatis aequalium particularum ſuperficiei L B S ſunt (39) perpendiculares ad hanc ſuperficiem, et (ex hip.) conveniunt omnes ad centrum terrae; ergo haec ſuperficies L B S erit pars ſphaericae ſuperficiei, Telluri concentricae.

Scholion

41. Haec propoſitio habet locum in quavis hypotheſi gravitatis; imo quacunque vi particulae aequales fluidi animentur, eius directio erit ſemper perpendicularis ad ſupremam immoti fluidi ſuperficiem. Cum vero hic ſolum de corporibus Telluri proximis diſſeramus, ponimus cum Galilaeo gravitatem conſtantem eſſe, ſive in aequales materiae particulas aequaliter ſemper agere.

PROPOSITIO IX.

42. *Si ſuperficies immoti fluidi, quod vaſe aliquo continetur, ſolummodo ſe extendat ad 16 hexapedas Pariſinas; eadem phyſice plana erit, ſive cenſeri poterit velut plana.*

Iuxta Piccardi (a) obſervationes longitudo unius gradus circuli terrae maximi conſtat 57600 hexapedis Pariſinis. Atqui unus gradus eſt minutorum ſecundorum 3600; ergo longitudo minutorum ſecundorum 3600 circuli terrae maximi conſtabit hexapedis 57600. Unde ſi fiat, ut 3600 ad 57600, ita 1 ad quartum terminum proportionalem, qui quamproxime erit 60, hic indicabit numerum hexapedarum uni minuto ſecundo gradus circuli terrae maximi convenientem. Sed arcus unius minuti ſecundi poteſt accipi velut recta; ergo ea portio terreſtris ſuperficiei, quae ſe extendit ad 16 hexapedas Pariſinas, pro ſuperficie plana haberi poteſt. Sed ſuperficies ſuprema immoti fluidi, quod vaſe aliquo continetur, eſt (40) portio ſphaericae ſuperficiei, Telluri concentricae; ergo ſi ſe extendat ad 16 hexapedas Pariſinas, pro ſuperficie plana habenda erit.

Scholion

43. Sive tractus immoti fluidi, magnus ſit, ſive parvus, hoc eſt ſive ſuprema eius ſuperficies ſit portio ſphaericae ſuperficiei, ſive ad ſenſum plana, eadem vocatur ſemper *Libellae planum*.

 PRO-

(a) Traité Du Nivellement pag. 197.

PROPOSITIO X.

44. *Si superficies suprema* B F *(Fig. 9.) fluidi contenti vase* A D E G, *sit, horizontalis; immotum erit fluidum* B D E F.

Si fieri potest, hoc fluidum moveatur; ergo descendent aliquae eius particulae, et aliae contra sursum promovebuntur, usque dum fiat in omnibus aequilibrium. Hoc autem facto, superficies suprema fluidi fit O C, quae (34) erit horizontalis. Atqui haec superficies alteram B F secat in recta H I; igitur superficies B F non erit amplius horizontalis, contra hypothesim.

PROPOSITIO XI.

45. *Si immoto manente fluido, quod vase aliquo continetur, singulae eius particulae in superficie suprema positae, viribus aequalibus, et ad eandem superficiem normalibus comprimantur; non turbabitur eiusdem fluidi aequilibrium.*

AEquilibrium fluidi non turbatur, nisi una particula supremae eius superficiei alteri cedat. Sed cum singulae particulae eiusdem superficiei viribus aequalibus, et ad superficiem normalibus (ex hyp.) comprimantur, nulla ratio esse potest, cur una cedere alteri debeat; igitur nulla ratio quoque erit, ob quam turbetur fluidi aequilibrium, atque adeo fluidum in eodem, ut ante, aequilibrii statu perseverabit.

PROPOSITIO XII.

46. *Si immoto manente fluido, quod vase aliquo continetur, singulae eius particulae in superficie suprema positae, viribus ad eandem normalibus sic premantur, ut non turbetur fluidi aequilibrium; ipsae ubique aequaliter comprimentur.*

Si particulae in suprema fluidi superficie constitutae, ubique aequaliter non premuntur, augeatur pressio minor, usque dum omnes ubique aequaliter comprimantur, quo in casu particulae (45) permanebunt in locis suis. Atqui particulae, in quibus pressio minor erat, ante auctam pressionem (ex hyp.) permanebant in locis suis; igitur additione pressionis novae movebuntur (1) de locis suis. Atqui haec duo repugnant; falso igitur ponebatur, quod particulae in suprema superficie immoti fluidi constitutae, ubique aequaliter non premerentur.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

47. *Si intra fluidum immotum, et contentum vase utcunque irregulari* A B C E *(Fig. 10.) concipiatur aliqua superficies horizontalis* F G*; singulae particulae fluidi in superficie hac constitutae, viribus aequalibus, et ad eandem normalibus comprimentur ab imminenti fluido* A F G E.

Quia (ex hyp.) immotum est fluidum, quo repletur vas A B C E, superficies eius suprema A E erit (39) horizontalis. Sed superficies etiam F G est (ex hyp.) horizontalis; igitur si removeas cogitatione fluidum A F G E, residuum F B C G adhuc (44) immotum erit. Atqui etiam restituto, quod cogitatione removeras, fluido A F G E, idem fluidum F B C G in eodem quietis statu, uti prius, perseverabit; consequens ergo erit, ut singulae particulae in superficie F G positae, viribus aequalibus (46), et ad eandem normalibus comprimantur ab incumbenti fluido A F G E.

PROPOSITIO XIV.

48. *Iisdem positis, superficies horizontalis* F G *ab incumbenti fluido* A F G E *premitur deorsum vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cuius basis est ipsamet superficies* F G, *et altitudo* A I, *seu distantia eiusdem superficiei a plano libellae* A E.

Singulae particulae superficiei F G aequalem (47) omnino sustinent pressionem ab imminenti fluido A F G E. Sed una illarum I premitur (34) deorsum a pondere filamenti A I; ergo et particulae aliae omnes prementur deorsum vi, quae aequatur ponderi filamenti A I, consequenter illarum summa, aut superficies F G premetur deorsum vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cuius basis est eadem superficies, et altitudo A I.

Corollarium

49. Sicuti ergo particula I premitur deorsum (34) a pondere filamenti A I, eidem verticaliter insistentis, ita (demissa ex F ad planum libellae A E perpendiculari F L) particula quoque F perinde premetur deorsum velut si ipsi incumberet filamentum F L, alteri A I aequale.

PROPOSITIO XV.

50. *Si in vase* A B C E *(Fig. 10.) habente fundum horizontalem* B C, *altitudo immoti fluidi sit* A K*; idem fundus deorsum premetur vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cuius basis est ipse fundus, et altitudo* A K, *seu distantia eiusdem fundi a plano libellae* A E.

Quia fundus B C est horizontalis, infima illa fluidi superficies, quae fundum exacte tegit, erit etiam horizontalis, ideoque (48) pre-

Quia

metur deorsum vi aequali ponderi columnae ex eodem fluido, cuius basis est ipsamet superficies, et altitudo A K. Sed huiusmodi superficies est fundo aequalis, et vis, qua ipsa deorsum premitur, eadem est cum illa, qua premitur idem fundus; igitur etiam fundus premetur vi aequali ponderi columnae ex fluido, cuius basis est ipse fundus, et altitudo A K.

Corollarium I.

51. Hinc si in vase A B C E (Fig. 11. 12.) superficies suprema stagnantis fluidi sit A E, et super fundum eius horizontalem B C veluti basim excitari intelligatur columna G B C R, ex eodem fluido efformata; fundus B C premetur deorsum vi aequali ponderi columnae G B C R.

Scholion

52. Sed inquies forsan, si fluidum, quo repletur vas acuminatum A B C E (Fig. 12.), in fundum B C exereret pressionem aequalem ponderi columnae fluidae G B C R; utique ille, qui vas una cum infuso fluido sustineret, nedum sentiret pondus ipsius vasis, verum etiam pondus columnae fluidae G B C R. Atqui revera sentit solummodo pondus vasis, et interni fluidi A B C E; igitur fundus B C vasis non premitur vi aequali ponderi columnae G B C R. Totum hoc argumentum falsae hypothesi est innixum; supponit enim fluidum contentum vase, tantummodo deorsum premere; cum tamen, (ut ex dicendis (109) constabit) etiam sursum agat in vasis latera A B, E C, quibuscum iungitur ipse fundus. Porrò haec vis attollens vasis latera A B, E C, atque adeo etiam eius fundum, suo loco (110) ostendetur aequalis esse excessui ponderis columnae fluidae G B C R supra pondus interni fluidi A B C E; ergo non est mirandum si sentiatur solum pondus vasis, et fluidi A B C E.

Corollarium II.

53. Manentibus ergo fluidi altitudine, et amplitudine fundi vasis, eadem semper erit (51) pressio in fundum, utcunque mutetur figura vasis.

Corollarium III.

54. Unde si tria vasa A D C O, E G H T, I N M P (Fig. 13. 14. 15.) mutuo aequales habeant tam horizontales fundos D C, G H, N M, quam fluidi altitudines B K, V S, S F; fundi (51) eandem pressionem ab incumbente fluido sustinebunt.

Corollarium IV.

55. Hinc fieri potest, ut pressio in fundum vasis maior, vel minor sit pondere totius fluidi contenti in illo. In cylindrico enim vase A D C O (Fig. 13.) fundus premitur vi aequali (51) ponderi totius fluidi, quo repletur; verum in aliis E G H T, I N M P (Fig. 14. 15.) pressio in fundum minor, vel maior (51) est pondere totius fluidi contenti in illis.

PROPOSITIO XVI.

56. *Si supra immotum fluidum* A C D B (*Fig.* 16.), *quod continetur vase acuminato* H C D I, *ponatur alia eiusdem fluidi quantitas* H A B I; *haec in fundum* C D *novam exeret pressionem, et quidem aequalem ponderi columnae ex eodem fluido, cuius basis aequatur eidem fundo, altitudo autem est distantia* H L *plani libellae* H I *ab alio plano* A B.

Quamdiu in vase erat sola quantitas fluidi A C D B, fundus C D (51) premebatur vi aequali ponderi columnae fluidae G C D O. Atqui superaddita ipsi nova alia quantitate fluidi H A B I, fundus C D (51) premitur vi aequali ponderi columnae fluidae E C D F; ergo ab addita quantitate fluidi H A B I fundus C D premetur vi aequali ponderi columnae fluidae E G O F. Sed haec columna pro basi habet G O, fundo C D aequalem, et pro altitudine E G, vel H L; igitur pressio in fundum C D exercita a superaddito fluido H A B I, aequabitur ponderi columnae fluidae, cuius basis aequatur fundo, et altitudo est H L.

Corollarium I.

57. Hinc si amplitudo fundi C D sit centies, aut millies maior superficie A B; superaddita fluidi exigua copia H A B I tantundem gravitabit in vasis fundum C D, quantum eiusdem fluidi massa centies, aut millies maior gravitaret in eundem fundum, si ipsi proxime immineret.

Corollarium II.

58. Et quia (51) adiectum fluidum H A B I tantundem premit superficiem A B stagnantis fluidi A C D B, quantum ipsam premeret columna ex eodem fluido, cuius basis A B, et altitudo H L; utique si columna haec immineret superficiei A B stagnantis fluidi A C D B, ipsa in fundum C D exereret pressionem aequalem ponderi columnae fluidae, cuius basis C D, et altitudo H L.

CAPUT III.

De mensura vis pressionis, quae a particulis fluidi in aequilibrio positi exercetur in superficiem internam vasis, quo idem fluidum continetur.

PROPOSITIO XVII.

59. SI *ex aliquo puncto* F (*Fig.* 17. 18.) *internae superficiei vasis* AEDB *fluido pleni, demittatur ad planum libellae* AB *perpendicularis* FL; *eadem superficies in illo puncto extrorsum premetur vi aequali ponderi filamenti* FL.

Particula fluidi, quae punctum F exacte tegit, premitur (48. 49) deorsum vi aequali ponderi filamenti FL. Atqui (35) exerit hanc pressionem omnes partes versus, et quidem aequaliter; ergo illam pariter exercebit in punctum F internae superficiei vasis AEDB, ideoque haec superficies in puncto F premetur etiam extrorsum vi, quae aequatur ponderi filamenti FL.

PROPOSITIO XVIII.

60. *Vis qua extrorsum premitur superficies interna vasis in puncto* F, *perpendiculariter in hanc agit.*

Si fieri potest, superficies in puncto F prematur extrorsum vi FH, exponente (59) pondus filamenti FL, et oblique agenti in superficiem. Tum ducto plano tangente TM, et ad hoc demissa perpendiculari HG, compleatur rectangulum HGFI. Quoniam superficies in puncto F extrorsum premitur vi, et directione FH, eadem premetur quoque duabus viribus FG, FI, quae aequivalent vi FH. Sed vis FG, utpote agens secundum directionem tangentis plani TM, efficaciam nullam habet ad premendam extrorsum superficiem in puncto F; ergo ipsam extrorsum premet solum altera vis FI perpendicularis ad idem planum, sive ad superficiem. Sed vis FI minor est vi FH; igitur superficies in puncto F non amplius extrorsum premitur vi FH, exponente pondus filamenti FL, contra hypothesim.

COROLLARIUM

61. Ergo vis perpendicularis exercita a fluido in punctum F internae superficiei vasis, quo continetur, omnino aequatur ponderi filamenti FL.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

62. Sit AHP (*Fig.* 19.) *sectio verticalis vasis, libella autem in eo contenti fluidi, sit* AP, *et sumpta ejus parte infinite parva* CD, *ex puncto* C *demittatur ad planum libellae* AP *perpendicularis* CI. *Dico, quod pressio perpendicularis a fluido exercita in partem infinite parvam* CD, *aequabitur facto ex eadem parte* CD *in pondus filamenti* CI.

Ex puncto D ad planum libellae AP demissa intelligatur perpendicularis DL. Pressio perpendicularis a fluido exercita in punctum C, aequatur (61) ponderi filamenti CI, exercita autem in punctum D, aequatur ponderi filamenti DL. Atqui ob puncta C et D infinite propinqua, filamenta CI, DL quamproxime sunt aequalia; igitur pressio perpendicularis a fluido exercita in punctum D, eadem quamproxime erit cum illa, quae exercetur in punctum C, hoc est aequalis ponderi filamenti CI. Eandem ob causam, etiam pressio perpendicularis exercita in quodvis aliud intermedium rectae CD punctum, erit aequalis ponderi filamenti CI; igitur tota pressio perpendicularis exercita in rectam CD, aequabitur ponderi filamenti CI toties sumpto, quot puncta sunt in recta CD, sive aequabitur facto ex recta CD ducta in pondus filamenti CI.

SCHOLION.

63. Quia haec demonstratio, ut patet, etiam habet locum, si CD non ut recta, sed ut superficies infinite parva consideretur; utique etiam pressio perpendicularis a fluido exercita in partem infinite parvam superficiei vasis, aequabitur facto ex eadem parte in pondus filamenti CI, sive aequabitur ponderi columnae ex eodem fluido, cuius basis est eadem pars CD, et altitudo CI.

PROPOSITIO XX.

64. *Pressio perpendicularis exercita a fluido in partem infinite parvam superficiei vasis* AHP (*Fig.* 19.), *exponi potest per factum ex eadem parte in ejus distantiam a plano libellae* AP.

Sumptis in superficie AHP duabus partibus CD, EF infinite parvis, et inaequalibus inter se, demittantur ad planum libellae AP perpendiculares CI, EN. Pressio perpendicularis exercita a fluido in partem CD, erit ad illam, quae exercetur in partem EF (63), ut factum ex CD in pondus filamenti CI ad factum ex EF in pon-

C dus

dus filamenti E N, sive in ratione composita partis C D ad partem E F, et ponderis filamenti C I ad pondus filamenti E N. Sed pondus filamenti C I est (20) ad pondus filamenti E N, ut C I ad E N; ergo etiam pressio perpendicularis exercita a fluido in partem C D, erit ad illam, quae exeritur in partem aliam E F in ratione composita partis C D ad partem E F, et C I ad E N, sive ut factum ex parte C D in C I ad factum ex parte E F in E N. Quare pressio perpendicularis exercita a fluido in partem C D, exponi potest per factum ex eadem parte C D in C I, exercita vero in partem E F, per factum ex eadem parte E F in E N.

L E M M A

65. *Sint pondera* A, B, C (*Fig.* 20.) *sita ad eandem partem plani verticalis, cujus sectio horizontalis est recta* D F, *inque ipsam e singulis ponderibus demittantur perpendiculares* A D, B E, C F. *Sit autem punctum* G *centrum gravitatis ponderum omnium* A, B, C, *a quo ducatur perpendicularis* G H *in idem planum. Dico, summam factorum, quae fiunt a singulis ponderibus in suas perpendiculares, aequari facto ex summa ponderum* A, B, C *in rectam* G H.

Singulae perpendiculares A D, B E, C F intelligantur produci ad alteram partem plani D F, sintque singulae D K, E I, F M ipsi G H aequales, omnesque inflexiles virgas referant, parallelas ad horizontem. Denique ad puncta K, I, M talia pondera applicentur, ut singula cum sibi oppositis A, B, C aequilibrium servent ad intersectionem plani D F; unde omnia pondera K, I, M aequiponderabunt omnibus A, B, C. Cum ergo pondera A et K circa D aequilibrentur, erit pondus A ad pondus K, ut D K ad D A, et ideo factum ex A in A D aequabitur facto ex K in K D, vel ex K in G H. Pari modo ostendam, factum ex B in B E aequari facto ex I in I E, vel ex I in G H, et factum ex C in C F facto ex M in M F, vel ex M in G H. Ergo summa factorum ex A in A D, ex B in B E, et ex C in C F aequabitur facto ex omnibus K, I, M in G H. Cum autem K, I, M aequiponderent ipsis A, B, C, etiam eisdem A, B, C ex eorum centro G gravitatis suspensis aequiponderabunt; unde eum distantia G H centri gravitatis G a plano D F, sit aequalis singulis D K, E I, F M, necesse est pondera A, B, C simul sumpta aequari ipsis K, I, M pariter simul sumptis. Sed (ex demonstr.) summa factorum ex A in A D, ex B in B E, et ex C in C F aequatur facto ex omnibus K, I, M in G H; ergo et summa factorum ex A in A D, ex B in B E, et ex C in C F aequabitur facto ex omnibus A, B, C in G H.

Scho-

66. Quamvis in hac demonstratione positae sint rectae A K, B I, C M parallelae ad horizontem, et planum, cuius sectio D F, perpendiculare ad horizontem; nihilominus patet, si rectae A K, B I, C M transferantur in situm perpendicularem ad horizontem, et planum, cuius sectio est B F, in situm horizontalem, eandem factorum manere aequalitatem, cum rectae omnes sint eaedem, quae prius.

P R O P O S I T I O XXI.

67. *Pressio perpendicularis a fluido exercita in finitam partem superficiei vasis, quo continetur, exponi potest per factum ex eadem finita parte in distantiam ejus centri gravitatis a libellae plano.*

Sit A H P (Fig. 19.) sectio verticalis vasis, libella autem in eo contenti fluidi sit A P. Tum sumpta qualibet eius parte finita C H, centrum gravitatis habente in punto G, eadem divisa concipiatur in partes infinite parvas C D, D E, E F, &c. Denique ex punctis C, D, E, F, &c. demittantur ad planum libellae A P perpendiculares C I, D L, E N, F M etc., et ex centro gravitatis G ad idem planum ducatur perpendicularis G O. Pressiones perpendiculares a fluido exercitae in partes infinite parvas C D, D E, E F, &c. exponuntur (64) per facta ex C D in C I, ex D E in D L, ex E F in E N, &c.. Igitur tota pressio perpendicularis exercita in partem finitam C H, per omnium horum factorum summam exponi potest. Sed si partes infinite parvae C D, D E, E F, &c. considerentur velut pondúscula appensa rigidis rectis C I, D L, E N, &c. et habentia commune centrum gravitatis in puncto G, summa factorum ex C D in C I, ex D E in D L, ex E F in E N, &c. aequabitur (66) facto ex omnibus C D, D E, E F, &c. in rectam G O, seu facto ex parte finita C H in G O; igitur etiam pressio perpendicularis a fluido exercita in partem finitam C H, exponetur per factum ex eadem parte in G O. Patet autem hoc ipsum etiam succedere, si C H non consideretur ut pars finita sectionis A H P, sed ut pars finita superficiei vasis, quo fluidum continetur; ergo pressio perpendicularis a fluido exercita in partem finitam C H superficiei vasis, quo continetur, exponetur per factum ex eadem finita parte in distantiam ejus centri gravitatis a plano libellae A P.

C o r o l l a r i u m I.

68. Quia plana pariter superficies fundi horizontalis H D (Fig. 21.) spectari potest ut pars finita superficiei internae vasis A H D P;

C 2 etiam

etiam pressio perpendicularis in fundum HD exercita a fluido AHDP, exponetur (67) per factum ex eodem fundo in distantiam ejus centri gravitatis a plano libellae AP.

Corollarium II.

69. Cum vero centrum gravitatis fundi HD sit in ejus medio puncto R; utique demissa ex R ad planum libellae AP perpendiculari RB, pressio perpendicularis a fluido exercita in fundum HD, exponetur per factum ex eodem fundo HD in RB.

PROPOSITIO XXII.

70. *Pressio perpendicularis exercita a fluido in partem finitam* CH *(Fig. 21.) superficiei vasis* AHDP, *aequatur ponderi ejusdem fluidi contenti in prismate recto, habente basim aequalem eidem finitae parti* CH, *et altitudinem* GO, *seu distantiam centri gravitatis* G *ejusdem partis a plano libellae* AP.

Pressio perpendicularis a fluido exercita in fundum HD, est (69. 67.) ad illam, quae exeritur in superficiem CH, ut factum ex fundo HD in RB ad factum ex superficie CH in GO, sive ut prisma rectum, cujus basis est fundus HD, et altitudo RB, ad alterum rectum prisma, habens pro basi CH, et pro altitudine GO, sive (20) ut pondus fluidi contenti in primo prismate, ad pondus eiusdem fluidi, quod in altero continetur. Sed pressio perpendicularis in fundum HD exercita, est (50) aequalis ponderi illius fluidi, quod continet primum prisma; ergo et pressio perpendicularis exercita in superficiem CH, aequabitur ponderi illius fluidi, quod in altero prismate continetur.

Corollarium.

71. Quoniam Valva, aut tabula cataractae spectari potest ut pars finita superficiei internae vasis, aut receptaculi, quo stagnans fluidum continetur; pressio perpendicularis in ipsam exercita, aequalis erit (70) ponderi eiusdem fluidi contenti in prismate recto, cujus basis est valva ipsa, et altitudo est distantia ejus centri gravitatis a suprema fluidi superficie. Mensura autem hujus pressionis invenietur sequenti modo. Quadratum ABED (Fig. 22.) referat verticalem valvam, seu tabulam cataractae, quae lateraliter comprimatur ab aqua stagnante M, superficiem supremam habente in horizontali plano ABHG. Sit praeterea valvae, et aquae altitudo AD pedum 6. Ex ejus medio puncto C, sive ex gravitatis centro ejusdem agatur CL perpendicularis ad communem sectionem AB plani ABED cum plano ABHG, quae perpendicularis etiam erit

eidem

eidem plano ABHG. Pressio perpendicularis exercita ab aqua stagnante in valvam, aequatur (70) ponderi ejusdem aquae contentae in prismate recto, cujus basis est valva ipsa, et altitudo CL. Sed valva est pedum quadratorum 36, et CL est pedum 3; ergo idem prisma 108 pedes aquae cubicos continebit. Sed pes cubicus aquae est 70 librarum Parisiensium; igitur idem prisma ponderabit 7560 libras, ideoque totidem libris aequivalebit pressio perpendicularis ab aqua exercita in valvam ABED.

PROPOSITIO XXIII.

72. *Si vas, aut receptaculum fluido stagnante plenum, habeat formam cubi; pressio a fluido exercita in quatuor quadrata simul, a quibus cubus lateraliter terminatur, dupla illius erit, quae exercetur in ejus fundum.*

Finge ABED (Fig. 22.) esse unum ex quatuor his quadratis, et ex ejus centro gravitatis C duc ipsi AD parallelam CL, quae erit dimidia rectae AD, simulque (71) normalis ad libellae planum ABHG. Pressio a fluido exercita in quadratum ABED, aequatur (71) ponderi ejusdem fluidi contenti in prismate recto, cujus basis est quadratum ABED, et altitudo CL. Sed pressio exercita in fundum vasis, aequatur (51) ponderi ejusdem fluidi contenti in prismate recto, cujus basis est ipse fundus, et altitudo AD; igitur presio exercita in quadratum ABED, erit ad illam, quae exercetur in fundum vasis, ut pondus primi prismatis ad pondus alterius, sive ut primum prisma ad alterum, aut (ob aequales eorum bases) ut altitudo CL ad altitudinem AD. Est vero CL dimidia ipsius AD; ergo et presio exercita in quadratum ABED, erit dimidia illius, quae exercetur in fundum vasis. Idem autem ostendi potest in reliquis tribus quadratis, quae lateraliter ambiunt ipsum cubum; igitur pressio exercita a fluido in quatuor quadrata simul, quibus est cubus lateraliter terminatus, aequalis erit quatuor medietatibus illius pressionis, quae exercetur in fundum, hoc est dupla ejusdem erit.

PROPOSITIO XXIV.

73. *Si fluidum* GABODE *(Fig. 23.) inditum tubis communicantibus* PR, QO *inaequalium diametrorum, sit immotum; supremae ejus superficies* AG, ED *erunt in eodem plano horizontali* AD.

Intermedius tubus BRFO sectus intelligatur verticali plano MN, cujus centrum gravitatis positum sit in C. Traducto dein per

pun-

punctum C horizontali plano I L, in hoc cadant ex H et K perpendiculares H I, K L, quae erunt distantiae centri gravitatis C plani M N a superficiebus A G, E D. Quoniam planum M N spectari potest ut latus vasis V P B N M, ipsum a fluido G A B N M urgebitur (70) versus L vi, quae aequatur ponderi columnae ex fluido, cujus basis M N, et altitudo H I. Eandem ob causam, idem planum M N a fluido E D O N M urgebitur versus I vi, quae aequatur ponderi columnae ex fluido, habentis M N pro basi, et pro altitudine K L. Atqui, cum totum fluidum contentum tubis (ex hyp.) sit immotum, etiam immotum erit planum M N ab hisce contrariis viribus sollicitatum; ergo pondus columnae ex fluido, habentis M N pro basi, et pro altitudine H I, aequabitur ponderi columnae ex eodem fluido, cujus basis M N, et altitudo K L. Hae autem duae columnae aequales habent eandem basim M N; ergo pariter aequabuntur earum altitudines H I, K L, ideoque superficies A G, E D aequidistabunt a plano horizontali I L, ipsaeque propterea etiam erunt in eodem plano horizontali A D.

PROPOSITIO XXV.

74. *Si fluidum* G A B O D E *(Fig. 23.) inditum tubis communicantibus* P R, Q O, *supremas habeat superficies* A G, E D *positas in eodem plano horizontali* A D; *ipsum immotum erit.*

Cum superficies A G, E D sint (ex hyp.) in eodem plano horizontali A D; etiam aequales erunt H I, K L, unde columna ex fluido, habens pro basi M N, et pro altitudine H I, aequabitur columnae ex eodem fluido, cuius basis M N, et altitudo K L, et pondus primae ponderi alterius aequale erit. Sed (70) planum M N urgetur versus L vi aequali ponderi columnae ex fluido, cuius basis M N, et altitudo H I, rursusque versus I sollicitatur vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cuius basis M N, et altitudo K L; ergo planum M N viribus aequalibus, et directe oppositis sollicitatum, quiescet, consequenter etiam fluidum contentum tubis, immotum erit.

PROPOSITIO XXVI.

75. *Fluidum* V P B O T Q *(Fig. 23.) immotum, et contentum tubis communicantibus* P R, Q O, *secari intelligatur horizontali plano* A D, *ut ita in utroque tubo prodeant superficies horizontales* A G, E D. *Dico illarum quamlibet, ut* E D, *tanta vi sursum sollicitari a fluido* V P A G, *quantum est pondus columnae ex eodem fluido, cujus basis est ipsamet superficies* E D, *altitudo autem aequatur altitudini* A P *columnae* V P A G.

Cum

Cum immotum sit (ex hyp.) fluidum V P B O T Q, ejus superficies supremae P V, Q T in eodem erunt (73) plano horizontali P T. Sed superficies etiam A G, E D sunt (ex hyp.) in eodem plano horizontali A D; ergo si ex quolibet puncto S plani Q T demittatur ad superficiem E D perpendicularis S K, haec erit ipsi A P aequalis. Hoc autem posito, ita ostenditur propositio. Cum superficies A G, E D sint in eodem plano horizontali A D; utique si ab immoto fluido V P B O T Q demas ex una parte fluidum V P A G, et ex altera fluidum T Q E D, reliquum G A B O D E adhuc immotum (44) erit. Sed si dein restituas tubo P R ablatum fluidum V P A G, & tubo Q O subtractum alterum T Q E D, idem fluidum G A B O D E in eodem quietis statu, in quo prius erat, perseverabit; ergo fluidum V P A G aequilibrabitur cum altero T Q E D, ideoque superficies E D tanta vi sursum sollicitabitur a fluido V P A G, quanta deorsum urgetur ab imminenti fluido T Q E D. Atqui superficies E D (48) urgetur deorsum ab incumbente fluido T Q E D vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cujus basis E D, & altitudo S K; ergo et sursum sollicitatibur a fluido V P A G vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cujus basis E D, et altitudo S K, aut P A.

Corollarium.

76. Hinc si manente altitudine P A fluidi contenti in tubo P R, auferas ex alio tubo Q O fluidum T Q E D; superficies E D residui fluidi D E F O sursum (75) moveri incipiet vi aequali ponderi columnae ex eodem fluido, cujus basis E D, et altitudo P A. Et si haec superficies immobili operculo obducta esset, hoc etiam sursum urgebitur vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cujus basis est operculum ipsum E D, et altitudo P A.

Scholion.

77. Christianus Wolfius ex hoc principio suum tubum anatomicum derivavit. Idem enim imprimis ex lamina ferrea stamno obducta, construendum curavit vas cylindricum F D E G (Fig. 48.), eidemque afferruminari jussit inflexum tubulum M I L B C N. Dein vesicam, aut pellem, aut alias quascunque partes membranaceas animalium basi superiori F D superinduxit. Denique tantum aquae immisit in vas cylindricum F D E G, ut ipsa, eo repleto, assurgeret intra tubulum usque ad H. Quo facto, non solum vidit membranaceas illas partes hemisphaerii figuram acquisivisse, verum etiam observavit aquae particulas invadentes earum poros, ita distincte divisisse omnia illarum vasa, ut haec, levi facta incisione, solis digitis accuratius quam cultro anatomico separarentur.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

78. *Si duo fluida* VPAG, IKOBAG (*fig.* 49.) *diversis praedita densitatibus, et inclusa tubis communicantibus* PR, QO, *sint immota; producto usque ad* D *horizontali plano* AG, *in quo fluida haec junguntur, gravitas specifica levioris fluidi* VPAG *erit ad illam gravioris* IKDE, *ut hujus altitudo* IE *ad illius altitudinem* PA.

Quoniam superficies AG, ED sunt (ex hyp.) in eodem plano horizontali AD, utique si in tubis esset solum fluidum EDOBAG, hoc (74) prorsus immotum foret. Atqui ejus superficies AG, ED premuntur deorsum a fluidis VPAG, IKDE, hisque pressionibus non obstantibus, adhuc hoc fluidum (ex hyp.) est immotum; ergo superficies ejus ED tanta vi sursum propellitur a leviori fluido VPAG, quanta deorsum urgetur a graviori IKDE. Sed superficies ED deorsum (48) urgetur a graviori fluido IKDE vi, quae aequatur ponderi columnae ex fluido graviori, cujus basis ED, et altitudo IE, e contra vero sursum (75) sollicitatur a leviori fluido VPAG vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido leviori, cujus basis ED, et altitudo PA; ergo harum duarum columnarum pondera aequabuntur, ideoque gravitas specifica levioris fluidi VPAG erit (27) ad illam gravioris IKDE, ut columna ex fluido graviori, cujus basis ED, et altitudo IE, ad columnam ex fluido leviori, cujus basis ED, et altitudo PA. Verum cum hae columnae communem habeant basim ED, sunt inter se ut altitudines IE, PA; ergo et gravitas specifica fluidi VPAG erit ad specificam gravitatem fluidi IKDE, ut IE ad PA.

CAPUT IV.

De mensura vis verticalis, quae sursum a fluido exercetur in latera vasorum, et in inferiorem superficiem solidi eidem immersi.

DEFINITIO XI.

79. SI trapezium ACDB (Fig. 24.) utcunque inclinatum ad horizontem, opposita habeat latera AB, CD parallela ad horizontem, atque adeo etiam inter se: tum per CD traducto plano verticali CF'E'D, ad hoc ex singulis trapezii punctis perpendiculares lineae demittantur; figura FCDE inde orta, vocatur projectio trapezii in verticali plano CF'E'D.

Scho-

Scholion.

80. Eadem ratione figura FEBA erit projectio trapezii ACDB in plano horizontali, quod traducitur per AB, et figura F'E'B'A' erit projectio ejusdem in plano horizontali TV.

LEMMA I.

81. *Si ex quolibet puncto* O (*Fig.* 24.) *trapezii* ACDB *agantur* OS, OQ, *quarum prima sit recta plano* FCDE, *altera autem recta plano* ACDB: *tum plano per illas ducto, secetur prisma* FEBACD; *sectio inde genita* RLM, *recta erit utrique plano.*

Quoniam est OQ (ex hyp.) recta plano ACDB; planum per illam transiens, rectum erit plano ACDB. Sed planum traductum per rectas OS, OQ, transit etiam per OQ; ergo pariter rectum erit plano ACDB. Sed sectio RLM est in plano traducto per rectas OS, OQ; igitur sectio RLM erit quoque recta plano ACDB. Pari modo ostendam, eandem sectionem RLM etiam rectam esse plano alteri FCDE; ergo eadem erit recta utrique plano.

LEMMA II.

82. *Si duo plana* ABCD, EFHG (*Fig.* 25.) *sint recta eidem plano* BFCH; *etiam communis eorum sectio* LM *erit recta eidem plano.*

Recta LM, si fieri potest, non sit recta plano BFCH; ergo obliqua erit ad communes sectiones BC, FH planorum ABCD, EFHG cum plano BFCH. Nunc in planis ABCD, EFHG demittantur ex puncto L ad communes sectiones BC, FH perpendiculares LN, LO. Quia planum ABCD rectum est plano BFCH, utique recta LN perpendiculariter ducta ad communem intersectionem BC, perpendicularis quoque erit ad planum BFCH. Simili modo ostendam, etiam LO, perpendicularem esse eidem plano BFCH; ergo ex puncto L sumpto extra planum BFCH, duae ad hoc planum demitti poterunt perpendiculares LN, LO, quod est absurdum. Falso itaque ponebatur LM non esse rectam plano BFCH.

Corollarium I.

83. Hinc CD (Fig 24), quae communis est Sectio planorum FCDE, ACDB, recta erit plano trianguli RLM. Nam cum

D duo

duo plana FCDE, ACDB sint (81) recta plano trianguli RLM, utique eorum communis sectio CD erit (82) recta eidem plano.

Corollarium II.

84. Itaque rectus erit tam angulus CML, quam angulus CMR, et ideo binae rectae LM, RM perpendiculares erunt ad eandem rectam CD.

Corollarium III.

85. Unde erit RL perpendicularis ad duas rectas EF, LM. Nam planum horizontale FEBA rectum est verticali FCDE. Sed huic quoque est (81) rectum planum RLM; igitur plana FEBA, RLM recta erunt eidem plano FCDE, et propterea sectio illorum RL erit (82) recta plano FCDE, atque ita etiam perpendicularis ad duas rectas EF, LM.

L E M M A III.

86. *Si altitudo trapezii* ACDB (*Fig. 26.*) *habentis opposita latera* AB, CD *invicem parallela, sit infinite parva respectu laterum eorundem; haec latera poterunt pro aequalibus usurpari*

Productis CA, DB donec conveniant ad punctum E, ex hoc demittatur ad latus CD perpendicularis EM, quae occurrens reliquo lateri AB in R, determinabit altitudinem RM trapezii ACDB. Cum ergo altitudo RM trapezii ACDB sit (ex hyp.) infinite parva relate ad latera AB, CD, utique ejus area erit infinite parva relate ad aream trianguli CED. Unde erit RM infinite parva respectu EM, et ideo rectae ER, EM pro aequalibus sumi poterunt. Sed quia in triangulo CEM est AR parallela ad CM, erit AR ad CM, ut ER ad EM; igitur etiam rectae AR, CM poterunt accipi ut aequales. Simili modo ostendam, etiam rectas RB, MD posse accipi ut aequales; igitur latera AB, CD pro aequalibus sumi poterunt.

L E M M A IV.

87. *Si parallela latera* AB, CD *trapezii* ACDB (*Fig. 24.*) *infinite proxima supponantur, ita ut trapezii altitudo sit infinite parva respectu laterum eorundem; area* ACDB *erit ad aream* FCDE, *ut* RM *ad* LM, *et eadem area* ACDB *erit ad aream* FEBA, *ut* RM *ad* RL.

1. Quia altitudo trapezii ACDB est (ex hyp.) infinite parva relate ad ejus latera AB, CD; haec (86) quamproxime aequabuntur, et ideo semisumma laterum AB, CD erit uni CD aequalis. Sed quia RM est (84) perpendicularis ad CD, area trapezii ACDB aequatur facto ex altitudine RM in semisummam laterum AB, CD; ergo aequabitur etiam facto ex RM in CD. Rursus cum sint parallelae tam verticales rectae FC, ED, quam horizontales FE, CD; parallelogrammum erit FCDE, atque ita FE ipsi CD aequalis. Est autem LM (84) perpendicularis ad CD; ergo area FCDE aequabitur facto ex LM in CD, ac per consequens area ACDB erit ad aream FCDE, ut factum ex RM in CD ad factum ex LM in CD, sive ut RM ad LM.

2. Recta FE est (num. 1.) parallela, et aequalis ipsi CD. Sed etiam AB est (ex hyp.) parallela, et (86) quamproxime aequalis ipsi CD; ergo etiam FE erit parallela, et quamproxime aequalis ipsi AB, ideoque semisumma laterum FE, AB trapezii FEBA aequabitur ipsi FE, vel CD. Sed quia RL perpendicularis est (85) ad FE, area trapezii FEBA aequatur facto ex altitudine RL in semisummam laterum FE, AB; ergo aequabitur etiam facto ex RL in CD, ideoque area trapezii ACDB erit ad aream trapezii FEBA, ut factum ex RM in CD ad factum ex RL in CD, sive ut RM ad RL.

P R O P O S I T I O XXVIII.

88. *Iisdem positis; si trapezium* ACDB *ita immoto fluido sit immersum, ut ejus centrum gravitatis* O *distet a plano libellae* TV *intervallo* OG; *idem duabus viribus comprimetur, verticali scilicet sursum, et horizontali, quarum prima exposita erit per factum ex area* FEBA *in* OG, *altera autem per factum ex area* FCDE *in* OG.

I. Pressio perpendicularis exercita a fluido in trapezium ACDB, sit exposita per OI, ductaque in plano producto trianguli RLM recta OS horizontali, in hanc cadat ex puncto I perpendicularis IN, et compleatur rectangulum ONIP. Quoniam hoc rectangulum est parallelogrammum, cujus diagonalis OI, pressio perpendicularis, aut vis OI resolvetur in duas ON, OP, quarum prima agit horizontaliter in trapezium, altera autem ipsum verticaliter sursum urget; ideoque pressio perpendicularis erit ad verticalem, ut OI ad OP, erit vero ad horizontalem, ut OI ad ON. His autem positis, ita ostenditur propositio. Cum rectus angulus PON aequetur recto alteri IOR, ablato utrinque angulo ION, reliquus angulus POI aequabitur reliquo RON. Verum ob parallelas LR, ON, alternus angulus LRM aequatur alterno RON; ergo et angulus POI aequabitur angulo LRM. Sed rectus etiam angulus O P I aequatur (85) recto R L M; ergo triangulum P O I erit simile L M R, et vis perpendicularis O I erit ad verticalem O P, ut R M ad R L. Est autem (87) R M ad R L, ut area A C D B ad aream F E B A, vel ut factum ex area A C D B in O G ad factum ex area F E B A in O G; ergo et vis perpendicularis O I erit ad verticalem O P, ut factum ex area A C D B in O G ad factum ex area F E B A in O G. Sed vis perpendicularis O I exponitur (67) per factum ex area A C D B in O G; ergo et vis verticalis O P exponetur per factum ex area F E B A in O G.

II. Quia triangulum P O I ostensum est simile L M R, vis perpendicularis O I erit ad vim horizontalem O N, vel P I, ut R M ad L M, sive (87) ut area A C D B ad aream F C D E, sive ut factum ex area A C D B in O G ad factum ex area F C D E in O G. Sed vis perpendicularis O I exponitur (67) per factum ex area A C D B in O G; ergo et vis horizontalis N O exponetur per factum ex area F C D F in O G.

Corollarium.

89. Quia area F′E′B′A′ aequatur alteri F E B A; vis verticalis O P exponetur etiam per factum ex area F′E′B′A′ in O G.

PROPOSITIO XXIX.

90. *Iisdem positis, vis verticalis, qua trapezium* A C D B *a fluido sursum sollicitatur, aequalis est ponderi ejusdem fluidi contenti in prismate truncato* F′E′B′A′A B D C.

Vis perpendicularis O I, qua trapezium premitur a fluido; est (88. 89.) ad vim verticalem O P, qua ab eodem sursum sollicitatur, ut factum ex area A C D B in O G ad factum ex area F′E′B′A′ in O G, sive ut prisma rectum, cuius basis A C D B, et altitudo O G, ad alterum prisma rectum, cuius basis F′E′B′A′, et altitudo O G. Sed primum prisma est (20) ad alterum, ut pondus fluidi in eo contenti, ad pondus eiusdem fluidi, quod in altero continetur; ergo et vis perpendicularis O I erit ad verticalem vim O P, ut pondus fluidi contenti in prismate recto, cuius basis A C D B, et altitudo O G, ad pondus eiusdem fluidi, quod continetur in prismate recto, habente basim F′E′B′A′, et altitudinem O G. Sed vis perpendicularis O I aequatur (70) ponderi fluidi contenti in prismate recto, cuius basis A C D B, et altitudo O G; ergo et vis verticalis O P aequabitur ponderi eiusdem fluidi, quod continetur in prismate recto, habente basim F′E′B′A′, et altitudinem O G. Sed quia trapezii latera A B, C D infinite proxima supponuntur, prisma truncatum F′E′B′A′A B D C quamproxime est aequale prismati recto, habenti basim F′E′B′A′, et altitudinem O G; ergo etiam vis verticalis O P aequabitur ponderi eiusdem fluidi, quod continetur in prismate truncato F′E′B′A′A B D C.

Corollarium.

91. Vis itaque verticalis, qua fluidum sursum urget trapezium A C D B, aequatur ponderi eiusdem fluidi, quod continetur in prismate truncato, cuius basis inclinata est trapezium idem, basis autem horizontalis est eiusdem trapezii proiecto F′E′B′A′ in plano libellae T V.

PROPOSITIO XXX.

92. *Solidum* A B E D (Fig. 27.), *cuius maxima horizontalis sectio est* A C E I, *immersum sit fluido habenti libellam in plano* L K. *Tum ex punctis omnibus superficiei inferioris* A D E *perpendiculares lineae demittantur ad planum libellae* L K, *ita ut fiat ejus projectio* F G *in eodem plano. Dico vim verticalem, qua sursum a fluido urgetur superficies eius inferior* A D E, *aequalem esse ponderi eiusdem fluidi comprehensi a superficie* A D E, *ab eius projectione* F G *in plano libellae* L K, *et a superficie cylindrica* F A E G.

Solidi pars inferior A D E divisa concipiatur in strata horizontalia altitudinis infinite parvae, et multitudine infinita, quorum unum sit M N O P Q R m n o p q r (Fig. 28.). Tum perimetris horizontalium basium huius strati in eundem numerum aequalium partium sectis, iungantur verticales rectae M m, N n, O o, P p, Q q, R r, quae singulae erunt inclinatae ad horizontem, et superficiem strati divident in trapezia, quorum duo opposita latera, veluti M N, m n, erunt infinite propinqua, et parallela. His positis, vis verticalis, qua a fluido urgetur sursum quodvis ex his trapeziis, aequatur (91) ponderi eiusdem fluidi contenti in prismate truncato, quod pro base inclinata habet idem trapezium, pro base autem horizontali projectionem trapezii in plano L K (Fig. 27.). Igitur summa omnium virium verticalium, sive vis verticalis aequipollens eorum summae, aequabitur aggregato omnium ponderum eiusdem fluidi contenti in omnibus truncatis prismatibus, quorum bases inclinatae sunt trapezia singula eiusdem strati, bases autem horizontales sunt projectiones eorum in plano L K. Id autem convenit etiam aliis stratis horizontalibus, in quae divisa est solidi pars inferior A D E; ergo vis verticalis, qua solidi superficies inferior A D E sursum a fluido sollicitatur, aequalis erit ponderi eiusdem fluidi comprehensi a superficie A D E, ab eius projectione F G, et a superficie cylindrica F A E G.

Scho-

Scholion.

93. Si eodem modo, quo solidi pars inferior A D E in strata horizontalia divisa fuit, etiam dividi concipiatur superior altera ABE; simili ratiocinio demonstrabitur, vim verticalem, qua haec pars deorsum a superiori fluido sollicitabitur, aequalem esse ponderi eiusdem fluidi comprehensi a superficie A B E, ab eius projectione in plano libellae L K, et a superficie cylindrica F A E G.

Corollarium I.

94. Si fluidi libella L K (Fig. 29.) sit in plano sectionis maximae A C E I, hoc est si fluido immergatur sola pars A D E solidi A B E D; vis verticalis, qua superficies A D E a fluido sursum sollicitatur, aequabitur (92) ponderi eiusdem fluidi, quod contineretur sub volumine partis immersae A D E.

Corollarium II.

95. Et si fluidi libella L K (Fig. 30.) fuerit infra planum sectionis maximae A C E I, sive si fluido sit immersa sola pars G D F solidi A B E D; vis verticalis, qua superficies G D F sursum a fluido sollicitatur, aequabitur (92) ponderi eiusdem fluidi, quod contineretur sub volumine partis immersae G D F.

Propositio XXXI.

96. *Si totum solidum* A B E D (*Fig.* 27.), *cuius maxima horizontalis sectio est* A C E I, *immersum sit fluido habenti libellam in plano* L K; *differentia virium verticalium sursum, et deorsum agentium in inferiorem, et superiorem partem eius superficiei, aequabitur ponderi eiusdem fluidi, quod sub toto eius volumine contineretur.*

Vis verticalis, qua superficies superior A B E deorsum a fluido sollicitatur, aequalis est (93) ponderi eiusdem fluidi comprehensi a superficie A B E, ab eius projectione F G in plano L K, et a superficie cylindrica F A E G. Contra autem vis verticalis, qua superficies inferior A D E a fluido urgetur sursum, aequatur (92) ponderi fluidi comprehensi a superficie A D E ab eius projectione F G in plano L K, et a superficie cylindrica F A E G. Sed hae duae vires, utpote verticales, sunt directe oppositae inter se; ergo si prima ab altera subducatur, prodibit differentia earundem, quae proinde aequalis erit ponderi illius fluidi, quod contineretur sub volumine solidi A B E D.

Scho-

Scholion.

97. Haec verticalium virium differentia *vis attollens solidum* appellatur, quae proinde aequabitur ponderi illius fluidi, quod contineretur sub volumine solidi A B E D.

Corollarium I.

98. Hinc solidum, quod totum fluido est immersum, tantum ponderis sui amittet, quantum est pondus eiusdem fluidi, quod sub eius volumine contineretur. Tantam enim amittet ponderis sui partem, quanta est vis verticalis ipsum attollens. Haec autem (97) aequatur ponderi eiusdem fluidi, quod sub eius volumine contineretur; ergo etiam tantum ponderis sui amittet, quantum est pondus eiusdem fluidi, quod sub eius volumine contineretur.

Corollarium II.

99. Unde si solidum, quod totum fluido immergitur, sit immotum, sive amittat integrum eius pondus; vis attollens aequabitur eius ponderi.

Corollarium III.

100. Et quoniam vis attollens aequatur (97) ponderi illius fluidi, quod sub volumine solidi contineretur; etiam pondus fluidi, quod sub volumine solidi contineretur, aequabitur ponderi eiusdem solidi.

Propositio XXXII.

101. *Si planum libellae fluidi sit* L K (*Fig.* 31. 30.), *et* G D F *sit pars solidi eidem immersa; vis ipsum attollens, aequabitur ponderi illius fluidi, quod contineretur sub volumine* G D F.

I. Solidi maxima sectio A E (Fig. 31.) sit infra planum libellae L K, et ex singulis punctis perimetri sectionis demittantur ad idem libellae planum perpendiculares, ut ita prodeat superficies cylindrica A H I E. Iam vis verticalis, qua deorsum urgetur superficies superior A B E, vel potius eius portio G A E F, aequatur (93) ponderi fluidi comprehensi a superficie G A E F, ab eius projectione in plano L K, sive ab armilla intercepta circulis H S I, G O F, et a superficie cylindrica H A E I. Contra vis alia verticalis, qua sursum a fluido sollicitatur inferior solidi superficies A D E, aequatur (92) ponderi fluidi comprehensi a superficie A D E, ab eius projectione in plano L K, sive a circulo H S I, et a superficie cylindrica H A E I; igitur harum virium differentia, seu vis attollens solidum A B E D, aequabitur ponderi illius fluidi, quod contineretur sub volumine G D F.

II.

II. Solidi maxima sectio A E (Fig. 30.) sit supra planum libellae LK. Quoniam hoc in casu superficies superior G B F nulla vi verticali deorsum sollicitatur; utique differentia virium verticalium sursum, et deorsum agentium in superficiem solidi A B E D, soli aequabitur verticali, qua sursum urgetur superficies inferior G D F. Est autem haec (95) aequalis ponderi illius fluidi, quod contineretur sub volumine G D F; ergo et vis attollens solidum A B E D, aequalis erit (97) ponderi illius fluidi, quod contineretur sub volumine G D F.

Corollarium I.

102. Unde si fluido pars tantum solidi immergatur; hoc tantam amittet ponderis sui partem, quanta est vis verticalis ipsum attollens, seu (101) quantum est pondus fluidi, quod contineretur sub volumine immersae partis.

Corollarium II.

103. Quare si hoc solidum sit immotum, sive amittat integrum eius pondus; vis verticalis ipsum attollens, aequabitur eius ponderi.

Corollarium III.

104. Et quoniam vis attollens hoc solidum, aequatur (101) ponderi fluidi, quod contineretur sub volumine immersae partis; etiam pondus fluidi quod contineretur sub volumine immersae partis, aequabitur ponderi eiusdem solidi.

C A P U T V.

De mensura vis verticalis exercitae a fluido in superficiem internam vasis, quo continetur.

PROPOSITIO XXXIII.

105. *Si vas* A B C D (*Fig.* 32. 33.) *ex utraque parte* B E C F, A H D I *apertum, mergatur immoto fluido* M N O L; *superficies externa, et convexa vasis tanta vi introrsum versus axem ab ambiente fluido comprimetur, quanta extrorsum premitur superficies eius interna, et cava a fluido* A B E C D.

Si loco vasis A B E C D substituatur moles fluidi eiusdem constitutionis cum fluido ambiente, eiusdemque figurae, magnitudinis, et positionis cum vase; utique hoc in casu suprema totius fluidi superficies M L erit, uti prius, horizontalis, et ideo (44) totum fluidum in eodem quietis statu perseverabit. Unde superficies externa, et convexa fluidi A B E C D tanta vi premetur ab ambiente fluido M N O L, quanta vi superficies eius interna, et cava premitur a fluido A B E C D. Sed fluidum ambiens M N O L eandem exerit pressionem in superficiem vasis rigidam, et convexam, quam exereret in similem, aequalem, et similiter positam fluidi A B E C D. pariterque hoc fluidum A B E C D eandem exerit pressionem in superficiem eius cavam, quam exercebat in similem, aequalem, et similiter positam superficiem cavam, sed rigidam vasis; ergo superficies externa, et convexa vasis A B E C D tanta vi introrsum premitur ab ambiente fluido M N O L, quanta vi superficies eius interna, et cava extrorsum premitur a fluido A B E C D.

Corollarium I.

106. Ergo superficies convexa, et cava vasis A B E C D ab ambiente fluido, et ab interno viribus (105) aequalibus, et quidem directe oppositis (60) perpendiculariter comprimuntur.

Corollarium II.

107. Quia vires perpendiculares, quibus superficies convexa, et cava vasis a fluido comprimuntur, mutuo sunt (105) aequales; sequitur, etiam vires horizontales, et verticales, in quas resolvuntur perpendiculares, aequales esse.

Corollarium III.

108. Sicuti vires perpendiculares sunt (106) oppositae, et aequales, ita et verticales erunt oppositae, et aequales; hinc si vis verticalis urgens superficiem convexam vasis, deorsum agat, contra vis altera verticalis urgens superficiem eius cavam, sursum aget, et viceversa.

Corollarium IV.

109. Sicuti ergo vis verticalis fluidi ambientis, et deorsum sollicitantis superficiem convexam vasis A B E C D (Fig. 33.), aequatur (93) ponderi eiusdem fluidi comprehensi a superficie convexa vasis A B E C D, ab armilla intercepta circulis P R Q S, A H D I, et a superficie cylindrica P B C Q: ita vis verticalis, qua fluidum contentum vase A B E C D, sursum urget superficiem eius internam, et cavam, aequabitur ponderi eiusdem fluidi comprehensi a superficie convexa vasis A B E C D, ab armilla intercepta circulis P R Q S, A H D I, et a superficie cylindrica P B C Q. Eodem pariter ratiocinio demonstratur, vim verticalem fluidi contenti in vase A B E C D (Fig. 32.), et deorsum urgentis superficiem eius internam, et cavam, aequalem esse ponderi eiusdem fluidi comprehensi a super-

II. Solidi maxima sectio AE (Fig. 30.) sit supra planum libellae LK. Quoniam hoc in casu superficies superior GBF nulla vi verticali deorsum sollicitatur; utique differentia virium verticalium sursum, et deorsum agentium in superficiem solidi ABED, soli aequabitur verticali, qua sursum urgetur superficies inferior GDF. Est autem haec (95) aequalis ponderi illius fluidi, quod contineretur sub volumine GDF; ergo et vis attollens solidum ABED, aequalis erit (97) ponderi illius fluidi, quod contineretur sub volumine GDF.

Corollarium I.

102. Unde si fluido pars tantum solidi immergatur; hoc tantam amittet ponderis sui partem, quanta est vis verticalis ipsum attollens, seu (101) quantum est pondus fluidi, quod contineretur sub volumine immersae partis.

Corollarium II.

103. Quare si hoc solidum sit immotum, sive amittat integrum eius pondus; vis verticalis ipsum attollens, aequabitur eius ponderi.

Corollarium III.

104. Et quoniam vis attollens hoc solidum, aequatur (101) ponderi fluidi, quod contineretur sub volumine immersae partis; etiam pondus fluidi quod contineretur sub volumine immersae partis, aequabitur ponderi eiusdem solidi.

CAPUT V.

De mensura vis verticalis exercitae a fluido in superficiem internam vasis, quo continetur.

Propositio XXXIII.

105. Si *vas* ABCD (*Fig.* 32. 33.) *ex utraque parte* BECF, AHDI *apertum, mergatur immoto fluido* MNOL; *superficies externa, et convexa vasis tanta vi introrsum versus axem ab ambiente fluido comprimetur, quanta extrorsum premitur superficies eius interna, et cava a fluido* ABECD.

Si loco vasis ABECD substituatur moles fluidi eiusdem constitutionis cum fluido ambiente, eiusdemque figurae, magnitudinis, et positionis cum vase; utique hoc in casu suprema totius fluidi superficies ML erit, uti prius, horizontalis, et ideo (44) totum flui-

dum

dum in eodem quietis statu perseverabit. Unde superficies externa, et convexa fluidi ABECD tanta vi premetur ab ambiente fluido MNOL, quanta vi superficies eius interna, et cava premitur a fluido ABECD. Sed fluidum ambiens MNOL eandem exerit pressionem in superficiem vasis rigidam, et convexam, quam exereret in similem, aequalem, et similiter positam fluidi ABECD, pariterque hoc fluidum ABECD eandem exerit pressionem in superficiem eius cavam, quam exercebat in similem, aequalem, et similiter positam superficiem cavam, sed rigidam vasis; ergo superficies externa, et convexa vasis ABECD tanta vi introrsum premitur ab ambiente fluido MNOL, quanta vi superficies eius interna, et cava extrorsum premitur a fluido ABECD.

Corollarium I.

106. Ergo superficies convexa, et cava vasis ABECD ab ambiente fluido, et ab interno viribus (105) aequalibus, et quidem directe oppositis (60) perpendiculariter comprimuntur.

Corollarium II.

107. Quia vires perpendiculares, quibus superficies convexa, et cava vasis a fluido comprimuntur, mutuo sunt (105) aequales; sequitur, etiam vires horizontales, et verticales, in quas resolvuntur perpendiculares, aequales esse.

Corollarium III.

108. Sicuti vires perpendiculares sunt (106) oppositae, et aequales, ita et verticales erunt oppositae, et aequales; hinc si vis verticalis urgens superficiem convexam vasis, deorsum agat, contra vis altera verticalis urgens superficiem eius cavam, sursum aget, et viceversa.

Corollarium IV.

109. Sicuti ergo vis verticalis fluidi ambientis, et deorsum sollicitantis superficiem convexam vasis ABECD (Fig. 33.), aequatur (93) ponderi eiusdem fluidi comprehensi a superficie convexa vasis ABECD, ab armilla intercepta circulis PRQS, AHDI, et a superficie cylindrica PBCQ: ita vis verticalis, qua fluidum contentum vase ABECD, sursum urget superficiem eius internam, et cavam, aequabitur ponderi eiusdem fluidi comprehensi a superficie convexa vasis ABECD, ab armilla intercepta circulis PRQS, AHDI, et a superficie cylindrica PBCQ. Eodem pariter ratiocinio demonstratur, vim verticalem fluidi contenti in vase ABECD (Fig. 32.), et deorsum urgentis superficiem eius internam, et cavam, aequalem esse ponderi eiusdem fluidi comprehensi a su-

per-

perficie interna, et cava vasis ABECD, ab armilla intercepta circulis PRQS, AHDI, et a superficie cylindrica PBCQ.

PROPOSITIO XXXIV.

110. *Si vas* ABECD (*Fig.* 33.), *cuius sunt latera convergentia, plenum sit fluido, habente superficiem supremam in plano* AHDI; *differentia verticalium pressionum sursum, et deorsum agentium in superficiem internam vasis, et eius fundum, aequabitur ponderi totius fluidi contenti in vase.*

Pressio verticalis a fluido sursum exercita in superficiem internam vasis ABECD, aequatur (109) ponderi eiusdem fluidi comprehensi a superficie externa vasis, ab armilla intercepta circulis PRQS, AHDI, et a superficie cylindrica PBCQ. Sed pressio verticalis deorsum exercita in vasis fundum BC, aequatur (51) ponderi columnae fluidae PBCQ; igitur differentia harum pressionum aequabitur ponderi totius fluidi contenti in vase ABECD.

COROLLARIUM.

111. Si itaque fundus vasis cum eius lateribus firmiter sit connexus; vas a contento fluido tanta vi deorsum sollicitabitur, quantum est pondus eiusdem fluidi.

PROPOSITIO XXXV.

112. *Si vas* ABECD (*Fig.* 32.), *cuius sunt latera divergentia, plenum sit fluido, habente superficiem supremam in plano* AHDI; *summa omnium verticalium pressionum, deorsum agentium in superficiem internam vasis, et eius fundum, aequatur ponderi totius fluidi contenti in eodem vase.*

Pressio verticalis deorsum exercita a fluido in superficiem internam, et cavam vasis ABECD, aequatur (109) ponderi eiusdem fluidi comprehensi a superficie interna vasis, ab armilla intercepta circulis PRQS, AHDI, et a superficie cylindrica PBCQ. Sed pressio verticalis deorsum exercita ab eodem fluido in vasis fundum BC, aequatur (51) ponderi columnae fluidae PBCQ; igitur summa harum pressionum, quas deorsum exercet fluidum in superficiem internam vasis, et eius fundum, aequabitur ponderi totius fluidi contenti in vase.

COROLLARIUM I.

113. Si itaque vasis fundus cum eius lateribus firmiter connectatur; vas a contento fluido deorsum urgebitur tanta vi, quantum est pondus totius fluidi contenti in vase.

COROLLARIUM II.

114. Ergo etsi qui regeret mobilem fundum vasis, ne ipse ab eius lateribus separaretur, adhiberet solummodo vim aequalem (51) ponderi columnae fluidae PBCQ; nihilominus tamen, si ipse vellet regere fundum vasis, eius lateribus firmiter inhaerentem, sicque conaretur vel alio vas transferre, aut elevare, tunc illi vi altera opus esset, et quidem aequali summae ponderum vasis, et fluidi in eo contenti.

CAPUT VI.

De mensura vis horizontalis exercitae a fluido in superficiem solidi eidem immersi, et in superficiem internam vasis, quo continetur.

LEMMA I.

115. *Si duae vires* P *et* Q (*Fig.* 34) *expositae duobus lateribus* AB, AC *trianguli* BAC, *perpendiculariter applicentur punctis mediis* M *et* N *laterum eorundem; ambae simul aequivalebunt vi expositae latere tertio* BC, *et perpendiculariter applicatae eius medio puncto* F.

Vires P et Q etiam exponantur rectis LM, IN, invicem convenientibus ad punctum R, quod centrum erit circuli circumscripti triangulo BAC, et per quod etiam transibit vis aequipollens earum summae. Iuncta deinde MN, quae erit parallela ad BC, et demissa ex A ad latus BC perpendiculari AO, vis P, vel LM resolvatur in duas LG, LS, sive SM, GM, quarum prima sit perpendicularis ad BC, altera vero ad hanc parallela. Simili modo vis alia Q, vel IN resolvatur in duas HN, EN. Quia rectus angulus LMB aequatur recto alteri SMG, ablato hinc inde angulo LMG, reliquus GMB, vel huic alternus ABO aequabitur reliquo SML. Est autem rectus angulus AOB aequalis recto alteri MSL; ergo triangulum LSM erit simile AOB, et LM erit ad SM, ut AB ad BO. Sed vis LM (ex hyp.) exponitur per AB; ergo et vis SM erit exposita per BO. Rursus LM est ad LS, ut AB ad AO. Sed vis LM exponitur per AB; ergo et vis LS, vel GM erit exposita per AO. Simili modo ostendam, vim HN exprimi per CO, et vim EN per AO; igitur summa virium SM, HN erit

erit exposita per BC, reliquae autem vires GM, EN exponentur eadem recta AO, et propterea aequabuntur. Iam vires P et Q, sive LM, IN simul iunctae, aequivalent quatuor simul viribus SM, GM, HN, EN. Sed vires oppositae, et aequales GM, EN invicem eliduntur; igitur vires P et Q simul iunctae, aequivalent simul sumptis viribus SM, HN, seu vi expositae per BC. Sunt autem vires SM, HN perpendiculares ipsi BC, seu parallelae; ergo etiam vis aequipollens earum summae, et exposita per BC, erit prioribus parallela, ideoque perpendicularis etiam ad BC. Vidimus autem hanc vim transire per centrum R circuli circumscripti triangulo BAC; ergo ipsa pariter bisecabit rectam BC in F,

L E M M A II.

116. *Si punctis mediis laterum* AB, BC, CD, DE, EA (*Fig.* 35.) *cuiusvis polygoni* ABCDE *perpendiculariter applicentur vires* F, G, L, N, I, *expositae per singula ejus latera, quibus sunt applicatae; ipsae invicem elidentur.*

Agantur diagonales CA, CE, et punctis mediis earundem perpendiculariter applicentur vires H, K, expositae per easdem diagonales CA, CE. Ponatur etiam vis alia M exposita per ED, et perpendiculariter applicata puncto medio huius rectae, quae erit alteri vi N directe opposita, et aequalis. Iam in triangulo ABC vis H (115) aequipollet duabus simul viribus F et G. Sed in triangulo EAC vis K aequivalet duabus simul viribus I et H; igitur vis K aequivalebit tribus iunctis viribus I, F, G. Atqui in triangulo ECD vis M (115) aequivalet summae virium K et L; ergo etiam aequivalebit quatuor simul viribus I, F, G, L. Sed haec vis M eliditur ab aequali, et opposita alia N; ergo et vires quatuor I, F, G, L elidentur ab eadem vi N, et ideo vires F, G, L, N, I invicem elidentur,

L E M M A III.

117. *Si duo latera parallela* BA, CD (*Fig.* 36.) *trapezii* BADC *bisecentur in* E, *et* O, *iungaturque* EO; *haec transibit per centrum gravitatis trapezii* BADC.

Demissa ex E ad CD perpendiculari EF, trapezium BEOC aequabitur facto ex semisumma laterum BE, CO in rectam EF; trapezium vero EADO facto ex semisumma laterum EA, OD in rectam EF. Atqui (ex hyp.) haec facta invicem sunt aequalia; ergo et trapezium BEOC aequabitur alteri EADO. Itaque re-

cta EO bisecabit trapezium BADC, ideoque etiam per eius centrum gravitatis transire debet.

COROLLARIUM I.

118. Unde si sumpta Oo infinite parva respectu EO, traducatur per o recta cd parallela ipsi CD, quae necessario bisecabitur ab alia EO in o; etiam recta Oo transibit (117) per centrum gravitatis trapezii cdDC.

COROLLARIUM II.

119. Cum autem infinite propinquae, ac parallelae cd, CD censeri possint velut coincidentes, etiam trapezium cdDC haberi potest pro recta CD; igitur centrum gravitatis trapezii cdDC quamproxime idem erit cum centro gravitatis rectae CD, ideoque concipi poterit velut positum in medio puncto O huius rectae.

COROLLARIUM III.

120. Igitur si fingatur trapezium ABDC (fig. 24.) habere opposita latera AB, CD parallela ad horizontem, et infinite proxima inter se; subinde vero eius centro gravitatis O sic applicetur horizontalis vis quaepiam ON, ut sit perpendicularis ad verticale planum FEDC; poterit haec vis concipi velut normaliter applicata puncto medio lateris CD.

L E M M A IV.

121. *Centra gravitatis omnium trapeziorum* MNnm, NOon, &c. (*Fig.* 28.), *in quae iuxta propositionem* 30. *divisa fuit superficies strati horizontalis* MNOPQRmnopqr, *sunt quamproxime in eodem plano horizontali.*

Quia latera MN, mn trapezii MNnm sunt (92) parallela, et infinite proxima inter se; centrum gravitatis eiusdem trapezii censeri (119) potest veluti constitutum in puncto medio rectae mn. Pari modo ostendam, centra gravitatis reliquorum omnium trapeziorum censeri posse ut constituta in punctis mediis respondentium aliorum laterum polygoni mnopqr; igitur centra gravitatis omnium trapeziorum MNnm, NOon, &c. erunt quamproxime in eodem plano horizontali, in quo iacet polygonum mnopqr.

COROLLARIUM I.

122. Unde si idem stratum horizontale immersum sit fluido habenti libellam in plano LK (Fig. 27. 28.); centra gravitatis omnium trapeziorum, in quae divisa est superficies huius strati, aequidistabunt (121) a plano LK.

Co-

Corollarium II.

123. Conſequenter ſi centrum gravitatis S trapezii MNnm diſtet a plano libello LK intervallo ST; etiam centra gravitatis reliquorum omnium trapeziorum eodem intervallo ST diſtabunt (122) a plano LK.

PROPOSITIO XXXVI.

124. *Si ſingulae vires perpendiculares, quibus ſolidum* ABED *(Fig. 27. 28.) urgetur a fluido, habente libellam in plano* LK, *reſolvantur in horizontales, et verticales; horizontales invicem elidentur.*

Finge ſolidum ABED diviſum eſſe in ſtrata horizontalia altitudinis infinite parvae, et multitudine infinita, quorum unum ſit MNOPQRmnopqr. Pone deinde quodvis ex his trapeziis, veluti MNnm, centrum gravitatis habere in puncto S, quod intervallo ST diſtet a plano libellae LK. Per ſingula tandem latera mn, no, op, pq, qr inferioris plani mnopqr intellige traducta eſſe verticalia plana, quae terminentur a ſuperiori plano MNOPQR. His poſitis, ſex plana haec verticalia aeque alta, component ſex facies laterales priſmatis recti, habentis pro baſi inferius planum mnopqr, et pro altitudine diſtantiam huius plani a ſuperiori altero MNOPQR. Iam ſi vis quaepiam applicata centro gravitatis S trapezii MNnm, perpendiculariter in hoc agat, ſimulque referat preſſionem perpendicularem a fluido exercitam in trapezium; utique ſi haec vis poſtea reſolvatur in verticalem, et horizontalem, horizontalis expoſita erit (88) per factum ex plano verticali traducto per mn, in ST. Eandem ob cauſam, vis horizontalis exercita a fluido in trapezium NOon, expoſita erit (88. 122.) per factum ex plano verticali traducto per no, in ST, et ſic deinceps; ergo vis horizontalis exercita a fluido in trapezium MNnm, erit ad illam, quae exeritur in trapezium NOon, ut factum ex verticali plano traducto per mn, in ST, ad factum ex verticali plano traiecto per no, in ST, ſive ut mn ad no. Simili modo oſtendam, vires horizontales a fluido exercitas in alia eiusdem ſtrati trapezia OPpo, PQqp, QRrq, RMmr, eſſe ut reſpondentia latera op, pq, qr, rm polygoni mnopqr. Demum cum ſingula haec trapezia habeant duo oppoſita latera parallela, et infinite propinqua; vires horizontales applicatae eorum centris gravitatis, ſpectari poſſunt (121) ut poſitae in eodem plano horizontali mnopqr, et perpendiculariter (120) applicatae ſingulis punctis mediis laterum mn, no, op, pq, qr, per quae exponuntur: Atqui vires ita agentes in latera polygoni mnopqr, mutuo (116) ſe elidunt; ergo etiam elidentur vires horizontales a fluido exercitae in trapezia omnia ſtrati MNOPQRmnopqr. Id autem convenit etiam reliquis aliis ſtratis, in quae diviſum eſt ſolidum ABED; ergo ſi vires perpendiculares, quibus hoc ſolidum a fluido ſollicitatur, reſolvantur in verticales, et horizontales; horizontales mutuo elidentur.

PROPOSITIO XXXVII.

125. *Si vires perpendiculares a fluido exercitae in ſuperficiem internam vaſis, quo continetur, reſolvantur in verticales, et horizontales; horizontales invicem elidentur.*

Sit AD (Fig. 32. 33.) planum libellae fluidi contenti in vaſe ABECD. Dein hoc vas immerge externo, et priori homogeneo fluido MNOL, cuius libella ML ſit in eodem plano AD producto. Vires horizontales, quas fluidum contentum vaſe ABECD, in eius ſuperficiem internam exerit, aequantur (107) viribus illis horizontalibus, quas ambiens fluidum MNOL exercet in ſuperficiem externam vaſis. Sed vires horizontales a fluido ambiente exercitae in ſuperficiem externam vaſis, mutuo (124) eliduntur; ergo pariter elidentur vires horizontales, quas fluidum contentum vaſe ABECD, in ſuperficiem eius internam exerit.

CAPUT VII.

De Aequilibrio, et motu corporum ſolidorum, fluidis demerſorum.

LEMMA.

126. *Si manente volumine dati alicujus corporis homogenei, eius denſitas per totam maſſam uniformiter augeatur, vel minuatur; locus centri gravitatis eiuſdem corporis non mutabitur.*

Corpus homogeneum habet centrum gravitatis in magnitudinis eius centro. Sed poſtquam eius denſitas ubique aequaliter aucta eſt, vel diminuta, corpus etiamnum (11) remanet homogeneum; ergo habebit adhuc centrum gravitatis in magnitudinis eius centro. Sed cum volumen corporis (ex hyp.) non mutetur, eius centrum magnitudinis non variatur; ergo nec eius centrum gravitatis mutari debet.

Corollarium.

127. Ideo si totum homogeneum solidum A B D E (Fig. 37.) homogeneo fluido F P Q G sit immersum; centrum gravitatis C eiusdem solidi erit idem cum centro gravitatis eiusdem fluidi, quod sub eius volumine contineretur. Et si solidi A B D E (Fig. 38.) pars sola A E D fluido H F G P sit immersa; centrum gravitatis c huius immersae partis, erit idem cum centro gravitatis eiusdem fluidi, quod sub volumine immersae partis A E D contineretur.

Propositio XXXVIII.

128. *Si solidum* A B D E (*Fig.* 37.), *quod totum immergitur fluido* F P Q G, *sit immotum; vis verticalis ipsum attollens, esset in aequilibrio cum pondere eiusdem fluidi, quod contineretur sub volumine solidi* A B D E.

Cum immotum sit solidum A B D E, vis verticalis ipsum attollens, erit in aequilibrio cum eius pondere. Sed pondus solidi A B D E aequatur (100) ponderi eiusdem fluidi, quod contineretur sub volumine A B D E; ergo vis verticalis attollens solidum A B D E, esset quoque in aequilibrio cum pondere eiusdem fluidi, quod contineretur sub volumine A B D E.

Propositio XXXIX.

129. *Si solidum* A B D E (*Fig.* 38.), *cuius sola pars* A E D *immergitur fluido* H F G P, *sit immotum; vis verticalis ipsum attollens; esset in aequilibrio cum pondere eiusdem fluidi, quod contineretur sub volumine immersae partis* A E D.

Cum immotum sit solidum A B D E; vis verticalis ipsum attollens; erit in aequilibrio cum eius pondere. Sed pondus solidi A B D E aequatur (104) ponderi eiusdem fluidi, quod contineretur sub volumine A E D; ergo vis verticalis attollens solidum A B D E, esset in aequilibrio cum pondere eiusdem fluidi, quod contineretur sub volumine A E D.

Propositio XL.

130. *Si solidum* A B D E (*Fig.* 37.), *quod totum immergitur fluido* F P Q G, *sit immotum; vis verticalis ipsum attollens, per eius centrum gravitatis transire debet.*

Pun-

Punctum C sit centrum gravitatis solidi A B D E, quod etiam erit (127) centrum gravitatis ipsius fluidi, quod contineretur sub volumine A B D E. Agatur ex C verticalis recta C M, quae etiam normalis erit ad vasis fundum horizontalem P Q. Quia immotum est solidum A B D E, vis verticalis ipsum attollens, esset (128) in aequilibrio cum vi ponderis ipsius fluidi, quod contineretur sub volumine A B D E, et ideo hae duae vires aequales forent, et in partes contrarias dirigerentur. Sed vis ponderis fluidi, quod contineretur sub volumine A B D E, ageret in hoc fluidum secundum rectam verticalem C M; igitur viceversa vis verticalis attollens solidum A B D E, in hoc aget secundum rectam verticalem M C, quae transit per centrum gravitatis C solidi A B D E.

Scholion.

131. Haec propositio pariter habet locum, si manente volumine solidi A B D E, eius densitas per totam massam uniformiter augeatur, vel minuatur, adeo ut ipsum vel intra fluidum cadat, vel sursum promoveatur. Nam ob sic auctam, vel diminutam solidi densitatem, locus eius centri C gravitatis non (126) mutatur; et ideo si dum solidum immotum erat, vis verticalis ipsum attollens, per eius centrum gravitatis (130) transibat, per illud quoque transire debet post auctam, vel diminutam eiusdem solidi densitatem.

Propositio XLI.

132. *Si solidum* A B D E (*Fig.* 38.), *cuius sola pars* A E D *immergitur fluido* H F G P, *sit immotum; vis verticalis ipsum attollens, transibit per centrum gravitatis immersae partis* A E D.

Punctum c sit centrum gravitatis partis immersae A E D, quod (127) etiam erit centrum gravitatis ipsius fluidi, quod contineretur sub volumine A E D. Ex centro gravitatis c ducatur recta verticalis c M, quae perpendicularis quoque erit ad fundum horizontalem F G. Vis verticalis attollens solidum A B D E, esset (130) in aequilibrio cum vi ponderis fluidi, quod contineretur sub volumine A E D, ideoque hae duae vires aequales essent, et agerent iuxta oppositas directiones. Sed vis ponderis fluidi, quod contineretur sub volumine A E D, in hoc fluidum ageret iuxta rectam verticalem c M; igitur e contrario vis verticalis elevans solidum, in hoc aget secundum rectam verticalem M c, quae transit per centrum gravitatis c partis immersae A E D.

 PRO-

PROPOSITIO XLII.

133. *Si solidum* ABDE (*Fig.* 38.), *cuius sola pars* AED *fluido est immersa, quiescit; centra gravitatis eiusdem solidi, et partis immersae in eadem erunt linea verticali, sive perpendiculari ad horizontem.*

Sit C centrum gravitatis solidi ABDE, c vero centrum gravitatis partis immersae AED. Vis ponderis solidi ABDE, et vis ipsum attollens, sunt duae vires verticales, oppositae inter se, simulque agentes in idem solidum, quarum prima transit (130) per centrum gravitatis C solidi ABED, altera autem transit (132) per centrum gravitatis c partis immersae AED. Sed hisce viribus non obstantibus, solidum (ex hyp.) est immotum; consequens ergo erit, ut ambae hae vires se se elidant. Id vero contingere prorsus nequit, nisi duae lineae verticales, iuxta quas agunt, coincidant inter se; ergo centra gravitatis solidi ABED, eiusque partis immersae AED erunt in eadem linea verticali, sive perpendiculari ad horizontem.

COROLLARIUM.

134. Corpus ergo specifice levius fluido, cui immergitur, locum quem occupat, non servabit, nisi centra gravitatis totius solidi, et eius immersae partis in eadem sint recta perpendiculari ad horizontem.

PROPOSITIO XLIII.

135. *Si solidum* ABDE (*Fig.* 37.), *quod totum fluido est immersum, sit eiusdem specificae gravitatis cum hoc fluido; immotum erit.*

Quia solidum ABDE est (ex hyp.) eiusdem specificae gravitatis cum fluido, cui immergitur; ipsum aeque (11) ponderabit ac fluidum comprehensum sub volumine ABDE. Sed vis verticalis, qua deprimitur solidum ABDE, eiusdem ponderi est aequalis, et e contrario vis verticalis ipsum attollens, aequatur (99) ponderi fluidi sub eius volumine comprehensi; ergo vis verticalis, qua deprimitur solidum ABDE, aequalis erit vi verticali, qua attollitur. Sed cum singulae hae vires (130) transeant per centrum C gravitatis solidi ABDE, erunt ambae in eadem linea verticali; ergo elidi debent, ac propterea solidum immotum erit.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

136. *Si solidum* ABDE (*Fig.* 37.), *quod totum fluido est immersum, sit specifice gravius fluido, cui immergitur; idem intra fluidum ea descendet vi, quae aequatur excessui sui ponderis supra pondus fluidi sub eius volumine comprehensi.*

Quia solidum ABDE est specifice gravius fluido, cui immergitur; idem solidum (13) plus ponderabit, quam fluidum sub eius volumine comprehensum. Sed vis verticalis, qua deprimitur solidum ABDE, eiusdem ponderi est aequalis, et contra vis verticalis, qua a fluido attollitur, est (99) aequalis ponderi fluidi sub eius volumine comprehensi; ergo et vis verticalis, qua deprimitur solidum ABDE, maior est vi verticali, qua attollitur. Sed cum singulae hae vires transeant (131) per centrum C gravitatis solidi ABDE, ambae agunt in eadem linea verticali; igitur solidum ABDE descendet vi aequali harum virium differentiae, hoc est vi, quae aequatur excessui sui ponderis supra pondus fluidi sub eius volumine comprehensi.

PROPOSITIO XLV.

137. *Si solidum* ABDE (*Fig.* 37.), *quod totum fluido est immersum, sit specifice levius fluido, cui immergitur; idem intra fluidum ea descendet vi, quae aequatur excessui ponderis fluidi sub eius volumine comprehensi, supra integrum pondus solidi.*

Cum solidum sit specifice levius fluido, in quo mergitur; idem (13) minus ponderabit, quam fluidum sub eius volumine comprehensum. Sed vis verticalis, qua deprimitur solidum ABDE, eiusdem ponderi est aequalis, et contra vis verticalis, qua a fluido attollitur, aequalis est (99) ponderi fluidi sub eius volumine comprehensi; ergo et vis verticalis, qua deprimitur solidum ABDE, minor erit vi verticali, qua attollitur. Sed cum singulae hae vires (131) transeant per centrum C gravitatis solidi ABDE, ambae agunt in eadem linea verticali; ergo solidum ABDE intra fluidum ascendet vi aequali harum virium differentiae, hoc est vi, quae aequatur excessui ponderis fluidi sub eius volumine comprehensi, supra integrum pondus solidi.

PROPOSITIO XLVI.

138. *Si* AED (*Fig.* 38.) *sit pars immersa solidi* ABDE *graviori fluido innatantis; gravitas specifica solidi erit ad specificam fluidi gravitatem, ut volumen partis immersae* AED *ad integrum volumen solidi* ABDE.

Quan-

Quando duo corpora volumine inaequalia, habent aequale pondus, gravitas specifica primi est (27) ad specificam gravitatem secundi, ut volumen secundi ad volumen primi. Sed pondus totius solidi A B D F aequatur (104) ponderi fluidi comprehensi sub volumine A E D; ergo et gravitas specifica solidi A B D E erit ad illam fluidi comprehensi sub volumine A E D, ut volumen A E D ad volumen solidi A B D E. Sed gravitas specifica fluidi comprehensi sub volumine A E D, est eadem cum illa fluidi, cui innatat solidum A B D E; ergo et gravitas specifica solidi A B D E erit ad illam fluidi, cui solidum idem innatat, ut volumen partis immersae A E D ad volumen integrum solidi A B D E.

Corollarium.

139. Ut ergo sciamus quantum, et quomodo solidum A B D E immergi debeat fluido graviori, ut ita immersum quiescat, sequentia sunt praestanda. 1.° Solidum dividatur horizontali plano A D, ita ut totum volumen A B D E sit ad eius partem A E D in ratione gravitatis specificae fluidi H F G P ad specificam gravitatem solidi A B D E. 2.° Quaerenda sunt centra gravitatis C et c solidi A B D E, et partis A E D. 3.° Solidum A B D E ita fluido immergatur, ut pars eius immersa, sit A E D. 4.° Centra gravitatis C et c iungenda sunt recta C c, quae si fuerit perpendicularis plano horizontali A D, indicio erit (133) solidum in hoc situ immotum futurum esse.

Propositio XLVII.

140. *Si solidum* A (*Fig.* 39. 40) *filo* P L *suspensum, successive mergatur in fluidis specifice levioribus* B C D E, F G H I; *pars ponderis sui amissa intra fluidum* B C D E *erit ad illam, quam amittit intra fluidum* F G H I, *ut gravitas specifica fluidi* B C D E *ad specificam gravitatem fluidi* F G H I.

Solidum A immersum fluido B C D E, eam amittit ponderis sui partem, quae aequatur (98) ponderi eiusdem fluidi sub volumine A contenti. Rursus dum solidum idem A immergitur fluido F G H I, pars ponderis sui amissa, aequalis est (98) ponderi eiusdem fluidi, quod sub volumine A contineretur. Sed pondus fluidi B C D E sub volumine A contenti, est (22) ad pondus fluidi F G H I, quod continetur sub volumine eodem A, ut gravitas specifica fluidi B C D E ad gravitatem specificam fluidi F G H I; ergo etiam pars ponderis a solido A amissa intra fluidum B C D E, erit ad illam, quam amittit intra fluidum F G H I, ut gravitas specifica fluidi B C D E ad specificam gravitatem fluidi F G H I.

Propositio XLVIII.

141. *Invenire proportionem, quam inter se habent gravitates specificae diversorum corporum fluidorum.*

Ex lance una G H librae A B (*Fig.* 41.) suspendatur 1.° aliquod pondus P, et in altera lance E F ponatur alterum pondus D, quod in aere aequilibrium servet cum alio P. 2.° Idem pondus P successive diversis fluidis immergatur, pondusque notetur, quod loco alterius D collocandum erit in lance E F, ut cum alio P in singulis fluidis merso, aequilibretur. 3.° singula haec pondera subducantur ab alio D, ut relinquantur partes a pondere P amissae, dum in quolibet fluido mergeretur. 4.° Hae ponderis partes amissae invicem comparentur, et sic (140) etiam prodibit ratio, quam inter se habent gravitates specificae huiusmodi fluidorum.

Caput VIII.

De aeris atmosphaerici pressione, eiusque aequilibrio cum aliis fluidis specifice gravioribus.

Experimentum.

142. Tubum vitreum A B (Fig. 42.) digitis 40 circiter longum, et altera sua extremitate A hermetice sigillatum, mercurio imple. Tum ipsum inverte, obturato prius digito orificio B, inversumque immerge cum claudente digito in vasculum M N Q, alio mercurio plenum. Subtrahe dein paulatim digitum ab orificio B. Quo facto, videbis mercurium etsi gravissimum, non totum descendere intra vasculum M N Q, sed adhuc in tubo suspensum haerere ad altitudinem H C digitorum 28 pedis Parisini.

Scholion I.

143. Hoc est celebre illud experimentum ab Auctore suo Torricellio dictum torricellianum, quod sicuti non sine stupore a Philosophis primitus exceptum fuit, ita doctrinae de aeris gravitate felices natales dedit, vulgatumque errorem Veterum profligavit, qui cum in tubis longioribus non cepissent experimentum, suspensionem liquorum in brevioribus horrori vacui adscribebant. Non obstante enim praetenso hoc vacui metu, compertum est liquores descendere in procerioribus tubis, in quibus per hunc descensum aeque ac in brevioribus esset vacuum metuendum.

Scholion II.

144. Notandum vero altitudinem HC digitorum 28, ad quam mercurius in tubo suspensus haeret, permanentem non esse, sed variabilem; si enim tubum torricellianum aliquandiu aeri exposueris, videbis mercurium modo ascendere usque ad E, modo descendere usque ad F, ita tamen ut variatio EF duos digitos vix excedat.

Scholion III.

145. Haec autem altitudinum variatio multo minor est in regionibus proximis aequatori. Observavit (a) enim Nob. Condamine in ora maritima Regni Peruani hanc mutationem toto anni decursu vix esse 3 linearum. Eadem ferme etiam inventa fuit altitudinum variatio in urbe Batavia, quae in insula Iava extat. Rursus hæc variatio in Promontorio Bonae Spei non ultra 10 lineas se extendit. Tandem in Urbe Quito posita in excelso monte Cordelliere, maxima differentia altitudinum mercurii in tubo vix superat lineam $1\frac{1}{2}$.

DEFINITIO XI.

146. *Aer consistentiae naturalis* est atmosphericus ille aer, qui proxime ambit hanc superficiem terrae.

PROPOSITIO IL.

147. *Aer, ex quo componitur atmosphaera est gravis.*

Superficies mercurii stagnantis in vasculo sit MQ (Fig. 42.), et pars tubi torricelliani eidem immersa, sit CBD; eritque sectio eius CD portio superficiei horizontalis MQ. Cum (ex hyp.) quiescat mercurius contentus vasculo MNQ, singulae eius particulae in superficie eius MQ constitutae, viribus aequalibus, et ad eandem normalibus (46) premi deorsum debent. Sed particulae positae in CD, premuntur deorsum ab aequalibus ponderibus filamentorum mercurii, superficiei MQ perpendiculariter insistentium; ergo particulae etiam aliae in eadem superficie MQ constitutae, aequalibus ponderibus, quae prioribus aequivaleant, comprimentur. Atqui haec pondera nequeunt esse alia praeter illa filamentorum aeris atmosphaerici, superficiei MQ perpendiculariter insistentium; ergo singula aeris atmosphaerici filamenta tantundem ponderant, quantum mercurii singula filamenta, ex quibus constat columna HD, et ideo aer, ex quo componitur atmosphaera, est gravis.

(a) Voyage de la Riviere des Amazones, et Introduction historique pag. 162.

Corollarium.

148. Hinc si supra circulum PL, aequalem basi CD columnae mercurialis HD, erecta concipiatur columna aeris IL, protensa usque ad terminum atmosphaerae; pondus huius columnae aequabitur ponderi mercurialis columnae HD. Nam singula aeris filamenta, ex quibus constat columna IL, tantundem ponderant (147), quantum singula filamenta mercurii, quae componunt columnam HD. Sed tot sunt aeris filamenta in columna IL, quot sunt filamenta mercurii in columna HD; ergo pondus columnae IL aequabitur ponderi columnae HD. Pondus columnae IL vocabitur deinceps *pondus*, aut *pressio atmosphaerae*.

Corollarium II.

149. Et ideo si oceanus mercurii digitis 28 altus, esset globo terraqueo circumfusus; tunc eiusdem globi terraquei superficies eandem pressionem (148) subiret ab hoc oceano, quantam nunc subit ab aere atmosphaerae.

Corollarium III.

150. Hinc atmosphaericus ille aer, qui proxime ambit hanc superficiem terrae, quique est etiam (146) consistentiae naturalis, erit in statu compressionis. Nam premitur (148) gravitate aeris superioris perinde ac si sustineret pondus columnae mercurialis, eidem normaliter insistentis, et (149) altae digitis 28.

PROPOSITIO L.

151. *Pondus mercurialis columnae* HD (*Fig.* 43.), *digitis 28 altae, aequatur ponderi aqueae columnae* VG, *aeque crassae, et altae pedibus 32, et digitis 8.*

Quia altitudo VI est (ex hyp.) pedum 32 et digitorum 8, eadem erit etiam digitorum 392, et ideo VI erit ad HC, ut 392 ad 28, sive ut 14 ad 1. Sed cum mercurius decies quater gravior sit quam aqua, gravitas specifica mercurialis columnae HD est ad gravitatem specificam columnae aqueae VG, ut 14 ad 1; ergo etiam VI erit ad HC, ut gravitas specifica mercurialis columnae HD ad gravitatem specificam aqueae columnae VG. Sed cum hae duae columnae (ex hyp.) habeant aequales bases, est VI ad HC, ut columna VG ad columnam HD; ergo et gravitas specifica mercurialis columnae HD erit ad illam aqueae columnae VG, ut haec columna VG ad columnam HD, ideo-

ideoque pondus mercurialis columnae HD aequabitur (27) ponderi aqueae columnae VG.

Corollarium.

152. Hinc preſſio columnae atmoſphaericae aequabitur ponderi columnae aqueae, aeque craſſae, et altae pedibus 32, digitis 8. Nam preſſio columnae atmoſphaericae aequatur ponderi columnae mercurialis, aeque craſſae, ſed altae digitis 28. Atqui pondus hujus columnae aequatur (151) ponderi columnae aqueae, aeque craſſae, et altae pedibus 32, et digitis 8; ergo et preſſio columnae atmoſphaericae aequabitur ponderi columnae aqueae, aeque craſſae, et altae pedibus 32, et digitis 8.

Scholion.

153. Haec vera ſunt in hypotheſi, quod altitudo mercurii in tubo torricelliano ſit digitorum 28. Caeterum ſi eadem altitudo fuerit digitorum 27, aut 29, ut ſaepe (144) contingit; in primo caſu preſſio columnae atmoſphaerae aequabitur ponderi columnae aqueae, aeque craſſae, et altae pedibus 31, et digitis 6; in altero autem ponderi columnae aqueae, aeque craſſae, ac altae pedibus 33, et digitis 10.

PROPOSITIO LI.

154. *Aer conſiſtentiae naturalis, ſive qui proxime ambit hanc ſuperficiem terrae, eſt fluidum compreſſibile.*

Sit cylindricus inflexus tubus LABNCP (Fig. 44), ubivis aeque amplus, et conſtans duobus cruribus verticalibus AO, PK, et horizontali SN. Altitudo AS longioris cruris AO ſit pedum 6, et altitudo CK brevioris PK ſit pedis 1, ſeu 12 digitorum. Extremitas AL primi cruris AO ſit patens, et ſecundi extremitas PC hermetice ſigillata. Hoc poſito, ſi per orificium patens AL tantam mercurii copiam tubo infundas, quae ſolum repleat crus SN, ita ut ſuperficies SO, MK in eodem ſint plano horizontali SK; aer crure PK incluſus, erit conſiſtentiae naturalis, aut aeque preſſus ac aer externus, proxime ambiens tubum. Superficies enim SO mercurii immoti SN premitur deorſum (147) a pondere columnae atmoſphaericae orificio AL verticaliter inſiſtentis. Atqui haec preſſio ope mercurii SN transfertur (33) etiam in aerem crure PK contentum; igitur etiam aer crure PK contentus, ſurſum premitur vi aequali ponderi columnae atmoſphaericae, quae orificio AL inſiſtit. Sed

aer

aer preſſus a ſolo pondere atmoſphaerae eſt (150) conſiſtentiae naturalis; ergo et aer crure PK contentus, erit conſiſtentiae naturalis. Nunc alium mercurium in tubum immitte, qui in longiori crure aſcendat uſque ad H, in breviori autem uſque ad E, et duc per E planum horizontale ED. Iam ſi contingat, ut altitudo HD mercurialis columnae HQ ſit 28 digitorum, videbis CE eſſe 6 digitorum, ideoque concludes, aerem, qui prius continebatur integro ſpatio PK, modo redactum eſſe in ſpatium duplo minus PE. Si alio tandem mercurio in tubum immiſſo, ipſe aſcenderit uſque ad I, et G, adeo ut (ducto per G plano horizontali GF) altitudo FI mercurialis columnae IR ſit duplo maior digitis 28; deprehendes CG eſſe 4 digitorum, atque ita etiam colliges, aerem prius contentum in ſpatio PK, tunc contractum eſſe in ſpatium triplo minus PG. Sed aer, qui prius continebatur in ſpatio PK, erat (ex demonſtr.) conſiſtentiae naturalis; igitur aer conſiſtentiae naturalis eſt fluidum compreſſibile.

PROPOSITIO LII.

155. *Si eadem maſſa aeris conſiſtentiae naturalis modo maiori, modo minori pondere comprimatur; eadem reducetur in ſpatium tanto minus, quanto maius eſt pondus, quo premitur, hoc eſt pondera eandem maſſam aeris comprimentia, erunt reciproce ut ſpatia, ad quae ipſa reducitur.*

Quamdiu mercurius inditus tubo LABNCP (Fig. 44) replet ſolum crus horizontale SN, aer ſpatio PK contentus, eſt (154) conſiſtentiae naturalis, aut tantummodo ſurſum preſſus vi aequali ponderi columnae atmoſphaericae, quae orificio AL inſiſtit. Si vero mercurius inditus tubo, aſcenderit uſque ad H, et G, aerque ſubinde contrahatur in ſpatium PE; hic (154) premetur ſurſum tum a pondere columnae atmoſphaericae, quae orificio AL inſiſtit, tum etiam a pondere mercurialis columnae HQ, altae digitis 28. Atqui pondus mercurialis columnae HQ aequatur (148) ponderi columnae atmoſphaericae, orificio AL inſiſtentis; igitur aer in ſpatium PE contractus, premitur ſurſum a pondere duplo illius, quo premebatur, dum occupabat integrum ſpatium PK. Sed etiam ſpatium PK eſt (154) duplum ſpatii PE; ergo et pondus, quo premitur aer in ſpatium PE contractus, erit ad pondus, quo premitur idem aer incluſus ſpatio PK, ut ſpatium PK ad ſpatium PE. Simili modo oſtendam pondus, quo premitur aer in ſpatium PG redactus, eſſe triplum illius, quo premebatur, dum occupabat ſpatium PK, et ideo primum pondus eſſe ad alterum, ut ſpatium PK ad ſpatium PG; igitur generatim pondera eandem maſſam aeris comprimentia, erunt reciproce ut ſpatia, ad quae ipſa reducitur.

Scho-

SCHOLION.

156. Neque obiici potest quod si haec lex compressionis universaliter vera esset, finita aliqua massa aeris pressa a pondere infinito, infinite parvum spatium occuparet; pressa vero a pondere infinite parvo, occuparet spatium infinitum, quod est absurdum. Hoc enim ad summum probare potest, hanc legem non posse extremis compressionibus, et dilatationibus aeris applicari, quod verissimum plane est; quacunque enim figura sint praeditae partes aeris, ipsae ubi ad summum compressionis et dilatationis gradum pervenerint, non possunt amplius comprimi, et dilatari. Verum cum vires, quas in nostris experimentis ad comprimendum aerem adhibemus, mediocres sint, certosque limites non excedant; lex compressionis superius demonstrata, tamquam universaliter vera censenda erit, dummodo tamen aer in compressionibus successivis eidem semper caloris gradui exponatur. Certe experimenta a Bouguerio (a), et Godinio instituta tam in insulis Sancti Dominici, et Martinicae, quam in altissimis montibus Peruanis, accurate satis ostendunt, pondera, quibus premitur eadem massa aeris, semper esse reciproce ut spatia, ad quae ipsa reduci solet.

COROLLARIUM.

157. Hinc pondera eandem massam aeris comprimentia, erunt etiam ut compressi aeris densitates. Nam eadem massa aeris redditur eo densior, quo minus est spatium, ad quod reducitur; ideoque eiusdem massae aeris densitates erunt reciproce ut spatia, ad quae ipsa reducitur. Sed etiam pondera eandem massam aeris comprimentia, sunt (155) reciproce ut spatia, ad quae ipsa reducitur; igitur erunt quoque, ut compressi aeris densitates.

PROPOSITIO LIII.

158. *Aer consistentiae naturalis, seu qui proxime ambit hanc superficiem terrae, est praeditus vi elastica.*

Per orificium patens AL (Fig. 44.) inflexi tubi LABNCP eam mercurii copiam in eum immitte, ut solum repleat horizontale crus SN, quo in casu, mercurio manente immoto, ambae eius superficies aequales SO, MK erunt in eodem plano horizontali SK, aerque crure PK contentus, erit (154) consistentiae naturalis. Itaque cum mercurius crure SN contentus, sit in aequilibrio constitutus, eius superficies aequales SO, MK deorsum aequaliter comprimentur. Sed superficies SO premitur (150) deorsum a pondere co-

(a) Hist. de l'Acad. Roy. ann. 1753.

columnae atmosphaericae, ipsi normaliter insistentis; ergo et superficies alia MK deorsum premetur vi, quae ponderi eiusdem columnae atmosphaericae sit aequalis. Sed haec vis premens deorsum superficiem MK, oriri nequit a pondere aeris spatio PK inclusi, quia hoc pondus cum illo totius columnae atmosphaericae comparatum, pro nullo haberi potest; igitur solum debet procedere a conatu, quem exerit idem aer ad maius spatium occupandum, atque ita ipse erit (10) praeditus vi elastica. Sed aer spatio PK inclusus, est (ex demonstr.) consistentiae naturalis; igitur aer consistentiae naturalis est praeditus vi elastica.

COROLLARIUM I.

159. Hinc vis elastica aeris consistentiae naturalis, aut proxime ambientis hanc superficiem terrae, aequalis erit (158) ponderi columnae atmosphaericae, ipsi verticaliter insistentis.

COROLLARIUM II.

160. Unde quaelibet massa aeris consistentiae naturalis pari vi expandere se conatur, hoc est vim elasticam eandem habet, sive ipsa toto atmosphaerico pondere sit gravata, sive in aliquo vase clausa.

COROLLARIUM III.

161. Et ideo tanta vi premet interna vasis latera, in quo clauditur, quanta haec premerentur a pondere columnae atmosphaericae incumbentis.

COROLLARIUM IV.

162. Non itaque est mirandum, si mercurius contentus tubo Torricelliano, ad eandem semper altitudinem suspendatur, sive tubus, et vasculum, cui immergitur, sint in aliquo loco clauso, sive libero aeri exponantur. Quamvis enim in loco clauso superficies mercurii stagnantis in vasculo, non prematur a pondere atmosphaerae; premitur nihilominus ab inclusi aeris vi elastica, quae (159) eidem ponderi aequipollet.

PROPOSITIO LIV.

163. *Si eadem massa aeris consistentiae naturalis reducatur in spatium duplo, aut triplo minus; eius vis elastica e contrario fiet duplo, aut triplo maior.*

In tubum inflexum LABNCP (Fig. 44.) tantam infunde mercurii quantitatem, ut aer consistentiae (154) naturalis spatio PK con-

contentus, reducatur in ſpatium P E, vel P G, duplo, aut triplo minus. Dico, quod viceverſa vis elaſtica eius fiet duplo, aut triplo maior. Siquidem aer conſiſtentiae naturalis ſpatio P K incluſus, premitur a ſolo pondere atmoſphaerae; redactus autem ad ſpatium P E, vel P G, premitur a pondere, quod duplum, aut triplum eſt (155) ponderis atmoſphaerae. Unde eodem modo, quo ſupra (158) oſtendi vim elaſticam aeris ſpatio P K contenti, aequalem eſſe ponderi atmoſphaerae, etiam demonſtrabo, vim elaſticam aeris ad ſpatium P E redacti, duplam eſſe ponderis atmoſphaerici, et vim elaſticam aeris in ſpatium P G contracti, ponderis atmoſphaerici triplam eſſe; igitur vis elaſtica aeris redacti in ſpatium P E, dupla eius erit, quam ipſe habebat, cum repleret ſpatium P K, et vis elaſtica aeris in ſpatium P G contracti, tripla eiuſdem erit.

Corollarium I.

164. Sicuti ergo ſi eadem maſſa aeris conſiſtentiae naturalis redigatur in ſpatium duplo, aut triplo minus, vis elaſtica eius fit (162) duplo, aut triplo maior: ita ſi e contrario dilatetur in ſpatium duplo, aut triplo maius, vis elaſtica eius fiet duplo, aut triplo minor.

Corollarium II.

165. Propterea generatim vis elaſtica aeris creſcit, aut diminuitur in ratione reciproca ſpatiorum, ad quae ipſe reducitur.

Corollarium III.

166. Et quia pondera eandem maſſam aeris comprimentia, ſunt (155) in ratione reciproca ſpatiorum, ad quae ipſa reducitur; conſequens eſt, ut etiam vis elaſtica eius creſcat, aut minuatur (165) in ratione ponderum comprimentium.

Propositio LV.

167. *Aer, ex quo componitur atmoſphaerica columna* I L (*Fig.* 42.), *eſt fluidum heterogeneum.*

Cum gravis ſit (147) aer, quo conſtat columna I L; utique ille, qui propior eſt baſi P L, maiori pondere premi debet, quam qui eſt remotior ab eadem. Atqui compreſſi aeris denſitates ſunt (157) ut pondera comprimentia; ergo aer, qui propior eſt baſi P L, denſior alio erit, qui maiori intervallo ab illa diſtat. Denſitas ergo aeris, ex quo conſtat columna I L, augebitur accedendo ab I ad P; atque adeo ipſa per totam eius maſſam difformis erit. Sed fluidum, cuius denſitas per totam maſſam difformis eſt, dicitur (18) heterogeneum; ergo aer, ex quo componitur atmoſphaera, eſt fluidum heterogeneum.

Scho-

Scholion.

168. Si tamen altitudo P O alicuius ſtrati horizontalis O L admodum parva ſit prae altitudine atmoſphaerae; tunc denſitas aeris conſiderari poterit ut protracta uniformiter a P uſque ad O; et ideo totus aer eiuſdem ſtrati cenſendus erit ut fluidum homogeneum. Nam pondera atmoſphaerica, quae comprimunt partes ſingulas huius ſtrati, quam proxime ſunt aequalia inter ſe. Sed harum partium denſitates ſunt (157) ut pondera comprimentia; ergo et denſitates partium earundem poterunt accipi ut aequales, ac per conſequens totus aer, quo componitur idem ſtratum, habendus erit ut fluidum homogeneum.

Propositio LVI.

169. *Aſcenſus, et deſcenſus mercurii in tubo Torricelliano indicant incrementum, et decrementum ponderis atmoſphaerae.*

Quia pondus atmoſphaericae columnae I L (Fig. 42.) aequatur ponderi (148) mercurialis columnae H D, cum qua aequilibratur; utique manente eadem mercurii altitudine H C in tubo, idem manebit etiam pondus atmoſphaericae columnae I L. At ſi contingat, ut aliqua pars mercurii, quae prius in vaſculo ſtagnans erat, tubum ingrediatur, et mercurius aſcendat uſque ad E; tunc pondus columnae I L, quod prius erat in aequilibrio cum pondere mercurialis columnae H D, conſtituet aequilibrium cum pondere gravioris columnae E D; id quod fieri prorſus nequit, niſi antea auctum fuerit pondus columnae I L. Si vero contra aliqua pars mercurii ſuſpenſi in tubo, in vaſculum cadat, et ſubinde mercurius deſcendat ad punctum F; tunc pondus columnae I L, quod prius erat in aequilibrio cum pondere mercurialis columnae H D, aequilibrabitur cum pondere levioris columnae F D; quod fieri prorſus nequit, niſi antea fuerit diminutum pondus columnae I L. Quare aſcenſus, et deſcenſus mercurii in tubo Torricelliano, indicant incrementum, et decrementum ponderis atmoſpherae.

Scholion.

170. Supponit hoc theorema, elaſticitatem aeris atmoſphaerici eandem perpetuo conſervari. At ſi in regione media, aut infima atmoſphaerae a nonnullis anhelitibus erumpentibus a tellure, ab igne ſolis, ab igne ſubterraneo, aliiſque cauſis elaſticitas aeris intendatur; in hoc caſu mercurius contentus vaſculo, fortius comprimetur, atque ita altius elevabitur intra tubum, etiamſi pondus atmoſphaericum non mutetur.

Co-

COROLLARIUM.

171. Cum ergo tubus Torricellianus ob ascensum, descensumque mercurii in eo suspensi, indicet incrementum, et decrementum ponderis atmosphaerae, iure quidem, ac merito *Baroscopium*, aut *Barometrum* appellatur.

PROPOSITIO LVII.

172. *Coelo sereno, altitudo mercurii suspensi in Barometro, erit maior, quam coelo pluvio.*

Quia, coelo sereno, vapores contenti in atmosphaera, quiescunt, ipsi totam vim ponderis sui impendent in comprimendo aere inferiori. Sed hic aer inferior etiam (148) premitur pondere aeris superioris; igitur tota pressio atmosphaerae aequivalebit his duobus ponderibus simul sumptis. At, coelo pluvio, cum vapores, qui prius immoti erant in atmosphaera, actu descendant; ipsi non totam vim ponderis sui impendent in comprimendo aere inferiori, sed solummodo eam partem, quae necessaria est ad superandam eiusdem aeris resistentiam. Ergo, coelo sereno, pressio atmosphaerae est maior, quam coelo pluvio. Sed pressio atmosphaerae aequatur (148) ponderi columnae mercurialis, quae in Barometro est suspensa; ergo et pondus huius columnae maius erit coelo sereno, quam pluvio, ideoque altitudo mercurii suspensi in Barometro, maior erit sereno coelo, quam pluvio.

PROPOSITIO LVIII.

173. *Si ex humiliori loco Barometrum transferas in altiorem, descendet mercurius intra tubum; ascendet vero, si ex altiori loco ipsum transferas in humiliorem.*

Quo altior est locus ubi Barometrum A B (Fig. 42.) ponitur, eo minor est ibi altitudo atmosphaericae columnae I L, atque adeo etiam eo minus erit eiusdem pondus. Sed pondus huius columnae I L aequatur (148) ponderi columnae mercurialis suspensae in tubo; ergo quo altior est locus, ubi Barometrum collocatur, eo minus etiam ibi erit pondus columnae mercurialis in eo suspensae. Quare si ex loco humiliori Barometrum transferas in altiorem, descendet mercurius intra tubum. Simili modo ostendam, mercurium ascendere intra tubum, si ex altiori loco Barometrum deferas in inferiorem.

SCHO-

SCHOLION I.

174. Ex accuratis Philosophorum observationibus innotescit, Barometrum ex superficie terrae ad montis alicuius verticem elevato, mercurium suspendi ad altitudinem minorem illa, ad quam elevatur in superficie terrae, posito eodem loco, et tempore, quo capiuntur experimenta. Constat similiter viceversa, Barometro in fodinis profundissimis constituto, mercurium in eo suspensum, altius elevari, quam in superficie terrae.

SCHOLION II.

175. At si quaeratur ad quamnam altitudinem supra superficiem terrae sit Barometrum attollendum, ut mercurius in eo suspensus, fiat una linea parisina depressior, quam in eadem superficie, aut in littore maris? Ut satisfiat huic quaestioni, consulenda imprimis est tabella observationum, quam affert Musschembroekius (a) in suis commentariis in Tentamina Academiae Cimentinae. Iuxta hanc autem Toinardus invenit, Barometro elevato ad altitudinem pedum 60 supra superficiem terrae, mercurium in eo suspensum, una linea descendisse. Cassinus autem expertus est, mercurium non descendisse per altitudinem unius lineae, nisi prius Barometrum attolleretur ad altitudinem pedum 80. Piccardus denique observavit, mercurium fuisse una linea depressiorem, cum Barometrum elevaretur ad altitudinem pedum 85 $\frac{1}{2}$. Unde si harum altitudinum media capiatur, statui potest mercurium fieri una linea depressiorem, si Barometrum attollatur ad altitudinem pedum 75 supra superficiem terrae.

SCHOLION III.

176. Nec mirum videri debet, quod tres allatae observationes ita differant inter se, ut enim barometricae observationes accurate conveniant inter se, ipsae eodem tempore, et in locis aeque altis institui debent. Nam in eodem etiam terrae loco atmosphaera non semper est aeque gravis; quo autem gravior est atmosphaera, eo minus erit Barometrum elevandum, ut mercurius descendat una linea parisina, et contra quo levior est atmosphaera, eo magis erit Barometrum elevandum, ut mercurius suspensus in tubo, una linea deprimatur. Praeterea observationes eodem tempore etiam captae in locis non aeque altis, mutuo discrepabunt; nam in loco inferiori aer utpote magis pressus, gravior est quam in altiori, ideoque in primo casu

(a) Tentamina experimentorum naturalium captorum in Academia *del Cimento* pag. 54.

casu Barometrum erit minus elevandum quam in alio, ut mercurius in eo suspensus, una linea deprimatur. Cum autem tres allatae observationes nec eodem tempore, neque in locis aeque altis fuerint institutae, necessario debebunt invicem discrepare.

PROPOSITIO LIX.

177. *Gravitas specifica mercurii est ad gravitatem specificam aeris consistentiae naturalis, ut 10800. ad 1.*

Barometrum A B (Fig. 42.) statuatur ad littus maris, et altitudo mercurii in eo suspensi, sit H C; eritque (148) mercurii columna H D eiusdem ponderis cum atmosphaerica columna I L. Iam si accepta altitudine P O pedum 75, Barometrum transferatur ad locum O, descendet mercurius (175) intervallo H F unius lineae, et mercurialis columna F D erit eiusdem ponderis cum aerea alia I S; igitur reliqua mercurialis columna H K tantundem ponderabit, quantum residua aeris columna O L. Atqui aer contentus columna O L, censeri potest (168) ut fluidum homogeneum; ergo gravitas specifica mercurialis columnae H K erit (27) ad specificam gravitatem aeris contenti in columna O L, ut columna O L ad columnam H K, sive ut O P ad H F, aut ut altitudo pedum 75, seu linearum 10800 ad altitudinem unius lineae, sive ut 10800. ad 1. Atqui aer, ex quo componitur columna O L, proxime ambit hanc superficiem terrae, sive est consistentiae naturalis; ergo gravitas specifica mercurii erit ad gravitatem specificam aeris consistentiae naturalis, ut 10800. ad 1.

Corollarium.

178. Hinc gravitas specifica aquae erit ad specificam gravitatem aeris proxime ambientis hanc superficiem terrae, ut $771\frac{3}{7}$ ad 1. Nam gravitas specifica aquae est ad specificam gravitatem mercurii, ut 1 ad 14. Sed gravitas specifica mercurii est ad specificam gravitatem aeris (177), ut 10800 ad 1; ergo ex aequo, et ex compositione rationis, gravitas specifica aquae erit ad specificam aeris gravitatem, ut 10800 ad 14, sive ut $771\frac{3}{7}$ ad 1. Haec autem ratio quamproxime aequalis est rationi $774\frac{6}{41}$, quam Ioannes Bernoullius invenit per condensationem aeris factam in vase aeneo valde amplo.

LEM-

LEMMA

179. *Quantitates differentiis suis proportionales, sunt continue proportionales.*

Sint rectae A H, A G, A L, A M, A N (Fig. 50.) quarum differentiae H G, G L, L M, M N. Sit quoque A H ad A G, ut H G ad G L, A G ad A L, ut G L ad L M, et A L ad A M, ut L M ad M N. Dico, quod rectae A H, A G, A L, A M, A N erunt continue proportionales. Quia A H est (ex hyp.) ad A G, ut H G ad G L; etiam permutando, erit A H ad H G, ut A G ad G L, et componendo, A G ad H G, ut A L ad G L, et convertendo, A G ad A H, ut A L ad A G, et invertendo, erit A H ad A G, ut A G ad A L. Simili modo ostendam, A G esse ad A L, ut A L ad A M, et A L esse ad A M, ut A M ad A N; ergo rectae A H, A G, A L, A M, A N erunt continue proportionales.

PROPOSITIO LX.

180. *Si altitudo atmosphaerae* A T *(Fig. 51.) divisa concipiatur in partes infinite parvas, et aequales* A B, B C, C D, D E, *&c.; aeris densitates in locis* A, B, C, D, E, *&c. erunt continue proportionales.*

Rectae A H, B I, C K, D L, E M, &c. perpendiculares ad altitudinem A T, exponant aeris densitates in locis A, B, C, D, E, &c. quae uniformiter continuentur ab A ad B, a B ad C, a C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, E, &c. Pressio, quam particula A subit a columella A B, est ad pressionem, quam sustinet particula B, vel A a columella B C, ut pondus columellae A B ad pondus columellae B C, sive (25) in ratione composita densitatis A H ad densitatem B I, et voluminis A B ad volumen B C, sive (ob aequalia volumina A B, B C) ut A H ad B I. Si ergo A H sit pressio, quam particula A subit a columella A B, erit similiter B I pressio, quam eadem subit a columella B C. Eandem ob causam C K, D L, E M, &c. erunt pressiones, quas particula A subit a sequentibus aliis columellis C D, D E, E F, &c. Sustinet ergo particula A pressiones omnes A H, B I, C K, D L, E M, pergendo in infinitum, et particula B pressiones omnes praeter primam A H, et particula C omnes praeter duas primas A H, B I; et sic deinceps. Sed densitas A H particulae primae A est (157) ad densitatem B I particulae secundae B, ut pressiones omnes, quas sustinet particula prima A, ad omnes pressiones, quas subit particula secunda B; ergo etiam AH erit ad BI, ut summa omnium AH, BI, CK, DL, EM, &c. ad summam omnium BI, CK, DL, EM, &c. Similiter densitas BI particulae secundae B erit ad densitatem CK particulae tertiae C, ut summa omnium BI, CK, DL, EM, &c. ad summam omnium CK, DL, EM, &c. Sunt igitur summae illae differentiis suis AH, BI, CK, &c. proportionales, atque adeo etiam (179) erunt continue proportionales, proindeque differentiae AH, BI, CK, &c., quae ostensae sunt summis proportionales, erunt etiam continue proportionales. Unde cum densitates in locis A, B, C, D, E, &c. expositae sint rectis AH, BI, CK, DL, EM, &c. erunt hae quoque continue proportionales.

Corollarium I.

181. Quoniam locorum A, B, C, D, E, &c. distantiae TA, TB, TC, TD, &c. a vertice atmosphaerae componunt arithmeticam progressionem, et aeris densitates AH, BI, CK, DL, &c. in iisdem locis, constituunt (180) geometricam progressionem; utique locorum distantiae a vertice atmosphaerae erunt totidem logarithmi densitatum aeris in eisdem locis.

Corollarium II.

182. Et quia aeris densitates in locis quibuslibet atmosphaerae sunt (157) ut pressiones, quas ibi sustinent ab omnibus columellis superius incumbentibus, aut (148) ut elevationes mercurii in Barometro translato ad illa loca; ideo locorum distantiae a vertice atmosphaerae erunt totidem logarithmi elevationum mercurii in iisdem locis.

Propositio LXI.

183. *Datis in altitudine* IP (*Fig.* 42.) *atmosphaericae columnae* IL *tribus locis quibuslibet* R, O, Z, *dataque etiam differentia* RZ *altitudinum primi* R, *et tertii* Z, *invenire pariter differentiam* OZ *altitudinum secundi* O, *et tertii* Z.

Barometro AD successive translato ad loca R, O, Z, notentur in eo mercurii elevationes CF, CH, CE respondentes eisdem locis; eruntque (182) tres rectae IR, IO, IZ logarithmi elevationum mercurii CF, CH, CE. Sed differentiae numerorum sunt quamproxime proportionales differentiis logarithmorum, qui numeris his conveniunt; ergo FH erit ad HE, ut RO ad OZ, et componendo erit FE ad HE, ut RZ ad OZ. Sunt autem observatione datae primae duae FE, HE, et praeterea tertia RZ est (ex hyp.) etiam nota; igitur nota erit etiam quarta OZ, quae est quaesita differentia altitudinum duorum locorum O et Z.

EXEM-

Exemplum I.

184. Bouguerius (a) observavit, in Regno Peruano supra verticem R montis Pitchincha mercurium in Barometro elevari ad altitudinem CF poll. 15, lin. 11, hoc est lin. 191. Godinius pariter expertus fuit, mercurium Barometri translati ad verticem O montis Choussay, manere sub altitudine CH poll. 17, lin. $10\frac{1}{2}$, hoc est lin. $214\frac{1}{2}$, aut lin. $214\frac{5}{10}$, seu lin. $\frac{2145}{10}$. Rursus idem Bouguerius invenit, mercurium Barometri in vertice Z montis Carabourou haerere sub altitudine CE poll. 21. lin. $2\frac{3}{4}$, seu lin. $254\frac{3}{4}$, aut lin. $\frac{1019}{4}$. Denique per notas regulas geometricas detexit distantiam RZ inter vertices montium Pitchincha, et Carabourou esse hexapedarum 1208. Cum elevatio CE mercurii in vertice Z montis Carabourou sit lin. $\frac{1019}{4}$, eius logarithmus IZ erit 2.4061142. Rursus quia mercurii altitudo CF in vertice montis Pitchincha est lin. 191, eius logarithmus IR erit 2.2810334; unde si hunc logarithmum auferas a priori, prodibit differentia illorum RZ 0.1250808. Denique mercurii elevatio CH in vertice O montis Choussay est lin. $\frac{2145}{10}$, cuius logarithmus IO est 2.3314273. Si itaque hunc subduxeris a logarithmo IZ elevationis CE in monte Carabourou, prodibit eorum differentia OZ 0.0746869. Nunc fiat, ut RZ ad OZ, sive ut 1250808 ad 746869, ita RZ expressa hexapedis 1208 ad quartum terminum proportionalem 722 $\frac{95}{100}$; hic dabit numerum hexapedarum contentarum in recta OZ, quibus vertex montis Choussay est altior vertice montis Carabourou. Haec autem inventa altitudinum differentia, ne per hexapedam quidem unam ab illa differt, quam Godinius ope mensurae geometricae adinvenit.

Exemplum II.

185. Quaeritur numerus hexapedarum, quibus vertex montis Carabourou est inferior pago Alaussy posito ad radicem montis Choussay, ubi mercurius in Barometro haeret sub altitudine poll. 21, lin. $1\frac{1}{4}$. Idem in hoc exemplo est calculus adhibendus, qui institutus in primo fuit. Imprimis itaque logarithmus elevationis mercurii in pago Alaussy subducatur a logarithmo elevationis mercurii in vertice montis Carabourou, ut prodeat residuum 0.0025648.

H 2 Dein-

(a) Hist. de l'Acad. Roy. ann. 1753.

Deinde fiat, ut 1250808 ad 25648, ita hexapedae 1208 ad quartum terminum proportionalem $24\frac{78}{100}$; hic dabit numerum hexapedarum, quibus vertex montis Carabourou depressior est pago Alaussy. Haec autem inventa altitudinum differentia quamproxime illi aequatur, quam Godinius per calculum geometricum adinvenit.

Scholion.

186. Ex his duobus exemplis patet, Barometri beneficio satis exacte determinari differentiam altitudinum inter proposita duo loca. Sane, ut Bouguerius (a) inveniret altitudines editissimorum montium Cordelliere, admodum feliciter hanc regulam est sequutus. Nam quo altior est locus, ubi Barometrum constituitur, eo minus turbatur aeris elasticitas, minusque propterea alteratur proportio (157) demonstrata inter aeris densitates, et pondera comprimentia. Verum in illis locis, quae non multum assurgunt supra libellam maris, tuto nequit haec regula adhiberi. Cum enim ibi aeris elasticitas a radiorum solarium reflexione, et ab exhalationibus e tellure erumpentibus immutetur; pressiones, quas subit aer in illis locis, non erunt amplius proportionales ponderibus comprimentibus. Propterea si Bouguerius hac methodo quaesivisset altitudines etiam mediorum montium Cordelliere, eas invenisset multum diversas ab illis esse, quae per mensuram geometricam inferuntur.

PROPOSITIO LXII.

187. *Si Barometro delato ex loco Z ad O, mercurius descendat ex E in H, et eo translato ad locum R, descendat rursus ex H in F; gravitas specifica mercurii erit ad specificam gravitatem aeris contenti in columna RS, ut differentia RO altitudinum RP, OP ad differentiam HF altitudinum mercurii HC, FC in locis O, et R.*

Columna HD eiusdem est (148) ponderis cum alia IS. Sed etiam columna FD (148) aeque gravis est ac IV; ergo reliqua columna HK eiusdem erit ponderis cum reliqua columna RS. Sed quando duo corpora sunt aequaliter ponderantia, gravitates specificae sunt (27) reciproce ut volumina eorundem; ergo gravitas specifica mercurii erit ad specificam gravitatem aeris contenti in columna RS, ut columna RS ad columnam HK. Sed columna RS est ad columnam HK, ut RO ad HF; ergo etiam gravitas specifica mercurii erit ad specificam gravitatem aeris contenti in columna RS, ut RO ad HF.

(a) L'Hist. de l'Acad. Roy. ann. 1743.

Scho-

Scholion.

188. Hoc theorema solummodo verum est, quando distantia RO locorum O, et R valde parva est prae altitudine atmosphaerae, quo solum in casu aer columna RS contentus, censeri potest (168) ut fluidum homogeneum.

PROPOSITIO LXIII.

189. *Si translato Barometro ad locum O, mercurius descendat ex E in H, et eo postea delato ad locum R, descendat rursus ex H in F; erit EH ad EF, ut OP ad RP.*

Pondus columnae ED idem est (148) cum pondere columnae IL. Sed etiam pondus columnae HD est (148) idem cum pondere columnae IS; ergo etiam pondus columnae EG aequabitur ponderi columnae OL. Sed pondus columnae HK est idem (187) cum pondere columnae RS; ergo pondus columnae EK aequabitur ponderi columnae RL, et ita pondus columnae EG erit ad pondus columnae EK, ut pondus columnae OL ad pondus columnae RL. Sed pondus columnae EG est (20) ad pondus columnae EK, ut columna EG ad columnam EK, aut ut EH ad EF, et pondus columnae OL est (20) ad pondus columnae RL, ut columna OL ad columnam RL, sive ut OP ad RP; ergo etiam EH erit ad EF, ut OP ad RP.

Scholion I.

190. In hoc pariter theoremate praesupponitur, aerem contentum in columna RL, esse fluidum homogeneum, sive altitudinem eius RP admodum parvam esse respectu altitudinis atmosphaerae.

Scholion II.

191. Id etiam confirmant Valerii observationes (a) in fodinis cupreis profundissimis institutae. Ipse enim cum ab imo fodinae P ascendisset ad locum O, 60 hexapedis altum, deprehendit mercurium descendisse per altitudinem EH 4 linearum. Cum autem denuo ascendisset usque ad locum R, 30 hexapedis altero O altiorem, comperit mercurium descendisse per altitudinem HF 2 linea-

rum

(a) Musschenbroekii Tentamina Experimentorum naturalium captorum in Academia del Cimento pag. 52.

rum. Hoc autem posito, erat $\bar{E}H$ ad $\bar{E}F$, ut 4 ad 6, sive ut 2 ad 3. Sed etiam OP erat ad RP, ut 60 hexapedae ad hexapedas 90, sive ut 60 ad 90, aut ut 6 ad 9, sive ut 2 ad 3; ergo etiam EH erat ad EF, ut OP ad RP.

DEFINITIO XII.

192. *Sipho* est cylindricus inflexus tubus BRCGV (Fig. 45.) ubivis aeque amplus, utraque sui extremitate apertus, et constans cruribus CB, CV altitudine inaequalibus inter se. Hoc instrumento homines uti solent ad aquam, et vinum ex uno vase in inferius alterum derivandum.

PROPOSITIO LXIV.

193. *Vasculo* ESOF (*Fig.* 45.) *aquae pleno immersum sit brevius crus* CB *Siphonis* BRCGV. *Dein admoto ore ad eius orificium inferius* VG, *ope suctionis aer contentus in Siphone educatur. Dico, quod aqua assurgens ex vasculo, implebit tubum, et subinde remoto ore ab orificio, per hoc se exonerabit, usque dum superficies eius in vasculo pervenerit ad* RB.

Superficies aquae stagnantis in vasculo, sit EF, et pars cruris CB, ipsi immersa, sit PRBH; eritque sectio eius PH portio eiusdem superficiei horizontalis EF. Verticalis pariter recta KL referat pondus columnae aqueae, altae pedibus 33, et digitis 10, cuius basis aequetur orificio VG, vel RB, aut PH, quod quidem pondus repraesentabit (153) pondus maximum atmosphaerae. Denique verticales rectae KM, KN referant pressiones, quas aqua replens crura CB, CV, exerceret deorsum in superficies eius inferiores PH, VG, quibus insistit. Iam quia ope suctionis aer contentus in Siphone est eductus; pars PH superficiei aquae EF nullam pressionem deorsum subit. Sed reliquae aliae partes superficiei aquae EF, ipsi PH aequales, premuntur deorsum ab externo aere vi KL; ergo aqua contenta in vasculo ESOF, per orificium patens RB influet in crus CB, et promovebitur usque ad C. Aqua autem perventa ad C, eius superficies PH sursum urgebitur ab externo aere vi KL, deorsum vero ab aqua CPH sollicitabitur vi KM; igitur attolletur residua vi ML, et sic aqua perveniet ad VG. Tandem quia postquam aqua ad orificium VG pervenit, removetur os ab eodem; utique superficies eius VG sursum urgebitur ab externo aere vi KL. Atqui ab aqua CGV deorsum sollicitatur vi KN; igitur attolletur residua vi NL. Vis ergo attollens aquam in crure CB, est ML, et vis attollens aquam in crure CV, est

est NL. Est autem ML maior quam NL; igitur cum vis minor maiori cedat, consequens est, ut aqua crure CB contenta, transeat in aliud crus CV vi MN, aequali scilicet differentiae virium attollentium ML, NL. Unde assurgens aqua ex vasculo ESOF, fluet per Siphonem BCV, et se exonerabit per orificium inferius VG, donec superficies eius in vasculo pervenerit ad RB.

COROLLARIUM I.

194. Quare producta superficie EF in I, aqua intra Siphonem promovebitur versus G vi, quae aequatur pressioni exercitae ab aquea columna IV in superficiem VG. Aqua siquidem promovetur (193) intra Siphonem vi MN. Sed vis MN est (193) differentia pressionum, quas aqua replens crura CB, CV, exerit in superficies PH, VG; ergo aqua intra Siphonem promovebitur vi, quae aequatur differentiae harum pressionum. Sed haec differentia est pressio exercita a columna aquea IV in superficiem VG; ergo aqua intra Siphonem promovebitur vi, quae aequatur pressioni exercitae a columna IV in superficiem VG.

COROLLARIUM II.

195. Unde quo altior erit columna IV, sive quo maior erit distantia orificii VG a superficie EF, eo maiori vi aqua intra Siphonem promovebitur. Et ideo si orificium VG in eodem sit plano cum superficie EF; fluxus aquae in Siphone nullus erit.

COROLLARIUM III.

196. Nullus similiter esset fluxus, si distantia puncti C a superficie EF aequaretur altitudini pedum 33, et digitorum 10. Tunc enim pars PH superficiei EF ab aqua in crure CB contenta, premeretur deorsum vi, quae aequatur (153) ponderi atmosphaerae, seu vi KL. Atqui pariter sursum premitur ab externo aere vi KL; igitur pars PH superficiei aquae EF immota esset, et fluxus aquae in Siphone nullus foret.

DEFINITIO XIII.

197. *Antlia Suctoria*, aut *Aspirans* est machina, cuius ope aqua ex loco inferiori attollitur in altiorem.

SCHOLION.

198. Haec machina constat 1.° ex duobus verticalibus tubis CAKB, TZRS (Fig. 46.) in CB iunctis. Primus, qui immergitur aquae MN, *Aspirans* dicitur, aut *Suctorius*; reliquus autem proprie An-

Antlia nuncupatur; et terminatur a receptaculo QTSP, habente roſtrum DO, per quod hauſta aqua ex illo effluit. 2.° In plano CB, ubi hi duo tubi invicem uniuntur, valvula E ponitur, quae dum ſurſum impellitur, aperitur; dum autem deorſum premitur, claudi ſolet. 3.° Intra cavitatem antliae TZRS ponitur embolus coriaceus GV adnexus piſtillo X, quo deprimitur, aut attollitur; debet autem hic embolus ita implere antliae cavitatem, ut impediat quo minus aer ex cavitate ſuperiori tranſeat in inferiorem. 4.° Embolus iuxta ſui axeos directionem foramine L pertunditur, quod in parte ſuperiori eſt valvula F claudendum. 5.° Dum alternatim attollitur embolus, aut deprimitur; ipſe in itu ſuo, et reditu idem ſpatium IT abſolvere ſemper debet, adeo ut dum eſt in maxima depreſſione, congruat alteri plano horizontali IH. 6.° Diſtantia plani TS ab altero plano AK, ſive a ſuperficie ſtagnantis aquae MN, maior eſſe non poteſt pedibus 33, et digitis 10.

PROPOSITIO LXV.

199. *Aſcenſus aquae intra antliam ſuctoriam, ſeu aſpirantem producitur ab externi aeris preſſione.*

Dum embolus prima vice deprimitur a TS uſque ad IH, aer contentus in antlia TZRS, et tubo CAKB, eſt conſiſtentiae naturalis, atque adeo clauſae erunt valvulae F et E. Iam dum attollitur embolus ad TS, tunc valvula F preſſa a proprio pondere, et atmoſphaerico, etiamnum clauſa erit, et aer antea incluſus ſpatio CAKB, vi ſua elaſtica ſe expandet, et valvulam E aperiet, adeo ut hic aer, et ille, qui prius replebat ſpatium IZRH, ſe expandant in maius ſpatium TZCAKBRS. Igitur vis elaſtica aeris ſpatio hoc incluſi, minor erit (165) pondere atmoſphaerae. Sed aquae lamella AK premitur deorſum a vi elaſtica huius aeris, et contra premitur ſurſum a pondere atmoſphaerico; ergo cum minor preſſio maiori cedat, aqua intra tubum aſcendet uſque ad ak, ſive uſquedum vis elaſtica aeris redacti in ſpatium TZCakBRS, una cum pondere ſupenſae aquae aAKk aequetur ponderi atmoſphaerico. Si iterum embolus deprimatur, tunc aer incluſus ſpatio TZCakBRS, contrahetur in ſpatium minus IZCakBH, ideoque ob vim elaſticam eius auctam, valvulam F aperiet; contra vero valvula alia E tum propria gravitate, tum etiam preſſione aeris ſuperioris claudetur; unde aer contentus ſpatio IZRH, erit conſiſtentiae naturalis. Rurſus embolo elevato, valvula F claudetur, aerque iam antea rarefactus, et clauſus ſpatio CakB, denuo ſe expandet, et valvulam E aperiet, ita ut hic aer, et ille, qui antea occupabat ſpatium IZRH, acquirant maius ſpatium TZCakBRS. Vis

Vis ergo elaſtica huius aeris, una cum pondere ſuſpenſae aquae aAKk minor erit pondere atmoſphaerico, atque ita ulterius aſcendet aqua uſque ad a′k′. Denique ſi aſcenſus, deſcenſuſque emboli repetantur, tandem aqua perveniet ad TS, et tunc in quavis emboli depreſſione aqua contenta ſpatio TIHS, ingredietur foramen L, et valvula F aperta, ſupra embolum attolletur. Dum autem embolus elevatur, aqua poſita infra ipſum, a preſſione externi aeris attolletur uſque ad TS, quae vero iam erat embolum praetergreſſa, ſimul cum embolo elevabitur, adeo ut tandem aqua impleat receptaculum QTSP, indeque efluat per DO. Ex quibus omnibus patet, aquam aſſurgere intra antliam ob exerni aeris preſſionem.

Corollarium.

200. Ut itaque aqua putei ingredi poſſit receptaculum QTSP, inferior baſis emboli conſtituti in maxima elevatione, ſive in plano TS, diſtare non debet a libella aquae MN intervallo maiori quam pedum 33, et digitorum 10. Aqua enim attollitur a plano libellae MN uſque ad planum TS per ſolam externi aeris preſſionem; ingreditur autem ex hoc plano in receptaculum QTSP per ſolam emboli depreſſionem, et elevationem. Sed aqua a plano libellae MN attolli nequit (153) uſque ad planum TS per ſolam externi aeris preſſionem, ſi diſtantia horum planorum ſit maior pedibus 33, et digitis 10; ergo etiam nequibit ingredi receptaculum QTSP, ſi inferior baſis emboli conſtituti in maxima elevatione, ſive in plano TS, diſtet a plano libellae MN intervallo maiori quam pedum 33, et digitorum 10.

Scholion.

201. Haec autem diſtantia pedum 33, et digitorum 10 ſolummodo locum habet, ubi mercurius in Barometro eſt (153) ſuſpenſus ad altitudinem digitorum 29. Caeterum ſi contingat, ut haec mercurii altitudo ſit digitorum 28; tunc etiam inferior baſis emboli conſtituti in maxima elevatione, non poterit diſtare a plano libellae MN intervallo maiori quam pedum 32, et 8 digitorum. Imo in praxi haec diſtantia accipitur ſemper minor pedibus 32, et digitis 8, tum quia totus aer ex antlia educi nequit, tum etiam quia ad valvulam E attollendam, aliqua ſemper pars ponderis atmoſphaerici impendi debet.

PROPOSITIO LXVI.

202. *Ubi aqua e puteo hauſta, pervenit uſque ad receptaculi fundum QL (Fig. 47.); ſuperior baſis emboli conſtituti in maxima de-* preſ-

pressione, deorsum premitur vi aequali ponderi columnae aqueae, cujus basis est eadem quae emboli, et cuius altitudo aequatur distantiae plani QL a plano libellae MN.

Inferior basis emboli in elevatione maxima constituti, congruat cum plano TS; in maxima vero depressione congruat cum alio plano IH, ita ut embolus in itu suo, et reditu semper spatium TI percurrat. Depresso nunc embolo ad IH, fiant primo duae columnae aqueae PF, P'F' alte pedibus 33, et digitis 10, quarum bases GF, G'F' sint respective aequales superficiebus IH, AK. Deinde planum IH produci intelligatur in D et E', ut in columnis PF, P'F' fiant sectiones DE, D'E'. Tandem producta DP in V, donec PV sit ipsi TQ aequalis, super basi PZ, et altitudine PV construatur aquea columna VZ, quae cum priori PF componat columnam VF. Aquae lamella AK (152) premitur sursum a pondere atmosphaerae, hoc est a pondere columnae P'F'. Premitur autem deorsum ab aqua ICAKBH, hoc est (51) a pondere columnae D'F'; ergo sursum attollitur vi, quae aequatur horum ponderum differentiae, sive a pondere columnae P'E'. Sed pressio sursum exercita a pondere columnae P'E' in aquae lamellam AK, producit (75) in emboli basim IH impressionem aequalem ponderi columnae aqueae, cuius basis IH, et altitudo P'D'; hoc est aequalem ponderi columnae PE; ergo basis IH emboli attolletur vi aequali ponderi columnae PE. Atqui haec eadem basis emboli premitur quoque deorsum tum a pondere atmosphaericae columnae incumbentis plano QL, tum etiam a pondere aqueae columnae QH, hoc est a summa ponderum columnarum PF, VE; ergo eadem basis IH actu deprimitur vi, quae aequatur excessui summae ponderum columnarum PF, VE supra pondus columnae PE. Sed hic excessus est pondus columnae VF, cuius basis GF aequalis est basi emboli, et cuius altitudo VG aequatur distantiae plani QD a plano libellae MN; ergo inferior emboli basis IH deorsum premitur vi aequali ponderi columnae aqueae, cuius basis eadem est quae emboli, et cuius altitudo aequatur distantiae plani QL a plano libellae MN. Atqui inferior basis emboli deorsum urgeri nequit, nisi eadem vi pariter urgeatur superior eius basis; ergo haec quoque debebit deorsum premi vi, quae aequatur ponderi columnae aqueae, cuius basis eadem est quae emboli, et cuius altitudo est distantia plani QL a plano libellae MN.

Scholion.

203. In hac demonstratione posuimus basim inferiorem IH emboli constituti in maxima depressione, deorsum premi tum a pondere columnae atmosphaericae incumbentis superficiei QL, tum etiam a pondere columnae aqueae QH, cum tamen pars aliqua huius columnae non quidem ab aqua, sed ab embolo occupetur. Verum enim vero cum embolus ex ligno, et corio componatur, eius pondus vix differt a pondere aquae, quae sub eius volumine contineretur; unde eius basis IH spectari poterit velut pressa tum a pondere columnae atmosphaericae, superficiei QL incumbentis, tum etiam a pondere aqueae columnae QH.

Corollarium I.

204. Hinc si potentia aequivalens ponderi columnae aqueae, cuius basis eadem est quae emboli, et cuius altitudo est distantia plani QL a plano libellae MN, ope pistilli conetur depressum embolum elevare a plano IH ad planum TS; dabitur inter ipsam, et embolum aequilibrium.

Corollarium II.

205. Ut igitur haec potentia queat embolum elevare, nonnihil augenda erit, tum ut imprimat motum embolo, tum etiam ut superet resistentiam frictionis, quam idem embolus pati solet, radendo cavam antliae superficiem.

MECHANICAE FLUIDORUM

PARS ALTERA

CAPUT I.

De motu fluidi ex vaſe per foramen aliquod effluentis.

DEFINITIO I.

206. **H**Ydraulica eſt ſcientia, quae agit de motu corporum fluidorum.

PROPOSITIO I.

207. *Si fundus* BD (*Fig.* 52.) *vaſis cylindrici* ABDH *fluido immoto pleni, repente auferri concipiatur, ita ut libere cadat fluidum; toto tempore huius lapſus particulae inferiores nullam preſſionem a ſuperioribus ſuſtinebunt.*

Quia fundo BD manente, particulae fluidi inferiores ab omni deſcenſu prohibent ſuperiores; illae ab integro harum pondere premi debent. At ſi fundus BD repente auferri concipiatur, ſingulae particulae fluidi tam ſuperiores, quam inferiores, utpote animatae ab aequali vi gravitatis, pari tempore per ſpatia aequalia cadent; ergo cum tempore huius lapſus particulae inferiores nullo modo impediant deſcenſum liberum ſuperiorum, nullam quoque preſsionem a ſuperioribus ſuſtinebunt.

COROLLARIUM I.

208. Hinc libere cadente fluido intra vas, eius particulae inferiores nullam omnino exerent preſſionem in alias particulas laterales, et ſuperficiem internam vaſis. Quamdiu enim fluidum eſt immotum, eius particulae inferiores utpote preſſae a ſuperioribus, tanta vi (33) comprimunt laterales, et ſuperficiem internam vaſis, quanta

ta ipſae a ſuperioribus comprimuntur. Atqui dum libere cadit fluidum intra vas, particulae inferiores non amplius (207) a ſuperioribus comprimuntur; igitur neque ipſae prement alias laterales, et ſuperficiem internam vaſis.

COROLLARIUM II.

209. Quia fundo BD ſublato, particulae omnes fluidi pari tempore per ſpatia (207) aequalia cadunt; habebunt omnes eandem velocitatem, eandemque propterea in deſcenſu ſervabunt diſtantiam inter ſe, quam quieſcentes habebant, ideoque tota fluidi columna AD vaſi incluſa, integra cadet, ut corpus ſolidum.

PROPOSITIO II.

210. *Si fluidum, quo repletur vas* ACDB (*Fig.* 53.) *ex hoc effluat per foramen* EG *infinite parvum relate ad amplitudinem vaſis; velocitas, qua particulae fluidi initio motus intra vas deſcendunt, infinite parva erit, ſi comparetur cum illa, quam libere deſcendentes haberent.*

Concipe fluidum exiens per foramen, motu ſuo deſcribere rectam EF eodem tempore finito, quo, ſi fundus repente ſublatus eſſet, columna fluida vaſe incluſa, integra ut corpus ſolidum caderet (209) ex A in C, ſeu tota e vaſe exiret. Finge ulterius dum e foramine EG erumpit columna fluida EGHF, fluidum contentum vaſe, deſcendere per Aa, adeo ut ſuperficies eius ſuprema AB acquirat poſitionem ſibi parallelam ab. Cum velocitas fluidi a foramine erumpentis, non ſit infinita, eius ſpatium EF finito tempore abſolutum, infinitum eſſe non poteſt, et ideo idem erit aut finitum, aut infinite parvum. Atqui foramen EG per quod erumpit, eſt (ex hyp.) infinite parvum; ergo infinite parva erit etiam columna EGHF. Sed quia tempore, quo per foramen effluit columna EGHF, ſuperficies AB fluidi interni ACDB deſcendit (ex conſtr.) per Aa, et poſitionem ab acquirit, utique columna AabB aequabitur alteri EGHF; ergo infinite parva erit etiam columna AabB. Atqui huius columnae baſis AB eſt finita; ergo altitudo eius Aa erit infinite parva. Quando ergo foramen eſt infinite parvum relate ad amplitudinem vaſis, particulae fluidi tempore finito intra vas deſcendunt per ſpatium Aa infinite parvum. Atqui ſi fundus BD repente ſublatus eſſet, ipſae eodem finito tempore (ex hyp.) deſcendiſſent per ſpatium AC finitum; ergo et velocitas, qua particulae fluidi initio motus intra vas deſcendunt, infinite parva erit, ſi comparetur cum illa velocitate, quam libere deſcendentes haberent.

COROLLARIUM I.

211. Manente ergo foramine EG infinite parvo relate ad amplitudinem vasis, particulae fluidi intra vas descendentes, initio motus habent solum infinitesimam partem illius velocitatis, quam libere descendentes haberent.

COROLLARIUM II.

212. Unde illarum velocitas impedita initio motus, poterit accipi ut aequalis velocitati, quam libere descendentes haberent.

COROLLARIUM III.

213. Quare particulae inferiores initio motus censendae erunt veluti impedientes omnem descensum superiorum.

COROLLARIUM IV.

214. Et ideo quando fluidum per foramen infinite parvum EG incipit prosilire, fundi partes CE, GD, et vasis latera AC, BD saltem per tempus infinite parvum quamproxime comprimentur illa eadem vi, qua premebantur, dum fluidum contentum vase immotum erat.

SCHOLION.

215. Quod hucusque ostensum fuit de fluido erumpente per foramen insculptum in vasis fundo, convenit etiam fluido exilenti per orificium laterale, dummodo hoc sit etiam infinite parvum relate ad amplitudinem vasis.

PROPOSITIO III.

216. *Fundo* CD *vasis* ACDB (*Fig.* 54) *incumbat fluida lamella* M, *cuius basis* EG *sit infinite parva relate ad amplitudinem* AB *vasis*, *altitudo autem eius* LE *infinite parva relate ad fluidi altitudinem* FE. *Tum sumptis hinc inde ab illa aliis lamellis*, *veluti* O *et* N, *priori similibus*, *et aequalibus*, *fiat in fundo vasis foramen* EG, *ex quo emanet lamella* M. *Dico*, *quod toto illo tempusculo*, *quo ipsa labitur per lineolam altitudini suae* LE *aequalem*, *lamellae reliquae* O *et* N *prementur deorsum a ponderibus columnarum* SE, HI.

Quia foramen EG est infinite parvum relate ad amplitudinem vasis, toto illo tempusculo, quo lamella M labitur per lineolam altitudini suae LE aequalem, fundi partes PE, GI, atque adeo lamellae etiam O et N quamproxime comprimentur (214) illa eadem vi, qua premebantur, dum fluidum contentum vase, immotum erat. Atqui tunc premebantur nedum propriis ponderibus, verum etiam ponderibus columnarum SL, HV, quae eis incumbunt; ergo toto illo tempusculo, quo lamella M labitur per lineolam altitudini suae LE aequalem, lamellae O et N premi deorsum debent non solum ponderibus propriis, sed etiam ponderibus columnarum SL, HV. Sed pondera lamellarum O et N, una cum ponderibus columnarum SL, HV conficiunt pondera columnarum SE, HI; ergo toto illo tempusculo, quo lamella M labitur per lineolam altitudini suae LE aequalem, lamellae O et N indesinenter comprimi debent ponderibus columnarum SE, HI.

PROPOSITIO IV.

217. *Eadem lamella* M (*Fig.* 54.) *initio solum tempusculi*, *quo labitur per lineolam altitudini suae* LE *aequalem*, *premitur deorsum a pondere verticalis columnae* FG; *subinde vero indesinenter urgetur ad exitum per foramen a lamellis aliis lateralibus*, *veluti* O *et* N, *et quidem vi*, *quae aequatur ponderi eiusdem columnae* FG.

Orificio FG manente clauso, lamella M est in aequilibrio constituta, et ideo tanta vi premet vicinas alias O et N, quanta vicissim hae illam premunt. Sed lamellae O et N comprimunt (33) aliam M ponderibus columnarum SE, HI, et lamella M illas premit pondere columnae FG; ergo pondera columnarum SE, HI aequivalebunt ponderi columnae FG. At orificio EG aperto, statim cadit lamella M utpote pressa a pondere columnae FG, et simul cessat (208) omnis eius pressio lateralis in adiacentes alias O et N. Sed hae vicissim cum premantur (214) adhuc a ponderibus columnarum SE, HI, iisdem quoque comprimient aliam M, eamque indesinenter urgebunt ad exitum per foramen; ergo lamella M initio solum tempusculi, quo delabitur per lineolam altitudini suae LE aequalem, deorsum premitur a pondere columnae FG, subinde vero urgetur ad exitum per foramen vi, quae aequipollet ponderi columnae FG.

COROLLARIUM.

218. Ergo lamella M quamdiu vel tota, vel ex parte intra vas manet, indesinenter urgetur ad exitum per foramen vi constanti, et aequali ponderi columnae FG.

PROPOSITIO V.

219. *Fundo vasis* ACDB (*Fig.* 55.) *incumbat fluida lamella* M, *cuius basis* EG *sit infinite parva relate ad amplitudinem* AB *vasis*, *alti-*

altitudo autem LE *infinite parva respectu altitudinis* FE *fluidi contenti in vase. Tum fiat in vasis fundo foramen* EG, *per quod erumpat lamella* M. *Dico, quod haec toto illo tempusculo, quo labitur per lineolam altitudini suae* LE *aequalem, sive quo tota effluit per foramen, eam acquiret celeritatem, quam motu naturaliter accelerato acquirere potest post liberum descensum a suprema fluidi superficie ad foramen usque.*

In superiori parte columnae FEGH, quae foramini EG insistit, accipiatur lamella FVSH, priori M similis, et aequalis, quae proprio pondere animata, motu naturaliter accelerato ex altitudine FO cadat toto illo tempusculo, quo prior lamella M pressa (218) vi constanti, et aequali ponderi columnae FEGH, labitur per lineolam altitudini suae LE aequalem. Denique supra FE velut diametrum facto semicirculo FPQE, excitetur ex puncto O ad FE perpendicularis OR, et agatur chorda FR. Itaque hic intersunt duae constantes vires; una est pondus lamellae FVSH, altera vero pondus columnae FEGH, quibus agentibus in aequales lamellas FVSH et M, fit, ut hae tempore aequali descendant (ex hyp.) per spatia FO, LE. Atqui constantes vires, quae movendis massis aequalibus applicantur, proportionales (a) sunt spatiis, quae ab eisdem massis pari tempore absolvuntur; ergo FO erit ad LE, ut pondus lamellae FVSH ad pondus columnae FEGH, seu (20) ut lamella FVSH ad columnam FEGH. Sed lamella FVSH est ad columnam FEGH, ut FV ad FE, vel (ex constr.) ut LE ad FE; ergo etiam FO erit ad LE, ut eadem LE ad FE, et ideo erit LE media proportionalis inter duas rectas FO et FE. Est autem inter has quoque media proportionalis chorda FR; ergo aequales erunt rectae LE, FR. Rursus duae constantes vires sunt (b) quoque proportionales celeritatibus, quas pari tempore aequalibus massis imprimunt; ergo celeritas acquisita a lamella FVSH post lapsum liberum per FO, erit ad celeritatem acquisitam ab alia lamella M tempusculo, quo percurrit lineolam altitudini suae LE aequalem, ut pondus lamellae FVSH ad pondus columnae FEGH, sive (ex demonstr.) ut FR ad FE. Sed etiam velocitas acquisita a lamella FVSH post (c) lapsum per FO, est ad velocitatem, quam acquirere ipsa potest post lapsum liberum per FE, ut FR ad FE; ergo velocitas acquisita a lamella FVSH post lapsum liberum per FO, erit ad velocitatem acquisitam a lamella M tempusculo, quo absolvit lineolam altitudini suae LE aequalem, ut velocitas acquisita a lamella FVSH post lapsum liberum per FO, ad velocitatem, quam ipsa acqui-re-

(a) In nostra Mechanica prop. 20. §. 123. pag. 42.
(b) In nostra Mechanica cor. 3. Legis II. §. 69. pag. 23.
(c) In nostra Mechanica prop. 25. §. 138. pag. 50.

rere potest post lapsum liberum per FE. Unde velocitas acquisita a lamella M tempusculo, quo absolvit lineolam altitudini suae LE aequalem, aequalis erit velocitati, quam lamella FVSH, vel M acquirere potest motu naturaliter accelerato post lapsum liberum per FE.

COROLLARIUM I.

220. Ut ergo lamella M tempusculo illo, quo absolvit lineolam altitudini suae LE aequalem, acquirat velocitatem aequalem illi, quam acquirere potest grave post descensum liberum a suprema fluidi superficie ad foramen usque, foramen EG, per quod effluit, debet esse infinite parvum relate ad amplitudinem vasis.

COROLLARIUM II.

221. Et quia tempusculum illud, quo lamella M absolvit lineolam altitudini suae LE aequalem, est infinite parvum; patet, eandem lamellam M tempore infinite parvo, sive in primo momento effluxus eam acquirere celeritatem finitam, quam acquirere potest grave post lapsum liberum per FE.

SCHOLION.

222. Neque mirum videri debet, lamellam M tempore infinite parvo acquirere finitam celeritatem. Si enim lamella M a proprio solum pondere animata, indesinenter promoveretur, ipsa tempore infinite parvo acquireret solum velocitatem infinite parvam. Sed quia (218) indesinenter sollicitatur vi aequali ponderi columnae FEGH, quod infinities est majus pondere lamellae M, non est mirandum, si haec tempore infinite parvo velocitatem finitam adipiscatur.

PROPOSITIO VI.

223. *Lateri vasis* ACDB (*Fig.* 56.) *incumbat fluida lamella* N, *cuius basis* OD *sit infinite parva relate ad amplitudinem* CD *vasis, altitudo autem eius* SD *infinite parva relate ad fluidi altitudinem* BD, *vel* FE. *Tum in vasis latere* BD *fiat foramen* OD, *per quod erumpat lamella* N. *Dico, quod ipsa toto illo tempusculo, quo percurret lineolam altitudini suae* SD *aequalem, indesinenter sollicitabitur ad exitum per foramen vi aequali ponderi columnae fluidae, cuius basis est idem foramen* OD, *et cuius altitudo est* BD, *seu distantia eiusdem foraminis a suprema fluidi superficie.*

Quoniam orificium OD est (ex hyp.) infinite parvum relate ad amplitudinem vasis, puncta O et D infinite propinqua erunt, ideo-que

que distantia centri gravitatis orificii O D a plano libellae A B, quamproxime erit rectae B D aequalis. Hoc autem praemisso, ita ostenditur propositio. Foramine O D manente clauso, operculum eius O D, atque adeo etiam lamella N extrorsum (63) premitur vi aequali ponderi columnae fluidae, cuius basis est operculum idem O D, et cuius altitudo est distantia eius centri gravitatis a plano libellae A B, seu, quod idem est, recta B D; ergo foramine O D aperto, statim lamella N utpote pressa vi aequali ponderi huius columnae, incipiet egredi per foramen. Sed dum egreditur per foramen, non amplius premitur ab hac vi; ergo nec etiam premet lamellas alias laterales, ipsi similes, et aequales, a quibus tangitur omni ex parte. Verum hae ex adverso cum premantur adhuc (214) vi aequali ponderi columnae fluidae, cuius basis O D, et altitudo B D; utique hac vi premere adhuc pergent lamellam N; ergo toto illo tempusculo, quo lamella N absolvit lineolam altitudini suae S D aequalem, indesinenter urgebitur ad exitum per foramen vi, quae aequatur ponderi columnae fluidae, cuius basis O D, et altitudo B D.

PROPOSITIO VII.

224. *Eadem lamella* N (*Fig. 56.*) *statim ac tota effluxerit per foramen, eam acquiret celeritatem, quam motu naturaliter accelerato acquirere potest post lapsum per* B D, *aut* F E.

Fiat in fundo vasis foramen E G alteri D O simile, et aequale, cui insistat lamella M priori N similis, et aequalis. Iam si foramine D O clauso, alterum E G aperiatur, lamella M (218) urgebitur ad exitum per E G vi constanti, et aequali ponderi columnae F E G H. Similiter ex adverso si foramine E G manente clauso, aliud D O aperiatur, lamella N sollicitabitur ad exitum per D O (223) vi constanti, et aequali ponderi columnae fluidae, cuius basis D O, et altitudo B D. Sed haec columna aequatur columnae F E G H; ergo duae lamellae aequales M et N viribus constantibus, et aequalibus per respectiva foramina expellentur, ideoque aequales etiam altitudines suas L E, S D tempore pari absolvent, et his percursis, eandem acquirent celeritatem. Atqui lamella M postquam absolvit altitudinem suam L E, acquirit (219) celeritatem, quam libere cadendo ex F E acquirere potest; ergo et alia lamella N postquam descripserit altitudinem suam S D, seu statim ac tota effluxerit per foramen, eam acquiret celeritatem, quam libere cadendo ex F E acquirere potest.

Corollarium I.

225. Hinc si lamella N postquam e foramine tota evasit, excipi intelligatur tubo cylindrico, et horizontali D O V K, eadem intra ipsum motu aequabili progredietur, et quidem cum illa velocitate, quam ipsa post lapsum liberum ex altitudine B D, vel F E acquirere potest. Velocitas haec aequabilis vocabitur deinceps *velocitas debita altitudini* B D, vel F E fluidi supra foramen O D.

Corollarium II.

226. Quare ut lamella N, quae initio fluxus e laterali foramine D O exilit, statim ac tota ex illo evasit, acquirat velocitatem altitudini B D debitam, foramen D O debet esse infinite parvum relate ad amplitudinem vasis. Hanc proprietatem aquae fluentis per orificium in vasis latere efformatum, detexit primum, et analytice demonstravit Ioannes Bernoullius (a).

Scholion.

227. Probe autem est observandum, hanc legem saltem quamproxime, et in praxi habere locum, etiamsi foramen finitum sit; dummodo tamen sit valde parvum relate ad amplitudinem vasis. Sane dum ratio foraminis ad amplitudinem vasis vix maior est ratione 1 ad 20, docet experientia, aquam e foramine effluentem, ferme in momento post initium fluxus velocitatem altitudini eius debitam adipisci. At si ratio foraminis ad amplitudinem vasis notabiliter maior sit ratione 1 ad 20; tunc aqua effluens per foramen, non nisi post tempus sensibile acquirit velocitatem altitudini suae debitam. Teste enim Bossutio (b), quantitas aquae primis tribus, aut quatuor minutis secundis e foramine illo effluens, est sensibiliter minor illa, quae solet tribus, aut quatuor aliis minutis sequentibus emanare. Imo quo maius est orificium, eo fit sensibilior huiusmodi differentia. Quae omnia invicte ostendunt, aquam primis tribus, aut quatuor minutis secundis temporis sui fluxus non adhuc velocitatem altitudini suae debitam acquisivisse.

PROPOSITIO VIII.

228. *Iisdem positis, prima lamella* N (*Fig. 56.*), *quae initio fluxus e vase emanat, per foramen* D O *transit motu uniformiter accelerato; secunda vero, omnesque aliae, quae sequuntur, non item.*

I. Quamdiu lamella N, vel tota, vel aliqua ex parte intra vas manet, ipsa sollicitatur ad exitum per foramen vi constanti, et aequali (223) ponderi columnae fluidae, cuius basis est foramen ip-

(a) Tom. IV. Parte prima Dissertationis Hydraulicae, artic. 10., pag. 402.
(b) Traité Elementaire d'Hydrodynamique Tom. 2. artic. 241. pag. 254.

ipsum DO, et altitudo BD, vel FE; ergo per idem quoque transibit motu uniformiter accelerato,

II. Finge alias lamellas quoque effluentes post primam N, per foramen DO transire motu uniformiter accelerato. Iam prima lamella N in primo momento, sive initio fluxus motu uniformiter accelerato (num. I.) absolvit lineolam DI, altitudini suae SD aequalem, seu tota transit in locum R; interea vero fluidum verticale, et laterale, quibus agentibus illa ad exitum (223) urgebatur, confluet ad implendum locum N ab ea relictum. In secundo autem momento prima lamella N iam appulsa ad R, progreditur (225) motu aequabili, et absolvit spatium IT duplum altitudinis suae SD, vel DI; unde eo momento elapso, reperietur in loco Q. Atqui interea fluidum verticale, et laterale ad N appulsum, motu (ex hyp.) uniformiter accelerato absolvit spatium DI altitudini suae SD aequale, seu totum transit in locum R; ergo intermedius locus P omni fluido vacuus remanebit, et ita effluxus aquae non erit continuus, contra experientiam. Falso itaque ponebatur, quod secunda lamella fluidi, et sequentes per foramen DO transirent motu uniformiter accelerato, veluti transit prima.

COROLLARIUM I.

229. Unde tres quantitates fluidi R, P, Q invicem aequabuntur. Cum enim lamella Q eadem sit omnino cum alia R appulsa ad locum Q; aequales erunt DI, ZT. Est autem IT (228) dupla ipsius DI; ergo et dupla erit ipsius ZT, ideoque aequabuntur IZ, ZT. Vidimus autem aequales esse etiam DI, ZT; igitur aequabuntur tres rectae DI, IZ, ZT, ac propterea et quantitates fluidi R, P, Q.

COROLLARIUM II.

230. Ergo in secundo momento fluxus emanavit per orificium duplo maior quantitas fluidi, quam in primo. Nam in primo momento, et secundo simul exivit quantitas fluidi R, P, Q. Atqui in primo effluxit quantitas sola Q; igitur in secundo emanavit quantitas reliqua R, P. Est autem (229) haec quantitas dupla alterius Q; ergo in secundo momento exivit quantitas fluidi duplo maior, quam in primo.

COROLLARIUM III.

231. Quia in secundo momento fluxus emanavit ex orificio quantitas fluidi R, P, dupla (230) alterius Q in primo effluentis; utique secunda lamella, quae nempe in secundo momento effluxit per orificium, absolvit spatium DZ, duplum spatii ZT, vel DI.

PROPOSITIO IX.

232. *Omnes lamellae fluidi, excepta prima* N, *transeunt per foramen cum illa velocitate, quam habet prima statim ac tota e vase emersit.*

Prima lamella N, quae in primo momento absolvit spatium DI, postea in secundo, seu statim ac tota e vase emersit, percurrit spatium IT (228) duplum ipsius DI. Atqui secunda lamella, quae nempe in secundo momento effluit per foramen, absolvit (231) spatium DZ, duplum ipsius DI; ergo hae duae lamellae in secundo momento absolvunt aequalia spatia IT, DZ, atque ita eandem quoque habere debent celeritatem. Idem autem de aliis lamellis sequentibus demonstratur; igitur omnes transeunt per foramen cum illa velocitate, quam habet prima statim ac tota e vase emersit.

COROLLARIUM.

233. Quia prima lamella N statim ac tota e vase emersit, habet aequabilem velocitatem (224) altitudini fluidi convenientem; etiam sequentes aliae cum hac eadem aequabili velocitate per foramen transibunt.

SCHOLION.

234. Neque id mirum videri debet. Nam particulae fluidi verticales, et laterales statim ac e vase expresserint primam lamellam N, eidemque communicaverint aequabilem celeritatem altitudini fluidi debitam; ipsaemet etiam successive post illam cum hac eadem aequabili velocitate e foramine egrediuntur. Uno verbo, prima lamella N accelerat uniformiter suum motum cum transit per orificium; secunda vero, omnesque aliae insequentes, accelerant suos motus antequam transeant per foramen, ideoque velocitate aequabili ex illo erumpunt.

PROPOSITIO X.

235. *Vasi* ACIG (*Fig.* 57.) *inditus sit liquor, cuius libella* AG. *Dein in latere eius* GI *fiat orificium* FI *infinite parvum relate ad amplitudinem vasis, per quod fluere possit liquor. Dico vim, quae in momento post initium motus liquorem animat ad effluxum, esse duplo maiorem pondere columnae fluidae, cuius basis est* FI, *et altitudo* GI.

Vis, quae in primo momento, sive initio motus liquorem animat ad effluxum, imprimit (224) liquori primae lamellae M velocitatem, quam ipsa acquirere potest, cadendo libere per GI. Vis autem illa, quae in secundo momento, aut in momento immediate post initium motus liquorem animat ad effluxum, imprimit (230) liquori prioris duplo illam eandem velocitatem. Atqui duae constantes vires, quae pari tempore aequales velocitates inaequalibus massis imprimunt, sunt proportionales eisdem massis; ergo vis, quae in primo momento, sive initio motus liquorem animat ad effluxum, erit ad vim, quae in secundo momento, aut in momento immediate post initium motus liquorem animat ad effluxum, ut liquor primae lamellae M ad eius duplum, sive ut 1 ad 2. Sed vis, quae in primo momento, sive initio motus liquorem animat ad effluxum, aequatur (223) ponderi columnae fluidae, cuius basis FI, et altitudo GI; igitur vis, quae in secundo momento, aut in momento immediate post initium motus, liquorem animat ad effluxum, erit duplo maior pondere columnae fluidae, cuius basis FI, et altitudo GI.

Corollarium.

236. Ergo initio effluxus, seu quamdiu liquoris motus est (228) uniformiter acceleratus, vis ipsum animans ad effluxum, aequatur ponderi columnae fluidae cuius basis FI, et altitudo GI; at in momento immediate post initium motus, hoc est quando iam liquor motum aequabilem (225) est adeptus, vis eum animans ad effluxum, aequatur (235) ponderi culumnae fluidae, cuius basis FI, et altitudo 2 GI, seu dupla ipsius GI.

Scholion I.

237. De huius theorematis veritate diu multumque disputatum est inter Comitem Riccatum, Danielem Bernoullium, Petrum Antonium Michelottum, atque Iurinum. Nam cum Newtonus in prima Principiorum suorum editione (a) statuisset, vim, qua totus aquae exilientis motus generari potest, aequalem esse ponderi columnae fluidae, cuius basis FI, et altitudo GI; in secunda postea editione vim illam duplo maiorem fecit, hoc est aequalem ponderi columnae fluidae, cuius basis FI, et altitudo 2 GI. Priorem vis illius mensuram adversus Comitem Riccatum, et Iurinum tuebatur (b) Daniel Bernoullius cum Petro Antonio Michelotto. Verum Daniel Bernoullius tandem posteriori Newtoni sententiae ita

(a) Libro secundo prop. 36. coroll. 2.
(b) Danielis Bernoullii Exercitationes Mathematicae pag. 30.

(a) suffragatur: *Ista sententia a me olim, et ab aliis fuit impugnata, et ab aliis rursus confirmata. Nunc autem postquam hanc aquarum motarum theoriam meditatus sum, lis ita dirimenda mihi videtur, ut cum aquae ad motum uniformem pervenerint, quae quidem hypothesis est Newtoni, tunc recte altitudine 2 GI vis illa definiatur; sed ab initio fluxus, ubi velocitas adhuc nulla est, vis simplici altitudini GI respondeat.* Patet autem hoc convenire cum corollario praecedenti.

Scholion II.

238. Quae hactenus demonstravi circa effluxum liquoris ex infinite parvo foramine erumpentis, eadem quamproxime, et in praxi verificantur, cum liquor effluit ex foramine valde parvo relate ad amplitudinem vasis. Liquor enim ex orificio utroque fluens, pari ferme tempusculo acquirit (227) aequabilem velocitatem altitudini suae debitam.

Scholion III.

239. Imo hactenus demonstrata aeque habent locum, sive liquor effluat per foramen insculptum in vasis latere, sive in eius fundo; dummodo tamen utrumque sit aeque parvum, et aeque distans a suprema liquoris superficie. Nam in utroque casu eadem prorsus est (217. 223) vis, quae liquorem animat ad effluxum.

CAPUT II.

De figura, et densitate funiculi, aut venae fluidi per nudum foramen, aut per brevem tubulum effluentis.

Propositio XI.

240. *Vena liquoris e vase per orificium valde exiguum effluentis, non eandem ubique crassitiem habet; sed paullo infra foramen est gracilior, quam in foramine ipso.*

Si particulae omnes fluidi per foramen transirent secundum rectam perpendicularem ad eius planum; ipsae, seclusa omni acceleratione orta a gravitate, venam cylindricam, aut prismaticam efformarent. At quia earum plures a lateribus vasis undique confluen-

(a) Danielis Bernoullii Hydrodynamica sectione decimatertia, articulo nono pag. 283.

fluentes, ad foramen (234) concurrunt, fieri omnino debet, ut obliquis motibus per hoc transeant, et cursum suum flectentes, conspirent cum verticalibus ad efformandam venam fluidi exilientis, quae proinde paullo infra foramen gracilior erit, quam in foramine ipso.

Scholion I.

241. Daniel Bernoullius (a) observavit, particulas cerae hispanicae cum aqueis permixtas, ita cum aqua moveri in cylindrico vase vitreo A C D B (Fig. 58.), ut quae imminent foraminis centro, per lineam verticalem H G descendant; aliae vero omnes hinc inde positae, motu propemodum verticali descendant primum per rectas M P, N Q fere usque ad fundum C D, tumque cursum suum versus foramen E F per lineas P E, Q F sensim inflectant. Similiter observavit, ob particularum obliquos motus secundum lineas P E, Q F, venam aquae exilientis prae foramine contrahi usque ad *e f*, ubi gracilior redditur, quam in ortu circa foramen E F, posteaque ad sensum eiusdem semper diametri apparere. Haec autem contractio venae verticaliter effluentis, confundi nequit cum alia eiusdem contractione, quae procedit a gravitate aquae e foramine iam egressae.

Scholion II.

242. Simile experimentum instituit etiam Bossutius (b) in cylindrico vase vitreo A C E B (Fig. 59.), in cuius latere E B orificium E F valde parvum insculptum erat. Siquidem observavit, aquam omni ex parte confluere ad foramen eadem lege, qua in Bernoulliano experimento ad horizontale foramen antea confluebat. Unde ex simili causa similis quoque prodibat in effluente vena attenuatio, quae eo facilius oculis perspiciebatur, quia locum non habebat altera venae attenuatio procedens a gravitate aquae ex foramine iam egressae. Propterea si quis vellet contractionem venae accuratius observare, id melius assequeretur, si venis horizontalibus per lateralia foramina effluentibus uteretur.

Scholion III.

243. Ioannes Alphonsus Borellus (c) omnium primus fuit, qui observaret hanc venae aquae contractionem, quam falso tamen tena-

(a) Danielis Bernoullii Hydrodynamica sectione quarta, articulo tertio, pag. 62.
(b) Traité Elémentaire d'Hydrodynamique Tom. I. pag. 240.
(c) De Motionibus naturalibus a gravitate pendentibus. Prop. 216. pag. 288.

nacitati partium aquae adscribebat. Newtonus dein ulterius progressus est; cum enim effluxum aquae per foramen in tenui insculptum lamina observaret, invenit (a) eius venam sic contrahi ad distantiam ferme unius digiti a foramine, ut diameter foraminis esset ad diametrum contractae venae in ratione 25 ad 21. Haec autem ratio diametrorum non ita est accipienda, quasi ipsa debeat venis omnibus convenire; iuxta enim Danielis Bernoullii experimenta (b), eadem ratio est eo maior, quo tenuior sumitur lamina, cui foramen inest. Imo Marchio Polenus (c) etiam deprehendit, cum lamellae crassities esset unius lineae, et aqua efflueret per foramen insculptum in fundo vasis, diametrum foraminis fuisse ad diametrum contractae venae, ut 26 ad 20, sive ut 13 ad 10, aut ut 130 ad 100. Porro haec ratio iam propemodum ea est, quam habet 141 ad 100, seu radix quadrata binarii ad unitatem, nullusque dubito, quin differentia harum rationum insensibilis sit futura, si lamina perforanda, tenuissima assumatur. Et sane, Daniel Bernoullius (d) expertus fuit, dum aqua flueret per foramen in tenui lamina efformatum, cuius diameter erat linearum $4\frac{52}{125}$, diametrum foraminis fuisse ad diametrum venae contractae ferme ut 141 ad 100, sive ut radix quadrata binarii ad unitatem, atque ita etiam foramen quamproxime fuisse ad sectionem contractae venae, ut 2 ad 1. Similiter e contrario ratio, quae intercedit inter diametrum foraminis, et diametrum contractae venae, eo minor fieri deprehenditur, quo (e) maior est crassities laminae, cui foramen inest, adeo ut tandem evadat ratio aequalitatis, et ita venae contractio sensibiliter evanescat (f), si foraminis nudi loco brevis tubulus cylindraceus substituatur.

Propositio XII.

244. *Manente eadem crassitie laminae, cui foramen insculptum est, contractio venae est eo minor, quo maior vicissim est ratio foraminis ad amplitudinem vasis.*

Iuxta experimentum Bernoullianum superius (241) indicatum, 1.° particulae, quae foraminis centro imminent, descendunt in recta H G (Fig. 58.) perpendiculari ad eius planum. 2.° Particulae M' et N' hinc inde positae, et plano foraminis imminentes, initio cadunt per

 re-

(a) Philosophiae naturalis Principia Mathematica lib. 2. sect. 7. prop. 36.
(b) Danielis Bernoullii Hydrodynamica sectione quarta, articulo septimo, pag. 6.
(c) De Castellis articulo 38. 39.
(d) Hydrodynamica sectione 4. pag. 79.
(e) Hydrodynamica sect. 4. art. 3. pag. 64.
(f) Ioannis Poleni De Castellis art. 50. pag. 26.

rectas propemodum verticales M'P', N'Q', sed ubi proximae fundo sunt, ita cursum suum inflectunt, ut properent ad foramen per lineas P'S, Q'I obliquas ad ejus planum. 3.° Particulae M et N constitutae extra columnam foramini imminentem, cum propius ad fundum accedunt, ita mutant directionem, ut transeant per foramen secundum lineas PE, QF, ad eius planum magis obliquas quam praecedentes P'S, Q'I. 4.° Particulae tandem aliae quo magis remotae sunt a columna foramini insistente, eo maiori obliquitate transeunt per foramen. Hoc autem posito, si concipias foramen EF augeri; utique hoc in casu particulae M et N, quae prius magis distabant a columna foramini incumbente, modo ab illa minus distantes erunt, atque adeo per foramen transibunt eo minori obliquitate, quo maius factum foramen erit. Sed quo minus obliquus est motus particularum e foramine erumpentium, eo minus etiam (240) contrahi debet vena; ergo contractio venae est eo minor, quo maior est ratio foraminis ad amplitudinem vasis.

COROLLARIUM I.

245. Si ergo foramen ita auctum fuerit, ut amplitudinem vasis, aut fundi aequet, hoc est si ratio foraminis ad amplitudinem vasis evadat ratio aequalitatis; tunc venae contractio erit omnium minima, sive nulla. Et sane sublato fundo, aqua instar columnae solidae (209) e vase erumpit.

COROLLARIUM II.

246. Cum eadem fiat (242) contractio venae, sive orificium in vasis latere sit insculptum, sive in eius fundo; etiam contractio venae horizontalis e laterali foramine erumpentis, erit eo minor, quo maior erit ratio foraminis ad amplitudinem vasis.

COROLLARIUM III.

247. Et quia aucto foramine laterali, crescit similiter eius ratio ad amplitudinem vasis; ideo si foramen non fuerit valde parvum; contractio venae adeo parva erit, ut sensibiliter evanescat.

PROPOSITIO XIII.

248. *Vena aquae per foramen valde parvum exilientis, non ubique aequaliter densa est; sed densitas eius crescit pergendo a foramine usque ad eius maximam contractionem.*

Sit EF (Fig. 60. 61.) orificium valde parvum in tenuissima lamina efformatum, per quod exiliat aquae vena EBDF; haec utique in *ef*, scilicet ad distantiam quasi unius digiti a foramine, ita

ita contracta erit, ut diameter foraminis EF sit (243) propemodum ad diametrum sectionis *ef*, ut radix quadrata binarii ad unitatem. Dico, densitatem aquae in *ef* maximam omnium esse, minimam in EF, et in intermediis locis mediam. Daniel Bernoullius (a) observavit, partem venae E*ef*F semper esse turbidam, et opacam, et quidem magis turbidam, et opacam versus EF, quam versus *ef*; contra vero partem alteram *e*BD*f* esse pellucidam instar crystalli. Quaenam igitur esse poterit tam singularis phaenomeni huius causa? Certe haec nequit erui aliunde, quam ex theoria incomparabilis Newtoni, qui desumit materiae opacitatem ex interruptione eius homogeneitatis, et diaphaneitatem ex uniformi eius continuatione. Itaque pars venae E*ef*F idcirco est turbida, et opaca, quia minimae eius particulae sunt amplis, et inordinatis meatibus interceptae; et ideo procul inter se distant; contra vero particulae aquae *e*BD*f* exiguos, et ordinatos meatus undique intercipiunt, et ideo massa fluida ex illis constans, homogenea est, lumini pervia, et pellucida. Atqui pars venae E*ef*F est magis turbida, et opaca versus EF, quam versus *ef*; ergo minimae eius particulae prope EF erunt disiunctae magis, quam prope *ef*, et ita densitas venae crescet pergendo a foramine EF usque ad *ef*, ubi venae diameter est omnium minima.

COROLLARIUM I.

249. Cum pars venae *e*BD*f* pellucida, et crystallo similis videatur; eadem esse debet consistentiae naturalis, aut ea praedita densitate, quam naturaliter habet aqua.

COROLLARIUM II.

250. Quia pars venae altera E*ef*F particulas eo densiores habet, quo sunt sectioni *ef* viciniores; eadem potest concipi velut constans ex tot numero filamentis convergentibus ad *ef*, quot sunt aquae particulae, quae actu simul exeunt per EF. Unde tot continebuntur fluentis aquae particulae in *ef*, quot simul actu exeunt per EF.

COROLLARIUM III.

251. Et quia eodem tempore tanta aquae copia effluit per *ef*, quanta per EF exit; patet, particulas eius quoque transire per *ef* cum ea velocitate, cum qua exeunt per EF.

COROLLARIUM IV.

252. Et ideo cum particulae dum transeunt per EF, habeant (219. 224.) velocitatem altitudini aquae debitam; eandem quoque habebunt ipsae, cum transeunt per *ef*.

L 2 SCHO-

(a) Exercitationes Mathematicae pag. 69.

SCHOLION.

253. Newtonus (a) putavit, motum aquae iam e foramine EF egressae, etiamnum accelerari usque ad sectionem *ef*, ita ut velocitas in EF sit ad velocitatem in *ef*, sicuti vicissim sectio *ef* ad foramen EF. Hoc autem foret consonum veritati, si aqua per totum spatium E*ef*F ea esset praedita densitate, quam naturaliter ipsa habet; hoc enim in casu solum velocitates fluentis aquae sunt in ratione reciproca sectionum. Verum cum venae densitas eo magis crescat, quo est proximior sectioni *ef*; eadem, cum transit a foramine EF ad sectionem *ef*, motu semper aequabili (251) ferri debet. Et sane, si aquae velocitas in EF esset ad eiusdem velocitatem in *ef*, ut vicissim sectio *ef* ad foramen EF; utique manente foramine EF, et aucta sectione venae *ef*, etiam minueretur aquae velocitas in *ef*. Atqui si foramini EF brevis tubulus cylindraceus eiusdem cum illo diametri applicetur, augetur sectio venae *ef*, adeo ut sensibiliter fiat (243) foramini EF aequalis; igitur aquae vena transiens per hunc tubulum, haberet velocitatem minorem illa, qua aqua per nudum foramen exiliens promovetur. Sed Marchio Polenus (b) expertus fuit, venae velocitatem in hisce duobus casibus esse eandem; consequens ergo erit, ut motus aquae foramen iam praetergressae, nullo modo prae foramine acceleretur.

PROPOSITIO XIV.

254 *Particulae quaedam aquae, dum per orificium valde parvum in tenui insculptum lamina, e vase erumpunt, ita oblique dirigunt suos cursus, ut arceant ab effluxu aliquas vicinarum.*

Si nullae aquae particulae impedirent exitum vicinarum, omnes (225) cum eadem celeritate altitudini aquae debita, e foramine prosilirent; ideoque eius vena ubique aequaliter densa esset. Atqui dum aqua effluit per foramen, densitas eius venae usque ad certum limitem semper crescit (248), ita ut prope foramen sit longe minor, quam ubi vena habet maximam contractionem; ergo particulae quaedam aquae dum exeunt per foramen, arcent ab effluxu aliquas vicinarum. Hoc autem impedimentum non alia ex causa oriri potest, quam ab obliquis motibus earundem, a quibus etiam (240) contrahitur vena aquae; ergo particulae quaedam aquae dum effluunt per foramen, ita oblique dirigunt suos cursus, ut arceant ab effluxu aliquas vicinarum.

Co-

(a) Philosophiae Naturalis Principia Mathematica lib. 2. sect. 7. prop. 36.
(b) Ioannis Poleni Epistola ad Iacobum Marinonum.

COROLLARIUM.

255. Unde quantitas aquae actu fluens per orificium dato tempore, erit minor illa, quae pari tempore per idem flueret orificium, si nullae eius particulae impedirent exitum vicinarum. Prima quantitas aquae dicitur *actualis*; secunda vero *theoretica* nuncupatur.

SCHOLION.

256. Bossutius statuit (a) quantitatem actualem aquae per quodvis foramen dato tempore effluentis, esse perpetuo ad theoreticam, ut 5 ad 8; verum, ni fallor, haec ratio in variis foraminibus est diversa. Siquidem contractio venae mutari solet (243) tum ob auctam, vel diminutam crassitiem laminae, cui foramen inest, tum etiam (244) ob auctam, vel diminutam diametrum orificii. Sed quantitas actualis aquae dato tempore effluentis, minuitur, vel augetur pro maiori, aut minori venae contractione; ergo et ratio quantitatis actualis aquae ad theoreticam in variis foraminibus est diversa.

DEFINITIO III.

257. *Lumen tubi* est orificium, per quod aqua e vase exit, et tubum influit.

PROPOSITIO XV.

258. *Si loco foraminis nudi* EF (*Fig.* 60. 61.) *brevis tubulus cylindraceus eiusdem cum illo diametri adhibeatur; filamenta aquae* E*e*, F*f*, *quae prius obliqua erant ad foraminis planum* EF, *sicque contractam venam constituebant, nunc veluti attracta, et illecta a parietibus internis tubi, sensibiliter fient recta ad foraminis idem planum.*

Marchio Polenus (b) expertus fuit, quod si aquae vena, quae ex foramine nudo fluens, post exitum ab eodem gracilior futura esset, excipiatur brevi tubulo cylindraceo, cuius lumen foramini sit aequale; tunc adeo intumescit, ut sensibiliter repleat cavitatem totius tubi. Vena igitur hoc in casu fit sensibiliter cylindracea, sive eadem diametro ubivis praedita. Atqui id nullo modo explicari potest, quam si dicatur filamenta obliqua, et convergentia E*e*, F*f*,

(a) Traité Elémentaire d'Hydodynamique Tom. 2. artic. 359. pag. 33.
(b) De Castellis artic. 75. pag. 37.

Ff, veluti attracta, atque illecta a parietibus internis tubi, sensibiliter sequi eorum ductum, et sic reddi invicem parallela, atque ad foraminis planum recta; igitur filamenta aquae E*e*, F*f*, quae dum aqua e nudo foramine erumpebat, convergentia erant, et obliqua ad foraminis planum EF, fiunt postea sensibiliter parallela, et recta ad idem planum, si foraminis nudi loco tubulus cylindraceus eiusdem cum illo diametri substituatur.

PROPOSITIO XVI.

259. *Quamvis dum aqua e vase in cylindraceum tubum transit, filamenta eius* E*e*, F*f* (*Fig.* 60. 61.) *sensibiliter recta sint ad luminis* EF *planum; nihilominus tamen habent insensibilem adhuc obliquitatem.*

Teste Poleno (a) vena aquae fluentis per brevem tubulum cylindraceum, est minus pellucida, atque adeo minus densa, quam vena contracta aquae e nudo foramine prosilientis. Id quoque Bossutius (b) expertus fuit; nam cum brevem tubulum cylindraceum, per quem fluebat aqua, clavi leviter percussisset, comperit aquae venam, quae accurate prius implebat tubum, subito ab internis eius parietibus separari, et ad minorem diametrum se reducere. Hoc autem invicte probat, venam aquae per tubulum effluentis, densitatem habere minorem illa, quam naturaliter habet aqua; unde dum ipsa e vase in tubulum transit, quaedam eius particulae impediunt quominus aliquae vicinarum in eundem tubulum ingrediantur. Atqui ipsae nequeunt impediri, nisi ab obliquis motibus particularum, ex quibus constant filamenta E*f*, F*f*; ergo haec quoque tubulum ingredientur cum aliqua saltem insensibili obliquitate, ideoque reipsa etiam contrahitur aquae vena, quae fluit per brevem tubulum cylindraceum, quamvis eius diameter a diametro luminis (c) tam parum differat, ut earum differentia nequeat humanis sensibus internosci.

COROLLARIUM I.

260. Hinc aqua effluente per brevem tubulum cylindraceum, filamenta E*e*, F*f*, minus obliqua erunt, quam cum e foramine nudo exilit; ideoque in primo casu plures aquae particulae liberum habebunt exitum (254), et in altero pauciores. Quare per brevem tubulum cylindraceum plus aquae tempore dato fluet, quam per nudum foramen; quamvis diameter luminis eiusdem tubuli diametro

(a) De Castellis art. 51. pag. 27.
(b) Traité d'Hydrodynamique Tom. 2. art. 401. pag. 63.
(c) Epistola Ioannis Poleni ad Iacobum Marinonum.

tro foraminis sit aequalis; quamvis altitudo aquae supra centrum luminis ipsius tubuli, sit aequalis altitudini aquae supra foraminis nudi centrum; quamvis aqua fluat cum eadem velocitate (225) per tubulum, et per foramen.

COROLLARIUM II.

261. Quia dum aqua e vase influit tubulum, quaedam eius particulae sunt aliquibus impedimento, ne ipsae quoque eundem tubulum ingrediantur; quantitas aquae fluentis per tubulum cylindraceum, erit perpetuo minor illa, quae per ipsum pari tempore emanaret, si nullae eius particulae impedirent exitum aliarum, et ideo etiam in hoc casu quantitas actualis fluentis aquae theoretica minor erit.

SCHOLION.

262. Bossutius (a) putat, quantitatem actualem aquae per quemvis tubulum dato tempore effluentis, constanter esse ad theoreticam, ut 13 ad 16. Sed quoniam quantitates actuales aquae, quae per varios tubulos aequalium luminum tempore dato fluunt, sunt invicem inaequales, ut in sequenti theoremate demonstrabitur; evidens est, quantitatem actualem non esse semper ad theoreticam, ut 13 ad 16.

CAPUT III.

De quantitate aquae per nudum foramen, aut brevem tubulum dato tempore effluentis, deque eius vi pariter, qua exilit.

PROPOSITIO XVII.

263. *Ut definiatur quantitas aquae, quae per nudum foramen, aut tubum tempore dato fluit, non solum attendi debet foramen, aut tubi lumen, et aquae altitudo supra utriusque centrum; sed opus est etiam, ut attendatur tum crassities laminae, cui foramen inest, aut longitudo ipsius tubi, tum etiam reliqua figura interna foraminis, aut tubi.*

Sagacissimus Polenus (b), ut inveniret quantitatem aquae, quae tempore dato per datum foramen, aut tubum fluere potest, sequentia instituit experimenta in vase aqua constanter pleno sub altitudine pedum 13 supra centrum foraminis, aut luminis tubi.

Pri-

(a) Traité d'Hydrodynamique Tom. 2. artic. 384. pag. 53.
(b) Epistola ad Iacobum Marinonum.

Primum experimentum habuit foramine rotundo diametri trium linearum in tenui ferrea bractea efformatum. Tempore autem minuti unius emanaverunt pollices aquae cubici 607.

Secundum experimentum institutum fuit foramine rotundo diametri iam constitutae trium linearum in lamella ex orichalco, cuius crassities vix quartam partem lineae superabat. Huius autem crassitiei dimidia pars intacta relicta fuit, dimidia autem reliqua pars deraso, ut ita dicam, angulo, obtinebat figuram superficiei frusti coni recti, altitudinem habentis aequalem radio suae basis. Cum vero ita posita haec lamella esset, ut eius superficies intacta cavitati vasis responderet, tempore unius minuti effluxerunt pollices aquae cubici 627.

Tertium experimentum habuit eadem lamella, sed posita inverso situ, adeo ut superficies eius limata, cavitati vasis responderet. Tempore autem unius minuti 713 pollices aquae cubici emanaverunt.

Quartum ut faceret experimentum, tubo cylindrico usus est, tredecim lineis longo, et habente diametrum trium linearum. Tempore vero unius minuti fluxere pollices aquae cubici 809.

Quintum etiam instituit experimentum illo eodem tubulo, quem in quarto iam adhibuerat, sed prius eum duabus lineis decurtandum curavit, eiusque alterum orificium sic introrsum limandum, ut referret figuram superficiei frusti coni similem illi, quae iam (ut dictum est) lamellae inducta erat. Cum per hoc orificium aqua tubulum influebat, tempore unius minuti erumpebant pollices aquae cubici 889.

Sextum denique experimentum captum fuit eodem tubulo illo, sed iterum quatuor lineis decurtato, atque adeo septem lineas non excedente. Cum autem aqua orificio limato exciperetur, tempore unius minuti 905 pollices aquae cubici effluxerunt.

In his ergo experimentis diversa quantitas aquae tempore dato effluxit; quamvis in omnibus diametri luminum aequarentur; quamvis altitudo aquae supra centra luminum esset eadem. Propterea non licebit aquae copiam definire, quae tempore dato per datum foramen, aut tubum exit, nisi prius determinetur tum crassities laminae, cui foramen insculptum est, vel longitudo ipsius tubi, tum etiam reliqua figura interna foraminis, aut tubi.

PROPOSITIO XVIII.

264. *Quantitas minor, aut maior aquae in sex allatis experimentis dato tempore effluentis, ex eo procedit, quod filamenta fluentis aquae fuerint in venis aliquibus laxiora, et in reliquis confertiora.*

In sex allatis experimentis singuli iactus aquae ex lateralibus foraminibus, atque ex tubulis exilientes, eandem omnino habebant directionem, omnesque, Poleno teste, eandem semper distantiam attingebant, sive (ut ex conicis constat) eandem semper parabolam describebant: quod indicat manifeste, aquam in omnibus hisce iactibus eandem quoque habuisse celeritatem. Quantitas ergo aquae dato tempore effluentis, non ideo maior, aut minor effecta est, quod eius velocitas maior, aut minor fuerit; sed quia per lumina omnino aequalia, et aequali temporis intervallo in aliquibus experimentis confertiores, atque adeo plures, in aliis autem rariores aquae particulae emanaverunt, ac propterea filamenta fluentis aquae fuere laxiora in horum venis, in venis autem illorum confertiora. Et sane, dum exit aqua e foraminibus lamellarum, eius filamenta sunt pauciora; diameter enim contractae venae perspicue est diametro foraminis valde minor. Cum vero e brevibus tubulis aqua emanat, tunc etsi diameter venae a diametro luminis tam parum differat, ut haec differentia non possit (258) sensibus internosci, atque distingui; credibile est tamen in hisce iactibus filamenta posse fieri confertiora. Si enim per aequalia lumina, et aequalibus velocitatibus in quinto experimento plus aquae effluxit ex tubulo quam in quarto, et in sexto plus quam in quinto; quis putet in sexto filamenta non fuisse confertiora quam in quinto, et in hoc pariter conferta magis quam in quarto? Patet ergo veritas propositionis.

PROPOSITIO XIX.

265. *Ex data quantitate aquae per datum lumen dato tempore effluentis, accurate nequit determinari velocitas uniformis, qua aqua ex eodem lumine exilivit.*

Nonnulli viri doctissimi, ut ex data quantitate aquae per datum lumen dato tempore effluentis, determinent velocitatem aequabilem, qua eadem exilivit, cylindrum aqueum sibi fingunt, soliditate sua aequalem quantitati aquae, quae tempore illo effluxit, et pro basi habentem idem lumen, per quod erupit. Quo facto, ita instituunt ratiocinium. Quia quantitas data aquae aequatur (225) cylindro aqueo, cuius basis est lumen datum; hic cylindrus habebit pro altitudine spatium illud, quod aqua tempore dato absolvit cum illa velocitate aequabili, qua ex dato foramine exilivit. Sed si cylindri soliditas dividatur per eius basim, in quoto altitudo eiusdem prodit; ergo si quantitas data aquae dividatur per datum lumen, quotus inde emergens, erit spatium, quod aqua tempore dato absolvit, atque adeo et uniformis eius velocitas invenietur. Verum si iuxta hanc methodum conformentur in sex cylindros quantititates diversae aquae, quae in sex allatis experimentis intra minutum temporis effluxerunt, cylindri sex inde orti, erunt soliditate invicem inaequales. Singuli autem habent aequales bases, sive aequalia lumina, ex quibus emanaverunt; ergo habebunt quoque altitudines inaequales, ac proinde aqua in sex allatis experimentis diversa celeritate ex singulis luminibus emanabit. Vidimus autem (264) aquae velocitatem in omnibus hisce experimentis eandem esse; ergo ex data quantitate aquae per datum lumen dato tempore effluentis, accurate nequit determinari velocitas uniformis, qua ipsa ex eodem lumine exilivit.

Corollarium I.

266. *Ergo ex conformatione quantitatis datae aquae in cylindrum, cuius basis est lumen, ex quo eadem prosilivit,* accurate ostendi nequit, aquam ex eodem lumine effluxisse cum illa velocitate, quam grave motu naturaliter accelerato acquirere potest libere descendendo per eius altitudinem supra luminis centrum. Et sane, iuxta Gulielmini experimentum (a), cum aqua ex vase effueret per nudum foramen quadratum, cuius latus erat pars quarta unciae Bononiensis, et aquae altitudo supra illius centrum permaneret constanter sub altitudine pedum Bononiensium 3, unciarum $10\frac{7}{8}$, seu pedum Parisinorum 4, pol. $3\frac{36}{41}$; tanta quantitas aquae intra minutum primum ex eo effluxit, ut conformata in prisma rectum, cuius basis foramini aequabatur, eius altitudo esset pedum Bononiensium 427, unciarum $9\frac{11}{393}$, seu pedum Parisinorum $500\frac{3}{4}$. Velocitas autem acquisita a gravi post lapsum liberum ex altitudine pedum Parisinorum 4, pol. $3\frac{36}{41}$, est huiusmodi, ut cum illa grave intra minutum secundum absolveret aequabiliter pedes Parisinos 16, pol. 8, lin. 2, vel intra minutum primum pedes Parisinos 964; ergo velocitas aquae e foramine effluentis, quae ex allato experimento infertur a Gulielmino, erit ferme duplo minor illa, quam acquirere potest grave libere descendendo ex altitudine aquae supra foraminis centrum; et ideo eius Tabulae, in quibus notari solent velocitates altitudinibus datis convenientes, manifeste a veris differunt. Quapropter iuxta Gulielmini experimentum concludi debet, aquam effluere per foramen cum ea velocitate, quam acquirere potest grave libere cadendo ex quarta parte altitudinis aquae supra foramen. Quinimo si altero Mariotti experimento (b) fides habenda est, aqua effluit per foramen cum illa velocitate, quam acquirere potest grave libere cadendo per dimidiam altitudinem aquae supra foramen.

Co-

(a) Appendice alla Misura delle Acque correnti.
(b) Traité de mouvement des eaux par. 3. discours 3. pag. 416.

Corollarium II.

267. Accurata igitur esse nequit Musschenbroekii demonstratio (a) innixa sexto Poleni experimento, qua nempe ostendere conatus fuit aquam ex dato lumine exilire cum illa velocitate, quam grave acquirere potest cadendo ex eius altitudine supra luminis centrum. Si enim ex aquae copia, quae in quovis ex quinque aliis experimentis unius minuti tempore emanavit, cylindrus efformaretur, habens pro basi lumen, ex quo effluxit; inveniretur velocitas minor illa, quam grave acquirere potest post lapsum liberum ex altitudine aquae supra luminis centrum.

PROPOSITIO XX.

268. *Sint duo vasa* AD, CK (*Fig. 62. 63.*) *aquae plena, et in eorum fundis insculpta foramina* IF, GS *valde parva relate ad amplitudines eorundem, per quae effluere aqua possit. Deinde tanta aquae copia superne infundatur utrique vasi, quanta interim per foramina illa fluit, ita ut sint constantes in vase utroque altitudines aquae* MI, NG. *Dico, velocitatem aquae fluentis per foramen* IF *esse ad velocitatem exilientis per foramen* GS, *ut radix quadrata altitudinis* MI *ad radicem quadratam altitudinis* NG.

Aqua ex foramine IF effluit (227) cum illa velocitate, quam motu naturaliter accelerato acquirere potest grave post lapsum liberum per MI. Similiter aqua per foramen GS exilit cum illa celeritate, quam motu naturaliter accelerato acquirere potest grave descendendo libere per NG; ergo quadratum velocitatis, qua exilit aqua per foramen IF, erit ad quadratum velocitatis, qua ipsa effluit per foramen GS, ut quadratum velocitatis a gravi acquisitae post lapsum liberum per MI ad quadratum velocitatis a gravi acquisitae post lapsum liberum per NG. Sed spatium MI est ad spatium NG, ut quadratum velocitatis acquisitae a gravi post lapsum liberum per MI, ad quadratum velocitatis a gravi acquisitae post lapsum liberum per NG; ergo et quadratum velocitatis, quam habet aqua exiens per foramen IF, erit ad quadratum velocitatis, qua aqua per foramen GS exilit, ut MI ad NG. Sed quando quatuor quantitates sunt proportionales, etiam radices quadratae illarum sunt proportionales; ergo et velocitas, quam habet aqua exiens per foramen IF, erit ad velocitatem aquae per foramen GS exilientis, ut radix quadrata altitudinis MI ad radicem quadratam altitudinis NG.

 PRO-

(a) Introductio ad Philosophiam naturalem. Tom. 2. art. 1294. pag. 23.

PROPOSITIO XXI.

269. *Iisdem positis, velocitas aquae fluentis per foramen* IF, *erit ad velocitatem exilientis per foramen* GS, *in ratione subduplicata altitudinis* MI *ad altitudinem* NG.

Sumpta VI media proportionali inter altitudines MI, NG, erit MI ad VI, ut eadem VI ad NG. Sed quando tres quantitates sunt continue proportionales, quadratum primae est ad quadratum secundae, ut prima ad tertiam; ergo etiam quadratum MI erit ad quadratum VI, ut MI ad NG. Sed quando quatuor quadrata sunt proportionalia, etiam illorum radices sunt proportionales; ergo etiam MI erit ad VI, ut radix quadrata altitudinis MI ad radicem quadratam altitudinis NG. Sed velocitas aquae fluentis per foramen IF est (168) ad velocitatem exilientis per foramen GS, ut radix quadrata altitudinis MI ad radicem quadratam altitudinis NG; ergo et velocitas prima ad secundam erit, ut MI ad VI. Sed quia tres rectae MI, VI, NG sunt continue proportionales, est prima MI ad secundam VI in ratione subduplicata primae MI ad tertiam NG; ergo etiam velocitas aquae fluentis per foramen IF, erit ad velocitatem eiusdem exilientis per foramen GS in ratione subduplicata altitudinis MI ad altitudinem NG.

COROLLARIUM.

270. Ergo ratio, quam inter se habent radices quadratae altitudinum MI, NG, eadem erit (269) cum ratione subduplicata altitudinum earundem.

PROPOSITIO XXII.

271. *Si in duobus vasis* ABCD, EFGL (*Fig. 65. 66.*) *altitudines constantes aquae* KH, MO *invicem sint aequales, at ex adverso foramina* HI, OP, *per quae aqua effluit, sint inaequalia inter se; quantitates theoreticae aquae dato tempore ex utroque foramine effluentes, erunt in directa eorundem foraminum ratione.*

Velocitates aquae ex duobus foraminibus erumpentes, sunt (269) in ratione subduplicata altitudinum eiusdem aquae supra foraminum centra. Atqui altitudines aquae KH, MO (ex hyp.) sunt aequales; ergo etiam velocitates aquae fluentis per foramina HI, OP, invicem aequabuntur, ideoque si per foramen HI tempore dato effluat aquae quantitas theoretica aequalis columnae KHIL, ex foramine alio OP erumpet quantitas theoretica aequalis columnae MOPS. Sed columna KHIL est ad columnam aeque altam MOPS, ut foramen HI ad foramen OP; ergo et quantitates theoreticae aquae dato tempore exilientes per foramina HI, OP, erunt in directa eorundem foraminum ratione.

SCHOLION I.

272. Bossutius (a) sequenti methodo adinvenit, quantitates etiam actuales aquae ex inaequalibus foraminibus dato tempore effluentes, esse in directa eorundem foraminum ratione. In duabus lamellis, quarum crassities aequalis erat medietati unius lineae Parisinae, foramina duo insculpsit, quorum unius diameter erat pollicum 2; diameter autem alterius pollicis 1. Has duas lamellas ita duorum vasorum lateribus applicavit, ut foraminum centra a suprema aquae superficie distarent pedibus 11, poll. 8, lin. 10. His autem positis, observavit tempore unius minuti ex primo foramine effluxisse pollices aquae cubicos 37203, ex altero autem pollices aquae cubicos 9281. Igitur quantitates actuales aquae tempore unius minuti per haec foramina effluentes, inter se erunt, ut 37203 ad 9281. Hi vero duo numeri sunt quamproxime, ut 4 ad 1, sive ut quadrata diametrorum, quibus praedita sunt foramina, atque adeo etiam in eorundem foraminum ratione; igitur quantitates actuales aquae tempore unius minuti per haec foramina effluentes, sunt quamproxime in directa eorundem foraminum ratione. Idem Auctor (b) facto subinde altero in duobus tubulis inaequalibus experimento, invenit quantitates actuales aquae per illos unius minuti tempore effluentes, quamproxime esse, ut tubulorum lumina, per quae effluunt.

SCHOLION II.

273. Nec mirum videri debet, quod quantitates actuales aquae tempore unius minuti per illa duo foramina effluentes, non fuerint accurate in directa foraminum ratione. Nam cum differentia foraminum, per quae fluebat aqua, esset notabilis; utique minor (244) erit contractio venae fluentis e foramine quadruplo quam ex simplo, atque adeo, proportione servata, paullo plus aquae tempore unius minuti debebat effluere per orificium quadruplum, quam per simplum. Idem de quantitatibus actualibus aquae per duos tubulos effluentibus est dicendum.

PRO-

(a) Traité Elementaire d' Hydrodynamique Tom. 2. art. 409. pag. 67.
(b) Traité Elementaire d' Hydrodynamique Tom. 2. art. 354. pag. 30.

PROPOSITIO XXIII.

274. *Si aqua contenta in vase* ABDK (*Fig.* 64.), *modo sit sub constanti altitudine maiori* GI, *modo sub minori* OI, *et in utroque casu exiliat per foramen* IF *valde parvum relate ad amplitudinem vasis; eius quantitas theoretica, quae tempore dato exilit in primo casu, erit ad eiusdem theoreticam quantitatem in casu altero effluentem, ut radix quadrata altitudinis* GI *ad radicem quadratam altitudinis* OI.

Velocitas, qua aqua sub altitudine constanti GI e foramine IF exit, est (268) ad velocitatem, qua aqua sub altitudine constanti OI e foramine IF exilit, ut radix quadrata altitudinis GI ad radicem quadratam altitudinis OI. Sed quantitas aquae tempore dato fluens per foramen IF, dum manet aqua sub altitudine GI, est ad quantitatem aquae interea exilientem ex foramine IF, dum aqua manet sub altitudine OI, ut velocitas aquae fluentis in primo casu, ad velocitatem eiusdem in casu altero exilientis; ergo et quantitas aquae dato tempore effluentis per foramen IF, dum aqua manet sub altitudine HI, erit ad quantitatem aquae eodem tempore exilientem, dum ipsa manet sub altitudine OI, ut radix quadrata altitudinis GI ad radicem quadratam altitudinis OI.

SCHOLION.

275. Quantitates etiam actuales aquae dato tempore sub diversis altitudinibus ex eodem foramine exilientes, esse inter se, ut radices quadratae altitudinum earundem, Bossutius (a) sequenti methodo adinvenit. In vasis fundo insculpserat orificium, cuius diameter erat pollicis 1. Tum manente constanter aqua sub altitudine pedum 9 supra foraminis huius centrum, invenit quantitatem actualem aquae unius minuti tempore effluentem, fuisse pollicum cubicorum 8135. Demum redacta aqua ad constantem altitudinem pedum 4 supra foraminis centrum, comperit quantitatem actualem aquae tempore unius minuti exilientem, fuisse pollicum cubicorum 5436. Est autem 8135 ad 5436 quamproxime in ratione 3 ad 2; igitur quantitates actuales aquae unius minuti tempore effluentes, erant quamproxime ut 3 ad 2. Est autem 3 ad 2, ut radix quadrata altitudinis 9 ad radicem quadratam altitudinis 4; igitur quantitates actuales aquae erant quamproxime, ut radices quadratae altitudinum aquae supra foraminis centrum. Similiter idem Auctor (b) loco foraminis brevem tubulum substituendo, expertus fuit, quantitates actuales aquae sub diversis altitudinibus per eundem brevem tubulum dato tempore effluentes, esse ut radices quadratae altitudinum earundem.

(a) Traité Elementaire d'Hydrodynamique Tom. 2. artic. 355. pag. 30.
(b) Traité Elementaire d'Hydrodynamique Tom. 2. art. 410. pag. 68.

COROLLARIUM I.

276. Quia etiam velocitates, quibus aqua e foramine FI erumpit, sunt (268) ut radices quadratae altitudinum GI, OI; patet, tam quantitates theoreticas, quam actuales aquae pari tempore ex foramine FI fluentes, esse ut velocitates, quibus effluunt.

COROLLARIUM II.

277. Quonim sumpta CI media proportionali inter altitudines GI, OI, est (269) GI ad CI, ut radix quadrata altitudinis GI ad radicem quadratam altitudinis OI; evidens est, quantitates aquae tam theoreticas, quam actuales pari tempore e foramine FI exilientes, esse quoque inter se, ut rectae GI, CI, atque adeo in hac pariter ratione (276) esse celeritates aquae ex eodem foramine effluentes.

PROPOSITIO XXIV.

278. *Vis, qua aqua sub altitudine maiori* GI (*Fig.* 64.) *urgetur ad exitum per foramen, aut lumen tubi* IF, *est ad vim illam, qua sub altitudine minori* OI *ad eundem exitum sollicitatur, ut altitudo maior* GI *ad minorem* OI.

Vis, qua aqua manens sub altitudine GI urgetur ad exitum per foramen, aut lumen tubi IF, est (235) duplo maior pondere columnae aqueae GIFE; vis autem, qua aqua manens sub altitudine OI, ad eundem exitum animatur, est (235) duplo maior pondere columnae aqueae OIFM. Ergo prima vis erit ad alteram, ut duplum ponderis columnae GIFE ad duplum ponderis columnae OIFM, sive ut pondus columnae GIFE ad pondus columnae OIFM, aut ut columna GIFE ad columnam OIFM, aut ut altitudo primae GI ad altitudinem secundae OI.

COROLLARIUM I.

279. Quare si altitudines GI, OI fuerint, ut 4 ad 1; in eadem quoque ratione erunt vires, quibus aqua manens sub altitudinibus GI, OI, ad exitum sollicitatur per foramen, aut tubi lumen IF.

Co-

Corollarium II.

280. Unde si altitudo GI sit quadrupla altitudinis OI; velocitas aquae fluentis sub altitudine GI, erit dupla illius, qua exilit sub altitudine OI. Sumpta enim CI media proportionali inter altitudines GI, OI; utique cum hae sint (ex hyp.) ut 4 ad 1, erit GI ad CI, ut 4 ad 2, sive ut 2 ad 1. Sunt autem vires (278) ut GI ad OI, et (277) velocitates ut GI ad CI; ergo dum vires sunt ut 4 ad 1, celeritates erunt ut 2 ad 1, consequenter vis quadrupla imprimit aquae duplam solum celeritatem.

Scholion.

281. Neque id paradoxi loco habendum erit. Nam quando aquae velocitas dupla est, dupla est etiam quantitas aquae tempore dato fluens. Sed quantitas dupla aquae ducta in duplam celeritatem, efficit quadruplam quantitatem motus; ergo quando aquae velocitas est dupla, quantitas motus in ea genita, erit quadrupla, ideoque non est mirandum, si postea vis quadrupla imprimat aquae duplam solum celeritatem.

CAPUT IV.

De temporum proportione, quibus diversa vasa cylindrica aquae plena, per aequalia, et inaequalia foramina evacuantur.

PROPOSITIO XXV.

282. *Si in duobus vasis* ABCD, HIKL (*Fig.* 67. 69.) *tam altitudines constantes aquae* GE, OM, *quam foramina valde parva* EF, MN *magnitudine differant inter se; quantitates aquae* Q *et* S *dato tempore ex utroque foramine effluentes, erunt in ratione composita foraminum* EF, MN, *et radicum quadratarum altitudinum* GE, OM.

Finge intermedium vas alterum A'B'C'D' (Fig. 68.), habens altitudinem aquae G'M', ipsi GE aequalem, foramen autem M'N' eiusdem prorsus diametri cum alio MN. Pone rursus ex foramine hoc M'N' quantitatem aquae R effluere illo tempore, quo ex foraminibus aliis EF, MN reliquae Q et S exilierunt. Itaque cum in vasis ABCD, A'B'C'D' aquae altitudines perpetuo sint aequales, et foramina inaequalia; utique (271) Q erit ad R, ut foramen EF ad foramen M'N', vel ut foramen EF ad foramen MN. Rursus quia in vasis A'B'C'D', HIKL constantes aquae altitudines

nes sunt mutuo inaequales, et foramina aequalia inter se; R erit (274) ad S, ut radix quadrata altitudinis G'M', vel GE ad radicem quadratam altitudinis OM. Atqui Q est ad S in ratione composita ex rationibus Q ad R, et R ad S; ergo etiam Q erit ad S in ratione composita foraminum EF, MN, et radicum quadratarum altitudinum GE, OM.

Corollarium.

283. Hinc quantitates aquae Q et S dato tempore effluentes, erunt inter se, ut factum ex foramine EF in radicem quadratam altitudinis GE ad factum ex foramine MN in radicem quadratam altitudinis OM. Et ideo si foramen EF sit ad foramen MN, ut radix quadrata altitudinis OM ad radicem quadratam altitudinis GE; quantitates aquae Q et S aequales erunt.

PROPOSITIO XXVI.

284. *Si in duobus vasis* ABCD, HIKL (*Fig.* 70. 71.) *altitudines constantes aquae* GE, OM *invicem sint aequales, et foramina* EF, MN *magnitudine differant inter se; tempora, quibus quantitates aequales aquae ex foramine utroque fluunt, erunt in reciproca eorundem foraminum ratione.*

Ex foramine maiori EF fluat tempore T quantitas aquae Q, ex minori autem MN tempore alio T' exeat quantitas alia S, alteri Q aequalis. Dico, tempus T esse ad tempus T', ut foramen MN ad foramen EF. Finge enim ex foramine maiori EF, per quod tempore T effluxit quantitas aquae Q, modo tempore T' exire quantitatem aliam aquae R. Cum ergo aqua ex vase ABCD per foramen EF aequabili motu erumpat; quantitates eius diversis temporibus effluentes, erunt ut tempora, quibus effluunt, ideoque T erit ad T', ut Q ad R, aut (ex hyp.) ut S ad R. Sed cum quantitates aquae S et R eodem tempore T' effluxerint per inaequalia foramina EF, MN, est (271) S ad R, ut MN ad EF; ergo etiam T erit ad T', ut MN ad EF, sive tempora erunt in reciproca foraminum ratione.

Corollarium.

285. Manente ergo eadem altitudine aquae in vase, certa eius quantitas eo breviori tempore ex illo erumpet, quo maius erit foramen, per quod exilit.

PROPOSITIO XXVII.

286. *Tempora, quibus vaſa cylindrica* ABCD, EFNL (*Fig.* 72. 73.) *aequalium baſium, et altitudinum per inaequalia foramina* HI, OP *evacuantur, ſunt in reciproca eorundem foraminum ratione.*

Æquales aquae altitudines KH, MO divide in totidem partes indefinite parvas, velut K*k*, M*m*, quae ſingulae tam multitudine, quam magnitudine aequabuntur. Dein per puncta ſingula diviſionum duc plana vaſorum baſibus parallela, quae aquam divident in lamellas indefinite parvas, veluti A*ad*D, E*el*L, quae ſingulae etiam erunt multitudine, et magnitudine inter ſe aequales. Finge praeterea ſuperficies aquae AD, EL tempuſculis T et T' deſcendere per aequalia ſpatiola K*k*, M*m*. Pone denique his tempuſculis per inaequalia foramina HI, OP effluere quantitates aquae Q et S, quae neceſſario aequabuntur lamellis A*ad*D, E*el*L, atque adeo etiam inter ſe. His autem praemiſſis, ita oſtenditur propoſitio. Quia altitudines aquae KH, *k*H differunt inter ſe quantitate K*k* infinite parva, poterunt etiam pro aequalibus uſurpari. Sed eandem ob cauſam altitudines quoque MO, *m*O quamproxime aequabuntur; ergo totis tempuſculis T et T', quibus evacuantur lamellae aequales A*a* *d*D, E*el*L, ſive exeunt per foramina quantitates aequales aquae Q et S, aequales etiam aquae altitudines KH, MO pro conſtantibus ſunt habendae. Sed dum conſtantes aquae altitudines ſunt aequales, et foramina inaequalia, tempora, quibus effluunt quantitates aequales aquae, ſunt (284) in reciproca ratione foraminum eorundem; ergo etiam tempuſcula T et T', quibus evacuantur lamellae A*ad*D, E*el*L erunt in reciproca ratione foraminum HI, OP. Idem autem oſtendi poteſt de aliis etiam tempuſculis, quibus evacuantur reliquae aliae lamellae aquae in utroque vaſe ſibi invicem reſpondentes; igitur etiam tempora, quibus integra vaſa evacuantur, erunt in reciproca eorundem foraminum ratione.

PROPOSITIO XXVIII.

287. *Tempora, quibus vaſa cylindrica* ABCD, EFNL (*Fig.* 74. 75.) *aeque alta, et baſium inaequalium per aequalia foramina* HI, OP *evacuantur, ſunt in directa baſium ratione.*

Aquam contentam in utroque vaſe, divide in lamellas indefinite parvas, aeque multas, et aeque altas, veluti A*ad*D, E*el*L. Finge deinde ſuperficies aquae AD, EL deſcendere per ſpatiola K*k*, M*m* tempuſculis T et T'. Pone denique his tempuſcu-

lis

lis per aequalia foramina HI, OP effluere quantitates aquae Q et S, quae lamellis A*ad*D, E*el*L reſpective aequales erunt. Iam quia, ut ſupra (286) oſtenſum fuit, totis tempuſculis T et T' altitudines aquae in vaſis ſenſibiliter non mutantur; utique ipſae adhuc remanebunt inter ſe aequales. Sed etiam foramina (ex hyp.) ſunt aequalia; igitur quantitates aquae Q et S erunt, ut haec tempuſcula T et T', quibus emanaverunt, et ideo in ratione quoque horum tempuſculorum erunt reſpondentes lamellae A*ad*E, E*el*L. Sed hae lamellae utpote aeque altae, ſunt inter ſe ut earum baſes *ad*, *el*, ſive ut cylindrorum baſes BC, FN; ergo etiam tempuſcula T et T', quibus hae lamellae evacuantur, erunt inter ſe ut cylindrorum baſes BC, FN. Idem autem oſtendi poteſt de aliis etiam tempuſculis, quibus evacuantur reliquae aliae lamellae aquae in utroque vaſe ſibi invicem reſpondentes; igitur etiam tempora, quibus integra vaſa evacuantur, erunt in directa harum baſium ratione.

PROPOSITIO XXIX.

288. *Si duo vaſa cylindrica* ABCD, EFNL (*Fig.* 76. 77.) *aequales habeant baſes* BC, FN, *diverſas autem altitudines* AB, EF; *tempora, quibus vaſa per aequalia foramina* HI, OP *evacuantur, erunt ut radices quadratae altitudinum eorundem.*

Aquae altitudines AB, EF ſint primo ut 4 ad 1. Tum aquam contentam utroque vaſe divide in lamellas indefinite parvas, et aequae multas, quarum ſingulae ſibi invicem reſpondentes, veluti A*ad*D, E*el*L, erunt ut earum altitudines A*a*, E*e*, aut ut altitudines cylindrorum AB, EF, ſive ut 4 ad 1. Finge deinde ſuperficies AD, EL tempuſculis T et T' deſcendere per ſpatiola K*k*, M*m*. Pone denique his tempuſculis effluere per foramina HI, OP quantitates aquae Q et S, quae reſpective aequabuntur lamellis A*ad*D, E*el*L, atque adeo inter ſe erunt, ut 4 ad 1. Iam quia ſuperius demonſtravi (286), altitudines aquae in vaſis ſenſibiliter non mutari totis tempuſculis T et T'; ipſae adhuc eſſe pergent ut 4 ad 1, et ideo velocitates, quibus aqua effluit per foramina, erunt (280) ut 2 ad 1. Cum igitur quantitates aquae Q et S ſint ut 4 ad 1, et velocitates quibus effluunt, ut 2 ad 1; ſequitur etiam tempuſcula T et T', quibus ipſae evacuantur, eſſe ut 2 ad 1, quia in tempore duplo, celeritate dupla, quantitas quadrupla evacuatur. Sunt autem lamellae A*ad*D, E*el*L quantitatibus aquae Q et S aequales; ergo etiam tempora, quibus hae lamellae evacuantur, inter ſe erunt ut 2 ad 1. Idem autem oſtendi poteſt de temporibus etiam illis, quibus evacuantur lamellae aliae in utroque vaſe ſibi mutuo reſpondentes; igitur etiam tempora, quibus

bus

bus vasa evacuantur, erunt ut 2 ad 1. Eadem ratione si aquae altitudines A B, E F essent ut 9 ad 1, ostenderetur tempora, quibus vasa evacuantur, esse ut 3 ad 1; et si altitudines aquae forent ut 16 ad 1, tempora, quibus evacuantur, demonstrarentur esse ut 4 ad 1. Propterea generatim tempora, quibus vasa evacuantur, erunt ut radices quadratae altitudinum eorundem.

S c h o l i o n.

289. Hoc theorema a 's Gravesandio (a) sequenti experientia confirmatur. Ex tenui metallo fiant tria vasa cylindrica A B, C D, E F (Fig. 78), habentia aequales bases, quorum altitudines A G, C M, E L sint ut numeri 4, 3, 1. Deinde in fundis G B, L F insculpta intelligantur aequalia foramina H et I, quae postquam vasa fuerint aquae plena, eodem momento temporis aperiantur. Hoc autem facto, si aqua erumpens ex vase A B, excipiatur altero vase C D, hoc tempore illo implebitur, quo tertium E F evacuatur. Atqui vas C D continet tres quartas partes vasis A B; igitur vase E F semel evacuato, remanebit adhuc evacuanda quarta pars reliqua vasis A B. Haec autem evacuabitur illo tempore, quo iterum vas E F evacuatur; igitur vas E F bis evacuatur, dum A B semel, ideoque tempus, quo vas A B evacuatur, erit ad illud, quo evacuatur vas E F, ut 2 ad 1.

P R O P O S I T I O XXX.

290. ***Planis horizontalibus ita dividere vas cylindricum** N S G O (**Fig. 79.**) **aquae plenum, ut eius partes planis hisce interceptae, aequalibus temporibus per idem foramen** A **evacuentur.***

Vas N S G O, sic dividatur horizontalibus planis H I, F L, K M, ut horum, et plani N O distantiae A B, A C, A D, A E a basi S G sint ut numerorum naturalium quadrata 1, 4, 9, 16. Dico, quantitates aquae N M, K L, F I, H G aequalibus temporibus per foramen A evacuari. Cum enim aquae altitudines A E, A D, A C, A B sint ut 16, 9, 4, 1; tempora in quibus vasa N G, K G, F G, H G evacuantur, erunt (288) ut illorum numerorum radices, sive ut numeri naturales 4, 3, 2, 1. Atqui horum numerorum differentiae mutuo sunt aequales; igitur etiam tempora, in quibus vasorum differentiae N M, K L, F I, H G evacuantur, erunt aequalia inter se.

Co-

(a) Physices Elementa Mathematica lib. 3. cap. 9. art. 1648.

C o r o l l a r i u m.

291. Hinc suprema aquae superficies N O temporibus aequalibus descendendo percurret altitudinis partes E D, D C, C B, B A, quae sunt ut numeri impares 7, 5, 3, 1, ac propterea etiam aqua per foramen erumpet motu uniformiter retardato. Unde si aqua contenta in vase, sit 16 pollicum cubicorum, eademque minutis quatuor evacuetur; in primo minuto effluent per foramen 7 pollices cubici, in secundo 5, in tertio 3, et in quarto 1.

P R O P O S I T I O XXXI.

292. *Sint duo vasa aeque alta, et aquae plena, quorum unum sit cylindricum. Fiant deinde in eorum fundis aequalia foramina valde parva, per quae fluere aqua possit. Demum dum vas cylindricum evacuatur, altitudo aquae in alio vase semper eadem perseveret. Dico, tempore illo, quo integrum vas cylindricum evacuatur, effluere ex alio vase duplo plus aquae, quam ex cylindrico.*

Cum altitudines aquae in vasis (ex hyp.) sint aequales, eius quoque velocitates initio fluxus invicem (227) aequabuntur. Sed velocitas aquae, quae ex vase erumpit, est (225) aequabilis, velocitas autem eius, quae effluit ex cylindro, est (291) uniformiter retardata; ergo dum integrum vas cylindricum evacuatur, ex altero vase fluet aquae quantitas duplo maior, quam ex cylindrico. Nam si duo corpora eandem in ipso initio motus habeant velocitatem, et primum motu aequabili progrediatur, secundum autem motu uniformiter retardato, et moveantur ambo, donec secundum amiserit totum motum; primum in eo tempore percurret spatium duplo maius, quam quod absolvitur a secundo. Atqui columnae aquae per aequalia foramina effluentes in tempore, in quo vas cylindricum evacuatur, pro spatiis percursis haberi possunt; ergo columna aquae in hoc tempore ex vase fluens, erit dupla illius, quae interea effluit ex cylindro.

L E M M A.

293. *Datis vertice* A, *et axe* A F (*Fig. 80.*), *describere parabolam biquadraticam* E A N, *in qua nimirum quadrata ordinatarum* F E, G O *sint ut radices quadratae respondentium abscissarum* A F, A G.

Datis vertice A, et axe A F describe primo apolonianam parabolam B A C, cuius ordinatae F B, G D, et abscissae A F, A G.

Dein-

Deinde inter duas rectas FB, GD quaere mediam proportionalem GH. Tandem secta utcunque FB in E, fac ut GH ad GD, ita FE ad quartam proportionalem GO. Dico, hoc punctum inventum O ad parabolam biquadraticam pertinere. Cum enim tres rectae FB, GH, GD sint (ex constr.) continue proportionales; quadratum GH erit ad quadratum GD, ut FB ad GD. Sed quia (ex constr.) est GH ad GD, ut FE ad GO, etiam quadratum GH erit ad quadratum GD, ut quadratum FE ad quadratum GO; ergo et quadratum FE erit ad quadratum GO, ut FB ad GD. Sed in parabola BAC est FB ad GD, ut radix quadrata AF ad radicem quadratam AG; ergo et quadratum FE erit ad quadratum GO, ut radix quadrata AF ad radicem quadratam AG, et ideo punctum O ad biquadraticam parabolam pertinebit. Pari modo determinabis infinita alia puncta biquadraticae parabolae EAN.

PROPOSITIO XXXII.

294. *Parabola biquadratica* EAN *(Fig. 81.) circa immotum axem* AF *rotando generet cavum solidum* EAN. *Dein intra hoc vas affusa aqua usque ad* EN, *fiat in vertice eius* A *foramen aliquod valde parvum, per quod effluere possit aqua. Dico, manente hoc aquae effluxu, superficiem eius supremam* EN *aequalibus temporibus descensuram per aequales partes axis* AF.

Altitudine aquae AF divisa in aequales partes indefinite parvas, velut *Ff*, *Gg*, per puncta singula divisionum duc plana parallela ad supremam superficiem aquae EN, quae aquam divident in lamellas indefinite parvas, et aeque altas, velut E*en*N, O*om*M. Finge praeterea illis tempusculis, quibus superficies aquae EN, OM descendunt per aequalia spatiola *Ff*, *Gg*, sive evacuantur lamellae E*en*N, O*om*M, ex foramine A erumpere quantitates aquae Q et S, quae ipsis lamellis respective aequales erunt. Iam quia lamellae E*en*N, O*om*M altitudines habent infinite parvas, et aequales *Ff*, *Gg*; ipsae haberi poterunt ut cylindri totidem aeque alti, quorum bases pro radiis habent rectas FE, GO, ideoque lamella E*en*N erit ad aliam O*om*M, ut basis primae ad basim secundae, sive ut quadratum FE ad quadratum GO, vel (293) ut radix quadrata altitudinis AF ad radicem quadratam altitudinis AG. Sed quantitas aquae Q est ad quantitatem alteram S, ut lamella E*en*N ad lamellam O*om*M; ergo etiam quantitas aquae Q erit ad quantitatem aquae S, ut radix quadrata altitudinis aquae AF ad radicem quadratam altitudinis aquae AG, vel (269) ut velocitas, qua quantitas prima Q ex foramine A erupit, ad velocitatem, qua effluxit quantitas alia S, ideoque hae quantitates temporibus aequalibus ex eodem foramine A flu-

xerunt. Atqui dum quantitates aquae Q et S ex foramine A erumpunt, superficies suprema aquae EN descendit per aequalia spatia *Ff*, *Gg*; ergo etiam eadem superficies aequalibus temporibus descendit per aequales partes axis AF.

COROLLARIUM.

295. Igitur aquae fluxus poterit accuratam mensuram temporis indicare. Nam ideo horologium ex rotis constans, mensuram exactam temporis repraesentat, quia scilicet eius index circulariter sic movetur, ut aequalibus temporibus per aequalia spatia promoveatur. Atqui etiam dum aqua ex foramine A erumpit, superficies eius suprema EN ita descendit (294), ut aequalibus temporibus per spatia aequalia, seu per aequales altitudinis AF partes promoveatur; ergo eadem quoque poterit accuratam mensuram temporis indicare.

CAPUT V.

De velocitate aquae fluentis ex orificio laterali non valde parvo relate ad amplitudinem vasis.

PROPOSITIO XXXIII.

296. *Si in latere* FD *(Fig. 84.) vasis* ABDF *aqua pleni usque ad* AF, *insculptum fuerit orificium* ED *non valde parvum relate ad amplitudinem vasis; singulae aquae particulae constitutae in foraminis plano* ED, *per hoc erumpent cum illa velocitate, quae convenit aquae altitudini super illas.*

Finge orificium ED lamella aliqua solida clausum esse. Finge praeterea hanc lamellam pertusam esse aliquibus foraminibus infinite parvis relate ad amplitudinem vasis. Hoc autem facto, si haec foramina seorsim considerentur, particulae aquae e singulis emanabunt (225) cum illa velocitate, quae convenit aquae altitudini super illa. Iam si foraminum numerus multiplicetur in infinitum, adeo ut summa eorum fiat orificio ED aequalis; tunc singulae particulae in plano foraminis constitutae, ex eo erumpent cum illa velocitate, qua ex singulis foraminibus antea erumpebant. Atqui per singula haec foramina effluebant (225) cum illa velocitate, quae conveniebat aquae altitudini supra foramina eadem; ergo e foramine quoque ED erumpent cum illa velocitate, quae convenit aquae altitudini super illas.

SCHOLION.

297. Fatendum est autem totum hoc ratiocinium, quo determinantur velocitates particularum e singulis punctis foraminis effluentium, non continere exactam, et rigidam demonstrationem. Nam quamvis aquae particulae effluentes e singularibus foraminibus infinite parvis relate ad amplitudinem vasis, habeant (225) velocitates convenientes respectivis aquae altitudinibus super illas; nihilominus tamen quando foraminum numerus multiplicatur in infinitum, et particulae aquae ex illis effluentes, invicem se contingunt, perspicue non apparet, quod ipsae effluere debeant eodem modo, quo solent ex singulis foraminibus exilire. Et sane, cum particulae velociores habeant saltem exiguam cohaesionem cum inferioribus, quas contingunt; hae retardabunt illarum motus, et propterea non erumpent ex orificio cum accuratis illis velocitatibus, quae conveniunt earum distantiis a suprema fluidi superficie. Quare ut omne dubium e medio tolli possit, ad experientiam erit unice recurrendum. Haec autem ostendit (a), quod etsi foramen non fuerit valde parvum relate ad amplitudinem vasis, particulae tamen aquae effluentes ex singulis eius punctis, quamproxime eam habent celeritatem, quae convenit altitudini super illas.

COROLLARIUM.

298. Hinc inter particulas foramini ED adstantes, illae, quae sunt contiguae puncto E, velocitate omnium minima egrediuntur; quae vero propinquae sunt puncto D, velocitate omnium maxima exire solent; tandem reliquae intermediae eo minori, aut maiori exiliunt celeritate, quo sunt puncto E, vel D proximiores.

PROPOSITIO XXXIV.

299. *In latere ICQB (Fig. 82.) vasis SQ, aqua constanter pleni usque ad SB, sit insculptum foramen rectangulare EGHF, non valde parvum relate ad amplitudinem vasis. Deinde producta HF usque ad N, vertice N circa axem NH describatur parabola NKM, eidemque ordinentur FK, HM. Dico, velocitates particularum aquae fluentium per puncta F et H, esse proportionales respondentibus ordinatis FK, HM.*

Particulae aquae positae in F et H prosiliunt (297) e foramine cum illis velocitatibus, quae conveniunt altitudinibus NF, NH, seu quas acquisivissent libere descendendo per altitudines NF, NH; ergo velocitas primae erit ad secundae velocitatem in ratione subduplicata altitudinum aquae NF, NH, sive (170) ut radix quadrata abscissae NF ad radicem quadratam abscissae NH. Sed etiam ordinata FK parabolae NKM est ad ordinatam HM, ut radix quadrata abscissae NF ad radicem quadratam abscissae NH; ergo et velocitas particulae effluentis per punctum F, erit ad velocitatem alterius prosilientis ex puncto H, ut ordinata FK ad ordinatam HM.

(a) Traité Elémentaire d'Hydodynamique Tom. 1. artic. 243. pag. 256.

COROLLARIUM I.

300. Igitur etiam spatia eodem tempore absoluta a particulis prosilientibus ex F et H, erunt ut ordinatae FK, HM. Cum enim particulae fluentes per F et H, motu aequabili (225) progrediantur secundum rectas FK, HM; utique spatia, quae tempore aequali absolvunt, erunt ut celeritates, quibus ea percurrunt. Sed celeritates particularum aquae fluentium ex F et H, sunt (299) ut ordinatae FK, HM; igitur etiam spatia ab illis pari tempore absoluta, erunt ut ordinatae FK, HM.

COROLLARIUM II.

301. Propterea dum particula erumpens ex puncto F, motu suo percurrit ordinatam sibi respondentem FK, altera quoque emanans ex puncto H, absolvet (300) ordinatam sibi respondentem HM.

COROLLARIUM III.

302. Et ideo omnes simul aquae particulae emanantes ex verticali recta FH, motu suo describent totidem ordinatas, quae simul sumptae occupabunt spatium parabolicum FKMH, et quidem tempore illo, quo fluentes ex F et H percurrunt singulae ordinatas sibi respondentes FK, HM.

SCHOLION.

303. Ex hac propositione colligi quidem potest ratio velocitatum, quas inter se habent duae particulae aquae ex eodem foramine erumpentes; at non determinantur absolutae earum velocitates, quae non aliunde cognosci possunt, quam per spatia ab illis intra minutum secundum temporis absoluta. Ut vero etiam inveniantur absolutae earum velocitates, prius cognosci debet spatium illud, quod grave libere cadens, unius minuti secundi tempore emetitur. Illud autem ab Hugenio inventum fuit pedum $15\frac{1}{12}$. Quamvis autem hoc spatium sit accurate satis determinatum; nihilominus tamen ut liberetur calculus a fractionibus, quae in praxi negligi tuto possunt, illud in posterum statuemus esse tantummodo pedum 15.

PROPOSITIO XXXV.

304. *Manente aqua in vase* SQ (*Fig.* 83.) *sub altitudine constanti* NH *pedum* 15, *si vertice* N, *et parametro* NA *pedum* 60 *circa axem* NH *describatur parabola* NKM; *singulae aquae particulae effluentes ex punctis quibuslibet, veluti* F *et* H, *foraminis* EFHG, *tempore unius minuti secundi absolvent ordinatas sibi respontes* FK, HM.

Cum ordinata HM sit media proportionalis inter abscissam NH pedum 15, et parametrum NA pedum 60; utique ipsa erit pedum 30, seu dupla altitudinis aquae NH. Iam particula emanans ex puncto H, progreditur uniformiter in recta HM cum ea velocitate, quam ipsa (296) acquisivisset post lapsum liberum per NH, et ideo tempore huius lapsus aequabili motu absolvet spatium duplum altitudinis aquae NH. Atqui ordinata HM est dupla altitudinis aquae NH; igitur eo tempore, quo particula emanans ex puncto H, libere caderet ex N in H, eadem aequabili motu absolvet ordinatam HM. Sed cum NH sit pedum 15, particula emanans ex puncto H, intra minutum secundum temporis caderet (303) libere ex N in H; ergo intra hoc tempus quoque aequabili motu absolvet ordinatam HM. Atqui particula emanans ex puncto F, percurrit (301) ordinatam sibi respondentem FK tempore illo, quo particula fluens ex puncto H, describit ordinatam HM; ergo etiam particula erumpens ex puncto F, tempore unius minuti secundi absolvet ordinatam sibi respondentem FK.

Corollarium I.

305. Quoniam particulae effluentes ex punctis quibuslibet F et H, tempore unius minuti secundi absolvunt (304) ordinatas sibi respondentes FK, HM; hae singulae (303) erunt reales, et absolutae earum velocitates.

Corollarium II.

306. Quare si aquae altitudo NH, quae est 15 pedum, divisa concipiatur in 2160 aequales partes, quae totidem lineis aequabuntur, et ex punctis singulis divisionum agantur totidem ordinatae in parabola NKM; prodibunt tabulae altitudinum, et velocitatum absolutarum, eisdem convenientium. Hae ergo tabulae continebunt duas columnas, in quarum prima descriptae erunt distantiae particularum aquae a suprema eius superficie; in altera autem designabuntur absolutae earum velocitates, aut spatia, quae singulae tempore unius minuti secundi velocitatibus his absolvunt. Hac methodo usus est Belidorus (a), ut supputaret tabulas absolutarum velocitatum, quas habent singulae aquae particulae e laterali vasis foramine erumpentes.

Corollarium III.

307. Et quia cuivis altitudini aquae respondet in hisce tabulis eius celeritas absoluta, ideo data quavis altitudine aquae, statim invenietur eius velocitas absoluta; et contra, data absoluta aquae velocitate, nota fiet eius pariter altitudo. Ita si distantia particulae a superficie suprema aquae sit ped. 3, pol. 11, et lin. 8, colliges ex tabulis eam ipsi competere velocitatem, qua unius minuti secundi tempore absolveret spatium ped. 15, pol. 5, lin. 3. Et si aquae particula tempore unius minuti secundi absolverit spatium ped. 17, poll. 3, lin. 10, statim ex tabulis colligetur, eam esse ped. 5 infra superficiem supremam aquae.

Scholion.

308. Quamvis haec doctrina videatur solum habere locum, quando aquae altitudo in vase est pedum 15, reipsa tamen generaliter vera est, quaecunque sit altitudo eiusdem aquae. Nam si pars aquae intercepta planis COV, LTQ (Fig. 83.), in glaciem verteretur, et reliqua pars SV adhuc fluida remaneret; particulae effluentes per puncta quaelibet F et I orificii residui ERIF, per haec transirent (296) cum eisdem illis celeritatibus, quas habebant, dum aquae altitudo in vase erat NH. Atqui tunc ordinatae FK, IP (305) absolutas earum velocitates repraesentabant; ergo pariter illas referent, quando altitudo aquae in vase erit NI.

PROPOSITIO XXXVI.

309. *In latere* PCQB (*Fig.* 85.) *vasis* SQ *aqua constanter pleni sub altitudine* NH *pedum* 15, *fiat rectangulare foramen* EFHG *non valde parvum relate ad amplitudinem eiusdem vasis. Deinde vertice* N, *et parametro* NA *pedum* 60 *circa axem* NH *fiat parabola* NKM, *ordinenturque* FK, HM. *Demum producta* GE *in* O, *vertice* O, *et parametro* NA *circa axem* OG *alia describatur parabola* OIL, *ductisque ordinatis* EI, GL, *iungantur* IK, LM. *Dico; quantitatem aquae unius minuti secundi tempore effluentem, aequari solido parabolico* EFKILMHG, *cuius basis est segmentum parabolicum* FKMH, *altitudo autem* FE.

Quia particulae effluentes per puncta foraminis F et H, tempo-

(a) Architecture Hydraulique Tom. 1. art. 470. pag. 169.

pore unius minuti secundi absolvunt (304) ordinatas sibi respondentes FK, HM; utique minuti secundi tempore effluent ex illis punctis filamenta aquae FK, HM. Eandem ob causam, ex punctis pariter E et G intra minutum secundum temporis egredientur filamenta aquae EI, GL. Atqui idem ostendi potest de aliis quoque filamentis, quae intra minutum secundum temporis effluunt per alia puncta foraminis EFHG; igitur summa omnium filamentorum intra minutum secundum temporis effluentium per totum foramen EFHG, integrum occupabit solidum EFKILMHG, idest quantitas aquae tempore hoc effluens, aequabitur solido parabolico EFKILMHG, cuius basis est segmentum parabolicum FKMH, et altitudo FE.

Scholion.

310. Neque opponere iuvat, quod si particulae omnes aquae in plano foraminis constitutae, ex eo libere emanarent, tunc quidem omnia filamenta aquae minuti secundi tempore effluentia, totum implerent solidum EFKILMHG, ac proinde ipsorum summa, hoc est quantitas fluentis aquae eidem solido aequaretur. At quia nonnullae ex ipsis impediunt aliquas vicinarum, ne istae quoque transeant per foramen; consequens est, ut actualis quantitas aquae debeat esse minor quam theoretica, sive solidum EFKILMHG. Verum enim vero cum foramen EFHG, per quod aqua fluit, non sit (ex hyp.) valde parvum relate ad amplitudinem vasis, vicissim contractio venae, quae per ipsum effluit, valde exigua (247) esse debet; ideoque filamenta aquae ex eodem foramine erumpentia, erunt ferme conferta eodem modo, quo forent, si nullae aquae particulae impedirent exitum vicinarum. Uno verbo, actualis quantitas aquae est reipsa minor quam theoretica, sive solidum EFKILMHG; sed haec differentia adeo est exigua, ut in praxi sit merito contemnenda.

Corollarium.

311. Quia solidum parabolicum EFKILMHG aequatur facto ex area segmenti parabolici FKMH in altitudinem FE ducta; etiam quantitas aquae intra minutum secundum temporis effluens per foramen, erit aequalis facto ex area segmenti parabolici FKMH in altitudinem FE ducta.

Lemma.

312. *Datis abscissis* NF, NH (*Fig.* 86.), *et respondentibus ordinatis* FK, HM *parabolae* NKM *relatae ad axem* NH, *construe-*

re supra FH *rectangulum* FCSH, *quod aequale sit spatio parabolico* FKMH.

Sumantur FP, HR respective aequales duabus tertiis partibus ordinatarum FK, HM, et compleantur rectangula NLPF, NORH, quorum primum aequale erit segmento parabolico NKF, et alterum segmento alteri NMH. Deinde fiat, ut RD ad DO, ita PD ad quartam proportionalem DC, compleaturque rectangulum FCSH. Dico, rectangulum hoc aequari segmento parabolico FKMH. Nam rectangulum NORH aequatur segmento parabolico NMH, et rectangulum NLPF segmento alteri NKF; ergo differentia rectangulorum NORH, NLPF aequabitur differentiae segmentorum NMH, NKF. Sed differentia rectangulorum NORH, NLPF est spatium FPLORH, aut summa rectangulorum FDRH, LODP, et differentia segmentorum NMH, NKF est spatium parabolicum FKMH; ergo et summa rectangulorum FDRH, LODP aequabitur spatio parabolico FKMH. Sed quia (ex const.) est RD ad DO, ut PD ad DC, rectangulum LODP factum sub mediis DO, et PD, aequatur rectangulo DCSR facto sub extremis RD, et DC; ergo etiam summa rectangulorum FDRH, DCSR, hoc est rectangulum FCSH aequabitur parabolico spatio FKMH.

Definitio III.

313. Velocitas media absoluta aquae fluentis per foramen EFHG (Fig. 87.), est illa, quam si haberent singulae aquae particulae in eodem plano foraminis constitutae, tanta quantitas aquae intra minutum secundum temporis per illud flueret, quanta praecise fluit, dum singulae eius particulae velocitates diversas habent.

Propositio XXXVII.

314. *Invenire celeritatem mediam absolutam aquae fluentis ex dato rectangulari foramine* EFHG (*Fig.* 87.), *non valde parvo relate ad amplitudinem vasis, in quo manet aqua sub altitudine constanti* HN *pedum* 15.

Vertice N, et parametro NA pedum 60 fiat circa axem NH parabola NKM. Deinde ex punctis F et H ad libitum sumptis in plano foraminis EFHG agantur ordinatae respondentes FK, HM. Quoniam particulae effluentes ex F et H, distant a superficie suprema aquae per altitudines datas FN, HN, quae sunt abscissae parabolae NKM, cognitae etiam erunt (307) absolutae earum velocitates, vel spatia ab illis unius minuti secundi tempore ab-

absoluta, quae sunt (304) respondentes ordinatae FK, HM. Datis ergo abscissis FN, HN, et respondentibus ordinatis FK, HM parabolae NKM, fiat supra FH (312) rectangulum FCSH, quod sit aequale parabolico dato spatio FKMH, atque ex puncto T, ubi recta CS convenit cum parabola, agatur ordinata TO, quae erit quaesita velocitas media obsoluta aquae fluentis per foramen EFHG. Si enim particulae omnes aquae erumperent per foramen velocitate communi OT, quantitas aquae intra minutum secundum ex illo fluens, prismati aequaretur, cuius basis EFHG, et altitudo OT. Est autem hoc prisma idem cum illo, cuius basis FCSH, et altitudo FE; ergo quantitas aquae intra minutum secundum effluens per foramen, prismati aequaretur, cuius basis est FCSH, et altitudo FE, sive esset aequalis facto ex area rectanguli FCSH ducta in rectam FE. Atqui rectangulum FCSH aequatur (ex constr.) spatio parabolico FKMH; ergo etiam quantitas aquae intra minutum secundum effluens per foramen, esset aequalis facto ex area spatii parabolici FKMH ducta in rectam FE. Sed huic facto etiam est aequalis (311) quantitas aquae, quae intra minutum secundum cum diversis celeritatibus effluit per foramen; igitur si particulae omnes aquae effluerent per foramen velocitate communi OT, tanta aquae copia intra minutum secundum efflueret per foramen, quanta actu fluit, dum singulae eius particulae velocitates diversas habent, et ideo erit OT (313) velocitas media absoluta aquae, quae quaerebatur.

Corollarium I.

315. Ut igitur investiges velocitatem mediam absolutam aquae effluentis ex rectangulari foramine EFHG, operaberis tali modo. 1.° Quaere (305) absolutas velocitates FK, HM altitudini minimae NF, et maximae NH convenientes. 2.° Altitudinem NF duc in duas tertias partes velocitatis inventae FK, altitudinem vero NH in duas tertias partes velocitatis HM. 3.° Factum primum subtrahe ex secundo, et residuum erit (312) aequale rectangulo *FCSH*. 4.° Hoc rectangulum divide per FH, et in quoto habebis rectam HS, vel OT, quaesitam nempe (314) velocitatem mediam absolutam.

Propositio XXXVIII.

316. *Quantitas aquae, quae tempore unius minuti secundi velocitatibus variis effluit per foramen* EFHG, *aequalis est facto ex area eiusdem foraminis ducta in mediam absolutam eius velocitatem.*

Finge particulas omnes aquae effluere per foramen cum eadem absoluta velocitate media OT; utique hoc in casu quantitas aquae tempore unius minuti secundi ex illo fluens, aequabitur prismati, cuius basis est foramen EFHG, et altitudo OT. Atqui haec quantitas aquae tanta est (314), quanta praecise eodem tempore velocitatibus variis effluit per foramen; ergo et quantitas aquae, quae intra minutum secundum velocitatibus variis effluit per foramen EFHG, aequabitur prismati, cuius basis est foramen EFHG, et altitudo velocitas media OT.

Scholion.

317. Expendimus usque adhuc fluidorum corporum motus, qui a gravitatis actione oriri solent. Modo sunt excutiendi illorum effectus orti ex percussione, quae fit quotiescunque corpora fluida ad solida alliduntur, et viceversa.

CAPUT VI.

De generalibus affectionibus percussionis corporum fluidorum.

Definitio IV.

318. Dum vena fluidi e vasis foramine erumpentis, incidit in obstaculum, eius actio momentanea exercita contra ipsum, *percussio fluidi* dici solet, et quantitas motus, quae inde acquiritur ab obstaculo excipiente percussionem, *impressio facta in obstaculo* appellatur.

Scholion.

319. Difficillimum est tradere exactas leges percussionis corporum fluidorum; unde fit, ut theoria hucusque excogitata ad mensurandam huiusmodi percussionem, accurate praxi non sit conformis. Et sane, eadem supponit primo, venam fluidi perpendiculariter in planum aliquod impingentis, compositam esse stratis numero infinitis, parallelis percusso plano, et infinite parva crassitie praeditis, quae singula successive, et quovis momento impingant in idem planum. Supponit secundo, unumquodque ex hisce stratis constare ex filamentis iuxta se positis, et inter se parallelis, quae eadem velocitate, et directione, qua fertur vena, promoveantur. Supponit tertio, particulas singulas componentes haec filamenta, statim post ictum ad latera declinare, et ita praebere locum successivis ictibus insequentium. Verum utut prima, et secunda hypothesis non aegre ad-

admitti possit, tertia tamen praxi consentanea esse nequit, praecipue si agatur de directa fluidi percussione. Quamvis enim particulae in plani marginem incidentes, post ictum ab insequentibus cogantur ad latera declinare; plures tamen illarum, quae accedunt ad centrum plani, post percussionem eadem via, qua iverant, revertentur, et sic motum, et ictum insequentium minuant oportebit. Hinc directa percussio, quae infertur ex theoria, erit perpetuo maior vera, aut actuali. Cum autem in impulsu obliquo plures particulae post ictum recedant ad latera, quam in directo; percussio obliqua, quae deducitur ex theoria, erit verae, aut actuali propinquior, quam directa.

Corollarium.

320. Hinc fluidum, et solidum diverso modo agunt in obstaculum, quod percutiunt. Nam cum singulae partes solidi ita invicem sint connexae, ut una absque aliis nequeat promoveri; utique si solidum, quod movetur, incidat in obstaculum, tota simul eius massa necessario in illud aget. Id autem nequit fluido convenire, cuius particulae mutuo sunt divulsae, ac separatae. Quare dum vena fluidi incidit in obstaculum, illae solum eius particulae simul in illud agere sunt censendae, quae infinite proximae ipsi sunt, et ideo percussio fluidi momentis singulis renovatur perinde ac pressio gravis alicui horizontali tabulae incumbentis.

Scholion.

321. Fluidum percutiens diverso modo agit, ac premens. Dum enim fluidum premit planum, quiescit, et tota eius massa simul in illud agit; dum autem illud percutit, est in motu, et aliquae solum eius particulae simul in illud agunt. Rursus dum fluidum premit planum, agit in omnia, et singula eius puncta; quando autem percutit idem planum, agit solum in ea puncta plani, in quae impingunt singula filamenta, ex quibus fluidum idem constat.

PROPOSITIO XXXIX.

322. *Si venae fluidae* IBCK, LFHM (*Fig.* 88.) *in specie aeque graves, et aequabili motu latae, velocitatibus* V *et* u *impingant in plana* BC, FH; *earum massae, quae eodem momento appulsae ad eadem plana, unam efficiunt percussionem, erunt in composita ratione planorum* BC, FH, *in quae impingunt, et velocitatum, quibus impingunt.*

Sint ABCD, EFHG massae fluidae eodem momento appulsae ad plana BC, FH; eruntque rectae AB, EF spatia a venis pari tempore absoluta, quae propterea erunt etiam proportionales velocitatibus V et *u*. Iam cum massae fluidae ABCD, EFHG sint (ex hyp.) in specie aeque graves, utique erunt etiam (20) ut volumina earundem, aut prismata, quorum bases sunt plana BC, FH, et altitudines rectae AB, EF. Sunt autem haec prismata in ratione composita basium, sive planorum BC, FH, et altitudinum AB, EF; igitur etiam massae fluidae ABCD, EFHG erunt in composita ratione planorum BC, FH, et altitudinum AB, EF. Vidimus autem esse AB ad EF, ut celeritas V ad celeritatem *u*; igitur massae fluidae etiam erunt in ratione composita planorum BC, FH, et velocitatum V et *u*.

Scholion.

323. Supponit hoc theorema omnes particulas venae fluidae cum eadem prorsus velocitate moveri. Verum si diversis celeritatibus progrediantur, tunc est (314) velocitas media invenienda, eademque subinde velut totius venae celeritas accipienda.

PROPOSITIO XL.

324. *Iisdem positis, percussiones a massis fluidis* ABCD, EFHG *exercitae in plana* BC, FH *erunt in ratione composita ex rationibus plani* BC *ad planum* FH, *et quadrati celeritatis* V *ad quadratum celeritatis* u.

Percussiones, quas massae fluidae ABCD, EFHG exerunt in plana BC, FH, sunt ut impetus earundem, sive ut quantitates motus, quibus ad eadem plana accedunt. Sunt autem hae quantitates motus in ratione composita massae ABCD ad massam EFHG, et celeritatis V ad celeritatem *u*; igitur etiam percussiones a massis fluidis ABCD, EFHG exercitae in plana BC, FH, erunt in ratione composita massae ABCD ad massam EFHG, et celeritatis V ad celeritatem *u*. Sed massa ABCD est (322) ad massam EFHG in ratione composita plani BC ad planum FH, et celeritatis V ad celeritatem *u*; ergo etiam percussiones a massis fluidis ABCD, EFHG exercitae in plana BC, FH, erunt in ratione composita plani BC ad planum BH, celeritatis V ad celeritatem *u*, et iterum celeritatis V ad celeritatem *u*, hoc est in ratione composita ex rationibus plani BC ad planum FH, et quadrati celeritatis V ad quadratum celeritatis *u*.

Corollarium I.

325. Hinc si celeritates V et *u* fuerint inaequales, et e contrario plana BC, FH aequalia inter se; percussio a fluido in planum BC exercita, erit ad illam, quae exercetur in planum FH, ut quadratum celeritatis V ad quadratum celeritatis *u*.

Corollarium II.

326. Et contra, si plana BC, FH fuerint inaequalia, et ex adverso celeritates V et *u* aequales; percussio a fluido exercita in planum BC, erit ad exercitam in planum aliud FH, ut planum BC ad planum FH.

PROPOSITIO XLI.

327. *Si aqua contenta in vase* ABCE (*Fig.* 91.), *per foramen* DC *infinite parvum sic prosiliret, ut nullae eius particulae impedirent exitum vicinarum; vena* DFKC, *quae tota directe impingeret in planum* FK, *hoc percuteret vi aequali ponderi columnae aqueae, cuius basis est foramen* DC, *et altitudo est dupla altitudinis* OP *aquae supra foramen.*

Si nullae aquae particulae e foramine effluentes (ex hyp.) impedirent exitum vicinarum; vena DFKC esset consistentiae naturalis, et in cylindrum pariter conformata, ideoque planum FK, in quod tota directe impingit, esset foramini DC aequale. Porro haec vena DFKC tanta vi percuteret planum FK, quanta vi efflueret per foramen. Sed per foramen exiret (235) vi aequali ponderi cylindri aquei, cuius basis est foramen DC, et cuius altitudo est dupla altitudinis OP aquae supra foramen; igitur vena eadem DFKC percuteret etiam planum FK vi aequali ponderi cylindri aquei, cuius basis est foramen DC, et cuius altitudo est dupla altitudinis OP aquae supra foramen

PROPOSITIO XLII.

328. *Si aqua contenta in vase* ABCE (*Fig.* 91.), *effluat per foramen* DC *infinite parvum relate ad amplitudinem eiusdem vasis; vena* DMHINC, *quae post contractionem tota directe in planum* HI *impingit, hoc percutiet vi aequali ponderi cylindri aquei, cuius basis est minima venae sectio* MN, *et cuius altitudo est dupla altitudinis* OP *aquae supra foramen.*

Si nullae aquae particulae impedirent exitum vicinarum, vena (327) haberet formam cylindricam DFKC, quae cum velocitate altitudini OP debita, directe impingeret in planum FK, foramini DC aequale. Verum quia vena effluit per foramen infinite parvum relate ad amplitudinem vasis, plures particulae impediunt (254) exitum vicinarum; consequenter vena aquae acquiret formam DMHINC, ita ut sola eius pars MHIN sit cylindrica, et consistentiae naturalis, aut aeque densa, et aeque velox ac vena altera DFKC, quae fluebat in hypothesi theorematis praecedentis. Duae ergo venae DFKC, MHIN aeque densae, et aeque veloces directe impingunt in duo inaequalia plana FK, HI; ideoque percussio primae in planum FK, erit (326) ad alterius percussionem in planum HI, ut planum FK ad planum HI. Sed planum FK est ad planum HI, ut foramen DC ad minimam venae sectionem MN, sive ut cylindrus aqueus, cuius basis est foramen DC, et altitudo 2OP, ad aqueum cylindrum, cuius basis est minima venae sectio MN, et altitudo 2OP, sive (20) ut pondus primi cylindri ad pondus secundi; ergo etiam percussio venae DFKC in planum FK erit ad percussionem venae MHIN in planum HI, ut pondus cylindri aquei, cuius basis est foramen DC, et altitudo 2OP, ad pondus cylindri aquei, cuius basis est minima venae sectio MN, et altitudo 2OP. Sed percussio venae DFKC in planum FK, aequalis est (327) ponderi cylindri aquei, cuius basis est foramen DC, et altitudo 2OP; ergo etiam percussio alterius venae MHIN in planum HI, aequabitur ponderi cylindri aquei, cuius basis est minima venae sectio MN, et altitudo 2OP, seu dupla ipsius OP.

Scholion.

329. De percussione venae aqueae impingentis directe in planum, hactenus multi sunt commentati, plurimaque sumpsere experimenta. Equidem haec non multum conveniunt inter se; plurima tamen, praesertim quae de globis in medio resistente motis sumi solent, indicare videntur, venae aqueae percussionem aequari ponderi cylindri aquei, cuius basis est foramen, et cuius altitudo est eadem prorsus cum altitudine aquae supra foramen. Daniel Bernoullius (a) primo conatus est hanc opinionem experimentis pluribus confirmare; verum deinde re melius considerata, novisque adhibitis principiis, simulque aliis novi generis experimentis institutis, existimavit (b) communem opinionem de venae aqueae percussione ita mutandam esse, ut nempe loco foraminis DC (Fig 91.), per quod effluunt aquae, substituatur minima venae sectio MN, et loco altitudinis aquae OP supra foramen, eius dupla, seu 2OP adhibeatur. Cum autem minima venae sectio MN non raro (243) assur-

(a) In Commentariis Academiae Petropolitanae Tom. 2.
(b) In Hydrodynamica Sectione decimatertia, artic. 15. pag. 289.

assurgat ad medietatem foraminis DC, ac proinde cylindrus aqueus, cuius basis est sectio MN, et altitudo 2OP, aequetur cylindro aqueae, cuius basis est foramen DC, et altitudo OP; propterea factum est, ut pleraque experimenta ostendere videantur, venae aquae percussionem aequari ponderi cylindri aquei, cuius basis est foramen, per quod vena erumpit, et altitudo est eadem cum altitudine aquae supra foramen.

Corollarium.

330. Cum ergo vis percussionis fluidi (329) certo cuidam ponderi cylindri ex eodem fluido sit aequalis; consequens est etiam, ut sit finita.

Scholion.

331. Hoc iam expertus fuerat Galilaeus. Hic enim (a) hastam satis firmam tres circiter cubitos longam supra fulcimentum suspendit, quae altero eius extremo duo vasa aenea, altero aequipondium deferebat. Duo vasa sic funibus suspensa erant, ut alterum alteri immineret in eadem linea verticali. Vas superius aquam continebat, et in eius fundo foramen insculptum erat, cuius amplitudo ovum fere aequabat. Vas inferius a superiore distabat duos circiter cubitos. Haec sic disposita aequilibrium conservabant. Aperto foramine, simul ac aqua effluere coepit, hasta inclinari, aequipondium deorsum, et vasa sursum excurrere visa sunt. At vix aqua in fundum vasis inferioris irruit, ex improviso hasta inclinari desiit, et in contrariam partem moveri coepit, quousque ad aequilibrium iterum se accomodaverit, in quo statu iugiter mansit. Defluente aqua ex vase superiori, ideo aequilibrium sublatum est, quod aqua iam egressa, et nullam amplius pressionem contra vasa exercens, pondus ex ea parte minuit. Quod autem aequilibrium restitutum sit ex impetu aquae in vas inferius, indicio est vim percussionis aequipollere ponderi aquae fluentis inter duo vasa. Ab hoc experimento concludendum videtur, vim percussionis fluidi finitam esse, utpote quae certae cuiusdam aquae pondus aequet. Dechales hoc ductus experimento, hanc sententiam sequutus est. Galilaeus ad contrarium propensus erat, et ideo experimentum apud eum nullam obtinuit fidem, sed tantum admirationem movit.

PROPOSITIO XLIII.

332. *Si vena aquae* HLFI (*Fig.* 89.) *data cum velocitate directe impingat in planum* FL, *deinde etiam cum eadem velocitate, sed sub obliquis angulis* KOE, KOF *incidat in alterum planum* FE; *percussio a vena exercita in planum* FL, *erit ad illam, quam exerit in planum* FE, *ut sinus totus ad sinum incidentiae anguli* KOE.

(a) Opere del Galileo Tom. 3. pag. 189.

Vis qua venae singula filamenta, veluti est KM, percutiunt planum FL, in quod directe impingunt, sit exposita per RO. Tum demissa ex R in planum FE perpendiculari RS, compleatur rectangulum RSOT. Vis RO, qua filamentum KM directe percutit planum FL, oblique ferit aliud planum FE. Sed vis RO aequipollet simul sumptis duabus viribus RT, RS; ergo filamentum KM percutit planum FE viribus duabus simul RT, RS. Sed vis RT utpote agens iuxta directionem plani FE, efficaciam nullam habet ad percutiendum idem planum FE; igitur hoc percutiet solum altera vis RS perpendicularis eidem plano, unde vis qua filamentum KM percutit planum FL, erit ad vim qua percutit planum FE, ut RO ad RS. Sed idem est numerus filamentorum impingentium in plana FL, FE; ergo et vis qua vena aquae HLFI percutit planum FL, erit ad vim qua eadem percutit planum FE, ut RO ad RS. Est autem RO ad RS, ut sinus totus ad sinum incidentiae anguli KOE; ergo etiam percussio a vena exercita in planum FL, erit ad exercitam in planum FE, ut sinus totus ad sinum incidentiae anguli KOE.

Corollarium I.

333. Quia demissa ex S ad RO perpendiculari SN, est RO ad RS, ut eadem RS ad RN; etiam percussio venae contra planum FL erit ad percussionem contra planum FE, ut RS ad RN.

Corollarium II.

334. Quare si angulus KOE esset graduum 30, percussio venae in planum FL esset (332) ad percussionem eiusdem in planum FE, ut 2 ad 1; quippe in hac quoque ratione foret RO ad RS.

Scholion.

335. Ratio percussionis directae ad obliquam hic determinata, est paullo maior vera, seu actuali. Cum enim in ictu obliquo plures particulae (319) recedunt ad latera, quam in directo, percussio directa actualis erit ad obliquam in ratione paullo minori, quam ratio RO ad RS.

PROPOSITIO XLIV.

336. *Si vena* CFAI (*Fig.* 90.) *data cum velocitate directe impingat in planum* AF, *et deinde etiam cum eadem velocitate, sed sub angulis obliquis* KOE, KOA *incidat in aliud planum* AE, *priori* AF *aequale; percussio venae contra planum* AF *erit ad percussionem eiusdem in planum* AE, *ut quadratum sinus totius ad quadratum sinus anguli incidentiae* KOE.

Recta RO exponat vim, qua filamentum KM directe percuteret planum AF in M. Tum ex R demissa ad planum AE perpendiculari RS, compleatur rectangulum RSOT, atque ex S ad RO demittatur perpendicularis SN. Demum intelligatur filamentum PE occurrere plano AF in L. Percussio venae in planum AF est (326) ad percussionem eiusdem in planum AL, ut AF ad AL, vel (ex hyp.) ut AE ad AL. Sed ob triangulum ELA simile alteri RSO, est AE ad AL, ut RO ad RS; ergo etiam percussio venae in planum AF erit ad percussionem eiusdem in planum AL, ut RO ad RS. Atqui etiam percussio in planum AL est (333) ad percussionem in planum AE, ut RS ad RN; ergo ex aequo, percussio venae in planum AF erit ad percussionem in planum AE, ut RO ad RN. Quoniam vero tres rectae RO, RS, RN sunt in continua proportione, est RO ad RN, ut quadratum RO ad quadratum RS, vel ut quadratum sinus totius ad quadratum sinus anguli KOE; ergo etiam percussio venae in planum AF erit ad percussionem eiusdem in planum AE, ut quadratum sinus totius ad quadratum sinus anguli KOE.

PROPOSITIO XLV.

337. *Si particulae fluidi data cum velocitate impingant in globum* AKIZ (*Fig.* 92.) *secundum rectas parallelas ad radium eius* AC, *sitque* FB *una ex illis rectis, quae producta secet perpendiculariter radium* CK *in* E; *vis qua particula fluidi secundum rectam* FB *oblique incidendo in globum, perpendiculariter illum ferit in* B, *erit ad vim qua particula eadem directe incidens in cylindrum* ONGQ *circumscriptum eidem globo, perpendiculariter ferit illum in* P, *ut* BE *ad* AC.

Recta LB exponat vim qua particula fluidi directe incidens in cylindrum, perpendiculariter ipsum in P feriret. Tum ductis radio CB, et tangente BV, in illum, et hanc cadant ex puncto L perpendiculares LS, LD, ut inde emergat rectangulum BSLD. Vis

Vis LB aequivalet duabus viribus simul LS, LD, sive DB, SB. Sed vis DB utpote agens iuxta directionem tangentis VB, efficaciam nullam habet ad feriendum globum AKIZ; igitur ipsum feriet solum altera vis SB perpendicularis eidem globo, unde vis qua particula fluidi perpendiculariter ferit globum in B, erit ad vim qua particula eadem perpendiculariter in P feriret cylindrum ONGQ, ut SB ad LB. Sed ob triangulum rectangulum CEB simile alteri item rectangulo BSL, est BE ad BC, ut SB ad LB; ergo etiam vis qua particula fluidi perpendiculariter ferit globum in B, erit ad vim qua particula eadem perpendiculariter in P feriret cylindrum ONGQ, ut BE ad BC, vel ut BE ad AC.

Corollarium.

338. Quia directio vis SB tendit ad centrum C; patet vim qua particula fluidi perpendiculariter ferit globum in B, eundem pariter promovere secundum plagam rectae BC.

PROPOSITIO XLVI.

339. *Iisdem positis, vis qua particula fluidi secundum rectam* FB *oblique incidendo in globum* AKIZ, *ipsum promovet secundum plagam rectae* FB, *est ad vim qua particula eadem directe incidens in cylindrum* NOGQ, *ipsum movet in eandem plagam, ut quadratum* BE *ad quadratum* PE.

Demissa ex S ad LB perpendiculari SR, compleatur rectangulum BTSR. Particula fluidi oblique incidendo in globum secundum plagam rectae FB, eundem promovet iuxta plagam rectae BC (338) vi SB. Sed vis SB aequipollet duabus simul viribus SR, ST, sive TB, RB; ergo particula eadem fluidi movebit globum iuxta plagam rectae BC viribus duabus simul TB, RB. Sed globum non promovet vi TB perpendiculari ad radium AC, quia facta simili constructione ad oppositam aliam radii huius partem in puncto B, eadem vis TB eliditur ab altera vi directe opposita, et aequali; ergo particula fluidi promovebit globum solummodo vi RB, agente secundum rectam incidentiae suae FB, ideoque vis qua particula fluidi globum movet iuxta plagam rectae FB, erit ad vim qua particula eadem directe incidens in cylindrum, ipsum promovet in eandem plagam, ut RB ad LB. Verum ob continue proportionales RB, SB, LB, est RB ad LB, ut quadratum SB ad quadratum LB, vel (337) ut quadratum BE ad quadratum BC, vel AC, aut PE; ergo et vis qua particula fluidi movet globum secundum plagam rectae FB, erit ad vim qua eadem particula movet cylindrum in eandem plagam, ut quadratum BE ad quadratum PE.

LEMMA I.

340. *Si circa latus* CA (*Fig.* 92.) *quadrati* KCAN *veluti circa axem, vertice* C, *et parametro* CA *describatur parabola* CH; *haec necessario transibit per punctum* N.

Quia parabolae CH parameter (ex hyp.) est aequalis abscissae CA; quadratum CA aequabitur rectangulo ex abscissa CA in parametrum. Sed cum aequales sint rectae CA, AN, etiam aequabuntur quadrata CA, AN; ergo et quadratum AN aequabitur rectangulo ex abscissa CA in parametrum. Est autem AN perpendicularis ad axem CA parabolae CH; igitur erit quoque ordinata huius parabolae, quae proinde transibit per punctum N.

LEMMA II.

341. *Si parabola* CHN *mox descripta, conveniat cum recta* FE *in* H; *tres rectae* PE, BE, PH *erunt continue proportionales.*

Ex puncto H agatur ordinata HM ad axem CA. Quia parameter parabolae est CA, quadratum ordinatae HM aequale erit rectangulo ACM. Rectae autem HM, AC, CM sunt respective aequales ipsis EC, EP, EH; igitur etiam EC quadratum aequabitur rectangulo PEH. Porro CB quadratum aequatur quadratis simul BE, EC; ergo et CB quadratum aequabitur quadrato BE, una cum rectangulo PEH. Est vero quadratum CB aequale quadrato CA, vel PE; ergo etiam PE quadratum aequabitur quadrato BE, una cum rectangulo PEH. Atqui PE quadratum aequatur duobus simul rectangulis EPH, PEH; ergo etiam duo simul rectangula EPH, PEH aequabuntur quadrato BE, una cum rectangulo PEH, et ideo utrinque dempto rectangulo PEH, reliquum rectangulum EPH aequabitur reliquo quadrato BE, consequenter tres rectae PE, BE, PH erunt continue proportionales.

Corollarium I.

342. Unde prima PE erit ad tertiam PH, ut quadratum primae PE ad quadratum secundae BE.

Corollarium II.

343. Hinc vis particulae fluidi ad movendum cylindrum ONGQ secundum plagam rectae FB, vel AC, erit ad vim eiusdem ad movendum globum AKIZ in eandem plagam, ut PE ad PH.

Vis

Vis enim prima est ad secundam (339), ut quadratum PE ad quadratum BE. Sed quadratum PE est (342) ad quadratum BE, ut PE ad PH; ergo et prima vis ad secundam erit, ut PE ad PH.

LEMMA III.

344. *Si* A *sit ad* B (*Fig.* 93.), *ut* C *ad* D, *et* E *sit ad* F, *ut* H *ad* G, *ac praeterea tam singula prima antecedentia* A *et* E, *quam secunda* C *et* H *sint aequalia inter se; summa primorum antecedentium* A *et* E *erit ad summam suorum consequentium* B *et* F, *ut summa antecedentium secundorum* C *et* H *ad summam suorum consequentium* D *et* G.

Quoniam A est ad B, ut C ad D; etiam permutando, A erit ad C, ut B ad D. Eandem ob causam E quoque erit ad H, ut F ad G. Sed quia (ex hyp.) aequantur tam A et E, quam C et H, est A ad C, ut E ad H; ergo etiam B erit ad D, ut F ad G, et summa B et F erit ad summam D et G, ut B ad D, sive (ex demonstr.) ut A ad C. Rursus cum (ex demonstr.) A sit ad C, ut E ad H, etiam summa A et E erit ad summam C et H, ut A ad C; ergo etiam summa A et E erit ad summam C et H, ut summa B et F ad summam D et G, et permutando, summa A et E erit ad summam B et F, ut summa C et H ad summam D et G.

Corollarium.

345. Quod hic ostensum fuit in duabus solum analogiis, demonstrabitur pari modo in quotcunque analogiis etiam numero infinitis.

LEMMA IV.

346. *Si circa latus* CA (*Fig.* 94.) *quadrati* CKNA *veluti circa axem, vertice* C, *et parametro* CA *describatur parabola* CH, *quae producta* (340) *transibit per punctum* N; *cylindrus genitus ex rotatione quadrati* CKNA *circa eius latus* CA, *erit duplus paraboloidis ortae ex revolutione parabolae* CNA *circa eiusdem axem* CA.

Per quodlibet punctum P ducatur ad axem CA perpendicularis PM, parabolae occurrens in punto H, et rectae KN in M. Iungatur etiam CN, conveniens cum recta PM in I. Iam in rotatione totius figurae circa axem CA, recta PM circulum describet, qui erit ad circulum ab alia recta PH descriptum, ut quadratum PM ad quadratum PH. Est autem PM ipsi AN aequalis;

ergo

ergo et circulus radio PM descriptus, erit ad circulum radio PH factum, ut quadratum AN ad quadratum PH. Sed in parabola CHN est quadratum AN ad quadratum PH, ut CA ad CP, vel (ob triangulum CAN simile alteri CPI) ut AN ad PI, aut ut PM ad PI; ergo etiam circulus radio PM descriptus, erit ad circulum radio PH factum, ut PM ad PI. Eandem ob caussam, si quoque ex puncto *p* excitetur ad axem AC perpendicularis *pm*; circulus radio *pm* descriptus, erit ad circulum radio *ph* factum, ut *pm* ad *pi*; et sic in infinitum, si ex punctis omnibus axis CA ad hunc excitentur perpendicula, ut PM, *pm*. Atqui in omnibus hisce analogiis tam prima antecedentia, quam secunda sunt semper aequalia inter se, ut patet; igitur summa omnium primorum antecedentium, seu circulorum, quos rectae PM, *pm* rotando describunt, erit (344) ad summam omnium suorum consequentium, seu circulorum, quos describunt rectae PH, *ph*, ut summa omnium secundorum antecedentium, sive omnium PM, *pm* ad summam omnium suorum consequentium, sive omnium PI, *pi*. Sed prima summa occupat cylindrum ortum ex rotatione quadrati CKNA circa eius latus CA, et secunda occupat paraboloidem, sive solidum genitum ex rotatione parabolae CNA circa eius axem CA; ergo etiam cylindrus ortus ex ratione quadrati GKNA circa eius latus CA, erit ad paraboloidem genitam ex rotatione parabolae CNA circa eius axem CA, ut summa omnium PM, *pm* ad summam omnium PI, *pi*. Sed summa omnium PM, *pm* occupat quadratum CKNA, et summa omnium PI, *pi* occupat triangulum isosceles CAN; ergo cylindrus ortus ex rotatione quadrati CKNA circa eius latus CA, erit ad paraboloidem genitam ex rotatione parabolae CNA circa eius axem CA, ut quadratum GKNA ad triangulum CAN. Sed quadratum CKNA est duplum trianguli CAN; ergo et cylindrus ortus ex rotatione quadrati CKNA circa eius latus CA, erit duplus paraboloidis genitae ex rotatione parabolae CNA circa eius axem CA.

PROPOSITIO XLVII.

347. *Iisdem positis, quae in praecedenti propositione, vis tota fluidi ad movendum cylindrum* ONGQ (*Fig. 92.*) *secundum plagam axis* ACI, *est duplo maior, quam vis tota eiusdem ad movendum globum* AKIZ *in eandem plagam.*

Si ex omnibus punctis circularis basis NO cylindri ONGQ erigantur perpendicula, ut PE, PH; vis particulae ad movendum cylindrum secundum plagam axis ACI, erit (343) ubique ad vim eiusdem ad promovendum globum AKIZ in eandem plagam, ut perpendiculum PE ad perpendiculum PH. Unde vis omnium particularum ad movendum cylindrum, erit ad vim omnium particularum ad movendum globum, ut solidum, quod occupatur a perpendiculis omnibus PE per totam basim cylindri ductis, ad solidum occupatum ab omnibus perpendiculis PH per totam basim eandem ductis. Sed prius solidum est cylindrus ortus ex rotatione quadrati ANKC circa latus eius CA, posterius est parabolois genita ex rotatione segmenti parabolici CNA circa axem eius CA; ergo et vis tota fluidi ad movendum cylindrum secundum plagam sui axeos ACI, erit ad vim totam eiusdem ad movendum globum in eandem plagam, ut cylindrus ad paraboloidem. Atqui cylindrus est (346) duplo maior quam parabolois; ergo et vis tota fluidi ad movendum cylindrum secundum plagam sui axeos ACI, erit duplo maior quam vis tota eiusdem ad movendum globum in eandem plagam.

COROLLARIUM I.

348. Quoniam vis tota fluidi ad movendum cylindrum est aequalis actioni eiusdem fluidi in cylindrum, et tota vis fluidi ad movendum globum est aequalis actioni eiusdem fluidi in globum; etiam actio fluidi in cylindrum erit duplo maior (347) quam actio eiusdem in globum.

COROLLARIUM II.

349. Et quia actio fluidi in cylindrum, et globum est (318) percussio a fluido exercita in utrumque; sequitur, etiam percussionem exercitam a fluido in cylindrum, esse duplo maiorem illa, quam idem fluidum exerit contra globum.

PROPOSITIO XLVIII.

350. *Si cylindrus* ONGQ, *et globus* AKIZ (*Fig. 92.*) *finitas habeant materiae quantitates; vis tota fluidi ad utrumque solidum promovendum secundum plagam axeos* ACI, *tempore infinite parvo non nisi velocitatem infinite parvam in illis gignet.*

Vis tota fluidi ad movendum cylindrum, et globum iuxta plagam axeos ACI, est aequalis actioni exercitae a fluido in utrumque iuxta eandem plagam, sive (318) eiusdem fluidi percussioni. Atqui haec percussio fluidi est (330) finita; ergo et finita erit vis tota fluidi utrumque solidum promoventis, ideoque tempore infinite parvo quantitatem motus infinite parvam in illis gignet. Sed materiae quantitas (ex hyp.) in illis solidis est finita; igitur e contrario velocitas genita in iisdem, erit infinite parva.

Co-

COROLLARIUM.

351. Tota ergo vis fluidi, quae cylindrum, et globum movet iuxta utriusque axeos directionem, velut per gradus, hoc est instar pressionis in utrumque solidum agit, neque finitam velocitatem solidis hisce imprimit, nisi tempus finitum antea lapsum fuerit.

CAPUT VII.

De resistentia, quam corpora patiuntur, dum per fluida promoventur.

OBSERVATIO.

352. Dum corpus in fluido promovetur, eius actio duos effectus edit; primo enim dividit partes fluidi, secundo illis communicat velocitatem, cum qua ipsae etiam post cessatam corporis actionem inter se moventur. Divisioni partium fluidi resistit earundem partium cohaerentia; communicationi autem velocitatis resistit vis inertiae partium earundem.

COROLLARIUM.

353. Unde fluidi resistentia ex duplici causa oritur, nempe ex tenacitate, aut cohaesione eius particularum, et ex earum vi inertiae, aut reactione, qua nempe ipsae resistunt corpori conanti sibi inducere statum motus. Prima vocatur *resistentia ex prima causa*, altera autem dicitur *resistentia ex secunda causa*.

AXIOMA.

354. Quodlibet corpus solidum eandem a fluido excipit impressionem, sive data cum velocitate, dataque in directione intra quiescens fluidum moveatur, sive fluidum cum eadem velocitate, et directione impingat in corpus solidum, sed quiescens.

PROPOSITIO XLIX.

355. *Si cylindrus* ONGQ *(Fig. 95.) velocitate* V, *et iuxta directionem eius axeos* ICA *moveatur in quiescente fluido* LGQM, *cuius partium tenacitas nulla sit; reactio fluidi in cylindrum, aequabitur percussioni, quam idem fluidum exereret in cylindrum, si in hunc immotum incurreret cum eadem velocitate, qua cylindrus antea ferebatur.*

In

In casu in quo cylindrus movetur, dum fluidum quiescit, impressio quam cylindrus a fluido excipit, est aequalis eiusdem fluidi reactioni. Rursus in casu in quo fluidum movetur, dum solidum quiescit, impressio quam cylindrus a fluido excipit, est aequalis eiusdem fluidi percussioni. Sed prima impressio est (354) eadem cum secunda; igitur etiam reactio fluidi in cylindrum, quae fit in primo casu, aequalis erit fluidi percussioni, quae fit in alio.

SCHOLION.

356. Eadem ratione, si globus AKIZ (Fig. 95.) velocitate V, et iuxta directionem sui axeos ICA progrediatur intra quiescens fluidum LGQM; huius reactio in globum aequabitur percussioni, quam idem fluidum exerceret in globum, si in eum immotum incurreret cum eadem velocitate, et directione, qua globus antea ferebatur.

COROLLARIUM I.

357. Quia reactio fluidi in cylindrum motum ONGQ, est resistentia (353) ex secunda causa, quam idem cylindrus subit; haec etiam resistentia aequabitur percussioni, quam fluidum exerceret in cylindrum, si in hunc immotum irrueret cum eadem celeritate, et directione, quam cylindrus habebat.

COROLLARIUM II.

358. Eadem quoque ratione, resistentia ex secunda causa, quam patitur globus AKIZ, dum intra immotum fluidum promovetur, aequabitur percussioni, quam idem fluidum exerceret in globum, si in hunc immotum incurreret cum eadem velocitate, et directione, qua globus antea ferebatur.

PROPOSITIO L.

359. *Si cylindrus rectus* ONGQ, *et globus ipsi inscriptus* AKIZ *(Fig. 95.) cum eadem velocitate* V *et iuxta directionem communis axeos* ICA *moveantur in eodem fluido quiescente* LGQM, *cuius partium tenacitas nulla sit; resistentia ex secunda causa, quam cylindrus subit, duplo maior erit quam resistentia, quam subit globus.*

Finge haec duo corpora esse immota, et fluidum e contrario eadem celeritate, ac directione, quas primo habebant corpora, promoveri. Hoc facto, percussio exercita a moto fluido in cylindrum ONGQ, dupla eius erit (349), quae exercetur in globum AKIZ. Sed resistentia ex secunda causa, quam cylindrus subit, aequalis

est

est (357) percussioni factae a moto fluido in cylindrum, et resistentia ex secunda causa, quam subit globus, aequat (358) percussionem factam a fluido moto in globum; ergo et resistentia cylindri orta ex secunda causa, duplo maior erit quam resistentia globi.

PROPOSITIO LI.

360. *Si cylindrus* ONGQ (*Fig.* 95.), *et globus* AKIZ *finitas habeant materiae quantitates, et ambo cum finita velocitate promoveantur in fluido quiescente, cuius partium tenacitas nulla sit; resistentia fluidi orta ex secunda causa, tempore infinite parvo non nisi velocitatem infinite parvam ex illis detrahet.*

Solida haec quiescere supponantur, et fluidum e contrario in ea immota incurrat cum illa eadem velocitate, et directione, quibus prius haec solida ferebantur; eritque (357. 358.) percussio fluidi hoc in casu aequalis resistentiae fluidi in priori. Sed percussio fluidi in secundo casu, tempore infinite parvo (350) non nisi velocitatem infinite parvam solidis illis imprimit; igitur e contrario resistentia fluidi in primo casu tempore infinite parvo non nisi velocitatem infinite parvam ex illis detrahet.

PROPOSITIO LII.

361. *Si cylindrus* ONGQ (*Fig.* 95.), *et globus* AKIZ *finitas habeant materiae quantitates, et ambo cum finita velocitate ferantur in fluido quiescente, cuius tenacitas partium nulla sit; resistentia fluidi orta ex secunda causa, tempore infinite parvo spectari poterit velut constans, aut uniformis.*

Tam cylindrus, quam globus ob resistentiam, quam ambo subeunt a fluido quiescente, tempore infinite parvo (360) amittunt solum velocitatem infinite parvam. Sed haec negligi tuto potest prae finita velocitate, quam solidum utrumque habet; ergo velocitas solidi utriusque toto illo tempusculo spectari potest velut invariata. Sed quamdiu velocitas solidi, quod in fluido promovetur, est invariata, resistentia fluidi eadem perseverat, sive est constans, aut uniformis; ergo fluidi resistentia orta ex secunda causa, tempore infinite parvo spectari poterit velut constans, aut uniformis.

COROLLARIUM.

362. Cum velocitas solidi cuiuscunque, quod cum finita velocitate in fluido promovetur, tempore infinite parvo, et per spatium infinite parvum (361) spectari possit velut invariata, eius motus pro aequabili habendus erit.

SCHOLION.

363. Quamvis hic motus pro aequabili sit habendus, reipsa tamen est uniformiter retardatus. Nam resistentia (361) toto illo tempusculo constans est. Sed haec per totum illud tempusculum indesinenter in corpus agit; ergo hoc aequalibus tempusculi huius partibus aequales etiam amittet gradus velocitatis, atque adeo eiusdem motus erit uniformiter retardatus.

PROPOSITIO LIII.

364. *Resistentia ex secunda causa, quam subit cylindrus rectus in fluido motus iuxta sui axeos directionem, valet pondus columnae ex eodem fluido, cuius basis aequatur basi eiusdem cylindri, et cuius altitudo est dupla illius, ex qua grave libere descendendo, potest acquirere velocitatem, cum qua cylindrus in fluido promovetur.*

Cylindrus rectus ONGQ (Fig. 95.) iuxta directionem sui axeos ICA moveatur in quiescente fluido LGQM cum velocitate V, quam grave libere descendendo ex altitudine DP (Fig. 96.) acquirere potest. Sumpta deinde SP dupla ipsius DP, fiat ex eodem fluido columna SB, cuius basis PB aequetur basi ON cylindri ONGQ. Dico, resistentiam ex secunda causa, quam idem cylindrus subit, valere pondus columnae SB. Pone enim cylindrum ONGQ immotum esse, et e contrario fluidum LGQM eadem velocitate et directione, qua cylindrus antea ferebatur, incurrere in eius basim ON. Pone praeterea idem fluidum LGQM esse velut contractam venam exilientem per laterale aliquod orificium insculptum in latere vasis, habentis infinitam veluti amplitudinem, et in quo fluidi altitudo supra orificii illius centrum, semper eadem conservetur, et quidem ipsi DP aequalis. His positis, percussio facta a vena fluida LGQM in cylindrum ONGQ, valebit (328) pondus columnae ex eodem fluido, cuius basis aequatur basi NO cylindri, et cuius altitudo est dupla ipsius DP. Sed haec columna est eadem ac SB; ergo percussio facta a vena fluida LGQM in cylindrum ONGQ, valebit pondus columnae SB. Sed resistentia ex secunda causa, quam subit cylindrus ONGQ, dum velocitate V fertur intra quiescens fluidum LGQM, aequalis est (357) percussioni factae a fluido LGQM in immotum cylindrum ONGQ; ergo et resistentia ex secunda causa, quam subit cylindrus ONGQ, valebit pondus columnae SB.

Co-

COROLLARIUM.

365. Quia resistentia ex secunda causa, quam subit globus AKIZ, est (359) dimidia resistentiae, quam patitur cylindrus ONGQ; patet resistentiam, quam subit globus AKIZ, valere pondus columnae DB, cuius basis PB aequatur circulo maximo eiusdem globi, et cuius altitudo DP est eadem cum illa, ex qua grave libere descendendo, acquirere potest velocitatem, qua globus intra fluidum promovetur.

PROPOSITIO LIV.

366. *Altitudinem invenire, ex qua cylindrus rectus* ONGQ *(Fig. 95.) libere descendendo, eam potest acquirere velocitatem, cum qua si in dato fluido moveretur iuxta directionem sui axeos* ICA, *resistentia ex secunda causa eiusdem ponderi aequaretur.*

Fiat, ut gravitas specifica fluidi ad illam cylindri ONGQ, ita dimidia altitudo OQ cylindri ad quartam proportionalem DP (Fig. 96.). Dico, altitudinem DP quaesitam esse. Sumpta enim altitudine SP, quae sit alterius DP dupla, efformetur ex eodem fluido cylindrus rectus SPBT, basim habens aequalem basi NO cylindri ONGQ, altitudinem vero SP. Gravitas specifica fluidi est (ex constr.) ad specificam gravitatem cylindri ONGQ, ut dimidia OQ ad DP, sive ut dimidium altitudinis OQ cylindri ONGQ ad dimidium altitudinis SP cylindri SPBT, sive ut illius altitudo OQ ad huius altitudinem SP. Sed etiam cylindrus ONGQ est ad cylindrum SPBT, ut altitudo primi OQ ad altitudinem secundi SP; ergo et gravitas specifica cylindri SPBT erit ad specificam gravitatem cylindri ONGQ, ut hic cylindrus ONGQ ad cylindrum SPBT. Sed quotiescunque specificae gravitates duorum corporum sunt reciproce ut volumina eorundem, etiam illorum pondera sunt (27) aequalia; ergo pondus cylindri ONGQ aequabitur ponderi cylindri alterius SPBT. Sed quando cylindrus ONGQ in fluido promovetur cum ea velocitate, quam acquirit libere descendendo ex altitudine DP, resistentia ex secunda causa valet (364) pondus cylindri SPBT; ergo etiam valebit pondus cylindri ONGQ.

COROLLARIUM.

367. Quoties fluidum, et cylindrus in eo motus, eandem habent specificam gravitatem, ratio OQ ad SP evadit ratio aequalitatis, hoc est aequales fiunt OQ, SP, et ideo altitudo DP, ex qua cadere cylindrus debet, ut acquirat celeritatem, cum qua si in flui-

fluido moveretur, resistentia ex secunda causa, eiusdem ponderi aequaretur, erit dimidia altitudinis OQ cylindri ONGQ.

PROPOSITIO LV.

368. *Altitudinem invenire, a qua globus* AKIZ *(Fig. 95.) libere descendendo, eam acquirit celeritatem, cum qua si in dato fluido moveretur iuxta directionem sui axeos* ICA, *resistentia ex secunda causa, eiusdem ponderi aequaretur.*

Sumpta altitudine DP (Fig. 96.) aequali duabus tertiis partibus diametri IA globi AKIZ, fiat, ut gravitas specifica fluidi ad illam globi, ita DP ad quartam proportionalem HP. Dico, altitudinem hanc HP quaesitam esse. Nam super basim PB circulo maximo globi aequalem, fiant ex fluido duo cylindri recti HPBY, DPBR. Quia altitudo DP cylindri DPBR est (ex constr.) aequalis duabus tertiis partibus diametri IA globi; utique ipse erit aequalis globo AKIZ, unde globus AKIZ erit ad cylindrum HPBY, ut cylindrus DPBR ad eundem cylindrum HPBY, sive ut DP ad HP. His autem positis, ita ostenditur propositio. Gravitas specifica fluidi, aut cylindri HPBY est (ex constr.) ad specificam gravitatem globi AKIZ, ut DP ad HP. Sed etiam globus AKIZ est (ex demonstr.) ad cylindrum HPBY, ut DP ad HP; ergo et gravitas specifica cylindri HPBY erit ad illam globi AKIZ, ut hic globus AKIZ ad cylindrum HPBY, ideoque pondus cylindri HPBY aequabitur (27) ponderi globi AKIZ. Sed quando hic globus in fluido promovetur cum ea velocitate, quam acquirit libere descendendo ex altitudine HP, resistentia ex secunda causa valet (365) pondus cylindri HPBY; ergo etiam valebit pondus globi AKIZ.

COROLLARIUM.

369. Quando globus, et fluidum, in quo movetur, eandem habent specificam gravitatem, ratio DP ad HP evadit ratio aequalitatis, hoc est fiunt aequales DP, HP; et ideo altitudo, ex qua cadere globus debet, ut inde acquirat velocitatem, cum qua si in fluido moveretur, resistentia ex secunda causa, eiusdem ponderi aequalis esset, aequabitur duabus tertiis partibus diametri eius IA.

PROPOSITIO LVI.

370. *Si duo cylindri recti* ONGQ, *ongq (Fig. 97.) similes, et aequales cum velocitatibus* V *et* u, *ac iuxta directiones suorum axium* AI, *et* ai *in eodem immoto fluido moveantur; resistentia ex secunda*

da causa, quam subit cylindrus ONGQ, *erit ad illam, quam patitur alter cylindrus* *ongq*, *ut quadratum velocitatis* V *ad quadratum velocitatis* *u*.

Sit DP altitudo, ex qua cylindrus ONGQ libere descendendo, potest acquirere velocitatem V, cum qua progreditur intra fluidum. Similiter sit *dp* altera altitudo, ex qua cylindrus *ongq* libere descendendo, potest acquirere velocitatem *u*, cum qua eodem in fluido promovetur; eritque altitudo DP ad altitudinem *dp*, ut quadratum velocitatis V ad quadratum velocitatis *u*. Hoc posito, resistentia ex secunda causa, quam subit cylindrus ONGQ, valebit (364) pondus columnae ex fluido, cuius basis est circulo ON aequalis, et cuius altitudo est altitudinis DP dupla. Similiter resistentia ex secunda causa, quam patitur cylindrus *ongq*, valebit (364) pondus columnae ex fluido, habentis basim circulo *on* aequalem, et altitudinem duplam altitudinis *dp*; igitur resistentia ex secunda causa, quam subit cylindrus ONGQ, erit ad illam, quam patitur cylindrus alter *ongq*, ut pondus primae columnae ad pondus secundae. Verum cum hae columnae ex eodem fluido componantur, habeantque aequales bases, erunt earum pondera, ut altitudines earundem; ergo et resistentia ex secunda causa, quam subit cylindrus ONGQ, erit ad illam, quam patitur cylindrus *ongq*, ut duplum altitudinis DP ad duplum altitudinis *dp*, sive ut altitudo DP ad altitudinem *dp*. Vidimus autem altitudinem DP esse ad altitudinem *dp*, ut quadratum velocitatis V ad quadratum velocitatis *u*; ergo et resistentia ex secunda causa, quam subit cylindrus ONGQ, erit ad resistentiam ex secunda causa, quam patitur cylindrus alter *ongq*, ut quadratum velocitatis V ad quadratum velocitatis *u*.

COROLLARIUM I.

371. Quoniam resistentiae ex secunda causa, quas subeunt globi AKIZ, *akiz*, sunt (359) medietates resistentiarum, quas patiuntur cylindri ONGQ, *ongq*; etiam resistentia ex secunda causa, quam subit globus AKIZ, erit (370) ad illam, quam patitur globus alter *akiz*, ut quadratum velocitatis V ad quadratum velocitatis *u*.

COROLLARIUM II.

372. Quia dum cylindrus, ipsique inscriptus globus in eodem fluido promoventur, eorum velocitas, et quadratum eiusdem momentis singulis variatur (360); utique cum mutata velocitate etiam mutabitur (370. 371.) resistentia ex secunda causa, quam subeunt,

Co-

COROLLARIUM III.

373. Denique cum resistentiae ex secunda causa, quas subeunt duo cylindri, aut duo globi similes, et aequales sint (370. 371.) ut quadrata velocitatum, quibus in eodem fluido progrediuntur; sequitur, quod si aequales habuerint celeritates, etiam resistentias omnino aequales sint subituri.

PROPOSITIO LVII.

374. *Resistentia ex prima causa, sive ex tenacitate partium fluidi oriunda, conferri potest cum vi gravitatis, quae retardat motum corporis ascendentis.*

Corpora duo aequalia, et similia cum eadem velocitate e locis C et *c* (Fig. 96.) per lineas CF, *cf* ad horizontalem rectam C*c* normales, proiiciantur, atque in locis aeque altis A et *a*, B et *b*, D et *d*, &c. aequalem subeant resistentiam. Corpus quidem C subeat resistentiam a constanti vi gravitatis (quae in locis A, B, D, E, &c. tantum agat) oriundam. Corpus vero *c* resistentiam patiatur a data partium fluidi tenacitate, in locis tantum *a*, *b*, *d*, *e*, &c. reagente ortam. In spatiis autem intermediis AB et *ab*, BD et *bd*, &c. nullum obstaculum sit in motibus. Quo facto, dum perveniunt corpora ad A et *a*, aequalem habent velocitatem, et deinde victis in A et *a* obstaculis aequalibus, pari adhuc velocitate per spatia minime resistentia AB et *ab* feruntur. Simili modo ob aequales resistentias in locis B et *b*, per spatia BD et *bd* simul moventur, et sic deinceps eandem semper velocitatem in locis aeque altis habent. Minuantur nunc aequalia illa spatia AB et *ab*, BD et *bd*, &c., et eorum numerus augeatur in infinitum, ut vis gravitatis, et actio resistentiae continua efficiatur; utique etiam hoc in casu corpora illa duo eandem resistentiam patientur, et in locis aeque altis eandem velocitatem omnino habebunt. Igitur resistentia ex prima causa conferri potest cum constanti, et uniformi vi gravitatis, licet haec resistentia nullo modo agat in corpus quiescens, in quod gravitas semper agit.

COROLLARIUM I.

375. Dum ergo corpus in fluido promovetur, tenacitas partium fluidi ipsi resistit eadem lege, qua vis gravitatis resistit corpori ascendenti.

COROLLARIUM II.

376. Sicut ergo vis gravitatis resistens corpori ascendenti, est

con-

constans, aut uniformis; ita et resistentia ex prima causa erit constans, aut uniformis.

COROLLARIUM III.

377. Et sicuti vis gravitatis aequalibus temporibus subtrahit a corpore ascendente aequales gradus celeritatis; ita etiam resistentia ex prima causa aequalibus temporibus aequales gradus celeritatis auferre debet a corpore, quod intra fluidum promovetur.

PROPOSITIO LVIII.

378. *Si duo corpora aeque densa, aequalia, et similia diversis celeritatibus intra idem fluidum moveantur; eadem, seposita resistentia ex secunda causa, aequalibus temporibus aequales gradus velocitatis amittent.*

Si corpora illa duo verticaliter sursum proiicerentur cum respectivis illis velocitatibus, quibus in eodem fluido progrediuntur; ambo, ob uniformem resistentiam gravitatis, aequalibus temporibus aequales velocitatis gradus amitterent. Sed dum corpora illa duo intra idem fluidum promoventur, tenacitas partium fluidi ipsis resistit (375) eadem lege, qua vis gravitatis eisdem resistit verticaliter ascendentibus; igitur etiam quando illa duo corpora in eodem fluido promoventur, aequalibus temporibus aequales gradus velocitatis amittent.

SCHOLION.

379. Putant nonnulli corpus, quod celerius in fluido promovetur, plus velocitatis tempore dato amittere, quam aliud aeque densum, priori simile, et aequale, sed tardius in illo motum. Nam particulae fluidi a velociori corpore separatae, sunt multo plures, quam quae a segniori eodem tempore separentur; et ideo primum corpus plus velocitatis tempore dato amittet, quam aliud. Quamvis autem hoc argumentum prima fronte efficax videatur; si tamen serio perpendatur, nullius roboris apparebit. Pone enim duo corpora A et B aeque densa, aequalia, et similia in eodem fluido promoveri. Pone praeterea corpus A esse duplo velocius alio B. Pone denique corpus B segnius motum, 1000 particulas fluidi uno momento temporis separare; corpus autem A 2000. Cum igitur corpus A uno momento superet cohaesionem 2000 particularum, idem unius momenti medietate vincet cohaesionem 1000 particularum. Atqui corpus B uno momento superat cohaesionem 1000 particularum; igitur resistentia ex prima causa, quae (376) est vis constans, tempore duplo aget in corpus B, et simplo in corpus A, ideoque velocitas uno momento a corpore B amissa, dupla erit illius, quam A amittit unius momenti medietate. Sed corpus A sequenti alia momenti medietate amittit velocitatem aequalem illi, quam amiserat in priori; ergo velocitas uno momento a corpore B amissa, erit aequalis velocitati, quam uno momento amisit alterum corpus A.

PROPOSITIO LIX.

380. *Si corpus finita quadam velocitate intra fluidum promovetur, eius motus, seposita resistentia ex secunda causa, tempore infinite parvo pro aequabili sumi potest.*

Corpus, quod intra fluidum promovetur, vocetur A. Tum finge alterum corpus B priori simile, et aequale verticaliter sursum proiici cum finita illa velocitate, qua A progredi incipit intra fluidum. Finge denique resistentiam, quam patitur corpus A a partium fluidi tenacitate, esse aequalem illi, quam alterum corpus B sursum proiectum, a constanti vi gravitatis perpetuo experitur. His positis, cohaesio mutua, sive tenacitas partium fluidi, in quo progreditur corpus A, huic (375) resistet eadem lege, qua vis gravitatis resistit corpori B verticaliter ascendenti, et ideo motus in utroque corpore idem erit. Sed motus corporis B cum finita velocitate verticaliter ascendentis, tempore infinite parvo pro aequabili sumi potest; ergo et motus corporis A cum finita velocitate in fluido progredientis, tempore infinite parvo pro aequabili sumi potest.

CAPUT VIII.

De velocitatis decrementis, quae corpus progrediens in quiescente fluido subit a prima, et secunda causa, dum hae separatim in illud agunt.

DEFINITIO V.

381. Dum corpus in fluido promovetur, velocitas quam quovis momento amittit ob resistentiam ortam ex prima, aut secunda causa, dicitur *decrementum velocitatis ortum ex prima, aut secunda causa.*

PRO-

PROPOSITIO LX.

382. *Si duo corpora aeque densa, aequalia, et similia diversis celeritatibus, variisque temporibus in eodem fluido moveantur; decrementa velocitatis his temporibus orta ex prima causa, erunt directe ut tempora, quibus fiunt.*

Corpora A et B (Fig. 99.) aeque densa, aequalia, et similia temporibus T et *t* cum velocitatibus C et *c* in eodem fluido moveantur. Dico, decrementa velocitatis ex prima causa, quae subeunt temporibus T et *t*, esse directe ut haec tempora. Nam si tempora T et *t* supponantur esse aequalia inter se, etiam decrementa celeritatis in utroque corpore genita, (378) aequabuntur. Verum si tempus T sit duplum temporis *t*, tunc tempus T poterit concipi ut divisum in duas aequales partes, quarum singulae etiam erunt tempori *t* aequales. Sed in singulis hisce partibus decrementum velocitatis corporis A aequale est (378) decremento velocitatis corporis B; igitur decrementum velocitatis corporis A tempore T productum, erit duplum decrementi velocitatis corporis B tempore *t* producti. Eadem ratione, si tempus T sit triplum temporis *t*, etiam decrementum velocitatis corporis A tempore T productum, triplum erit decrementi velocitatis, quod tempore *t* producitur in corpore alio B; et sic deinceps. Igitur generatim decrementa velocitatis corporum A et B erunt directe ut tempora, quibus fiunt.

PROPOSITIO LXI.

383. *Si duo corpora aeque densa, aequalia, et similia, quae diversis celeritatibus in eodem fluido promoventur, inaequalibus temporibus infinite parvis spatiola aequalia absolvant; decrementa velocitatis, quae a prima causa his tempusculis patiuntur, erunt inverse ut eorundem celeritates.*

Corpora A et B (Fig. 100.) aeque densa, aequalia, et similia cum celeritatibus C et *c* in eodem fluido progrediantur, temporibus autem T et *t* infinite parvis, et inaequalibus inter se, absolvant aequalia spatiola S et *s*. Dico, decrementa velocitatis, quae ex prima causa his temporibus patiuntur, esse inverse ut eorum velocitates C et *c*. Cum enim infinite parva sint (ex hyp.) tempora T et *t*, motus corporum A et B erunt (380) hisce tempusculis uniformes. Atqui percursa spatia S et *s* sunt (ex hyp.) aequalia inter se; igitur tempus T erit ad tempus *t*, ut velocitas *c* ad velocitatem C. Vidimus autem (382) decrementum velocitatis corporis A esse ad illud corporis B, ut tempus T ad tempus *t*; ergo etiam decrementum velocitatis corporis A erit ad illud corporis B, ut huius velocitas *c* ad alterius velocitatem C.

PROPOSITIO LXII.

384. *Si duo corpora aeque densa, aequalia, et similia eodem tempore infinite parvo, et cum diversis velocitatibus intra idem fluidum progrediantur; decrementa velocitatis, quae a secunda causa tempusculo illo subeunt, erunt directe ut quadrata velocitatum corporum eorundem.*

Corpora A et B (Fig. 101.) aeque densa, aequalia, et similia eodem tempore T infinite parvo, et cum velocitatibus C et *c* intra idem fluidum moveantur. Dico, decrementum velocitatis, quod corpus A ex secunda causa tempusculo illo subit, esse ad decrementum velocitatis, quod interea patitur alterum corpus B, ut quadratum celeritatis C ad quadratum celeritatis *c*. Dum enim duae constantes vires tempore dato agunt in duo corpora aeque densa, aequalia, et similia, mutationes celeritatis in illis tempore dato ortae, sunt viribus ipsis proportionales. Sed resistentiae, quas ex secunda causa patiuntur corpora *A* et *B*, tempore infinite parvo vires constantes sunt (361), et mutationes celeritatis, quas in corporibus A et B tempusculo illo edunt, sunt decrementa celeritatis genita in iisdem; ergo et decrementum celeritatis factum in corpore A, erit ad illud, quod fit in corpore alio B, ut resistentia quam subit A, ad illam quam subit B. Sed resistentia quam subit A est (370. 371.) ad illam quam subit B, ut quadratum velocitatis C ad quadratum velocitatis *c*; ergo et decrementum velocitatis, quod patitur corpus A, erit ad decrementum velocitatis, quod interim subit aliud corpus B, ut quadratum celeritatis C ad quadratum celeritatis *c*.

PROPOSITIO LXIII.

385. *Si duo corpora aeque densa, aequalia, et similia cum eadem velocitate, diversis autem temporibus infinite parvis intra idem fluidum moveantur; decrementa velocitatis, quae a secunda causa illis tempusculis patiuntur, erunt directe ut tempuscula, quibus fiunt.*

Corpora A et B (Fig. 102.) aeque densa, aequalia, et similia cum velocitate eadem C diversis temporibus infinite parvis T et *t* in eodem fluido moveantur. Dico, decrementum velocitatis, quod ex secunda causa patitur corpus A tempore T, esse ad decrementum velocitatis, quod tempusculo *t* subit alterum corpus B, ut tem-

tempusculum T ad tempusculum *t*. Dum enim duae aequales constantes vires temporibus inaequalibus in duo corpora aeque densa, aequalia, et similia agunt, mutationes velocitatis, quas in corporibus illis edunt, sunt proportionales temporibus, quibus agunt. Sed resistentiae ex secunda causa, quas subeunt corpora A et B infinite parvis temporibus T et *t*, vires constantes sunt (361), et (373) aequales, ac praeterea mutationes velocitatis, quas in corporibus illis edunt, sunt decrementa velocitatis in illis genita; ergo et decrementum velocitatis, quod tempusculo T patitur corpus A, erit ad decrementum velocitatis, quod tempusculo *t* subit alterum corpus B, ut tempusculum T ad tempusculum *t*.

PROPOSITIO LXIV.

386. *Si duo corpora aeque densa, aequalia, et similia cum diversis celeritatibus, variisque temporibus infinite parvis in eodem fluido moveantur; decrementa velocitatis, quae a secunda causa illis tempusculis patiuntur, erunt in ratione composita ex ratione quadratorum velocitatum, et ex ratione tempusculorum, quibus fiunt.*

Corpora A et B (Fig. 103.) aeque densa, aequalia, et similia cum diversis celeritatibus C et *c*, variisque temporibus infinite parvis T et *t* in eodem fluido moveantur. Dico, decrementum velocitatis, quod tempusculo T patitur corpus A, esse ad illud, quod tempore *t* subit alterum corpus B, in ratione composita quadrati celeritatis C ad quadratum celeritatis *c*, et ex ratione temporis T ad tempus *t*. Finge enim esse alterum corpus E aeque densum ac A et B, eisque simile, et aequale, quod cum velocitate *c*, tempusculo autem T in eodem fluido moveatur. Quia ergo corpora A et E aeque densa, aequalia, et similia tempusculo eodem T cum diversis velocitatibus C et *c* intra idem fluidum promoventur; decrementum celeritatis corporis A erit (384) ad illud corporis E, ut quadratum velocitatis C ad quadratum velocitatis *c*. Rursus quia corpora E et B aeque densa, aequalia, et similia cum eadem velocitate *c*, diversis autem temporibus T et *t* intra idem fluidum promoventur, decrementum velocitatis corporis E erit (385) ad illud corporis B, ut tempus T ad tempus *t*. Atqui decrementum velocitatis corporis A est ad illud corporis B in ratione composita ex ratione decrementi velocitatis corporis A ad decrementum velocitatis corporis E, et ex ratione decrementi velocitatis corporis E ad decrementum velocitatis corporis B; ergo etiam decrementum velocitatis corporis A erit ad decrementum velocitatis corporis B in ratione composita ex ratione quadrati velocitatis C ad quadratum velocitatis *c*, et ex ratione temporis T ad tempus *t*.

LEM-

LEMMA.

387. *Duae rectae quaecunque* AB, GH (*Fig.* 105.) *sunt inter se in ratione composita ex ratione directa quadrati* AB *ad quadratum* GH, *et ex ratione inversa* AB *ad* GH.

Super rectas AB, GH fiant quadrata ADCB, GKIH. Tum super haec quadrata veluti bases excitari intelligantur parallelepipeda duo recta FB, MH, quorum altitudines EB, SH sint respective aequales rectis GH, AB. Cum itaque (ex constr.) sit EB ad SH, ut GH ad AB, vel (ex constr.) ut HI ad BC; rectangulum EBCL aequabitur alteri SHIN. Iam si duo rectangula haec aequalia accipiantur ut bases parallelepipedorum FB, MH; tunc rectae AB, GH eorum altitudines exhibebunt. Sed parallelepipeda habentia aequales bases, sunt inter se ut altitudines eorundem; ergo parallelepipedum FB erit ad aliud MH, ut AB ad GH. Sed parallelepipeda eadem FB, MH sunt quoque in ratione composita ex ratione basis ADCB ad basim GKIH, et ex ratione altitudinis EB ad altitudinem SH; ergo etiam AB erit ad GH in ratione composita ex ratione basis ADCB ad basim GKIH, et ex ratione altitudinis EB ad altitudinem SH. Sed basis ADCB est (ex constr.) quadratum rectae AB, et basis GKIH quadratum rectae GH; ergo etiam AB erit ad GH in ratione composita ex ratione quadrati AB ad quadratum GH, et ex ratione EB ad SH. Est autem EB (ex constr.) aequalis ipsi GH, et SH ipsi AB; ergo et AB erit ad GH in ratione composita ex ratione quadrati AB ad quadratum GH, et ex ratione GH ad AB, quae est inversa rationis AB ad GH.

PROPOSITIO LXV.

388. *Si duo corpora aeque densa, aequalia, et similia, quae diversis celeritatibus in eodem fluido promoventur temporibus infinite parvis, et inaequalibus spatiola aequalia absolvant; decrementa velocitatis, quae a secunda causa hisce tempusculis patiuntur, erunt directe ut eorum velocitates.*

Corpora A et B (Fig. 100.) aeque densa, aequalia, et similia velocitatibus C et *c* in eodem fluido moveantur; temporibus autem infinite parvis, et inaequalibus T et *t* absolvant aequalia spatiola S et *s*. Dico, decrementa velocitatis, quae a secunda causa tempusculis illis subeunt corpora A et B, esse directe ut eorum velocitates C et *c*. Cum enim tempora T et *t* sint infinite parva, motus corporum A et B erunt (362) hisce temporibus uniformes. Sed

 etiam

etiam spatiola S et s hoc motu aequabili absoluta, sunt (ex hyp.) aequalia inter se; igitur tempus T erit ad tempus t, ut velocitas c ad velocitatem C. Vidimus autem (386) decrementum velocitatis corporis A esse ad decrementum velocitatis corporis B in ratione composita ex ratione quadrati velocitatis C ad quadratum velocitatis c, et ex ratione temporis T ad tempus t; ergo et decrementum velocitatis corporis A erit ad illud corporis B in ratione composita ex ratione quadrati velocitatis C ad quadratum velocitatis c, et ex ratione velocitatis c ad velocitatem C. Sed etiam velocitas C est (387) ad velocitatem c in ratione composita ex ratione quadrati velocitatis C ad quadratum velocitatis c, et ex ratione velocitatis c ad velocitatem C; ergo etiam decrementum velocitatis corporis A erit ad decrementum velocitatis corporis B, ut velocitas C primi A ad velocitatem c secundi B.

PROPOSITIO LXVI.

389. *Determinare longitudinem spatii a corpore intra fluidum percurrendam, ut idem ob solam resistentiam ex prima causa ortam, omnem amittat velocitatem.*

Finge corpus iuxta rectam BA (Fig. 104.) cum velocitate BC in fluido promoveri, et a sola tenacitate partium fluidi retardari. Finge praeterea resistentiam, quam indesinenter patitur ab hac causa, aequalem esse resistentiae gravitatis, quam idem corpus in vacuo pateretur, si iuxta rectam BA sursum proiectum esset. Denique finge AB esse altitudinem illam, ex qua corpus libere descendendo, velocitatem BC acquirere potest. Dico, ipsum spatio BA percurso, omnem amissurum velocitatem. Nam corpus, quod in recta BA, et cum velocitate BC in fluido motum, a sola tenacitate partium fluidi retardatur, habet (374) in quolibet spatii BA puncto eandem velocitatem, quam ibi haberet, si cum velocitate BC, et iuxta directionem BA sursum in vacuo proiectum esset. Atqui corpus in vacuo sic proiectum, nullam velocitatem haberet in puncto A, hoc est omnem amitteret velocitatem cum pervenisset ad punctum A; ergo et idem corpus, dum in fluido promovetur, totam amittet velocitatem, ubi pervenerit usque ad A, et ideo BA erit longitudo spatii a corpore intra fluidum percurrenda, ut idem ob solam resistentiam ortam a prima causa, omnem prorsus amittat velocitatem.

PROPOSITIO LXVII.

390. *Determinare celeritatem, quam corpus in fluido motum, habet in singulis punctis spatii, quod percurrit, dum a sola tenacitate partium eiusdem fluidi retardatur.*

Horizontalis recta BC (Fig. 104.) exponat celeritatem, quam in principio habet corpus, dum intra fluidum promovetur. Verticalis autem recta BA referat (389) spatium, quo percurso, amittat corpus omnem celeritatem, dum a sola tenacitate partium fluidi retardatur. Sumpta deinde post rectas AB et BC tertia proportionali AF, vertice A, et parametro AF describatur circa axem AB parabola AEC. Demum ex quovis alio puncto D axis AB agatur ordinata DE, quae parallela erit alteri ordinatae BC. Dico, ordinatam DE exponere celeritatem, quam habet corpus in puncto D. Nam si idem corpus cum velocitate BC sursum proiici concipiatur in recta BA, ipsum in quovis puncto spatii sui BA eam habebit (374) celeritatem, quam ibi habet, dum in recta BA, et cum velocitate BC progreditur intra fluidum. Atqui dum corpus intra fluidum promovetur, nullam (ex constr.) velocitatem habet in puncto A; ergo et idem corpus dum sursum ascendit in recta BA, nullam habebit velocitatem in puncto A, hoc est totam velocitatem in puncto A amittet. Sed quando corpus ascendens in recta BA, totam velocitatem deperdit in puncto A, quadratum eius velocitatis in B est ad quadratum eius velocitatis in D, ut AB ad AD; ergo etiam dum idem corpus in recta BA incedens, a sola tenacitate partium fluidi retardatur, quadratum eius velocitatis in B erit ad quadratum velocitatis in D, ut AB ad AD. Sed etiam quadratum ordinatae BC est ad quadratum ordinatae DE, ut AB ad AD, ergo etiam quadratum velocitatis in B erit ad quadratum velocitatis in D, ut quadratum ordinatae BC ad quadratum ordinatae DE, ideoque et velocitas corporis in B erit ad velocitatem eius in D, ut ordinata BC ad ordinatam DE. Sed velocitas corporis in B exponitur (ex hyp) per ordinatam BC; ergo et velocitas eius in D exponetur per ordinatam DE. Pari modo etiam determinabitur velocitas corporis in quovis altero puncto rectae AB.

Corollarium I.

391. Hinc si spatiola Bb, Dd sint infinite parva, et aequalia inter se, decrementa velocitatis IC, GE orta ex prima causa dum haec spatiola percurruntur, erunt inverse ut ordinatae BC, DE; haec siquidem decrementa sunt inverse (383) ut velocitates in B et D, quae sunt directe (390) ut ordinatae BC, DE.

Corollarium II.

392. Si ergo in parabola AEC sumptis Bb, Dd infinite parvis, et aequalibus inter se, agantur ordinatae infinite propinquae

BC

BC et bc, DE et de, ducanturque cI, cG parallelae axi AB; differentiae IC, GE ordinatarum BC et bc, DE et de erunt inverse (391) ut hae ordinatae BC, DE. Quod etiam ex sola consideratione parabolae deduci potuisset.

DEFINITIO VI.

393. Si recta A B (Fig. 106.) secetur in partes AD, DF, FH, &c. inter se aequales, et infinite parvas, indeque ad eam ex punctis singulis divisionum excitentur perpendiculares AC, DE, FG, &c. infinite parum invicem differentes, et quae sint in geometrica proportione; curva CMK traducta per illarum extremitates C, E, G, I, &c. dicitur *Logarithmica*, cuius *axis* est recta AB.

LEMMA I.

394. *Ubicunque ponatur initium abscissarum in logarithmica, ipsae erunt semper logarithmi respondentium ordinatarum.*

I. Sit primo in *A* (Fig. 106.) initium abscissarum in logarithmica CMK. Cum sint (393) aequales AD, DF, FH, HV, &c., abscissae AD, AF, AH, AV, &c. erunt in aritmetica proportione. Atqui ordinatae DE, FG, HI, VZ &c. sunt (393) in geometrica proportione; ergo abscissae AD, AF, AH, AV, &c. erunt logarithmi respondentium ordinatarum DE, FG, HI, VZ, &c.

II. Sit deinde initium abscissarum in puncto L. Quoniam sunt aequales VH, HF, FD, DA &c., rectae LV, LH, LF, LD, &c. erunt in arithmetica proportione. Atqui ordinatae VZ, HI, FG, DE, &c. sunt (393) in geometrica proportione; ergo abscissae LV, LH, LF, LD, &c. erunt logarithmi respondentium ordinatarum VZ, HI, FG, DE, &c.

LEMMA II.

395. *Si ordinatae* AC, HI *intercipiant segmentum axis* AH *aequale segmento* LR, *quod intercipiunt duae aliae ordinatae* LM, RS; *erit* AC *ad* HI, *ut* LM *ad* RS.

Ratio AC ad HI componitur ex rationibus AC ad DE, DE ad FG, et FG ad HI. Ratio quoque LM ad RS componitur ex rationibus LM ad NO, NO ad PQ, et PQ ad RS. Atqui singulae rationes, quae componunt rationem AC ad HI, sunt (393) aequales singulis rationibus, quae componunt rationem LM ad RS, et propter aequalia segmenta axis AH, LR, idem est numerus earundem; ergo aequales pariter erunt compositae rationes, sive AC erit ad HI, ut LM ad RS.

COROLLARIUM.

396. Hinc si tres ordinatae intercipiant aequalia segmenta axis; ipsae erunt continue proportionales. Patet id ex lemmate praecedenti; est enim eius casus particularis, in quo puncta H et L sibi congruere concipiantur.

LEMMA III.

397. *Logarithmica* CMK *semper ad axem* AB *accedit, et quidem ultra quoscunque limites, ita tamen ut nunquam conveniat cum eodem.*

Quando ratio quaecunque maioris inaequalitatis semper continuatur, (a) pervenitur tandem ad quantitatem minorem quacunque data. Sed in logarithmica CMK ratio ordinatae AC ad ordinatam DE est ratio maioris inaequalitatis, eaque semper continuatur; ergo tandem pervenietur ad ordinatam minorem quacunque data, et ideo logarithmica CMK supra quoscunque limites ad axem *AB* accedet. Non poterit tamen unquam concurrere cum eodem. Nam, si fieri potest, logarithmicae punctum K concurrat cum axe AB in aliquo puncto, ut B, et divisa AB bifariam in puncto Y, agatur ordinata YW. Quia ordinatae AC, YW intercipiunt axis segmentum AY aequale segmento YB, quod intercipiunt ordinatae YW, BK; erit (396) AC ad YW, ut YW ad BK, unde quadratum YW aequabitur rectangulo sub AC, et BK. Sed cum logarithmicae punctum K cadat (ex hyp.) in axeos punctum B, ordinata BK nihilo est aequalis, atque ita nihilo etiam aequatur rectangulum sub rectis AC, et BK; ergo et nihilo aequale erit YW quadratum, quod est absurdum. Falso itaque ponebatur, quod tandem logarithmica conveniret cum eius axe AB in B, qui proinde *asymptotus* eius erit.

LEMMA IV.

398. *Si in eadem logarithmica* CMK *sit* AC *ad* HI, *ut* LM *ad* RS; *axis segmenta* AH, LR *intercepta ab his ordinatis, erunt aequalia inter se.*

Segmentum AH sit, si fieri potest, minus segmento LR, et sumpto segmento LP alteri AH aequali, ordinetur PQ. Cum itaque sint aequalia segmenta AH, LP, erit (395) AC ad HI, ut LM ad

(a) Lemma 2. Prop. 2. Lib. VI. Geometriae Taqueti.

ad PQ. Sed etiam AC est (ex hyp.) ad HI, ut LM ad RS; ergo et LM erit ad PQ, ut eadem LM ad RS, ideoque aequabuntur ordinatae PQ, RS, quod (397) est absurdum. Non ergo segmentum AH est alio LR minus. Pari modo ostendetur eodem non esse maius; consequens ergo erit, ut sit ipsi aequale.

LEMMA V.

399. *Segmentum axis* DV, *quod intercipiunt duae quaelibet ordinatae* DE, VZ, *est logarithmus rationis, quam ipsae inter se habent.*

Si una quantitas per aliam dividatur, quotus exprimit rationem, quae est inter illas, et differentia logarithmorum earum quantitatum est logarithmus eiusdem quoti. Sed sumpto in L initio abscissarum, abscissae LD, LV sunt (394) logarithmi ordinatarum DE, VZ, et segmentum DV, quod intercipiunt hae ordinatae, est differentia logarithmorum ad ordinatas has pertinentium; ergo segmentum DV erit logarithmus quoti, qui prodit, si ordinata DE dividatur per aliam VZ. Sed quotus hic exprimit rationem, quae intercedit inter ordinatas DE, VZ; ergo etiam segmentum DV erit logarithmus rationis, quam inter se habent ordinatae DE, VZ.

COROLLARIUM.

400. Hinc si ratio AC ad HI aequetur rationi LM ad RS; logarithmus primae rationis logarithmo secundae aequalis erit. Cum enim AC sit ad HI, ut LM ad RS, aequalia erunt (398) axis segmenta AH, LR. Sed primum est (399) logarithmus rationis AC ad HI, et alterum logarithmus rationis LM ad RS; ergo et logarithmus primae rationis logarithmo secundae aequalis erit.

LEMMA VI.

401. *Si quatuor ordinatae* AC, HI, LM, RS *intercipiant aequalia axis segmenta* AH, LR; *differentia primae a secunda erit ad differentiam tertiae a quarta, ut prima ad tertiam, sive ut secunda ad quartam.*

Agantur IT, SX ad asymptotum parallelae, ut ita prodeant AT, LX respective aequales ordinatis HI, RS. Quoniam ordinatae AC, HI, LM, RS intercipiunt aequalia axis segmenta AH, LR; erit (395) AC ad HI, ut LM ad RS. Est autem AT aequalis ipsi HI, et LX ipsi RS; ergo et AC erit ad AT, ut LM ad LX, et convertendo, AC erit ad TC, ut LM ad XM, et invertendo, erit TC ad AC, ut XM ad LM, et denique permutando, TC erit ad XM, ut AC ad LM, vel ut HI ad RS.

COROLLARIUM.

402. Unde si in logarithmica tres ordinatae intercipiant aequalia segmenta axis; differentia primae a secunda erit ad differentiam secundae a tertia, ut prima ad secundam, aut ut secunda ad tertiam. Patet hoc ex lemmate praecedenti; est enim casus particularis eiusdem, in quo duo puncta H et L sibi congruere concipiantur.

LEMMA VII.

403. *Si ex punctis quibuslibet* C *et* M *logarithmicae* CMR *(Fig. 107.) agantur tangentes* CT, MV, *asymptoto occurrentes in* T *et* V; *subtangentes inde ortae* AT, LV *invicem aequabuntur.*

Ductis ex C et M ordinatis CA, ML, in asymptoto AB sumantur segmenta aequalia infinite parva AD, LN, et ductis subinde ordinatis DE, NO, quae erunt (395) proportionales prioribus CA, ML, agantur E*c*, O*m* parallelae ad asymptotum AB. Quia arcus CE est infinite parvus, ipse accipi poterit velut recta, sive pars infinite parva tangentis CT; unde ob triangulum C*c*E simile alteri CAT, erit C*c* ad *c*E, ut CA ad AT, et permutando, erit C*c* ad CA, ut *c*E ad AT. Rursus ob triangulum M*m*O simile alteri MLV, erit M*m* ad *m*O, ut ML ad LV, et permutando, erit M*m* ad ML, ut *m*O ad LV. Sed cum C*c* sit (401) ad M*m*, ut CA ad ML, etiam permutando, C*c* erit ad CA, ut M*m* ad ML; ergo *c*E erit ad AT, ut *m*O ad LV. Sunt vero aequales *c*E, *m*O; ergo etiam aequabuntur AT, LV.

COROLLARIUM I.

404. Si manente tam magnitudine ordinatarum AC, DE, FG, HI, &c. (Fig. 106.), quam aequalitate mutua distantiarum AD, DF, FH, &c., distantiae hae omnes magnitudine augeantur, aut minuantur; tunc logarithmica, eiusque subtangens in eadem ratione mutari debent, in qua distantiae hae mutantur. Nam si in triangulo C*c*E (Fig. 107.) manente latere C*c*, mutetur *c*E; utique in triangulo CAT, cuius latus CA servatur, in eadem ratione cum *c*E mutabitur quoque AT.

COROLLARIUM II.

405. Quia in eadem ratione, in qua mutantur distantiae minores AD, DF, FH, &c. (Fig. 106.), mutatur pariter harum summa AH, quae est (399) logarithmus rationis AC ad HI; utique si duae ordinatae PB, SN (Fig. 110.) unius logarithmicae BNR sint

sint respective aequales duabus aliis ordinatis VM, QK logarithmicae alterius BKC, etiam PS, seu logarithmus rationis PB ad SN erit (404) ad VQ, seu logarithmum rationis VM ad QK, ut subtangens PT logarithmicae BNR ad subtangentem VO, vel (403) HZ logarithmicae BKC.

LEMMA VIII.

406. *Si duae ordinatae* PB, SN (*Fig.* 110.) *unius logarithmicae* BNR *sint proportionales duabus aliis ordinatis* HB, LF *cuiuscunque alterius logarithmicae* BKC, *hoc est ratio* PB *ad* SN *aequetur rationi* HB *ad* LF; *etiam logarithmus* PS *primae rationis erit ad logarithmum* HL *secundae, ut subtangens* PT *ad subtangentem* HZ.

In logarithmica BKC sumptae intelligantur ordinatae VM, QK respective aequales ipsis PB, SN alterius logarithmicae BNR; eritque ratio PB ad SN aequalis rationi VM ad QK. Sed eadem quoque ratio PB ad SN (ex hyp.) est aequalis rationi HB ad LF; ergo etiam ratio HB ad LF aequabitur rationi VM ad QK, et ideo logarithmus rationis HB ad LF aequabitur (400) logarithmo rationis VM ad QK. Sed logarithmus rationis PB ad SN est (405) ad logarithmum rationis VM ad QK, ut subtangens PT ad subtangentem VO, vel (403) HZ; ergo et logarithmus rationis PB ad SN erit ad logarithmum rationis HB ad LF, ut subtangens PT ad subtangentem HZ.

COROLLARIUM.

407. Hinc si subtangens PT logarithmicae BNR sit dupla subtangentis HZ logarithmicae alterius BKC; etiam logarithmus PS rationis PB ad SN duplus erit (406) logarithmi HL rationis HB ad LF.

SCHOLION I.

408. Quamvis logarithmus PS sit duplus alterius logarithmi HL, nihilominus si ambo exprimantur numeris tabularum, hi numeri iidem erunt. Numerus enim qui in tabulis repraesentat logarithmum PS, habet unitatem (404) duplo maiorem illa, quam habet numerus repraesentans logarithmum HL; unde etsi logarithmus PS sit magnitudine duplo maior quam HL, uterque tamen eodem prorsus tabularum numero exprimetur. Idem pariter est dicendum de subtangentibus PT, HZ, quae licet sint magnitudine inaequales, eodem tamen tabularum numero exprimentur. Con-

Consequenter quaelibet logarithmica sumi potest pro logarithmica tabularum.

SCHOLION II.

409. In logarithmorum tabulis, quas habemus, logarithmus unitatis est 0, seu 0.0000000; logarithmus autem denarii est 1, seu 1.0000000, et propterea logarithmus rationis denarii ad unitatem erit 1.0000000. Logarithmi rationum intermediarum fractionibus decimalibus exprimuntur. Subtangens denique logarithmicae tabularum est 0.4342945.

PROPOSITIO LXVIII.

410. *Si asymptoti pars* AB (*Fig.* 106.) *referat spatium percursum a corpore intra fluidum, cuius partium tenacitas nulla sit, et ordinata* AC *logarithmicae* CMK *exponat eius celeritatem in initio, seu puncto* A; *etiam reliquae ordinatae singulis punctis spatii respondentes, exponent celeritates eisdem punctis convenientes.*

Sumptis in recta AB infinite parvis, et aequalibus partibus AD, DF, FH, HV, &c., agantur ordinatae DE, FG, HI, &c. Ducantur quoque E*c*, G*e* ad asymptotum parallelae. Quia spatiola AD, DF sunt infinite parva, et aequalia inter se; decrementum celeritatis, quod subit corpus dum spatium AD percurrit, erit (388) ad illud, quod patitur dum absolvit spatium DF, ut velocitas in A ad velocitatem in D. Sed cum C*c* sit ad E*e* (402), ut AC ad DE, etiam decrementum ordinatae AC est ad decrementum ordinatae DE, ut ordinata AC ad ordinatam DE; ergo et velocitas in A erit ad velocitatem in D, ut ordinata AC ad ordinatam DE. Sed velocitas in A est (ex hyp.) exposita per AC; ergo et velocitas in D repraesentabitur per DE. Pari modo ostendam, velocitates in punctis F, H, V, &c. exponi per ordinatas illis respondentes FG, HI, VZ, &c.

COROLLARIUM I.

411. Cum nullum in asymptoto punctum sit, cui non respondeat aliqua ordinata; patet, corpus motum in fluido, cuius partium tenacitas nulla sit, amittere nunquam posse totam eius velocitatem.

COROLLARIUM II.

412. Quia dum aequalia sunt spatia AV, VN, ordinatae AC, VZ, NO sunt (396) continue proportionales; sequitur, etiam cor-

corporis velocitates in punctis A, V, N esse continue proportionales.

PROPOSITIO LXIX.

413. *Tempora designare, quibus cylindrus motus in fluido, cuius partium tenacitas nulla est, successive absolvit spatia infinite parva, et aequalia inter se.*

Sit AZ (Fig. 108.) axis, aut asymptotus logarithmicae BKY, et BM eius continuatio in situ contrario constituta. Corpus praeterea, quod in initio, seu puncto A habet velocitatem expositam recta AB, moveatur in axe AZ, et tempusculis inaequalibus absolvat spatiola infinite parva, et aequalia AC, CP, PQ, &c. Quia ordinatae AB et CF, AB et CD intercipiunt aequalia segmenta axis, erit (395) CD ad AB, ut AB ad CF. Eandem ob causam, PE (395) erit ad CD, ut CF ad PG, et QK ad PE, ut PG ad QH, et sic deinceps, ita ut augeantur ordinatae, quae terminantur a logarithmicae tractu BM, et e contrario minuantur respondentes, quae terminantur ab altero tractu BY, sintque primae inverse ut secundae. Iam cum aequalia sint spatiola AC, CP, eaque (361) motu aequabili percurrantur; tempus quo percurritur AC, erit ad tempus quo absolvitur CP, et velocitas in C ad velocitatem in A, sive (410) ut CD ad AB. Vidimus autem esse CD ad AB, ut AB ad CF; ergo et primum tempus ad aliud erit, ut AB ad CF, vel (402) ut F*f* ad G*g*, et ideo si tempus quo percurritur AC, sit expositum per F*f*, etiam tempus quo absolvitur CP, repraesentabitur per G*g*. Rursus tempus quo absolvitur CP, erit ad tempus quo absolvitur PQ, ut velocitas in Q ad velocitatem in P, sive (410) ut QK ad PE, vel (ex demonstr.) ut PG ad QH, aut (402) ut G*g* ad H*b*. Vidimus autem tempus quo percurritur CP, exponi recta G*g*; igitur etiam tempus quo absolvitur PQ, repraesentabitur recta H*b*. Simili modo ostendam, quod tempora insumpta in percurrendis spatiolis QR, RS, ST, exposita erunt rectis I*i*, L*l*, M*m*.

PROPOSITIO LXX.

414. *Tempora quibus cylindrus percurrit spatia aequalia AQ, QT, sunt inverse ut celeritates in initio, et inverse ut celeritates in fine eorundem spatiorum.*

I. Tempus quo corpus spatium AQ absolvit exponitur (413) rectis simul F*f*, G*g*, H*b*, seu recta HN; tempus autem quo idem corpus spatium QT percurrit, repraesentatur per rectas simul I*i*, L*l*, M*m*, seu per rectam MO. Igitur primum tempus ad aliud erit, ut HN ad MO. Verum ob continue (395) proportionales AB, QH, TM, est (402) HN ad MO, ut AB ad QH, vel (413) ut QK ad AB, aut (410) ut velocitas in Q ad velocitatem in A; ergo tempus quo corpus spatium AQ percurrit, erit ad tempus quo absolvit aliud QT, ut velocitas in Q ad velocitatem in A, hoc est tempora, quibus corpus absolvit spatia AQ, QT, erunt inverse ut celeritates in A, et Q, sive in initio eorundem spatiorum.

II. Rursus cum etiam HN sit (402) ad MO, ut QH ad TM, aut (413) ut TY ad QK, vel (410) ut velocitas in T ad velocitatem in Q; utique tempus quo corpus spatium AQ percurrit, erit ad tempus quo sequens aliud QT absolvit, ut velocitas in T ad velocitatem in Q, hoc est tempora, quibus corpus absolvit spatia AQ, QT, erunt inverse ut celeritates in Q et T, sive in fine eorundem spatiorum.

LEMMA I.

415. *Datis in logarithmica* CMR *(Fig. 107.) duabus ordinatis infinite propinquis* AC, DE, *parabolam describere, quae axem habeat in asymptoto eius* AB, *et transeat per puncta* C, *et* E.

Subtangens AT logarithmicae CMR bisecetur in puncto H. Deinde post rectas HA, AC quaeratur tertia proportionalis GK. Vertice tandem H, parametro autem GK circa axem HA fiat parabola HF. Dico, hanc quoque transire per puncta C, et E. Cum recta AC sit perpendicularis ad axem HA parabolae HF, et simul sit (ex constr.) media proportionalis inter eius abscissam HB, et parametrum GK; eadem etiam erit ordinata eiusdem parabolae HF, quae proinde transibit per punctum C. Praeterea cum AT sit (ex constr.) dupla abscissae HA parabolae HFC, recta CT continget parabolam in puncto C. Sed eadem CT quoque logarithmicam (ex hyp.) tangit eodem in puncto C; igitur duo arcus parabolae, et logarithmicae, quos intercipiunt ordinatae infinite proximae AC, DE, necessario congruent inter se. Atqui arcus logarithmicae interceptus ab eius ordinatis AC, DE, est CE; igitur etiam arcus parabolae, qui intercipitur ab iisdem, erit CE, ideoque parabola transibit quoque per punctum E.

LEMMA II.

416. *Si corpus sursum proiectum in recta* AB *(Fig. 107.), et sola gravitatis vi retardatum, habeat in punctis infinite proximis* A *et*

et D *velocitates expositas ab ordinatis* AC, DE *logarithmicae* CMR; *medietas* AH *eius subtangentis* AT *erit altitudo, ad quam ascendere potest.*

Si fieri potest, altitudo ad quam ascendere potest corpus, sit AP, maior quam AH. Tum circa axem AH (415) describatur parabola HFC, quae transeat per C et E. Quoniam ergo rectae AC, DE sunt ordinatae parabolae HFC; abscissa AH erit ad abscissam DH, ut quadratum ordinatae AC ad quadratum ordinatae DE. Sed cum AP sit (ex hyp.) altitudo, ad quam ascendere potest corpus, erit AP ad DP, ut quadratum velocitatis in A ad quadratum velocitatis in D, vel (ex hyp.) ut quadratum ordinatae AC ad quadratum ordinatae DE; ergo etiam AH erit ad DH, ut AP ad DP, et dividendo, AD erit ad DH, ut eadem AD ad DP, ideoque aequabuntur DH, DP, atque ita etiam AH, AP, contra hypothesim. Igitur altitudo, ad quam ascendere potest corpus, non maior est recta AH. Simili ratiocinio etiam demonstrabo, eandem quoque non esse minorem recta AH; consequens ergo erit, ut ipsi AH aequetur.

Corollarium.

417. Quia medietas AH subtangentis AT est (416) altitudo, ad quam corpus cum velocitate AC in altum proiectum ascendere potest; medietas quoque AH subtangentis AT erit altitudo, ex qua corpus in vacuo cadendo, acquirere potest velocitatem AC.

PROPOSITIO LXXI.

418. *Ordinata* AC *(Fig. 107.) logarithmicae* CMR *exponat celeritatem, qua si cylindrus rectus iuxta sui axeos directionem in fluido moveatur, resistentia ex secunda causa eiusdem ponderi sit aequalis. Dico, medietatem* AH *subtangentis eius* AT *esse altitudinem illam, ex qua corpus in vacuo cadendo, velocitatem* AC *acquirere potest.*

Finge cylindrum rectum cum velocitate AC intra fluidum promoveri, indeque cum hac eadem velocitate sursum proiectum esse in recta AB, et sola gravitatis vi retardari. Hoc posito, actio resistentiae quam subit cylindrus a fluido in puncto A, aequalis est (ex hyp.) eius ponderi, seu actioni ex gravitate, quae retardat motum eiusdem corporis ascendentis. Sed hae actiones immediate transferunt idem corpus, quando in hoc agunt; ergo etiam aequaliter retardabunt eiusdem motum, ideoque velocitas amissa a corpore in primo momento, quo intra fluidum promovetur ex A in D,

D, aequabitur velocitati, quam in momento aequali idem corpus amittit ascendendo ex A in D. Atqui ducta ordinata DE infinite proxima ipsi AC, est (410) Cc velocitas, quam in fluido amittit corpus percurrendo AD; ergo etiam Cc erit velocitas, quam idem corpus amittet ascendendo ex A in D. Habebat autem in puncto A (ex hyp.) velocitatem AC; ergo in punto D habebit velocitatem DE. Itaque corpus sursum proiectum in recta AB, et sola gravitatis vi retardatum, habet in punctis infinite proximis A et D celeritates expositas ab ordinatis AC, DE logarithmicae CMR; unde medietas AH subtangentis AT erit (417) altitudo, ex qua corpus in vacuo cadendo, velocitatem AC acquirit.

Corollarium I.

419. Quia (409) subtangens AT expressa numeris tabularum, est 0.4342945; eius medietas, sive altitudo AH (ex qua corpus in vacuo cadendo, acquirit velocitatem, qua si in fluido moveatur, patitur resistentiam ponderi eius aequalem) erit 0.2171472.

Corollarium II.

420. Cum gravitas specifica fluidi sit (366) ad illam cylindri, ut dimidia altitudo cylindri ad altitudinem AH (ex qua cylindrus in vacuo cadendo, acquirit velocitatem, qua si in fluido moveatur, patitur resistentiam ponderi eius aequalem); manifestum est, altitudinem hanc AH per notas quoque mensuras dari.

Corollarium III.

421. Hinc eadem altitudo AH duobus numeris exprimetur, quorum alter depromitur ex decimalibus numeris tabularum, alter autem ex numeris absolutis.

PROPOSITIO LXXII.

422. *Si cylindrus rectus iuxta sui axeos directionem in fluido moveatur, cuius partium tenacitas nulla sit; spatium invenire, in quo percurrendo amittet dimidium velocitatis, quam in ipso initio motus habet.*

Sit AC (Fig. 107.) velocitas corporis in initio, seu puncto A, et spatium in quo percurrendo amittit corpus dimidium velocitatis, sit AP; eritque (410) PI velocitas in fine spatii, sive in puncto P, et ideo ratio AC ad PI erit (ex hyp.) eadem cum ratione 1 ad ½, sive 2 ad 1. Atqui AP expressa numeris tabularum, est (399) logarithmus rationis AC ad PI; igitur etiam erit logarithmus rationis 2 ad 1. Sed si ex logarithmo numeri 2, qui est 0.3010300, sub-

subtrahas logarithmum numeri 1, qui est 0.0000000, residuum 0.3010300 erit logarithmus rationis 2 ad 1; ergo etiam AP expressa numeris tabularum, erit 0.3010300. Unde dimidium subtangentis AT, hoc est (419) AH expressa numeris tabularum, erit ad AP iisdem numeris designatam, ut 0.2171472 ad 0.3010300, sive ut 10000000 ad 13862946, aut quamproxime ut 10000 ad 13863. Sed dimidium subtangentis AT, hoc est AH expressa numeris tabularum, est ad AP iisdem numeris designatam, ut AH (altitudo ex qua corpus in vacuo cadendo, acquirit velocitatem, quae dat resistentiam ponderi eius aequalem) ad spatium AP; igitur 10000 erit ad 13863, ut altitudo AH ad spatium quaesitum AP. Sed altitudo AH (420) per notas mensuras datur; ergo etiam invenietur quaesitum spatium AP.

PROPOSITIO LXXIII.

423. *Si cylindrus rectus iuxta sui axeos directionem moveatur in fluido, cuius partes nullam habent tenacitatem; dimidia altitudo cylindri erit ad spatium, in quo percurrendo amittit dimidium velocitatis, in ratione composita ex ratione gravitatis specificae fluidi ad cylindri specificam gravitatem, et ex ratione numeri 10000 ad numerum 13863.*

Dimidia altitudo cylindri est (366) ad altitudinem AH (ex qua corpus in vacuo cadendo, acquirit velocitatem, quae dat resistentiam ponderi eius aequalem), ut gravitas specifica fluidi ad cylindri specificam gravitatem. Rursus eadem altitudo AH est (422) ad spatium AP, in quo percurrendo corpus amittit dimidium velocitatis, ut 10000 ad 13863; ergo ex aequo, et ex compositione rationis, dimidia altitudo cylindri erit ad spatium AP, in quo percurrendo amittit corpus dimidium velocitatis, in ratione composita ex ratione gravitatis specificae fluidi ad specificam gravitatem cylindri, et ex ratione numeri 10000 ad numerum 13863.

COROLLARIUM.

424. Unde si fluidum, et cylindrus eandem habeant specificam gravitatem; dimidia altitudo cylindri erit ad spatium, in quo percurrendo hic amittit dimidium eius velocitatis, ut 10000 ad 13863.

SCHOLION.

425. Simili modo etiam demonstrabitur, quod si sphaera in fluido mota, eandem cum hoc habeat specificam gravitatem; duae tertiae partes diametri sphaerae erunt ad spatium in quo percurrendo amittit sphaera dimidium velocitatis, ut 10000 ad 13863.

CA-

CAPUT IX.

De velocitatis decrementis, quae corpus incedens in stagnante fluido subit a prima, et secunda causa, dum hae simul in illud agunt.

LEMMA I.

426. *Si in axe AB (Fig. 104) parabolae AEC sumptis infinite parvis, et inaequalibus rectis Bm, Dd, agantur ordinatae infinite propinquae BC et mn, DE et de, ducanturque nH, eG parallelae ad axem AB; differentiae HC, GE vicinarum ordinatarum BC et mn, DE et de erunt in ratione composita ex directa ratione Bm ad Dd, et ex ratione inversa BC ad DE.*

Sumpta Bb ipsi Dd aequali, ordinetur bc, atque ex puncto c ducatur cI parallela ad axem AB. Quia ordinatae BC, mn infinite propinquae sunt; utique arcus nC, qui intercipitur ab iisdem, pro recta linea sumi potest, atque ita etiam triangulum HnC pro rectilineo est habendum. Est autem hoc triangulum HnC simile alteri IcC; ergo HC erit ad IC, ut Hn ad Ic. Sed (392) est IC ad GE, ut DE ad BC; ergo ex aequo, et ex compositione rationis, erit HC ad GE in ratione composita ex ratione Hn ad Ic, et ex ratione DE ad BC. Sed ratio Hn ad Ic est eadem cum ratione directa Bm ad Bb, vel Bm ad Dd, et ratio DE ad BC est eadem cum ratione inversa ordinatarum BC, DE; ergo etiam HC erit ad GE in ratione composita ex ratione directa Bm ad Dd, et ex ratione inversa BC ad DE.

LEMMA II.

427. *Si duae quaelibet fractiones* $\frac{A}{B}$, *et* $\frac{C}{D}$ *mutuo comparentur; prima* $\frac{A}{B}$ *erit ad secundam* $\frac{C}{D}$ *in ratione composita ex directa ratione A ad C, et ex inversa B ad D.*

In omni divisione unitas est ad quotum, ut divisor ad dividendum. Sed si dividas A per B, fractio $\frac{A}{B}$ erit quotus ex divisione ortus; ergo 1 erit ad $\frac{A}{B}$, ut B ad A, et invertendo, $\frac{A}{B}$ erit ad 1, ut A ad B.

A ad B. Sed eandem ob causam est quoque 1 ad $\frac{C}{D}$, ut D ad C; ergo ex aequo, et ex compositione rationis, erit $\frac{A}{B}$ ad $\frac{C}{D}$ in ratione composita ex rationibus A ad B, et D ad C, sive ut factum ex A in D ad factum ex B in C. Sed factum ex A in D est quoque ad factum ex B in C in ratione composita ex rationibus A ad C, et D ad B; ergo etiam $\frac{A}{B}$ erit ad $\frac{C}{D}$ in ratione composita ex rationibus A ad C, et D ad B, sive ex directa ratione A ad C, et ex inversa B ad D.

Corollarium.

428. Hinc si fractionum denominatores B et D aequentur; $\frac{A}{B}$ erit ad $\frac{C}{D}$ in directa ratione A ad C. Et si ex adverso fractionum numeratores A et C sint aequales; $\frac{A}{B}$ erit ad $\frac{C}{D}$ in inversa ratione B ad D.

L E M M A III.

429. *Si vertice B (Fig. 109.), et parametro BI describatur circa axem BI parabola BFG, et ordinetur IG; haec erit abscissae BI aequalis.*

In parabola BFG quadratum ordinatae IG aequatur rectangulo ex abscissa BI in parametrum. Atqui parameter (ex hyp.) est BI; ergo quadratum ordinatae IG aequabitur rectangulo ex abscissa BI in BI, hoc est quadrato BI, consequenter ordinata IG aequalis erit abscissae BI.

L E M M A IV.

430. *In asymptoto AY logarithmicae ISP (Fig. 109.) acceptis aequalibus, et infinite parvis segmentis Aa, Cc, agantur ordinatae AI, ak, CD, cd. Secta deinde AI utcunque in B, vertice B, et parametro BI describatur circa axem BI parabola BFG. Postremo ductis kK, DE, de asymptoto parallelis, parabolae ordinentur IG, KH, EF, eL, et agantur Hg, Lf parallelae ad axem BI. Dico, quod si Hg resolvatur in duas partes, quae sint ut AB ad BI, etiam Ff resolvi poterit in duas ita, ut partes primae utriusque sint in inversa ratione ordinatae GI ad ordinatam FE, et secundae in directa ratione ordinatae GI ad ordinatam FE.*

Quo-

Quoniam rectae Gg, Ff sunt differentiae infinite parvae vicinarum ordinatarum GI et HK, FE et Le; ipsae erunt (426) in ratione composita ex ratione directa IK ad Ee, et inversa GI ad FE. Sed (401) IK est ad Ee, vel Dz, ut AI ad CD, vel AE; ergo etiam Gg erit ad Ff in ratione composita ex ratione directa AI ad AE, et inversa GI ad FE, sive (427) ut $\frac{AI}{GI}$ ad $\frac{AE}{FE}$, aut ut summa $\frac{AB}{GI}$ et $\frac{BI}{GI}$ ad summam $\frac{AB}{FE}$ et $\frac{BE}{FE}$. Sed cum BE sit ad FE, ut eadem FE ad parametrum BI, erit $\frac{BE}{FE}$ aequalis $\frac{FE}{BI}$, vel (429) $\frac{FE}{GI}$; ergo Gg quoque erit ad Ff, ut summa $\frac{AB}{GI}$ et $\frac{BI}{GI}$ ad summam $\frac{AB}{FE}$ et $\frac{FE}{GI}$. Itaque erit Gg resoluta in duas partes, quarum prima est $\frac{AB}{GI}$, et secunda $\frac{BI}{GI}$. Similiter erit Ff resoluta in duas partes, quarum prima est $\frac{AB}{FE}$, et secunda $\frac{FE}{GI}$. Sed pars prima $\frac{AB}{GI}$ est (428) ad primam $\frac{AB}{FE}$ in ratione inversa GI ad FE, et pars secunda $\frac{BI}{GI}$ est (428) ad secundam $\frac{FE}{GI}$ in ratione directa BI ad FE; igitur partes primae rectarum Gg, Ff erunt in inversa ratione ordinatae GI ad ordinatam FE, et secundae in ratione directa ordinatae GI ad ordinatam FE.

Corollarium I.

431. Hinc pars prima rectae Gg ad eius partem secundam erit, ut AB ad BI. Nam $\frac{AB}{GI}$ est (428) ad $\frac{BI}{GI}$, ut AB ad BI.

Corollarium II.

432. Item pars prima rectae Ff erit ad eius partem secundam; ut AB ad BE. Nam (430) $\frac{BE}{FE}$ aequatur $\frac{FE}{GI}$; unde pars prima $\frac{AB}{FE}$ rectae Ff erit ad secundam $\frac{FE}{GI}$, ut $\frac{AB}{FE}$ ad $\frac{BE}{FE}$, sive (428) ut AB ad BE.

P R O P O S I T I O LXXIV.

433. *Portio AQ asymptoti logarithmicae ISP (Fig. 109.) sit spatium absolutum a corpore, quod in fluido promovetur. Sit pariter resistentia, quam subit corpus a prima causa, ad resistentiam quam patitur a secunda in puncto A, ut AB ad BI. Denique velocitates, quas habet corpus in singulis spatii AQ punctis, velut in A, et C, sint*

ſint ut reſpondentes ordinatae GI, FE *parabolae* BFG. *Dico, reſiſtentiam ex prima cauſa in puncto* C *eſſe ad reſiſtentiam ex ſecunda in eodem puncto, ut* AB *ad* BE.

Reſiſtentia ex ſecunda cauſa in puncto A eſt (370) ad reſiſtentiam ex ſecunda in puncto C, ut quadratum velocitatis in A ad quadratum velocitatis in C, ſive (ex hyp.) ut quadratum ordinatae GI ad quadratum ordinatae FE, aut ut abſciſſa BI ad abſciſſam BE. Sed reſiſtentia ex ſecunda cauſa in puncto A eſt (ex hyp.) expoſita per BI; ergo et reſiſtentia ex ſecunda cauſa in puncto C erit expoſita per BE. Rurſus reſiſtentia ex prima cauſa in puncto A aequatur (376) reſiſtentiae ex eadem cauſa in puncto C. Sed reſiſtentia ex prima cauſa in puncto A eſt (ex hyp.) expoſita per AB; ergo et reſiſtentia ex prima cauſa in puncto C, exponetur hac recta AB. Itaque reſiſtentia ex prima cauſa in puncto C erit ad reſiſtentiam ex ſecunda cauſa in puncto C, ut AB ad BE.

PROPOSITIO LXXV.

434. *Iiſdem poſitis, ſi corpus temporibus infinite parvis, et inaequalibus abſolvat aequalia ſpatiola* A*a*, C*c*; *decrementum velocitatis ex prima cauſa, dum ſpatium* A*a* *abſolvitur, erit ad decrementum velocitatis interea genitum ex ſecunda, ut* AB *ad* BI. *Similiter decrementum velocitatis ex prima cauſa, dum ſpatium* C*c* *percurritur, erit ad decrementum velocitatis interea genitum ex ſecunda cauſa, ut* AB *ad* BE.

Quoniam reſiſtentia, quam in puncto A ſubit corpus ex prima, et ſecunda cauſa, eſt (376. 361.) per totum ſpatium A*a* conſtans, aut uniformis; utique decrementum celeritatis ex prima cauſa, dum ſpatium A*a* abſolvitur, erit ad decrementum velocitatis interea ortum ex ſecunda cauſa, ut reſiſtentia ex prima cauſa ad reſiſtentiam ex ſecunda in puncto A. Sed reſiſtentia ex prima cauſa eſt (ex hyp.) ad reſiſtentiam ex ſecunda cauſa in puncto A, ut AB ad BI; ergo et decrementum velocitatis, quod ſubit corpus ex prima cauſa dum ſpatium A*a* abſolvit, erit ad decrementum velocitatis quod interea ſubit a ſecunda cauſa, ut AB ad BI. Simili modo oſtendam, decrementum velocitatis, quod ſubit corpus ex prima cauſa, dum ſpatium C*c* abſolvit, eſſe ad decrementum velocitatis, quod interea patitur ex ſecunda cauſa, ut AB ad BE.

COROLLARIUM I.

435. Quia $\frac{AB}{GI}$ eſt (428) ad $\frac{BI}{GI}$, ut AB ad BI; ſequitur decrementum velocitatis, quod ſubit corpus ex prima cauſa dum ſpatium A*a* abſolvit, eſſe (434) ad decrementum velocitatis, quod interim ſubit ex ſecunda cauſa, ut $\frac{AB}{GI}$ ad $\frac{BI}{GI}$.

COROLLARIUM II.

436. Similiter cum $\frac{AB}{FE}$ ſit (432) ad $\frac{FE}{GI}$, ut AB ad BE; patet, decrementum velocitatis, quod ſubit corpus ex prima cauſa dum ſpatium C*c* abſolvit, eſſe ad decrementum velocitatis, quod interea ſubit ex ſecunda cauſa, ut $\frac{AB}{FE}$ ad $\frac{FE}{GI}$.

PROPOSITIO LXXVI.

437. *Iiſdem poſitis, decrementa celeritatis, quae ſubit corpus a prima cauſa, dum abſolvit ſpatiola aequalia* A*a*, C*c*, *erunt in ratione inverſa ordinatae* GI *ad ordinatam* FE *parabolae* BFG; *decrementa vero celeritatis, quae interea ſubit a ſecunda cauſa, erunt in directa ratione ordinatae* GI *ad ordinatam* FE.

Quia corporis velocitates in A et C ſunt (ex hyp.) ut reſpondentes ordinatae GI, FE parabolae BFG; utique ipſae percurſis ſpatiis A*a*, C*c*, erunt (ex hyp.) ut ordinatae HK, L*e*, quae punctis *a* et *c* reſpondent, et ita G*g*, F*f* exprimunt decrementa velocitatis, quae ſubit corpus a cauſis ambabus ſimul, dum abſolvit ſpatiola A*a*, C*c*. Sed G*g* eſt (430) ad F*f*, ut ſumma $\frac{AB}{GI}$ et $\frac{BI}{GI}$ ad ſummam $\frac{AB}{FE}$ et $\frac{FE}{GI}$; igitur etiam ſumma $\frac{AB}{GI}$ et $\frac{BI}{GI}$ referet decrementum velocitatis ex cauſis ambabus ſimul, dum ſpatium A*a* abſolvitur, ſumma vero $\frac{AB}{FE}$ et $\frac{FE}{GI}$ exprimet decrementum velocitatis, dum percurritur ſpatium C*c*. Sed $\frac{AB}{GI}$ eſt (435) ad $\frac{BI}{GI}$, ut decrementum velocitatis ortum ex prima cauſa, dum percurritur ſpatium A*a*, ad decrementum velocitatis interea genitum a ſecunda: ſimiliterque $\frac{AB}{FE}$ eſt (436) ad $\frac{FE}{GI}$, ut decrementum velocitatis ortum ex prima cauſa, dum percurritur ſpatium C*c*, ad decrementum velocitatis interea genitum a ſecunda; ergo decrementum velocitatis ortum ex prima cauſa, dum abſolvitur ſpatium A*a*, erit ad-

ad decrementum velocitatis ortum ex prima causa, dum percurritur spatium Cc, ut $\frac{AB}{GI}$ ad $\frac{AB}{FE}$, vel (428) ut FE ad GI. Similiter decrementum velocitatis ortum ex secunda causa, dum absolvitur spatium Aa, erit ad decrementum velocitatis genitum a secunda causa, dum percurritur spatium Cc, ut $\frac{BI}{GI}$ ad $\frac{FE}{GI}$, vel (428) ut BI ad FE, aut (429) ut GI ad FE.

PROPOSITIO LXXVII.

438. *Corpus progrediatur in asymptoto* AY *logarithmicae* ISP *(Fig. 109), et resistentia ex prima causa sit ad resistentiam ex secunda in puncto* A, *ut* AB *ad* BI. *Vertice dein* B, *parametro autem* BI *fiat circa axem* BI *parabola* BFG, *cui ordinetur* GI. *Ducta postremo ex quovis asymptoti puncto* C *ordinata* CD *logarithmicae* ISP, *agatur* DE, *eius asymptoto parallela, quae occurrat axi* BI *in* E, *parabolae autem in puncto* F. *Dico, velocitatem corporis in puncto* A *esse ad velocitatem eiusdem in puncto* C, *ut parabolae ordinata* GI *respondens puncto* A *ad eius ordinatam* FE, *quae respondet alteri puncto* C.

Quoniam habet corpus velocitates diversas in A et C; idem tempusculis inaequalibus absolvet aequalia spatia Aa, Cc. Hoc posito, si velocitas corporis in puncto A esset ad velocitatem eiusdem in puncto C, ut parabolae ordinata GI ad aliam eius ordinatam FE; decrementa velocitatis, quae subiret corpus ex prima causa in percurrendis spatiolis Aa, Cc, essent inverse (437) ut ordinatae GI, FE, vel (ex hyp.) inverse ut velocitates in A et C; decrementa autem velocitatis, quae interea subiret ex secunda causa, essent (437) directe ut ordinatae GI, FE, vel (ex hyp.) directe ut velocitates in A et C. Sed quando idem corpus cum diversis celeritatibus in eodem fluido motum, inaequalibus temporibus spatiola aequalia absolvit, decrementa velocitatis, quae ex prima causa tempusculis hisce subit, reipsa sunt inverse (383) ut eius velocitates, et decrementa velocitatis, quae subit ex secunda causa, sunt directe (388) ut eius velocitates; ergo velocitas eius in puncto A erit ad velocitatem in puncto C, ut parabolae ordinata GI ad aliam eius ordinatam FE.

COROLLARIUM.

439. Et quia nulla est parabolae ordinata, quae respondeat spatii puncto Q; ideo spatium illud, in quo percurrendo amittit corpus totam velocitatem, erit AQ, vel BP.

PRO-

PROPOSITIO LXXVIII.

440. *Iisdem positis, si ducta tangente* IO *logarithmicae* ISP, *et sumpta* AM *dupla ipsius* AO, *iungatur* IM, *quae ordinatam* ak *secet in puncto* m; *decrementum velocitatis ortum ex causis ambabus simul, dum absolvitur spatium* Aa, *exponi poterit recta* mi.

Ducta GHZ, quae parabolam tanget in puncto G, et axi BI occurret in puncto Z, producatur HK, donec in *o* conveniat cum IM. Quoniam triangulum ZIG est simile alteri HgG, subtangens ZI erit ad ordinatam GI, ut Hg ad Gg. Sed GI est (ex hyp.) ipsi BI aequalis; ergo et subtangens ZI erit ad abscissam BI, ut Hg ad Gg. Est autem subtangens ZI dupla abscissae BI; ergo etiam Hg dupla erit ipsius Gg, hoc est ki dupla erit rectae Gg. Rursus cum ex vertice I trianguli AIM ducta sit recta IO secans in *k* et O parallelas Ko, AM; erit Kk ad ko, ut AO ad OM. Sunt autem (ex hyp.) aequales AO, OM; ergo et aequabuntur Kk, ko, sive Ii, ko. Sed ob triangulum kmo simile alteri imI, est km ad mi, ut ko ad Ii; ergo cum sint aequales ko, Ii, etiam aequabuntur km, mi, ideoque ki erit dupla ipsius mi. Vidimus autem ki duplam esse etiam Gg; igitur aequabuntur mi, Gg. Sed Gg exponit decrementum velocitatis ortum ex causis ambabus simul, dum percurritur spatium Aa; igitur idem quoque repraesentari poterit recta mi.

PROPOSITIO LXXIX.

441. *Iisdem positis, si ducta* MT *ad* AI *parallela, quae conveniat cum recta* BP *in* N, *iungatur* IN, *conveniens cum logarithmicae ordinata* ak *in* n; *decrementum velocitatis ortum ex prima causa, dum spatium* Aa *percurritur, erit ad decrementum velocitatis interea genitum a secunda, ut* mn *ad* ni.

Cum resistentia ex prima causa sit (ex hyp.) ad resistentiam ex secunda in puncto A, ut AB ad BI; etiam decrementum velocitatis ortum ex prima causa, dum spatium Aa percurritur, erit (434) ad decrementum velocitatis interea genitum a secunda, ut AB ad BI, aut ut MN ad NT. Sed cum ex vertice I trianguli MIT ducta sit IN secans in punctis *n* et N parallelas mi, NT, est mn ad ni, ut MN ad NT; ergo etiam decrementum velocitatis ortum ex prima causa, dum spatium Aa percurritur, erit ad decrementum velocitatis interea genitum *a* secunda, ut mn ad ni.

Co-

COROLLARIUM.

442. Igitur cum *mi* referat (440) decrementum velocitatis ortum ex caussis ambabus simul, dum spatium A*a* percurritur; sequitur rectam *mn* exponere decrementum velocitatis ortum a prima caussa, et *ni* decrementum velocitatis interea genitum a secunda.

PROPOSITIO LXXX.

443. *Dato spatio* AQ, *in quo percurrendo corpus amittit totam velocitatem, dataque praeterea tum eius velocitate in initio, seu puncto* A, *tum etiam ratione resistentiarum, quas subit a prima, et secunda caussa eodem in puncto* A; *invenire velocitatem, quam superstitem adhuc in* Q *haberet, si a sola secunda caussa retardaretur.*

Recta BI, vel GI designet velocitatem in initio, seu puncto A. Sit quoque AB ad BI, ut resistentia ex prima caussa ad resistentiam ex secunda in puncto A; eritque (442) *ni* decrementum velocitatis, quod subit corpus ex secunda caussa, dum spatium A*a* absolvit. Tandem descripta logarithmica IR, cuius asymptotus sit BN, et quae transeat per I et *n*, producatur QP in R, ut ita prodeat eius ordinata PR. His positis, dico hanc ordinatam repraesentare quaesitam velocitatem, quae convenit puncto Q. Si enim corpus, quod in A (ex hyp.) habet velocitatem expositam recta BI, vel *bi*, a sola secunda caussa retardaretur; idem dum absolveret spatium A*a*, amitteret (442) velocitatem *ni*, et ideo in puncto *a* haberet velocitatem expositam recta *bn*. Cum ergo velocitates in A et *a* essent expositae ab ordinatis BI, *bn* logarithmicae I*n*R, etiam velocitas conveniens puncto Q, exponeretur (410) ab ordinata respondente PR.

PROPOSITIO LXXXI.

444. *Data velocitate in initio, seu puncto* A (*Fig.* 109.), *qua si corpus per fluidum moveatur, ex secunda caussa patitur resistentiam ponderi eius aequalem, datoque praeterea spatio* AQ, *in quo percurrendo eam amittit dum retardatur a caussis ambabus simul; invenire rationem, quae intercedit inter velocitatem corporis in initio, seu puncto* A, *et velocitatem superstitem, quam idem corpus haberet in puncto* Q, *si a sola secunda caussa retardaretur.*

Ordinata BI logarithmicae I*n*R exponat velocitatem, quam habet corpus in initio, seu puncto A; ordinata autem alia PR exprimat velocitatem, quam superstitem haberet in puncto Q, si ex sola secunda caussa retardaretur, et quaeratur proportio inter BI, et PR. Per notas mensuras quaere (366) altitudinem AO, ex qua corpus in vacuo cadendo, acquirit velocitatem BI. Quoniam haec altitudo AO est quoque (418) dimidia subtangentis logarithmicae I*n*R; utique ipsa duobus numeris exponetur (421), quorum alter est absolutus, alter autem depromptus ex numeris tabularum, unde altitudo AO erit ad spatium AQ, ut eadem altitudo AO tabularum numeris designata, ad spatium AQ itidem expressum numeris tabularum. Sed primi tres termini (409) dati sunt; igitur dabitur etiam quartus, seu recta AQ, vel BP expressa numeris tabularum. Atqui BP tabularum numeris designata, est (399) logarithmus rationis BI ad PR; igitur etiam dabitur logarithmus huius rationis, et ideo illi numeri absoluti, quorum logarithmorum differentia est aequalis invento logarithmo huius rationis, inter se erunt (400) ut BI ad PR, sive ut velocitas corporis in initio, seu puncto A ad velocitatem superstitem, quam haberet in puncto Q, si a sola secunda caussa retardaretur.

LEMMA.

445. *Subtangens logarithmicae* I*n*R (*Fig.* 109.) *est duplo maior subtangente* AO *alterius logarithmicae* ISP.

Quoniam ordinatae BI, *bn* logarithmicae I*n*R infinite proximae supponuntur; utique eius arcus I*n* erit infinite parvus, ac proinde censeri poterit velut recta ducta ex I ad *n*. Sed recta IN transit (441) per I et *n*, ideoque coincidit cum recta I*n*; ergo etiam coincidet cum infinite parvo arcu I*n* logarithmicae I*n*R, ac proinde haec tangetur a recta IN in I, habebitque pro subtangente rectam BN. Est autem BN ipsi AM aequalis; ergo subtangens logarithmicae I*n*R aequabitur rectae AM. Sed est AM (440) dupla ipsius AO; ergo et subtangens logarithmicae I*n*R duplo maior erit subtangente AO alterius logarithmicae ISP.

PROPOSITIO LXXXII.

446. *Si* BI *sit velocitas corporis in initio, seu puncto* A, *et* PR *velocitas, quam si corpus retardaretur a sola secunda caussa, superstitem haberet in puncto* Q, *in quo totam amittit velocitatem dum retardatur a caussis ambabus simul; differentia quadratorum* BI *et* PR *erit ad quadratum* PR, *ut* BI *ad* AB.

Recta AQ ipsi BP aequalis, bisecetur in puncto V, et agatur VS ad rectam AQ normalis. Subtangens BN logarithmicae I*n*R est

est (445) ad subtangentem AO logarithmicae ISP, ut 2 ad 1, sive ut AQ ad AV, vel ut BP ad AV. Sed BP est (399) ad AV, ut logarithmus rationis BI ad PR ad logarithmum rationis AI ad VS; ergo et subtangens BN logarithmicae I*n*R erit ad subtangentem AO logarithmicae ISP, ut logarithmus rationis BI ad PR ad logarithmum rationis AI ad VS. Atqui in variis logarithmicis sunt (406) subtangentes, ut logarithmi aequalium rationum; igitur ratio BI ad PR aequabitur rationi AI ad VS, hoc est BI erit ad PR, ut AI ad VS, et quadratum BI erit ad quadratum PR, ut quadratum AI ad quadratum VS. Sed ob aequalia segmenta axis AV, VQ, est (396) AI ad VS, ut VS ad QP, et quadratum AI ad quadratum VS, ut AI ad QP, vel ut AI ad AB; ergo et quadratum BI erit ad quadratum PR, ut AI ad AB, et dividendo, differentia quadratorum BI et PR erit ad quadratum PR, ut BI ad AB.

Corollarium.

447. Quia resistentia ex secunda causa est (433) ad resistentiam ex prima causa in puncto A, ut BI ad AB; etiam differentia quadratorum BI, PR erit (446) ad quadratum PR, ut resistentia ex secunda causa ad resistentiam ex prima in puncto A.

PROPOSITIO LXXXIII.

448. *Data velocitate in initio, seu puncto* A, *qua si corpus per fluidum moveatur, ex secunda causa patitur resistentiam ponderi eius aequalem, datoque praeterea spatio* AQ, *in quo percurrendo illam amittit dum retardatur a causis ambabus simul; invenire rationem, quae intercedit inter resistentiam ex secunda causa ad resistentiam ex prima in puncto* A.

Sit BI velocitas, quam habet corpus in initio, seu puncto A. Tum ex hac data, et dato etiam spatio AQ, quaeratur (444) ratio velocitatis BI ad velocitatem PR, quam superstitem haberet in puncto Q, si a sola secunda causa retardaretur. Cum ergo nota, seu data sit ratio BI ad PR, dabitur etiam ratio quadrati BI ad quadratum PR, atque adeo etiam dabitur ratio differentiae quadratorum BI, PR ad quadratum PR. Atqui haec ratio est (447) aequalis rationi, quam habet resistentia ex secunda causa ad resistentiam ex prima in puncto A; igitur etiam data erit ratio resistentiae ex secunda causa ad resistentiam ex prima in puncto A.

PROPOSITIO LXXXIV.

449. *Data velocitate* BI *in initio, seu puncto* A, *qua si corpus per fluidum moveatur, patitur ex secunda causa resistentiam ponderi eius aequalem, et dato praeterea spatio* AQ, *in quo percurrendo illam amittit dum retardatur a causis ambabus simul; invenire velocitatem, quam habet in quovis alio puncto* C *eiusdem spatii* AQ.

Ex datis velocitate BI, et spatio AQ, quaere (444) in logarithmorum tabulis illum numerum, qui referat logarithmum rationis BI ad PR, quique etiam exprimet (408) logarithmum rationis AI ad VS, priori (446) aequalis, seu (399) rectam AV, si ponas ISP esse logarithmicam tabularum. Tum duplica hanc rectam AV tabularibus numeris indicatam, ut in eisdem numeris tabularum habeas etiam AQ, quae duplo maior est (446) quam AV. Fiat deinde, ut spatium AQ in quo percurrendo amittit corpus totam velocitatem, ad spatium datum AC, ita AQ expressa numeris tabularum ad quartum terminum proportionalem, qui erit AC tabularibus numeris indicata, seu (399) logarithmus rationis AI ad CD. Ponatur tandem abscissarum origo in puncto Y, et sumpto ad libitum numero, qui designet AI, ex eius logarithmo YA auferatur inventus logarithmus rationis AI ad CD, et habebitur (399) logarithmus YC numeri, qui designat CD, aut AE. Rursus a logarithmo YA numeri, qui designat AI, subtrahatur AQ expressa numeris tabularum, seu logarithmus rationis AI ad QP, et prodibit logarithmus YQ numeri, qui designat QP, aut AB. Dantur ergo tres numeri, qui sunt inter se, ut AI, AE, AB; propterea si ex primis duobus tertius auferatur, supererunt duo numeri, qui inter se erunt, ut BI ad BE, vel ut quadratum ordinatae GI parabolae BFG ad quadratum ordinatae FE, aut (438) ut quadratum velocitatis in puncto A ad quadratum velocitatis in puncto C. Sed cum data sit velocitas corporis in puncto A, eius quadratum pariter datum erit; ergo et per regulam auream invenietur quadratum velocitatis in puncto C. Sed dato quadrato, datur similiter eius radix; ergo etiam invenietur quaesita velocitas, quam habet corpus in puncto C.

CAPUT X.

De aquae iactibus, aut venis, quae effluentes per foramen, aut lumen tubi, in altum prosiliunt, aut horizontaliter promoventur.

DEFINITIO VII.

450. Fluidum, quod prosilit e vase per lumen tubi, aut foramen insculptum in vasis latere, *iactus* dicitur.

PROPOSITIO LXXXV.

451. *Aqua, quae sub constanti altitudine* AH (*Fig.* 111.) *continetur in vase* EAIM, *ex hoc prosiliat per foramen, aut lumen* A *valde parvum relate ad amplitudinem vasis, et quidem iuxta directionem horizontalem* AG. *Deinde* EA *indefinite producta ad* F, *vertice* A, *et parametro quae sit quadrupla altitudinis aquae* AH, *fiat circa axem* AF *parabola* APL. *Dico, iactum aquae fluentis per foramen, aut lumen* A, *hanc motu suo parabolam descripturum.*

Sumpta abscissa AO, quae sit aequalis altitudini aquae AH, et ducta ordinata OP, compleatur rectangulum AOPQ. Quia parameter parabolae APL est (ex constr.) quadrupla rectae AH; quadratum ordinatae OP aequabitur rectangulo ex abscissa AO in quadruplum rectae AH, sive quadruplum erit rectanguli OAH, sive quadrati AO, et ideo ordinata OP, vel AQ erit dupla abscissae AO, vel AH. Iam si aqua erumpens per foramen, aut lumen A, non esset gravis, eadem motu aequabili progrederetur in recta AG cum illa velocitate, quam acquirere (227) potest grave in vacuo cadendo ex H in A, et tempore huius lapsus absolveret spatium duplum altitudinis aquae AH. Est autem AQ (ex demonstr.) dupla ipsius AH; ergo aqua motu aequabili progrederetur ex A ad Q tempore illo, quo grave in vacuo cadendo, motu uniformiter accelerato descenderet ex HA. Sed aqua erumpens per foramen, aut lumen A, utpote a proprio pondere animata, motu uniformiter accelerato descendit ex A in O tempore illo, quo grave in vacuo cadendo descenderet ex HA; ergo aqua tempore illo, quo aequabili motu abiret ex A in Q, motu uniformiter accelerato descendet ex A in O, sive ex Q in P, ideoque tempore hoc elapso, reperietur in puncto P. Rursus si sumpta quacunque alia abscissa AB, et ducta ordinata respondenti BS, compleatur rectangulum ABSR; aqua

aqua tempore illo, quo aequabili motu lata, ferretur ex A in R, motu uniformiter accelerato descenderet ex R in S. Nam tempus quo aqua aequabiliter ferretur ex A ad Q, est ad illud quo promoveretur ex A ad R, ut AQ ad AR, aut ut OP ad BS, et quadratum temporis quo aqua aequabiliter ferretur ex A ad Q, erit ad quadratum temporis quo promoveretur ex A ad R, ut quadratum OP ad quadratum BS, sive ut AO ad AB, aut ut QP ad RS, vel ut quadratum temporis, quo eadem aqua motu uniformiter accelerato descenderet ex altitudine QP, ad quadratum temporis quo caderet ex altitudine RS. Sed quando quatuor quadrata sunt proportionalia, etiam illorum radices sunt proportionales; ergo etiam tempus quo aqua aequabili motu ferretur ex A in Q, erit ad illud quo promoveretur ex A in R, ut tempus quo motu uniformiter accelerato caderet ex Q in P, ad tempus quo descenderet ex R in S. Sed tempus quo aqua aequabili motu ferretur ex A in Q, aequatur (ex demonstr.) tempori quo motu uniformiter accelerato descenderet ex Q in P; ergo etiam tempus quo aequabiliter promoveretur ex A in R, aequabitur tempori quo motu uniformiter accelerato caderet ex R in S, et ideo tempore hoc elapso, reperietur aqua in puncto S. Simili modo ostendam, eundem iactum etiam transire per reliqua alia puncta parabolae APL; igitur idem iactus motu suo parabolam hanc describet.

PROPOSITIO LXXXVI.

452. *Aqua, quae sub altitudine constanti* BC (*Fig.* 112.) *continetur in vase* BCDF, *ex illo erumpat per lumen* C *secundum directionem* CN *inclinatam ad horizontem. Tum super diametrum* BC *descripto semicirculo* CRB, *et ducta* RE *ad* BC *normali, eadem producatur usque ad* H, *donec nimirum fiat* RH *ipsi* RE *aequalis. Dico, quod aquae iactus transibit per punctum* H.

Ducta horizontali CL, et ad eam normali HS, quae producta occurrat directioni iactus CN in G, circa hanc veluti axem describatur per C parabola CHP. Deinde verticalibus rectis HS, BC indefinite productis in O et K, agatur HI ad CN parallela. Cum ob parallelas GH, EC, triangulum GHR sit simile REC; utique ut HR ad RE, ita erit GR ad RC, et GH ad EC. Sunt autem (ex constr.) aequales HR, RE; ergo et aequabuntur tam rectae GR, RC, quam rectae GH, EC. Est vero EC aequalis ipsi HS; igitur aequabuntur etiam GH, HS, et ideo recta CN parabolam CHP tanget in puncto C, et huic parallela HI erit ordinata eiusdem parabolae relatae ad diametrum CK. Rursus ob parallelas RC, HI, est EC ad CI, ut ER ad RH. Sunt au-

 autem aequales E R, R H; ergo et aequabuntur E C, C I. Iam cum aqua motu aequabili progrediatur in recta C N cum illa velocitate, quam (227) acquirere potest grave in vacuo cadendo ex B in C, spatia quae in recta C N absolvit, erunt ut tempora, quibus illa percurrit, et ideo spatium quod aqua absolvit in recta C N tempore quo grave caderet ex B in C, erit ad spatium quod in eadem recta percurrit tempore, quo descenderet ex E in C, ut tempus lapsus per B C ad tempus lapsus per E C. Sed tempus lapsus per B C est (a) ad tempus lapsus per E C, ut diameter B C ad chordam C R, vel ut duplum diametri B C ad duplum chordae C R; ergo et spatium quod aqua in recta C N absolvit tempore, quo grave caderet ex B in C, erit ad spatium quod percurrit tempore quo idem grave descenderet ex E in C, ut duplum diametri B C ad duplum chordae C R. Sed spatium quod aqua absolvit in recta C N tempore, quo grave caderet ex B in C, est (b) duplum diametri B C; ergo et spatium quod percurrit tempore, quo caderet ex E in C, erit duplum chordae C R, seu erit C G. Sed quia aequantur E C, C I, aqua a proprio pondere animata, cadit ex C in I tempore illo, quo grave descenderet ex E in C; igitur aqua spatium C G absolvit tempore illo, quo cadit ex C in I, sive ex G in H, et ideo post hoc tempus reperietur in puncto H. Itaque iactus aquae transibit per punctum H.

Corollarium I.

453. Quoniam recta H E ducta ex vertice H parabolae C H P, ita diametro eius C K occurrit, ut sit C E abscissae C I aequalis; ipsa parabolam etiam tanget in puncto H.

Corollarium II.

454. Hinc parameter parabolae C H P relatae ad axem H O, erit quadrupla rectae B E. Quippe cum sit H E dupla R E; quadratum H E, vel ordinatae S C erit quadruplum quadrati R E, aut rectanguli C E B, sive rectanguli ex abscissa H S in E B. Sed quadratum ordinatae S C est etiam aequale rectangulo ex abscissa H S in parametrum parabolae ad axem H O relatae; ergo et rectangulum ex abscissa H S in hanc parametrum erit quadruplum rectanguli ex eadem abscissa H S in E B, ideoque parameter parabolae C H P ad axem A O relatae, erit quadrupla rectae B E.

Corollarium III.

455. At parameter eiusdem parabolae C H P relatae ad diametrum eius C K, erit quadrupla altitudinis aquae C B. Cum enim H I sit ad R C, ut I E ad E C, sitque I E dupla E C; erit quoque H I dupla R C, et quadratum ordinatae H I quadruplum quadrati R C, sive rectanguli E C B, aut rectanguli I C B. Est autem quadratum ordinatae H I aequale etiam rectangulo ex abscissa C I in parametrum parabolae ad diametrum C K relatae; ergo etiam rectangulum ex abscissa C I in hanc parametrum erit quadruplum rectanguli ex eadem abscissa C I in C B, et idcirco parameter parabolae C H P ad diametrum C K relatae, erit quadrupla rectae C B.

(a) Per nostram Mechanicam Coroll. I. Prop. XXV. §. 139. pag. 50.
(b) Per nostram Mechanicam Prop. 19. §. 122. pag. 42.

Propositio LXXXVII.

456. *Iisdem positis quae in theoremate praecedenti, iactus aquae effluentis per lumen* C, *motu suo describet parabolam* C H P.

In diametro C K accipiatur quaevis abscissa C M, et ducta ordinata M L, compleatur parallelogrammum C M L Q. Cum aqua aequabili motu absolvat spatia C G, C Q; utique tempus quo percurrit spatium C G, erit ad tempus quo absolvit spatium C Q, ut spatium C G ad spatium C Q, et quadratum temporis quo absolvit spatium C G, erit ad quadratum temporis quo percurrit spatium C Q, ut quadratum spatii C G ad quadratum spatii C Q, vel ut quadratum ordinatae I H ad quadratum ordinatae M L, vel ut abscissa C I ad abscissam C M, aut ut G H ad Q L. Sed etiam quadratum temporis quo aqua in vacuo cadit ex G in H, est ad quadratum temporis quo descendit ex Q in L, ut G H ad Q L; ergo et quadratum temporis quo aqua absolvit spatium C G, erit ad quadratum temporis quo percurrit spatium C Q, ut quadratum temporis quo cadit ex G in H, ad quadratum temporis quo descendit ex Q in L, et tempus quo aqua fertur ex C in G, erit ad tempus quo promovetur ex C in Q, ut tempus quo cadit ex G in H, ad tempus quo descendit ex Q in L. Sed tempus quo fertur aqua ex C in G, aequatur (452) tempori quo cadit ex G in H; igitur etiam tempus, quo promovetur ex C in Q, aequabitur tempori quo descendit ex Q in L, et ideo post hoc tempus reperietur in puncto L. Pari modo constabit, iactum aquae etiam transire per reliqua alia puncta parabolae C H P; igitur iactus aquae motu suo parabolam hanc describet.

Corollarium I.

457. Unde quo maior erit angulus N C L comprehensus a directione iactus C N, et a recta horizontali C L, eo altior etiam erit iactus parabolicus C H P. Nam quo maior est angulus N C L, eo maior est quoque arcus C R, cuius medietas est mensura anguli N C L. Sed quo maior est arcus C R, eo maior fit quoque E C, vel

vel H S, quae est altitudo iactus parabolici C H P; ergo quo maior erit angulus N C L, eo altior erit iactus parabolicus C H P.

Corollarium II.

458. Et ideo si directio C N iactus aquae effluentis per lumen C sit perpendicularis ad horizontem, sive ad rectam C L, hoc est si rectus sit angulus N C L; ascendet iactus ad altitudinem aequalem illi, quam habet aqua contenta in vase B C D F. Altitudo enim H S iactus C H P semper aequalis est rectae E C. Sed dum rectus fit angulus N C L, arcus C R evadit dimidia circumferentia C R B, et ideo recta E C fit ipsi B C aequalis; ergo et altitudo iactus H S fiet aequalis altitudini B C aquae contentae in vase B C D F.

Scholion I.

459. In praxi tamen iactus perpendicularis ad horizontem, nunquam assurgit ad altitudinem parem illi, quam habet aqua contenta in vase, ex quo erumpit, sed ad minorem ob varias causas. Prima est resistentia frictionis, quam subeunt aquae particulae latera luminis attingentes. Et quamvis aliae particulae prope centrum luminis transeuntes, hanc resistentiam non patiantur; nihilominus tamen cum aliquantulum adhaerescant aliis particulis lateralibus, utique eas abripiendo et celeritatem ipsis communicando, coguntur motum proprium retardare. Secunda causa est gravitas particularum, ex quibus componitur idem iactus. Postquam enim aqua in altum expulsa, ascendit quantum potuit, tunc amissa omni velocitate, paullulum haeret in superiori columnae parte, indeque rursus urgente vi gravitatis deorsum labitur, impeditque quominus aquae particulae assurgentes, ad illam perveniant altitudinem, sub qua manet aqua contenta in vase. Tertia causa est resistentia aeris, quam attollere, et findere debet iactus. Cum enim prosiliens aqua agat in particulas aeris, in quas incurrit, vicissim hae quoque reagendo in aquam retardant eiusdem motum. Haec autem aeris resistentia est eo maior, quo celerior iactus est; quippe (384) resistunt fluida in ratione duplicata velocitatis, qua corpora in iis moventur, adeo ut in celerrimo aquae ascensu ab aere vehementer resistenti iactus aquae in guttas minimas discerpatur. Prima causa retardationis nullo modo corrigi potest. Secunda tolli, aut minui saltem potest efficiendo, ut directio aquae prosilientis non sit perpendicularis, sed paullulum inclinata ad horizontem; tunc enim relabens aqua, non incumbit amplius assurgenti. Et sane experientia edocuit Torricellium (a), et Bossutium (b), quod fluidum, directione paullulum inclinata ad horizontem, altius quam verticaliter elevatur.

Scho-

(a) Lib. 2. De motu proiectorum pag. 192.
(b) Traité Elementaire d'Hydrodynamique Tom. 2. art. 455. pag. 97.

Scholion II.

460. Circa primam causam retardationis accurate est observandum, eo maiorem, servata proportione, frictionem dari, quo minus est lumen, per quod effluit aqua. Luminis enim circumferentia, in qua frictio datur, crescit ut diameter, et ipsum lumen augetur ut quadratum diametri; unde augetur magis fluidi prosilientis quantitas, quam frictio. Ex hoc autem fieri debet, ut si duo iactus aquae cum aequalibus velocitatibus, sed ex luminibus inaequalibus egrediantur; ille, cuius crassities maior est, altius prae altero attollatur.

Scholion III.

461. Excellunt in hac doctrina de fontium iactibus Mariottus (a), et Desagulierius (b), qui innixi experimentis edocuerunt, qua methodo, ac ratione construendi sint tubi vehentes aquam alendis fontibus necessariam, qualesque praeterea esse debeant amplitudines tam tuborum vehentium aquam, quam luminum, per quae eadem aqua effluit, ut inde ad maximam, quam potest, ascendat altitudinem.

CAPUT XI.

De libero cursu Fluminum.

DEFINITIO VIII.

462. *Alveus fluminis* est cavitas in superficie telluris facta, intra quam continuo aqua currit.

DEFINITIO IX.

463. *Alveus naturalis* est, qui a natura effectus est; *Alveus* autem *artificialis* vocatur ille, qui arte effectus est.

Scholion.

464. Alveus naturalis irregularem figuram habet, alveus autem artificialis figuram habet parallelepipedi recti N A F E D C B P (Fig. 113), cuius basis PBCD refert fluminis fundum sive horizontalem, sive inclinatum ad horizontem; opposita autem latera NPDE, ABCF, parallela, et perpendicularia ad horizontem, *Ripas fluminis* repraesentant.

DE-

(a) Traité de mouvement des Eaux part. IV. discours. 1.
(b) Cours de Physique Experimentel Tom. 2. pag. 130.

DEFINITIO X.

465. Si flumen secetur plano perpendiculari ad eius fundum, communis sectio inde orta, *sectio fluminis* appellatur.

SCHOLION.

466. Ponamus aquam in alveo progredientem ex improviso in glaciem verti, et subinde secari plano perpendiculari ad eius fundum; sectio inde genita, erit illa, quam sectionem fluminis appellamus.

COROLLARIUM.

467. Hinc sectio fluminis naturalis erit (464) figura irregularis; sectio autem fluminis artificialis, veluti N A F E D C B P (Fig. 113.) erit rectangulum G I O H, cuius basis H O est fluminis latitudo, et cuius altitudo H G est eadem cum altitudine eiusdem fluminis.

SCHOLION.

468. Quando in posterum sermo erit de altitudine fluminis, aut sectionis, per illam intelligetur ea perpendiculi a superficie aquae in fundum demissi pars, per quam continuo transit aqua, ita ut si in superiore alvei eiusdem tractu cessaret subito omnis fluxus, nihil prorsus aquae in ea amplius remaneret. Aqua enim in cavitatibus fundi stagnans, nihil ad flumen confert, cum perinde sit ac si abesset, fundo existente plano. Et quoniam aqua currens ad differentiam stagnantis dicitur *viva*, ideo per altitudinem fluminis, aut sectionis solum intelligemus altitudinem vivam aquae.

DEFINITIO XI.

469. Si altitudo A Q sectionis S R Q A (Fig. 114.) divisa concipiatur in aequas partes multitudine infinitas, et magnitudine infinite parvas, atque ex punctis singulis divisionum agantur rectae A G, B H, D I, E L, &c., ipsi A Q normales, quae singulae repraesentent velocitates aquae fluentis per respondentia altitudinis puncta A, B, D, E, &c., curva G H K N, ad quam terminantur hae rectae omnes, dicetur *scala velocitatum*, et eius area, seu spatium A G N Q vocabitur *complexus velocitatum* aquae fluentis per altitudinem A Q sectionis.

Co-

COROLLARIUM I.

470. Hinc si A G sit spatium minuti secundi tempore absolutum a particula fluente per punctum A; B H pariter erit spatium percursum eodem tempore a particula transeunte per punctum B. Cum enim particulae fluentes per A, et B, motu aequabili progrediantur; spatia ab illis minuti secundi tempore absoluta, erunt ut earum velocitates, hoc est (469) ut rectae A G, B H. Sed spatium a particula fluente per punctum A minuti secundi tempore absolutum, aequale est (ex hyp.) rectae A G; ergo et spatium pari tempore absolutum a particula fluente per punctum B, aequabitur rectae B H.

COROLLARIUM II.

471. Quia simili modo patet, spatia minuti secundi tempore absoluta a particulis effluentibus per altitudinis puncta reliqua D, E, F, C, &c., aequalia esse rectis D I, E L, F M, C K, &c.; sequitur, quantitatem aquae intra minutum secundum per altitudinem A Q fluentis, aequari spatio A G N Q, quod proinde etiam vocabitur *complexus spatiorum*.

DEFINITIO XII.

472. *Velocitas media* aquae fluentis per altitudinem, aut perpendiculum A Q sectionis, est illa, quam si haberent particulae omnes aquae, quae simul transeunt per A Q, tanta aquae copia per hanc tempore dato flueret, quanta reipsa fluit velocitatibus variis mota.

COROLLARIUM I.

473. Hinc si altitudini A Q applicari intelligatur rectangulum A O P Q aequale spatio A G N Q; eius latitudo A O, vel C K erit (472) velocitas media aquae fluentis per altitudinem A Q. Nam si particulae omnes aquae, quae simul transeunt per A Q, communem haberent velocitatem C K; quantitas aquae minuto secundo effluens per A Q, aequaretur rectangulo A O P Q. Sed quantitas aquae minuto secundo variis celeritatibus effluens per A Q, aequatur (471) spatio A G N Q, ergo cum rectangulum A O P Q aequale sit (ex hyp.) spatio A G N Q; tanta aquae copia minuto secundo efflueret per A Q cum velocitate communi C K, quanta per eam tempore eodem fluit velocitatibus variis mota, ideoque C K erit (472) velocitas media aquae fluentis per altitudinem A Q.

COROLLARIUM II.

474. Cum simili modo constet, mediam quoque velocitatem aquae fluentis per aliam qualemcumque altitudinem T V eiusdem sectio-

ctionis S R Q A, esse priori C K aequalem; utique eadem C K erit velocitas etiam media aquae fluentis per integram sectionem SRQA.

Corollarium III.

475. Et ideo quantitas aquae minuto secundo effluens per sectionem S R Q A, aequabitur recto prismati, cuius basis est sectio S R Q A, et cuius altitudo est velocitas media C K.

Corollarium IV.

476. Hinc si quantitas aquae intra minutum secundum effluens per sectionem S R Q A, conformaretur in prisma rectum, habens basim eidem sectioni aequalem; eius altitudo aequalis esset mediae velocitati aquae fluentis per hanc sectionem.

DEFINITIO XIII.

477. Flumen dicitur esse *in statu manenti*, si eius superficies nullibi attollatur, aut deprimatur, hoc est si ipsum eodem in loco eandem semper habeat altitudinem.

DEFINITIO XIV.

478. *Filum fluminis* vocamus lineam, quae in singulis sectionibus transit per punctum, in quo velocitas aquae est maxima.

PROPOSITIO LXXXVIII.

479. *Si flumen in statu manenti sit, aequales quantitates aquae tempore dato fluent per eius sectiones quomodolibet inaequales.*

Flumen HMQKEDPB (Fig. 115.) in statu manenti sit, et rectangula H P, K D sint duae eius sectiones invicem inaequales. Dico, per illas tempore dato fluere quantitates aequales aquae. Nam si minus aquae tempore dato flueret per sectionem inferiorem K D, quam per superiorem H P; quantitas aquae positae inter sectiones K D, H P, continuo maior fieret, et sic fluminis superficies H M Q K attolleretur, atque adeo idem flumen non amplius (477) in statu manenti esset, contra hypothesim. Si vero plus aquae tempore dato flueret per sectionem K D, quam per sectionem H P; utique hoc in casu inter sectiones K D, H P quantitas aquae continuo minor fieret, et sic fluminis superficies H M Q K perpetuo deprimeretur, ac propterea idem flumen non amplius (477) in statu manenti foret, contra hypothesim. Cum ergo nec minus, nec plus aquae tempore dato fluat per sectionem inferiorem K D, quam per superiorem H P; con-

consequens est, ut quantitates aequales aquae tempore dato transeant per utramque.

Corollarium.

480. Si ergo fundus B P D E ubivis fuerit aeque latus, velut contingit (464) in alveo artificiali; tunc per sectionum altitudines inaequales H B, K E tempore dato fluent quantitates aequales aquae.

PROPOSITIO LXXXIX.

481. *Iisdem positis, velocitates mediae aquae fluentis per inaequales sectiones* H P, K D *(Fig. 115.) sunt inverse ut hae sectiones.*

Quantitates aquae minuti secundi tempore effluentes per sectiones H P, K D conformari intelligantur in duo prismata C L, N R (Fig. 116. 117.), quorum bases A C F T, X N Z Y aequentur sectionibus H P, K D. Hoc autem posito, prismatum altitudines T L, Y R exponent (476) medias velocitates aquae fluentis per has sectiones. Cum itaque per sectiones H P, K D tempore dato fluant (479) quantitates aequales aquae; duo prismata C L, N R erunt aequalia inter se. Sed prismata aequalia reciprocant bases, et altitudines; ergo T L erit ad Y R, ut X N Z Y ad A C F T. Sed T L est ad Y R, ut velocitas media aquae fluentis per sectionem H P ad velocitatem mediam aquae fluentis per sectionem K D, et X N Z Y est ad A C F T, ut sectio K D ad sectionem H P; ergo etiam velocitas media aquae fluentis per sectionem H P erit ad mediam velocitatem aquae fluentis per sectionem K D, ut haec sectio K D ad sectionem H P.

Corollarium I.

482. Quare si fluminis fundus B P D E *(Fig. 115.)* ubivis fuerit aeque latus; velocitas media aquae fluentis per sectionem H P, erit quoque ad velocitatem mediam aquae fluentis per sectionem K D, ut huius altitudo K E ad illius altitudinem H B.

Corollarium II.

483. Hinc per minorem sectionem K D aqua transire debet maiori celeritate, quam per maiorem H P. Nam velocitas media aquae fluentis per sectionem K D, est ad velocitatem mediam eiusdem, cum transit per sectionem H P (481), ut sectio H P ad sectionem K D. Sed sectio H P est maior sectione K D; ergo et velocitas media aquae fluentis per sectionem K D, erit maior media velocitate, qua eadem aqua fluit per sectionem H P.

Corollarium III.

484. Quare dum fluminis aqua transit a latiori sectione ad sequentem aliam angustiorem, ipsa vel rodere debet fundum, ut ita minor fluminis latitudo maiori altitudine compensetur, vel si rodere fundum nequeat, velocitatem maiorem acquiret. Et viceversa, dum fluminis aqua transit ab arctiori sectione in latiorem, eadem vel deponendo particulas terreas in eius fundo, hunc elevabit, ut ita maior fluminis latitudo minori altitudine compensetur, vel si nequeat hoc praestare, minorem habebit velocitatem.

Scholion.

485. Quae continentur tribus his corollariis, sunt consona experimentis. Quippe videmus aquam ibi celerius promoveri, et magis profundam esse, ubi minor est fluminis latitudo; ibi autem tardius progredi, et minus profundam esse, ubi maior est latitudo. Usu quoque in praxi receptum fuit, ut ad aquae motum accelerandum, alveus fluminis coarctetur.

PROPOSITIO XC.

486. Si ex lacu inexhausto erumpat flumen ubivis aeque latum, habensque fundum horizonti quomodolibet inclinatum; aqua proxima eius fundo eo velocior erit, quo magis a fluminis ortu distabit.

Per emissarium CD inexhausti lacus ARDB (Fig. 118.) erumpat flumen CDPQ ubivis aeque latum, cuius superficies suprema sit linea CFQ, fundus autem linea DGP inclinata ad horizontem. Deinde idem fundus DGP eousque produci intelligatur, donec conveniat cum horizontali superficie lacus, ex. gr. in puncto A; eritque hoc punctum A origo fluminis CDPQ. Demum in fundo acceptis duobus punctis quibuslibet G, et I, in illis fiant sectiones duae, quarum altitudines vivae sint rectae GF, IK perpendiculares ad eius fundum. Dico, aquam in puncto I velocius promoveri, quam in alio puncto G. Siquidem rectis AR, RD indefinite productis in V, et Æ, in eas cadant ex G, et I perpendiculares GE, IM, GZ, IX. Quia inexhaustus est lacus ARDB, superficies eius horizontalis AR nec deprimetur, nec attolletur, sive manebit semper in eodem plano; unde lacus ARDB potest considerari ut vas amplissimum aqua constanter plenum, et emissarium eius CD, quod est prima sectio fluminis CDPQ, censeri potest velut foramen parvum relate ad amplitudinem huius vasis. His autem positis, ita ostenditur propositio. Quia aqua effluit per sectionem CD perinde ac si efflueret per foramen in vasis latere constitutum; utique transibit (296) per punctum D cum illa velocitate, quam acquirere potest grave cadendo in vacuo ex RD. Sed eadem descendendo postea super planum inclinatum DP, eam in I acquirit celeritatem, quam acquirere potest grave cadendo in vacuo ex DX; ergo aqua in puncto I habebit illam velocitatem, quam acquirere potest grave cadendo in vacuo ex RX, vel MI. Simili modo ostendam, aquam in puncto G velocitatem habere aequalem illi, quam grave acquirere potest cadendo in vacuo ex EG; ergo velocitas aquae in puncto I erit ad eius velocitatem in puncto G, ut velocitas acquisita a gravi post lapsum per MI, ad illam, quae acquiri potest post casum per EG. Sed cum MI maior sit quam EG, velocitas acquisita a gravi post lapsum per MI, est maior velocitate, quae acquiri potest post casum per EG; ergo et velocitas aquae in puncto I erit maior velocitate, quam eadem aqua habet in puncto G.

Corollarium I.

487. Si duo puncta igitur Y, et O altitudinum GF, IK aequaliter distent a fundo DP; aqua in O erit velocior quam in Y. Siquidem perpendiculum ex puncto O ad horizontalem rectam AV demissum, longius erit alio, quod ad eandem demitti potest ex altero puncto Y.

Corollarium II.

488. Et cum idem eodem modo ostendi possit de altitudinum aliis punctis, quae aequidistant ab eodem fundo; consequens est, ut singulae aquae particulae, quae transeunt per IK, velociores sint aliis, quae in pari a fundo distantia transeunt per GF.

Scholion I.

489. Ex theorematis huius demonstratione sequitur, cursum fluminis eo fieri celeriorem, quo magis recedit flumen ab eius ortu; id quod plerumque solet experientiae adversari. Tenendum est itaque fundi inaequalitates gignere resistentias, a quibus celeritas currentis aquae continuo retardatur, imo modo acquisita, rursus extinguitur. Id tamen tantummodo inculcandum esse censemus, quod quando fundi declivitas est exigua, etiam exigua esse soleat aquae gravitas relativa, quae indesinenter accelerat eius motum. Unde si vis haec acceleratrix sit semper aequalis resistentiae ipsius fundi, quae potest considerari veluti vis retardans motum fluentis aquae; in hoc casu aqua alvei fundum radens, motu aequabili progredietur cum illa velocitate, quam in superiori tractu alvei acquisivit. Quin

Quin etiam si nova causa superveniente, vis retardans augeri concipiatur, rursus aquae velocitas minuetur. Quare saepius observamus, fluminis aquam lentissime promoveri in loco valde distanti ab eius ortu, ubi nempe ipsa deberet progredi velocissime (486), si nullam resistentiam in superioribus fundi tractibus passa esset.

Scholion II.

490. Non solum aquae velocitas in naturali flumine retardatur ob fundi inaequalitates, verum etiam ob eius transitum successivum a maiori fundi declivitate ad minorem aliam subsequentem. Dum enim aqua post percursam aliquam fundi partem mutat directionem, et transit in aliam minus declivem, eius velocitas diminuitur perinde ac si incideret in obstaculum; ideoque per alvei istam partem lentius promovebitur, quam per praecedentem. Atque hinc porro intelligitur cur in diversis partibus eiusdem alvei naturalis celeritas fluentis aquae sit ut plurimum tam diversa.

Propositio XCI.

491. *Si idem flumen* CDPQ *(Fig. 118.) in statu manenti sit; altitudo* IK, *quam habet aqua in inferiori aliquo puncto* I *fundi* DP, *minor erit altitudine* GF *eiusdem in superiori altero puncto* G.

Pone IK esse ipsi GF aequalem. Singulae aquae particulae, quae transeunt per IK, velociores sunt aliis, quae in pari distantia a fundo (488) transeunt per GF. Est autem IK (ex hyp.) ipsi GF aequalis; igitur per IK plus aquae tempore dato fluet, quam per GF, ideoque non amplius flumen (479) in statu manenti erit, contra hypothesim. Pone deinde IK esse ipsa GF maiorem. Tum sumpta IO rectae GF aequali, utique per IO plus aquae (ex demonstr.) tempore dato fluet, quam per GF. Sed per IK *plus* aquae tempore dato transit, quam per IO; igitur per IK multo plus aquae transibit, quam per GF, ideoque non amplius erit (479) flumen in statu manenti, iterum contra hypothesim. Cum igitur sit IK nec rectae GF aequalis, nec ipsa maior, sequitur necessario ut sit minor.

Propositio XCII.

492. *Velocitas aquae in infimo puncto* I *altitudinis* IK *est maior velocitate, quam eadem aqua habet in eius puncto supremo* K.

Ex puncto K ad horizontalem rectam AV demitti intelligatur perpendicularis KN. Quia in triangulo MAI rectus est angulus AMI,

AMI, acutus erit alius MIA. Est autem rectus quoque angulus KIA; ergo acutus erit reliquus KIM, propterea si ex K ad MI demittatur perpendicularis KL, haec rectam MI secabit inter puncta I, et M, et ideo erit MI maior quam ML, vel NK. Sed velocitas aquae in I est (486) aequalis illi, quam acquirere potest grave cadendo in vacuo ex MI, et velocitas aquae in K aequalis illi, quam idem grave acquirere potest cadendo in vacuo per NK; igitur cum MI maior sit quam NK, etiam velocitas aquae in puncto I erit maior velocitate eiusdem in puncto K.

Scholion.

493. Si vero in praxi quandoque oppositum videamus, id resistentiae fundi erit unice tribuendum. Particulae enim aquae radentes fundum, patiuntur maximam resistentiam; reliquae vero in eadem sectionis altitudine constitutae, eo minorem subeunt resistentiam, quo remotiores sunt ab eodem, ideoque fieri potest, ut aqua velocius moveatur in fluminis superficie, quam in eius fundo.

Propositio XCIII.

494. *Si punctum* K *superficiei fluminis* CDPQ *ab eius principio* A *magis distet quam aliud punctum* F *eiusdem superficiei; aqua in* K *erit velocior quam in* F.

Demissa ex F ad AV perpendiculari FT, agatur pariter ad GE perpendicularis FH. Quoniam rectae EG, MI perpendiculares sunt ad AV, parallelae erunt etiam inter se; ideoque angulus MIA aequabitur EGA. Sed rectus quoque angulus KIA aequatur recto alteri FGA; ergo et reliquus KIL aequabitur reliquo FGH. Atqui etiam rectus angulus KLI est aequalis recto FHG; ergo triangulum ILK simile erit alteri GHF, unde LI erit ad HG, ut KI ad FG. Est autem KI minor (491) quam FG; igitur et LI minor erit quam HG. Sed est MI maior EG; ergo etiam ML, vel NK erit multo maior quam EH, vel TF. Sed velocitas aquae in K aequatur illi, quam acquirere potest grave cadendo in vacuo ex N in K, et velocitas in F aequalis illi, quam potest acquirere idem grave cadendo in vacuo ex T in F; ergo et velocitas aquae in K maior erit velocitate eiusdem in puncto F.

Lemma I.

495. *Si ratio quadrati* AB *(Fig. 119.) ad quadratum* CD *sit maior quam ratio quadrati* EF *ad quadratum* HG; *etiam ratio* AB *ad* CD *erit maior quam ratio* EF *ad* HG.

Fiat,

Fiat, ut AB ad CD, ita EF ad quartam proportionalem HI; eritque quadratum AB ad quadratum CD, ut quadratum EF ad quadratum HI. Sed quadratum AB est (ex hyp.) ad quadratum CD in maiori ratione, quam quadratum EF ad quadratum HG; ergo etiam quadratum EF erit ad quadratum HI in maiori ratione, quam quadratum idem EF ad quadratum HG, unde quadratum HI minus erit quadrato HG, e HI minor HG. Cum itaque sit HI minor quam HG, ratio EF ad HI maior erit quam ratio eiusdem EF ad HG. Sed ratio AB ad CD est (ex constr.) aequalis rationi EF ad HI; ergo etiam ratio AB ad CD maior erit quam ratio EF ad HG.

LEMMA II.

496. *Si recta* AD (*Fig.* 120.) *utcunque secetur in* B, *et* C; *ratio* DB *ad* BC *erit maior quam ratio* DA *ad* AC.

Ducta ex A qualibet recta AH, et iuncta DH, ad hanc ex C ducatur parallela CF, conveniens cum recta AH in F. Puncta denique B, et H iunganrur recta BH, quae ipsi CF occurret in puncto E. Quia in triangulo DBH est CE parallela ad eius latus DH, erit DB ad BC, ut DH ad CE. Rursus quoniam est GF parallela ad latus DH trianguli DAH, erit DA ad AC, ut DH ad CF. Sed cum CE minor sit quam CF, ratio DH ad CE est maior quam ratio eiusdem DH ad CF; ergo etiam ratio DB ad BC maior erit quam ratio DA ad AC.

PROPOSITIO XCIV.

497. *Si sectio* GF (*Fig.* 118.) *ab origine fluminis minus distet, quam altera sectio* IK; *ratio velocitatis in* G *ad velocitatem in* F *erit maior quam ratio velocitatis in* I *ad velocitatem in* K.

Producatur EG in S, donec SG fiat ipsi MI aequalis. Cum ergo aequentur SG, MI, sitque HG (494) maior quam LI; erit SH minor quam ML; unde ratio SG ad SH maior erit quam ratio MI ad ML. Sed cum SG sit secta in E, et H, ratio EG ad EH est (495) maior quam ratio SG ad SH; ergo et ratio EG ad EH multo maior erit quam ratio MI ad ML. Iam velocitates aquae in G, et F aequantur (486) illis, quas acquirere potest grave cadendo in vacuo ex respectivis altitudinibus EG, TF, sive EG, EH, itemque velocitates aquae in I, et K sunt aequales illis, quas idem grave acquirere potest cadendo in vacuo ex altitudinibus MI, NK, sive MI, ML; ergo quadratum velocitatis in G erit ad quadratum velocitatis in F, ut EG ad EH, et quadratum velocitatis in I erit ad quadratum velocitatis in K, ut MI ad ML. Vidimus autem EG esse ad EH in maiori ratione, quam MI ad ML; ergo et quadratum velocitatis in G erit ad quadratum velocitatis in F in maiori ratione, quam quadratum velocitatis in I ad quadratum velocitatis in K, ideoque etiam velocitas aquae in G erit (495) ad velocitatem in F in maiori ratione, quam velocitas in I ad velocitatem in K.

COROLLARIUM I.

498. Igitur in quacunque fluminis sectione ratio velocitatum aquae in eius fundo, et in superficie est eo minor, sive eo magis accedit ad rationem aequalitatis, quo magis sectio ab origine fluminis removetur.

COROLLARIUM II.

499. Unde si sectio ab origine fluminis maxime distet; velocitates aquae in fundo, et in superficie ad sensum aequales erunt.

COROLLARIUM III.

500. Et quoniam loca, in quibus ut plurimum capiuntur fluminis sectiones, maxime ab origine eius distant; propterea ibi velocitas aquae in fluminis superficie poterit (499) accipi ut aequalis velocitati in eius fundo.

SCHOLION.

501. Quod si contingat, ut velocitas aquae in superficie sensibiliter maior sit quam in fundo, id ab inaequalitatibus huius pendet. Cum enim illae particulae, quae fundum radunt, ab inaequalitatibus huius subeant maiorem motus retardationem, quam aliae remotiores ab eodem fundo; fieri utique debet, ut aqua celerius moveatur in superficie, quam in fundo.

LEMMA.

502. *Dum corpus* G (*Fig.* 121.) *descendit super planum inclinatum* AB, *ipsum premit indesinenter, estque haec pressio ad pondus eiusdem corporis, ut sinus anguli, qui metitur declinationem plani a perpendiculo, ad sinum totum.*

I. Ducta verticali recta AM, centro A, et radio AB describatur circuli arcus BF, occurrens ipsi AM in F. Dein agatur horizontalis BD, quae cum verticali AM constituet rectum angulum

B D A. Denique ad punctum contactus I ducta G I, quae erit plano A B normalis, agatur verticalis G P, inque ea accipiatur recta G H, quae referat pondus corporis absolutum, et compleatur parallelogrammum K G I H. Dum corpus descendit super plano inclinato A B, indesinenter sollicitatur vi ponderis sui G H. Sed vis G H aequivalet simul sumptis viribus G K, G I; ergo indesinenter etiam sollicitabitur viribus G K, G I. Sed vis G K utpote parallela ad planum A B, impenditur tota in promovendo descensu corporis supra hoc planum; ergo reliqua vis G I unice impendetur ad planum hoc comprimendum, ideoque corpus G indesinenter comprimet planum A B, super quo descendit.

II. Quoniam G H exprimit pondus corporis absolutum, et G I eius pressionem (num. I.) exercitam contra planum; haec pressio erit ad pondus, ut G I ad G H. Sed ob triangulum G I H simile A D B, est G I ad G H, ut B D ad A B; ergo et pressio corporis G erit ad eius pondus, ut B D ad A B, sive ut sinus anguli B A F, qui metitur declinationem plani A B a perpendiculo A M, ad sinum totum.

Corollarium I.

503. Hinc quamdiu plani declivitas est sensibilis, pressio pondere minor erit. Dum enim sensibilis est declivitas plani A B, sensibilis est quoque inclinationis angulus A B D; ideoque B D sensibiliter minor erit ipsa A B. Sed pressio est ad pondus (502), ut B D ad A B; ergo etiam pressio pondere minor erit.

Corollarium II.

504. At si declivitas plani A B ita minui concipiatur, ut sensibiliter evanescat inclinationis angulus A B D; tunc pressio ad sensum ponderi aequalis erit. Sensibiliter enim evanescente angulo A B D, ad sensum aequales fient B D, A B, et ita pressio ponderi aequalis erit.

Propositio XCV.

505. *Dum movetur aqua intra declivem alveum C D P Q (Fig. 118.), superior premit inferiorem, estque haec pressio ad eius pondus, ut sinus declinationis alvei a perpendiculo, ad sinum totum.*

Quando movetur aqua in declivi alveo C D P Q, singula eius strata inferiora possunt considerari, ut totidem fundi ad sensum plani, et aeque ac alveus inclinati. Sed quotiescunque descendit corpus super planum aliquod inclinatum, continuo ipsum premit (502), estque haec pressio ad eius pondus, ut sinus declinationis plani a perpendiculo, ad sinum totum; ergo et dum aqua intra declivem alveum promovetur, superior premet inferiorem, eritque haec pressio

sio ad eius pondus, ut sinus declinationis alvei a perpendiculo, ad sinum totum.

Corollarium I.

506. Hinc si sensibilis sit declivitas fundi DP fluminis CDPQ; pressio, quam subit particula I a verticali columella I W ipsi superius incumbente, eiusdem pondere minor (503) erit; at si declivitas fundi fuerit insensibilis, tunc pressio ad sensum aequalis erit (504) ponderi eiusdem columellae I W.

Corollarium II.

507. Unde si insensibilis sit declivitas fundi D P; velocitas acquisita a particula I ob pressionem columellae I W, erit (296) ad sensum aequalis illi, quam grave acquisivisset cadendo in vacuo ex W I. At si fundi declivitas sit sensibilis; velocitas acquisita a particula I ob pressionem columellae W I, erit sensibiliter minor illa, quam grave acquisivisset cadendo in vacuo ex W I.

Propositio XCVI.

508. *In quovis valde declivi flumine C D P Q velocitas aquae in descensu acquisita, non crescit ob pressionem superius incumbentis.*

Postquam aqua descendit ex A in I, eam habet velocitatem (486), quam acquirere potest grave cadendo in vacuo ex M I; velocitas autem, quam eadem aqua acquirit in puncto I ob pressionem columellae W I, est (507) sensibiliter minor illa, quam acquirere potest grave cadendo in vacuo ex W I. Est autem M I maior W I; ergo etiam velocitas, quam habet aqua post descensum ex A in I, erit maior velocitate, quam eadem aqua acquirit ob pressionem columellae W I. Sed corpus insequens augere nequit velocitatem antecedentis celerius moti; igitur neque pressio, quam particula I subit a columella W I, augere potest eius velocitatem acquisitam post descensum ex A in I.

Corollarium I.

509. Hinc duae sunt causae velocitatis aquae in quavis fluminis sectione. Prima est declivitas alvei, in quo movetur, aut motus acceleratio, quam acquirit per declivem alveum descendendo. Secunda est altitudo viva aquae superius incumbentis, aut pressio, quam aqua inferior subit a superiore. Ita autem agunt hae duae causae, ut si velocitas orta a declivitate, sit maior illa, quae a pressione produceretur, tunc aquae velocitas tribuatur soli declivitati; at si contra velocitas aquae orta a pressione, excederet ve-

velocitatem a declivitate alvei oriundam, tunc velocitas aquae pressioni unice adscribatur.

SCHOLION.

510. Id vero intelligi solum debet de velocitate aquae in fundo, vel prope fundum alvei constitutae. Quod autem spectat ad particulas alias aquae in superficie fluminis existentes, aut parum ab hac distantes, ipsae cum nullam, aut insensibilem pressionem a superioribus patiantur, habebunt velocitatem, vel a solo descensu ortam, vel (si alveus foret absolute horizontalis) ab earum cohaesione cum inferioribus, a quibus trahi ad motum solent.

COROLLARIUM II.

511. Dum ergo aqua in valde declivi alveo promovetur, velocitas omnium eius particularum (508) a sola declivitate alvei derivatur; at cum declivitas alvei est exigua, ortum ducit haec velocitas partim a descensu, et partim ab altitudine viva aquae, ipsi verticaliter incumbentis. Denique si contingat, ut alveus aut nullam, aut insensibilem habeat declivitatem; velocitas tota aquae particularum, saltem sensibiliter, pro causa habet solam altitudinem vivam aquae.

PROPOSITIO XCVII.

512. *Planum declive* A B (*Fig.* 122.) *referat fundum fluminis alicuius, et altitudo eius sectionis in puncto* B, *sit* BC. *Deinde haec eousque protrahi concipiatur, donec in* L *occurrat horizontali rectae* AV *ductae per fluminis initium* A. *Denum vertice* L *circa axem* LB *describi intelligatur quaevis parabola* LSK. *Dico, velocitates particularum aquae, quae transeunt per* CB, *esse ut ordinatae eisdem particulis respondentes.*

Ductis ordinatis CS, BK, demittantur ex C, et B ad AV perpendiculares CE, BF, quae etiam erunt mutuo parallelae. Velocitates aquae in C, et B sunt (486) respective aequales illis, quas acquirere potest grave cadendo in vacuo ex altitudinibus CE, BF; ergo quadratum velocitatis aquae in C erit ad quadratum velocitatis in B, ut CE ad BF. Sed cum in triangulo BFL sit CE parallela ad latus eius BF, est CE ad BF, ut CL ad BL; ergo et quadratum velocitatis in C erit ad quadratum velocitatis in B, ut CL ad BL. Sed etiam in parabola LSK est quadratum ordinatae CS ad quadratum ordinatae BK, ut CL ad BL; ergo et quadratum velocitatis in C erit ad quadratum velocitatis in B, ut quadratum ordinatae CS ad quadratum ordinatae BK, ideoque etiam velocitas in C erit ad velocitatem in B, ut ordinata CS ad ordinatam BK. Simili modo ostendam, velocitates aquae in punctis aliis intermediis esse, ut intermediae ordinatae, quae illis respondent; ergo velocitates particularum aquae, quae transeunt per CB, erunt ut ordinatae illis respondentes in parabola LSK.

COROLLARIUM.

513. Hinc ordinatae CS, BK ad CB applicatae, erunt mensurae celeritatum relativarum, quas habent particulae C, et B, dum transeunt per altitudinem CB sectionis; ideoque spatium parabolicum CSKB erit (469) complexus velocitatum, quas singulae particulae aquae habent, dum transeunt per CB.

SCHOLION.

514. Non inde colligi tamen potest, easdem ordinatas CS, BK esse quoque mensuras absolutarum velocitatum, quas habent particulae C, et B. Mensura enim absolutae velocitatis mobilis alicuius est spatium, quod idem tempore dato, ex. gr. minuto secundo absolvit. Ita si particula C quovis minuto secundo percurrat spatium trium pedum; illico quanta sit eius velocitas, innotescit, et ideo hoc spatium trium pedum erit mensura absolutae eius velocitatis. Idem dicendum de velocitatibus absolutis aquae transeuntis per alia altitudinis CB puncta.

PROPOSITIO XCVIII.

515. *Particulae aquae fluentis per extrema* C, *et* B (*Fig.* 122.) *altitudinis* CB *sectionis, pari tempore absolvunt ordinatas* CS, BK *cuiuscunque parabolae* LSK *circa axem* BL *descriptae.*

Particula C tempore quovis dato ordinatam sibi respondentem CS absolvat. Quoniam particulae C, et B motu aequabili progrediuntur secundum rectas CS, BK, earum velocitates erunt, ut spatia ab ipsis pari tempore absoluta. Sed velocitas particulae C est (512) ad velocitatem particulae B, ut ordinata CS ad ordinatam BK; ergo etiam ordinata CS erit ad ordinatam BK, ut spatium tempore dato a particula C percursum, ad spatium a particula B eodem tempore absolutum. Sed ordinata CS est (ex constr.) spatium tempore dato a particula C percursum; ergo et ordinata BK erit spatium a particula B eodem tempore absolutum.

PROPOSITIO XCIX.

516. *Si particula aquae fluentis per extrema C, et B altitudinis CB sectionis, pari tempore absolvant rectas CS, BK ad CB normaliter applicatas; ipsae erunt ordinatae parabolae alicuius, veluti LSK, circa axem BL descriptae.*

Quia particulae C, et B pari tempore absolvunt rectas CS, BK; erit CS ad BK, ut velocitas particulae C ad velocitatem particulae B, et quadratum CS erit ad quadratum BK, ut quadratum velocitatis particulae C ad quadratum velocitatis particulae alterius B. Sed quadratum velocitatis particulae C est (512) ad quadratum velocitatis particulae B, ut CL ad BL; ergo et quadratum CS erit ad quadratum BK, ut CL ad BL. Haec autem praecipua est proprietas parabolae LSK circa axem BL descriptae; igitur rectae CS, BK erunt ordinatae parabolae LSK circa axem BL descriptae.

COROLLARIUM I.

517. Hinc si particulae C, et B minuto secundo absolvant rectas CG, BH; hae erunt (516) pariter ordinatae parabolae LGH circa axem BL descriptae.

COROLLARIUM II.

518. Et cum idem quoque verificetur de aliis spatiis, quae reliquae aquae particulae in altitudine CB positae minuto secundo absolvunt; patet, quantitatem aquae per hanc altitudinem minuti secundi tempore effluentis, aequari spatio parabolico CGHB.

COROLLARIUM III.

519. Quia particulae C, et B minuto secundo absolvunt ordinatas CG, BH parabolae LGH; ipsae erunt (514) quoque mensurae absolutarum velocitatum, quas habent particulae C, et B.

COROLLARIUM IV.

520. Cum etiam aliae aquae particulae in altitudine CB positae, minuto secundo (515) absolvant ordinatas sibi respondentes in parabola LGH; hae quoque (514) erunt mensurae velocitatum absolutarum, quas ipsae habent, et propterea spatium parabolicum CGHB erit quoque complexus absolutarum velocitatum aquae per altitudinem CB fluentis.

LEM-

LEMMA I.

521. *Datis in spatio parabolico CGHB (Fig. 124.) ordinatis CG, BH, datoque etiam axis segmento CB, quod ab iisdem est interceptum; axem parabolae invenire.*

Indefinite producta BC in O, fiat, ut differentia quadratorum BH, CG ad quadratum CG, ita recta BC ad quartam proportionalem CL. Dico, BL quaesitum esse parabolae eiusdem axem. Nam cum differentia quadratorum BH, CG sit ad quadratum CG, ut BC ad CL; utique componendo, quadratum BH erit ad quadratum CG, ut BL ad CL, ideoque BL erit axis parabolae, qui petebatur.

LEMMA II.

522. *Iisdem datis, quae in lemmate praecedenti, invenire aream parabolici spatii CGHB.*

Ex datis ordinatis CG, BH, et segmento axis CB, quaere 1.° axem BL (521). 2.° Ex inventa BL aufer BC, ut inde nota fiat CL. 3.° Ex datis BL, BH investiga aream segmenti parabolici LHB, et ex datis CL, CG aream segmenti alterius LGC. 4.° Ex area segmenti parabolici LHB subduc illam segmenti alterius LGC, et residuum erit quaesita area spatii parabolici CGHB.

PROPOSITIO C.

523. *Data altitudine CB sectionis (Fig. 122.), et datis etiam spatiis CG, BH, quae particulae fluentes per C, et B, minuto secundo absolvunt, quantitatem aquae determinare, quae per hanc altitudinem tempore dato fluit.*

Quia aquae particulae transeuntes per extrema C, et B altitudinis CB sectionis, minuto secundo (ex hyp.) absolvunt spatia CG, BH; haec utique erunt (516) ordinatae parabolae LGH circa axem LB descriptae, et ideo quantitas aquae per altitudinem CB minuti secundi tempore effluentis, aequabitur (518) spatio parabolico CGHB. Sed in spatio parabolico CGHB ex datis ordinatis CG, BH, et segmento axis BC, eius area (522) invenitur; igitur etiam data altitudine BC sectionis, et datis quoque spatiis BH, CG, quae particulae aquae fluentes per C, et B minuto secundo absolvunt, invenietur quantitas tota aquae, quae per eandem altitudinem tempore dato fluit.

PRO-

PROPOSITIO CI.

524. *Iisdem datis, quae in propositione antecedenti, invenire mensuram mediae velocitatis absolutae, quam habet aqua, dum transit per altitudinem* CB *sectionis.*

Ex datis in spatio parabolico CGHB ordinatis CG, BH, et axis segmento CB, quaere (521) axem BL parabolae LGH. Dein ex illo aufer CB, ut nota fiat CL. Denique ex datis abscissis CL, BL, et respondentibus ordinatis CG, BH, fac (312) rectangulum CMNB aequale spatio parabolico CGHB, et duc ex puncto O ordinatam IO. Dico, hanc esse mensuram velocitatis mediae absolutae, qua aqua fluit per altitudinem CB sectionis. Nam quia particula I minuto secundo absolvit (520) ordinatam sibi respondentem IO; utique si omnes aquae particulae, quae transeunt per CB, moverentur cum velocitate IO, qua particula I movetur, quantitas aquae minuto secundo per altitudinem CB fluentis, aequalis esset rectangulo CMNB. Huic autem (ex constr.) aequatur spatium parabolicum CGHB; ergo si omnes aquae particulae, quae transeunt per CB, moverentur cum velocitate IO, qua particula I movetur, quantitas aquae minuto secundo transiens per CB, aequalis esset spatio parabolico CGHB. Sed etiam quantitas aquae, quae velocitatibus variis mota, minuto secundo per altitudinem CB transit, aequatur (518) spatio parabolico CGHB; ergo si omnes aquae particulae, quae transeunt per CB, moverentur cum eadem velocitate IO, qua particula I movetur, tanta quantitas aquae minuto secundo flueret per CB, quanta per eandem velocitatibus variis fluit, ideoque velocitas absoluta, qua particula I movetur, erit (472) media velocitas absoluta aquae per altitudinem CB fluentis. Sed ordinata IO est (514) mensura absolutae velocitatis, qua particula I movetur; ergo etiam mensura erit mediae velocitatis absolutae, cum qua fluit aqua per altitudinem CB sectionis.

PROPOSITIO CII.

525. *Si quantitas aquae, quae minuto secundo velocitatibus variis fluit per altitudinem* CB, *per hanc dividi concipiatur; in quoto prodibit recta, quae mensura erit eius velocitatis mediae absolutae.*

Quantitas aquae, quae minuto secundo velocitatibus variis effluit per CB, aequatur (518) spatio parabolico CGHB. Huic autem (524) aequatur rectangulum CMNB; ergo eadem aquae quantitas etiam aequalis erit rectangulo CMNB. Sed si dividas hoc rectangulum per eius basim CB, in quoto prodibit altitudo eiusdem CM, vel IO; ergo si etiam quantitas aquae, quae minuto secundo velocitatibus variis effluit per CB, concipiatur dividi per hanc rectam, in quoto prodibit recta IO. Vidimus autem (524) hanc rectam IO esse mensuram mediae velocitatis absolutae, quam habet aqua per altitudinem CB fluens; ergo si quantitas aquae, quae minuto secundo effluit per CB, per hanc dividi concipiatur, in quoto prodibit recta, quae mensura erit eius mediae absolutae velocitatis.

PROPOSITIO CIII.

526. *Ut aqua intra canalem aliquem progrediatur, non opus est, ut eius fundus sit inclinatus ad horizontem.*

Sit lacus inexhaustus CEAD (Fig. 123), sive talis, ut suprema eius superficies CE sit semper in eodem plano horizontali. Tum infra hanc superficiem in eius latere fiat rectangulare aliquod foramen BA, quod sub initio cataracta aliqua claudi debet, ne aqua e lacu exire possit. Denique ad foraminis huius extremitatem A applicetur fundus AH canalis horizontalis BAHO, qui tum liberum exitum in H habeat, tum etiam sit eiusdem altitudinis, et latitudinis cum praedicto foramine BA. Hoc facto, si cataracta qua foramen clauditur, subito attollatur; singulae aquae particulae in foramine BA positae, horizontaliter promovebuntur, unaqueque nimirum (256) cum illa velocitate, quae convenit pressioni, aut altitudini aquae superius incumbentis. Unde quolibet sumpto tempore post foraminis aperitionem, ex. gr. illo, quo particula fluens per punctum A pervenit usque ad Z, si vertice E circa axem EA describatur per Z parabola ELZ; utique particula aquae, quae ex summitate B foraminis AB fluit, post illud tempus (515) appulsa erit ad punctum L. Si pariter tempus aliud accipiatur, quo nempe particula fluens per punctum A, pervenit usque ad punctum F, vel G; tunc descriptis parabolis EKF, EPG, particula erumpens ex puncto B, post illud tempus reperietur in K, vel P. Idem autem ostendi potest de aliis aquae particulis intermediis, quae per intermedia alia puncta foraminis egrediuntur; igitur tota aqua transiens per AB, horizontaliter promovebitur in canali BAHO, et ideo ut aqua intra canalem aliquem progrediatur, non opus est, ut eius fundus sit inclinatus ad horizontem.

COROLLARIUM.

527. Hinc dum aqua currit in canali aliquo horizontali, veluti BAHO, habebit superficiem horizontalem, mobilem, et permanentem.

PROPOSITIO CIV.

528. *Si ex filo* CH (*Fig.* 125. 126.) *fixo ad centrum* C *quadrantis circuli* CBA, *cuius radius* CA *est normalis ad horizontem, pendeat globus* H, *qui immersus aquae currenti secundum directionem* ET, *ab huius vi sustineatur sub distractionis angulo* ECH, *aut* ECR; *pondus quod globus in aqua habet, erit ad vim aquae, qua sustinetur, ut* CE *ad* ER.

Verticalis recta HK exponat pondus, quod globus in aqua habet. Tum ita producta HK in O, ut sit HO ipsi HK aequalis, agatur OL ad ET parallela, quae occurrat filo CH in L, et compleatur parallelogrammum LOIH. Tres vires hic simul agunt in globum H. Prima est pondus, quod globus in aqua habet, quodque in hunc agit iuxta directionem HK. Secunda est vis aquae ipsum impellens secundum directionem ET, vel HI. Tertia demum est resistentia insuperabilis puncti C, quae in globum agit secundum rectam HL. Hae autem tres vires sunt (ex hyp.) in aequilibrio inter se; igitur etiam erunt (a) ut tres rectae HO, HI, HL, ideoque pondus, quod globus in aqua habet, erit ad vim aquae qua sustinetur, ut HO ad HI. Sed ob triangulum OHI simile CER, est HO ad HI, ut CE ad ER; ergo et pondus, quod globus in aqua habet, erit ad vim aquae, qua sustinetur sub angulo ECR, ut CE ad ER.

COROLLARIUM.

529. Unde si idem globus longiori filo C*b* suspensus, aquae profundius immergatur, et quiescat sub distractionis angulo EC*b*, aut EC*r*; pondus quod globus in aqua habet, erit ad vim aquae qua sustinetur, ut CE ad E*r*.

SCHOLION.

530. Pondus quod globus in aqua habet, dicitur *pondus respectivum*; estque (98) minus pondere absoluto eiusdem globi.

PROPOSITIO CV.

531. *Iisdem positis, vis aquae sustinens globum* H *sub angulo* ECR, *erit ad eius vim, quae eundem sustentat sub alio angulo* EC*r*, *ut* ER *ad* E*r*.

Vis aquae sustinens globum H sub angulo ECR, est (528) ad pondus respectivum eiusdem globi, ut ER ad CE. Sed etiam pondus respectivum globi H est (529) ad aquae vim, quae ipsum sustinet sub angulo EC*r*, ut CE ad E*r*; ergo ex aequo, vis aquae sustinens globum H sub angulo ECR, erit ad aquae vim, quae eundem sustinet sub angulo EC*r*, ut ER ad E*r*.

(a) Per nostram Mechanicam. Coroll. prop. 13. §. 192. pag. 34.

PROPOSITIO CVI.

532. *Si directio* ET (*Fig.* 126.) *fluentis aquae sit horizontalis; vis aquae sustinens globum* H *sub angulo* ECR, *erit ad aquae vim, quae ipsum sustinet sub angulo* EC*r*, *ut tangens anguli* ECR *ad tangentem anguli* EC*r*.

Agatur horizontalis AG, quae parallela erit ad directionem aquae ET, et quadrantem circuli tanget in puncto A. Quia in triangulo CER est AF parallela ad eius latus ER; erit ER ad AF, ut CE ad CA. Sed cum A*f* sit pariter parallela ad latus E*r* trianguli EC*r*, erit etiam E*r* ad A*f*, ut CE ad CA; ergo etiam ER erit ad AF, ut E*r* ad A*f*, et permutando ER erit ad E*r*, ut AF ad A*f*. Sed vis aquae sustinens globum H sub angulo ECR, est (531) ad eius vim, quae eundem sustinet globum sub angulo EC*r*, ut ER ad E*r*; ergo etiam vis prima erit ad secundam, ut AF ad A*f*, sive ut tangens anguli ECR ad tangentem anguli EC*r*.

COROLLARIUM I.

533. Quoniam hae duae vires sunt (325) ut quadrata velocitatum aquae in locis H, et *b*; utique etiam quadratum velocitatis aquae in loco H, erit ad quadratum velocitatis eiusdem aquae in loc *b*, ut tangens anguli ECR ad tangentem anguli EC*r*.

COROLLARIUM II.

534. Si ergo ope quadrantis circuli CBA in gradus, et minuta divisi, mensurentur gradus arcuum AQ, A*q*, quos intercipiunt anguli ACR, AC*r*, indeque ex tabulis sinuum depromantur illorum tangentes AF, A*f*; dabitur (533) statim ratio, quae intercedit inter quadrata velocitatum aquae in locis H, et *b*, atque adeo etiam ratio earundem velocitatum.

COROLLARIUM III.

535. Hinc si determinetur velocitas absoluta aquae in uno casu, ex. gr. in fluminis superficie (quod ope corporis alicuius innatantis aquae facile obtinetur), poterit etiam ope eiusdem globi determinari velocitas absoluta aquae in omni casu.

PROPOSITIO CVII.

536. *Dato tum distractionis angulo* ECR (*Fig.* 125.), *sub quo currens aqua sustinet globum* H, *tum etiam angulo* ZET, *quo nempe directio aquae* ET *declinat a recta horizontali* EZ; *determinare angulum* CRE *filo* CH, *et recta* ET *contentum*.

Cum datus sit rectus angulus ECB, et detur etiam (ex hyp.) angulus ECR; dabitur quoque reliquus RCB, aut DCB. Verum ob parallelas CB, EZ, angulus DCB aequatur alteri CDE; igitur etiam notus erit angulus CDE. Hic autem utpote externus trianguli EDR, est aequalis summae angulorum DER, DRE; ergo haec summa pariter nota erit. Sed datus est (ex hyp.) illorum unus, scilicet DER; ergo et innotescet reliquus DRE, aut CRE.

PROPOSITIO CVIII.

537. *Iisdem positis, pondus determinare aequivalens vi* HI, *qua nempe aqua sustinet globum* H *sub distractionis angulo* ECR.

Ex dato tam distractionis angulo ECR, quam inclinationis altero ZET, quaeratur (536) angulus CRE. Deinde fiat, ut sinus inventi anguli CRE ad sinum dati anguli ECR, ita pondus respectivum globi H ad quartum terminum proportionalem; Dico, hunc exprimere pondus aequivalens vi HI. Nam si inventum hoc pondus vocetur P; pondus respectivum globi H erit (ex constr.) ad pondus P, ut sinus anguli CRE ad sinum anguli ECR, vel ut CE ad ER. Sed vis HO est (528) quoque ad vim HI, ut CE ad ER; ergo et pondus respectivum globi H erit ad pondus P, ut vis HO ad vim HI. Sed pondus respectivum globi H aequivalet (528) vi HO; ergo et pondus P aequivalebit alteri vi *HI*, qua nempe aqua sustinet globum H sub angulo ECR.

PROPOSITIO CIX.

538. *Si aqua, quae dum currit secundum directionem* ET, *sustinet globum* H *sub angulo* ECR, *de repente omnem amittat motum; et ex adverso quadrans circuli* CBA, *una cum globo suspenso* H *progrediatur in aqua immota iuxta rectam* TE *cum eadem velocitate, qua aqua antea ferebatur; globus* H *sustinebitur, uti prius, sub eodem distractionis angulo* ECR.

Glo-

Globus H eandem ab aqua excipit impressionem (354), sive aqua currens secundum directionem ET cum data velocitate in quiescentem impingat globum, sive quadrans circuli, una cum globo suspenso H feratur in aqua immota iuxta rectam TE cum eadem velocitate, qua aqua antea ferebatur. Atqui impressio, quam in primo casu excipit globus H, retinet (ex hyp.) hunc suspensum sub distractionis angulo ECR; ergo etiam impressio, quam idem globus excipit in secundo, ipsum similiter sustinebit sub distractionis angulo ECR.

Corollarium.

539. Quia in casu in quo movetur globus, et aqua quiescit, impressio a globo excepta, fit a resistentia eiusdem aquae: in casu autem in quo aqua movetur, et globus quiescit, impressio facta in globo, procedit a vi HI; sequitur, resistentiam aquae in primo casu aequari etiam vi HI.

LEMMA.

540. *Supra circulum* NS (*Fig.* 127. 125.) *aequalem circulo maximo globi* H, *cylindrum aqueum construere, cuius pondus aequetur alteri dato* P.

Fiat 1.°, ut pondus unius pedis cubici aquae ad pondus aquae alteri P aequale, ita pes cubicus aquae ad quartum terminum proportionalem, qui erit volumen aquae, cuius pondus aequatur alteri dato P. 2.° Volumen aquae hoc modo inventum, dividatur per circulum datum NS, et quoto qui inde emergit, aequalis fiat longitudo rectae NM. 3.° Super basim NS, et sub altitudine inventa NM cylindrus MS aqueus efficiatur. Dico, hunc esse, qui petebatur. Nam recta NM (ex constr.) est quotus, qui oritur dividendo volumen aquae, cuius pondus aequatur alteri dato P, per circulum datum NS. Sed si quotum ducas in divisorem, factum inde ortum aequabitur dividendo; igitur factum ex recta NM in circulum NS ducta, aequabit volumen aquae, cuius pondus aequatur alteri dato P. Idem autem factum est volumen aquei cylindri MS; ergo etiam volumen aquei cylindri MS aequabit volumen aquae, cuius pondus aequatur alteri dato P, ideoque pondus cylindri MS aequabitur dato P.

PROPOSITIO CX.

541. *Dato tum distractionis angulo* ECR (*Fig.* 125.), *sub quo suspenditur globus* H, *tum etiam declinationis altero* ZET, *vel* DER,

alti-

altitudinem invenire, ex qua si caderet idem globus, eam acquireret velocitatem, quam habet aqua in loco H.

Quaeratur (537) pondus P aequivalens vi HI, qua nempe aqua sustinet globum H sub angulo ECR. Tum super basim NS (Fig. 127.) circulo maximo globi H aequalem, fiat (540) cylindrus aqueus MS, cuius pondus aequetur alteri dato P. Dico, altitudinem eius MN esse illam, quae petebatur. Nam, si fieri potest, altitudo ex qua globus cadendo in vacuo acquireret velocitatem, quam habet aqua in loco H, non sit MN, sed VN, maior scilicet quam MN, et aqueus cylindrus MS produci intelligatur usque ad V. Iam si ponas aquam immotam esse, et viceversa quadrantem circuli CBA, una cum globo H iuxta directionem TE gro-gredi intra illam cum eadem velocitate, qua aqua antea ferebatur; utique resistentia quam globus patitur hoc in casu, aequabitur (354) vi HI, qua nempe aqua dum movebatur, sustinebat eundem globum sub angulo ECR. Sed resistentia quam globus patitur in hoc casu, valet pondus (365) aquei cylindri VS, et vis aquae HI sustinens globum in primo casu, valet (540) pondus cylindri aquei MS; ergo et pondus aquei cylindri VS aequabitur ponderi aquei cylindri MS, totum parti, quod est absurdum. Falso itaque ponebatur, altitudinem ex qua globus cadendo in vacuo, acquireret celeritatem qua fertur aqua in loco H, esse VN, maiorem scilicet quam MN. Pari modo constabit, hanc altitudinem non posse minorem esse quam MN; ergo altitudo quaesita erit MN.

Corollarium.

542. Quia altitudine MN inventa, statim ex tabulis depromi potest (307) absoluta velocitas ipsi debita; ideo etiam invenietur velocitas absoluta aquae in loco H.

CAPUT XII.

De fluminum cursu obstaculis impedito.

DEFINITIO XV.

543. Si dum fluminis aqua transit per aliquam sectionem, incidat in obstaculum impediens eius motum; illa sectio dicitur *impedita*; aliae autem eiusdem fluminis sectiones, in quibus nullum est impedimentum, *liberae* nuncupantur.

Scholion.

544. Obstacula, quae impediunt cursum fluminis, sunt diversa; alia enim sunt perpetua, et uniformia, alia vero quasi perpetua, et difformia. Obstacula primi generis sunt resistentiae attritus, aut frictionis, quas indesinenter subit flumen in riparum, et fundi asperitatibus superandis. Obstacula secundi generis sunt 1.° diminutiones declivitatis, quas ordinatim, et ferme perpetuo habet fundus, dum ab origine fluminis recedendo, ad mare accedit. 2.° Varii flexus alvei, et latitudines eius auctae. 3.° Cataractae, gurgites aquae, congeries lapidum, et arenarum, quae passim in fundo alvei esse solent, aliaeque huius generis resistentiae, quae agentes aut simul, aut separatim, nedum impediunt aquae accelerationem, sed positivam etiam retardationem inferunt aquae motui.

DEFINITIO XVI.

545. Si singulae aquae particulae constitutae tam in summitate sectionis, et in fundo, quam in intermediis aliis eius punctis, incidant in obstacula; quae tantundem retardent illarum motum, quantum hic interea acceleratur vel ob descensum, vel ob pressionem aquae superius incumbentis; tunc velocitas earundem dicitur *redacta ad aequabilitatem*.

PROPOSITIO CXI.

546. *Si dum aqua currit intra alveum inclinatum, incidat in obstaculum, superficies eius altius quam antea elevabitur.*

Planum inclinatum BK (Fig. 128.) ubivis aeque latum, referat fundum fluminis, super quem motu sensibiliter accelerato descendat aqua ex B in K. Iam sepositis omnibus impedimentis, sectiones BA, GL continuo (491) minuentur, et ideo pars quaevis eius superficiei AL eo proximior erit fundo, quo remotior erit a puncto A. Perventa autem aqua ad sectionem GL, ponamus velocitates singularum eius particularum tam in superficie, quam in fundo, et eius medio existentium, ad aequabilitatem sensibilem pervenisse, eandemque (propter obstacula uniformia, quae protrahantur usque ad punctum K) in sequenti etiam tractu GK perpetuo conservari; utique hoc in casu flumen in toto tractu GK eandem semper habebit altitudinem aquae vivae, et ideo aequales erunt altitudines GL, KM, consequenter superficies LM erit parallela ad fundum GK. Verum si ponas aquam in sectione KM incidere in obstaculum, quod minuere possit vel in omnibus eius particulis, vel in aliquibus earundem gradum illum aequabilis velocitatis, quem in superiori tractu GK habebat; statim eius velocitas minuetur, et ideo per sectionem impeditam KM tempore dato effluet aquae quantitas minor illa, quae antea per eandem liberam effluebat. Sed ad sectionem impeditam KM eadem adhuc quantitas aquae confluit, quae antea ad eandem liberam confluebat; ergo necesse erit aliquid eius continuo remanere, atque ita aquam in loco K altius quam antea elevari.

Corollarium I.

547. Unde si fiat, ut velocitas media, quae consurgit ex omnibus residuis velocitatibus particularum aquae, postquam ipsae in obstaculum inciderunt, ad velocitatem mediam, quae resultat ex omnibus velocitatibus earundem particularum, antequam ipsae inciderent in obstaculum, ut KM ad KC; esset (482) KC altitudo, ad quam assurgeret aqua in loco K, si in ipso actu elevationis particulae eius inferiores nihil velocitatis amissae recuperarent ob pressionem aliarum superius incumbentium. Hic autem casus semper habebit locum, quamdiu velocitas particularum ab ipso obstaculo diminuta, erit adhuc maior velocitate, quae a pressione KC produci posset.

Corollarium II.

548. At si haec velocitas diminuta esset minor velocitate, quae a pressione KC produci posset; illa ob pressionem hanc augeretur, ideoque ut per sectionem factam in K, dato tempore efflueret tantum aquae, quantum interea confluit ad eandem, non amplius opus esset tota altitudine inventa KC, sed sufficeret minor alia, ut KD. Propterea hoc in casu perventa aqua ad punctum D, statim cessaret omnis elatio eiusdem, ac proinde superficies eius eodem in puncto D permanens prorsus esset.

Corollarium III.

549. Quoniam per sectionem impeditam KD tantum aquae effluit (548), quantum antea effluebat per liberam sectionem KM; velocitas media aquae in sectione KD erit (482) ad mediam eius velocitatem in sectione KM, ut KM ad KD. Est autem KM minor KD; ergo et velocitas media aquae in sectione impedita KD, minor est media velocitate eiusdem in libera sectione KM. Unde aqua per vim pressionis non recuperat totam illam velocitatem, quam antea amiserat propter obstaculi resistentiam.

Co-

Corollarium IV.

550. Et cum aqua usque ad D elata, nequeat ibi suspensa haerere, quin se expandat supra superficiem LM usque ad certum limitem, ut NO; patet in hac pariter superficie aliquam futuram esse aquae elevationem, et quidem talem, ut superiores fluminis sectiones positae prope KD, eo minus sint altae, minusque propterea impeditae, quo magis ad sectionem NO accedunt. Hinc superficies elata aquae habebit usque ad NO positionem DN minus declivem scilicet quam LM.

Scholion.

551. Haec omnia vera sunt cuiuscunque generis sit obstaculum sectioni KM admotum. At si in sectionibus positis infra KM, obstaculum hoc cessaret; tunc posset flumen mediante novo descensu rursus accelerari, deprimi, et acquirere vel totam, vel saltem partem illius velocitatis, quam propter obstaculum iam amiserat.

Lemma I.

552. *Si planum horizontale, super quo corpus solidum promovetur, perpetuas, et uniformes habuerit asperitates; resistentia frictionis quam patietur, erit constans, et uniformis.*

Sive plani asperitates considerentur ut pili elastici deprimendi, et postea sponte sua se iterum erigentes, sive ut fila a mobili perrumpenda, vel alio quovis modo hisce aequivalente, ad omnia haec praestanda requiritur semper vis quaedam determinata, nec refert quae velocitas sit agentis. Unde sicuti corpus motum in fluido glutinoso, eandem perpetuo vim insumit ad eius particulas invicem separandas, quacunque demum velocitate feratur: ita dum super plano uniformiter aspero promovetur, eandem perpetuo vim impendet ad vincendas eius asperitates, sive parva, sive magna velocitate progrediatur. Quapropter eodem modo, quo supra (374) ostensum fuit, resistentiam quam subit corpus ex uniformi partium fluidi tenacitate, conferri posse cum resistentia, quam corpus in altum proiectum subit a gravitate, etiam ostendetur, resistentiam corporis in plano uniformiter aspero incedentis, conferri posse cum resistentia corporis in altum proiecti orta ex gravitate. Atqui haec resistentia est constans, et uniformis; igitur constans, et uniformis altera quoque erit.

Scho-

Scholion.

553. Prima fronte apparet, aucta mobilis velocitate, frictionem quoque augendam esse. Nam quo velocius est corpus, quod super plano uniformiter aspero promovetur, eo plures illius prominentiae vel sunt dato tempore abradendae, vel intra cavitates huius deprimendae, et ex eisdem postea extrahendae. Nihilominus tantum abest, ut velocitas maior augeat frictionem, quin potius plerumque ipsam minuat. Dum enim unius corporis superficies super aliam alterius corporis promovetur, illius pressio est in causa, ut prominentiae unius intra alterius cavitates profundius deprimantur. At si progredientis corporis superficies adeo velox fit, ut eius pressio agens tam brevi temporis intervallo, nequeat prominentias intra cavitates deprimere ad tantam profunditatem, ad quantam eas pressio magis continua depressisset; evidens est frictionem valde minorem inde futuram esse. Non solum autem id ratio suadet, sed etiam docet experientia; ubi enim aliqua machina ad certum gradum velocitatis pervenit, minor quam antea fit affrictus. Non tamen colligi inde potest, eo minorem semper fieri frictionem, quo magis velocitas augetur; frictio siquidem aliquo in casu ob alias causas, veluti ob nimis magnam fracturam partium prominentium, augeri potest.

LEMMA II.

554. *Si corpus solidum descendat super planum aliquod inclinatum, quod perpetuas, et uniformes ubique habeat asperitates; semper accelerabitur eius motus.*

Quia corpus super planum asperum inclinatum (ex hyp.) actu descendit, consequens est, ut eius gravitas relativa sit maior quam resistentia ab asperitatibus plani orta. Sed gravitas relativa est constans, et uniformis, pariterque constans, et uniformis (353) est resistentia a plani asperitatibus oriunda; ergo illarum differentia, quae singulis momentis solidum corpus sollicitat ad descensum, necessario constans, et uniformis futura erit, ac proinde motus corporis descendentis semper accelerabitur, licet per gradus minores illis, quas produxisset gravitas relativa, si nulla fuisset resistentia frictionis.

Corollarium.

555. Hinc si solidum corpus descendat super planum uniformiter asperum, et inclinatum; nunquam eius motus ad aequabilitatem perfectam reduci poterit.

PROPOSITIO CXII.

556. *Si aqua fluminis in declivi alveo progredientis, solam subeat resistentiam a perpetuis, et uniformibus fundi, et riparum asperitatibus oriundam; nunquam ad aequabilitatem perfectam, et mathematicam reducetur. Poterit tamen ad aequabilitatem physicam pervenire, ob alias ferme perpetuas resistentias, in quas incurrit.*

I. Dum corpus solidum supra planum uniformiter asperum, et inclinatum descendit, nunquam (555) eius motus ad aequabilitatem perfectam reduci potest, non obstantibus perpetuis, et uniformibus asperitatibus, in quas incurrit. Sed quod contingit in motu solidi supra hoc planum, idem evenit quoque in motu aquae intra declivem, et uniformiter scabrum alveum progredientis; ergo nec motus aquae in hoc alveo decurrentis ad perfectam, et mathematicam aequabilitatem reduci poterit, non obstantibus perpetuis, et uniformibus asperitatibus fundi, et riparum, quae indesinenter vim aquae acceleratricem a declivitate alvei ortam minuunt.

II. Quamvis perpetua resistentia, quam fluminis aqua subit in fundi, et riparum asperitatibus superandis, in causa sit, ut aqua ad perfectam, et mathematicam aequabilitatem reduci nequeat; aliae tamen quasi perpetuae resistentiae, uti sunt diminutiones declivitatis, quas ordinatim, et quasi perpetuo habet fundus, congeries lapidum, et arenarum, quae hinc inde in alveo esse solent, aliaeque huius generis resistentiae ita vim aquae acceleratricem a declivitate alvei ortam minuunt, ut incrementa velocitatis ab illa genita, sensibiliter evanescant. Atqui motus aquae fluminis hoc in casu ad aequabilitatem physicam est redactus; igitur ad hanc saltem reduci potest.

Scholion I.

557. Id autem in fluminibus evenire constans nos docet experientia. Nam in eiusdem fluminis sectionibus aeque latis, et magno intervallo distantibus inter se, eandem ferme altitudinem vivam aquae perpetuo observamus. Unde etiam in tractibus valde magnis, qui magis sunt regulares, videmus fluminis superficiem esse sensibiliter parallelam ad eius fundum, etsi inclinatum ad horizontem. Id autem accidere nunquam posset, nisi velocitas media aquae in hisce tractibus constitutae, haberet saltem sensibilem aequabilitatem, quae (481) cum aequalibus sectionibus perpetuo iungi solet.

SCHOLION II.

558. Ut aqua fluminis intra declivem, et uniformiter scabrum alveum progredientis, ad aequabilitatem physicam, et sensibilem reducatur, non est necesse, ut singulae eius particulae constitutae in eadem altitudine sectionis, velocitates ad sensum aequales habeant; sed sufficit solum, ut diversae aquae particulae ad sensum retineant illos diversos gradus celeritatis, quos per descensum antea acquisiverunt. Id vero accidit quotiescunque incrementa velocitatis, quae singulis momentis ipsae acquirerent per descensum, ab impedimentis, quae in eas agunt iuxta oppositam directionem, sensibiliter elidantur.

PROPOSITIO CXIII.

559. *Flumen in puncto* K (*Fig.* 128.) *transeat a directione* GK *ad aliam minus inclinatam* KF. *Sint autem in alvei tractibus* GK, KF *eadem obstacula uniformia, et difformia, quibus flumen ad physicam aequabilitatem reduci possit. Dico, ipsum ad hanc tardius pervenire in tractu magis declivi* GK, *quam in alio minus inclinato* KF.

Fluminis aqua in alvei tractibus GK, KF ad aequabilitatem physicam non reducitur, nisi in utroque vis aquae acceleratrix physice fit aequalis resistentiae impedimentorum. Sed vis aquae acceleratrix est maior in tractu magis declivi GK, quam in alio minus inclinato KF, et resistentia impedimentorum ponitur eadem in utroque; ergo cum (ex hyp.) possit flumen in tractibus alvei GK, KF aequabilitatem physicam adipisci, utique ad hanc tardius reducetur in tractu magis declivi GK, quam in alio minus inclinato KF.

COROLLARIUM I.

560. Velocitas aequabilis, quam habet flumen in tractu GK, maior erit aequabili velocitate, qua idem flumen movetur in alio tractu KF. Cum enim flumen in tractu GK ad aequabilitatem (559) tardius reducatur, quam in alio KF; utique eius motus antequam ad aequabilem reducatur, longiori tempore accelerabitur in tractu GK, quam in alio KF; ideoque velocitas aequabilis, quam habet flumen in primo tractu, erit maior illa, cum qua in altero promovetur.

COROLLARIUM II.

561. Unde si rursus in inferiori altero puncto F transeat flumen a directione KF ad aliam minus declivem FS, pariterque in hoc novo tractu impedimenta eadem perseverent, quae erant in superiori tractu KF; velocitas aequabilis, quam habet aqua in tractu KF, erit maior aequabili velocitate, cum qua progredietur in tractu FS.

COROLLARIUM III.

562. Quare in quavis diminutione declivitatis, quam ordinatim alveus adipiscitur, semper fluminis aqua amittit partem illius velocitatis, quam acquisiverat per descensum.

COROLLARIUM IV.

563. Et quia alveus fluminis consideratur velut polygonum ex infinitis laterculis rectis constans, quae eo minorem habent declivitatem, quo magis ad mare accedunt; consequens est, ut dum alveus iam pervenit ad minimam, et insensibilem declivitatem, velocitas acquisita ab aqua fluminis per descensum, tota, vel ferme tota extincta sit.

SCHOLION.

564. Hic autem casus, in quo scilicet tota, vel ferme tota extingui solet velocitas acquisita a flumine per descensum, iuxta Gulielminium admodum frequens est in fluminibus, quae ad declivitatem minimam, aut insensibilem devenerunt. Unde in illis velocitas aquae inferioris a superioris pressione repeti solum debet (511); velocitas autem aquae in superficie fluminis constitutae, est (510) soli descensui tribuenda.

PROPOSITIO CXIV.

565. *Altitudinem invenire, ex qua aqua cadendo in vacuo, acquirere possit illam velocitatem, quam actu habet in impedita fluminis sectione.*

Per ostium BR (Fig. 129.) inexhausti lacus GBRV exeat flumen BRKP, originem realem habens in puncto A, sectionem vero KP in K. Tum recta KP producta, donec conveniat cum horizontali superficie lacus GB in O, in hanc ex K, I, P demittantur perpendiculares KL, IM, PN. Deinde vertice O circa axem OK descripta parabola OHZ, ipsi ex K, I, P ordinentur KZ, IC, PH, quae, semotis impedimentis, essent (512) aquae velocitates in respondentibus eisdem punctis. Ponatur modo flumen ad sectionem KP appulsum, ita incidere in obstaculum, ut aqua in P amittat partem FH velocitatis eius PH, habeatque solum superstitem velocitatem PF. Denique ducta FE parallela ad axem OK, et ordi-

ordinata huic ED, fiat PO' ipsi OD aequalis. ducaturque per O horizontale planum O'A', quod rectis PN, IM, KL occurrat in N', M, L'. Dico, quod aqua cadendo in vacuo ex altitudine N'P, acquirere potest velocitatem PF, quam habet aqua in puncto P impeditae sectionis KP. Velocitas enim, quam, sepositis impedimentis, haberet aqua in puncto P, est (ex hyp.) ad actualem eius velocitatem eodem in puncto P, ut PH ad PF, vel ut ordinata PH ad ordinatam DE, aut ut radix quadrata abscissae OP ad radicem quadratam abscissae OD, sive (ex constr.) ut radix quadrata abscissae OP ad radicem quadratam rectae O'P. Verum ob parallelas O'N', ON, est OP ad O'P, ut altitudo NP ad altitudinem N'P; ergo etiam velocitas PH erit ad velocitatem PF, ut radix quadrata altitudinis NP ad radicem quadratam altitudinis N'P. Sed etiam velocitas acquisita ab aqua cadendo ex altitudine NP est ad velocitatem acquisitam cadendo ex altitudine N'P, ut radix quadrata altitudinis NP ad radicem quadratam altitudinis N'P; ergo velocitas PH erit quoque ad velocitatem PF, ut velocitas acquisita ab aqua cadendo ex altitudine NP, ad velocitatem acquisitam cadendo ex altitudine N'P. Sed velocitas PH est (486) illa, quam aqua acquirere potest cadendo ex altitudine NP; ergo et velocitas PF erit illa, quam acquirere potest aqua cadendo ex altitudinne N'P.

Corollarium.

566. Quia velocitas actualis PF est (565) illa, quam acquirere potest aqua cadendo ex altitudine N'P; patet, hanc quoque velocitatem eidem altitudini convenire.

Scholion.

567. In praxi haec altitudo sequenti modo poterit inveniri. Quaeratur aliquo artificio velocitas actualis aquae in puncto P, aut spatium illud, quod aqua in puncto P tempore dato, ex. gr. minuto secundo absolvit. Deinde in tabulis velocitatum descriptis a Belidoro, quaeratur altitudo ipsi conveniens. Ita si inveniatur aqua in puncto P intra minutum secundum absolvere spatium ped. 17, poll. 3, lin. 10, statim invenies altitudinem N'P esse pedum 5.

Propositio CXV.

568. *Iisdem positis, si vertice O' circa axem O'K describatur per F parabola O'FQ, quae eadem prorsus erit cum altera OHZ; velocitates actuales aquae in punctis quibuslibet* I, *et* K, *erunt ut respondentes ordinatae* IT, KQ *eiusdem parabolae* O'FQ.

Sicut velocitas actualis aquae in puncto P est (566) illa, quae convenit altitudini N'P, sive distantiae puncti P a plano horizontali O'A': ita actuales velocitates aquae in punctis aliis I, et K eiusdem sectionis KP erunt illae, quae conveniunt altitudinibus IM', KL', sive eorum distantiis ab eodem plano horizontali O'A'. Unde velocitas aquae in puncto I erit (268) ad velocitatem eiusdem in puncto K, ut radix quadrata altitudinis IM' ad radicem quadratam altitudinis KL', sive ut radix quadrata abscissae IO' ad radicem quadratam abscissae KO'. Sed etiam ordinata IT est ad ordinatam KQ, ut radix quadrata abscissae IO' ad radicem quadratam abscissae KO'; ergo et velocitas aquae in puncto I erit ad velocitatem eiusdem in puncto K, ut ordinata IT ad ordinatam KQ.

Corollarium I.

569. Unde complexus velocitatum aquae fluentis per sectionem KP, qui, sepositis resistentiis, fuisset (513) spatium parabolicum PHZK, nunc propter illas redactus erit ad solum spatium PFQK.

Corollarium II.

570. Quia velocitates, quas habet aqua in punctis quibuslibet I, et K sunt (568) ut radices quadratae altitudinum respondentium IM', KL', sive distantiarum a plano horizontali A'O'; liquet, particulas I, et K easdem omnino habere celeritates in impedita sectione KP, quas in libera haberent, si fluminis origo esset in puncto A', quam ob rem idem punctum A' *origo aequivalens fluminis* appellatur.

Corollarium III.

571. Propterea velocitates particularum I, et K non sunt ut radices quadratae, sive (270) in ratione subduplicata altitudinum aquae Kl, Im eisdem superius incumbentis; alioquin particula P, utpote non habens aquam superius incumbentem, nullam haberet quoque velocitatem, contra experientiam. Ne velocitates quidem particularum I, et K possunt esse in ratione subduplicata altitudinum IM, KL, seu distantiarum a plano AO, quod est realis origo fluminis BRKP; haec siquidem ratio velocitatum obtinet solum in hypothesi, quod sectio KP nullo modo sit impedita.

CAPUT XIII.

De modo, quo solet flumen ope excavationis efficere alveum sibi convenientem.

LEMMA

572. *Si planum inclinatum ex particulis terreis componatur, quae constantem, et uniformem habeant cohaesionem; vis qua particulae hae resistunt mutuae separationi, erit eo maior, quo minor vicissim erit declivitas eiusdem plani.*

Circa centrum C quadrantis circuli BAE (Fig. 130.) posita intelligantur diversa plana, velut AC, MC, diversimode inclinata ad planum horizontale EC. Sint autem haec plana ex particulis terreis composita, quae constantem, et uniformem ubique habeant cohaesionem. Gravitas relativa, qua particulae plani AC ad descensum sollicitantur supra hoc planum, perpetuo conatur illas invicem separare; contra autem cohaesio mutua earundem resistit indesinenter huic separationi. Sed hae duae vires agunt iuxta oppositas directiones; ergo si in plano AC fingantur aequales esse, minima vis extranea agens secundum rectam parallelam plano AC, separabit particulas huius plani. Finge nunc ab hac vi corrosam esse massam terream ACM, et planum AC acquisivisse positionem minus inclinatam MC. Hoc autem facto, terrestres particulae positae in plano MC, habent quidem eandem (ex hyp.) cohaesionem, quam habebant particulae in plano AC, sed gravitatem relativam minorem habent; ergo ad separandas particulas plani MC necessaria erit vis extranea maior illa, qua separabantur particulae plani AC, ideoque vis qua particulae plani resistunt mutuae separationi, est eo maior, quo minor vicissim est declivitas eiusdem plani.

COROLLARIUM.

573. Hinc si transeat flumen a plano magis declivi BK (Fig. 128.) ad aliud minus inclinatum KF; resistentia eius fundi in plano BK erit minor quam resistentia eiusdem in plano KF.

PROPOSITIO CXVI.

574. *Si fundus alvei a vi aquae in flumine progredientis alicubi excavetur; eius declivitas diminuitur.*

Pla-

num AC (Fig. 130.) referat fundum alvei alicuius, in quo tanta sit aquae currentis vis, ut rodere ipsum possit; utique hoc in casu nulla ratio esse potest, cur actu fundum AC non rodat. Sed facta excavatione in fundo AC, hic necessario transire debet a positione AC ad aliam, ut MC; ergo post excavationem reperietur fundus in plano MC. Sed quia angulus MCE est minor altero ACE, declivitas fundi MC erit minor quam declivitas fundi AC; ergo dum fundus alvei excavatur, eius declivitas diminuitur.

PROPOSITIO CXVII.

575. *Transeat flumen per plura plana contigua BK, KF, FS (Fig. 128.) diversimode inclinata ad horizontem. Praeterea sint haec plana ex terreis particulis composita, quae constantem, et uniformem ubique habeant cohaesionem. Tandem vis aquae in hoc flumine tanta sit, ut possit plana singula excavare. Dico, in plano magis declivi BK maiorem futuram esse excavationem, quam in sequentibus aliis KF, FS minus inclinatis ad horizontem.*

Quia fundus BK est declivior quam KF, vis aquae, quae terram excavat in BK, erit maior quam illa, quae eandem excavat in KF. Sed resistentia fundi BK est (573) minor quam resistentia fundi KF; igitur excavatio, quae producetur in fundo BK, erit maior quam illa, quae fiet in fundo KF. Simili modo ostendam, excavationem factam in fundo KF fore maiorem illa, quae fiet in altero fundo FS.

PROPOSITIO CXVIII.

576. *Etsi vis aquae in flumine tanta sit, ut possit divellere terrae partes, ex quibus alveus coalescit, et ita fundum, et ripas eiusdem alvei excavare; nihilo tamen minus haec excavatio tandem cessare debet.*

I. Cum vis aquae possit a fundo divellere eius partes, nil quidem impediet quominus illas actu corrodat, easque postea secum ferat, adeo ut in fundo nova cavitas efficiatur. Sed quando fundus fluminis excavatur eius declivitas (574) diminuitur; consequens ergo erit, ut in quavis excavatione (573) resistentia fundi crescat, et e contrario vis aquae, quae fundum excavat, minuatur. Unde si fundus alvei perpetuo excavetur, tandem necesse erit, ut hae duae vires oppositae inter se, ad aequalitatem, sive ad aequilibrium reducantur. Facto autem hoc aequilibrio, non amplius vis aquae rodere poterit fundi partes; ergo etiam cessabit omnis in fundo fluminis excavatio.

II. Quia tanta est in flumine aquae vis, ut possit etiam a ripis di-

divellere earum partes; utique has debebit corrodere, et secum ferre. Hoc autem facto, augetur fluminis latitudo, et diminuitur altitudo; ergo dum aqua fluminis rodit ripas, velocitas, et vis aquae perpetuo minuuntur. Resistentia autem riparum eadem semper manet; ergo tandem hae duae vires ad aequalitatem, sive ad aequilibrium reducentur, atque ita aqua non amplius rodet ripas.

Scholion I.

577. Iuvat autem hic observare, vim aquae citius pervenire ad aequalitatem, seu aequilibrium cum resistentia fundi, quam cum illa riparum. Siquidem primo in casu duae causae conspirant simul ad aequilibrium hoc formandum. Prima est vis aquae, quae diminuta fundi declivitate, decrescit; altera vero est resistentia fundi, quae diminuta fundi declivitate, augetur. Quare perpetuo diminuta vi fortiori, et simul aucta debiliori, ambae ad aequalitatem tandem reduci debent. In altero autem casu unica solum causa tendit ad aequilibrium producendum, nempe vis aquae corrodens ripas. Haec autem vis quidem ob auctam fluminis latitudinem diminuitur, sed resistentia riparum eadem semper manet. Unde diminuta vi fortiori, et manente alia debiliori, ambae ad aequalitatem denique reducentur. Propterea vis aquae citius accedit ad aequalitatem, et aequilibrium cum resistentia fundi, quam cum resistentia riparum.

Scholion II.

578. Quando vis aquae fluminis iam pervenit ad aequalitatem, seu aequilibrium cum resistentia eius fundi, flumen dicitur sibi *stabilem, et permanentem alveum* effecisse; nulla enim ratio esse potest, cur denuo alveus hoc in casu aliquam pati debeat mutationem.

Scholion III.

579. Itaque tria solent in quovis flumine convenire ad sibi stabilem, et permanentem alveum efficiendum. Primum est qualitas materiae, ex qua fundus, et ripae alvei componuntur; terrae siquidem arenosae facilius vi aquae cedunt, quam argillaceae, quarum partes tenacitate praeditae esse solent. Secundum est declivitas ipsius fundi; nam quo declivior est fundus arenosus, aut argillaceus, eo maior fit a vi aquae in fundo alvei excavatio. Tertium denique est vis aquae; ubi enim haec vis est maior, ibi etiam citius, et facilius superatur tam resistentia cohaesionis materiae alveum componentis, quam resistentia fundi orta ab exigua eius declivitate. Pro-

pte-

pterea quodvis flumen eam declivitatem denique sibi efficit, quae convenit vi eius aquae, et qualitati materiae, ex qua alveus coalescit.

Propositio CXIX.

580. *Manente eadem tenacitate, aut resistentia materiae, ex qua alveus coalescit, quo maior in flumine erit vis aquae, eo minor vicissim erit declivitas eius fundi.*

Manente eadem resistentia materiae fundi, quanto maior erit vis aquae in flumine progredientis, haec applicata materiae fundi, tanto maiorem effectum edet. Hic autem effectus non alius esse potest quam fundi excavatio; ergo quo maior erit vis aquae fluminis, eo maior fiet quoque excavatio fundi. Sed quando maior fit in fundo alvei excavatio, eiusdem fundi declivitas (574) diminuitur; ergo quo maior in flumine erit vis aquae, eo minor vicissim erit declivitas eius fundi.

Corollarium I.

581. Quoniam vis aquae prope fundum fluminis constitutae, ut plurimum pendet ab altitudine eius viva; ideo quo maior erit haec altitudo, eo minor vicissim erit declivitas eius fundi.

Corollarium II.

582. Quia aucta in flumine quantitate aquae vivae, eius quoque altitudo viva augeri solet; hinc quo maior erit in flumine quantitas aquae vivae, eo minor erit declivitas eius fundi.

Corollarium III.

583. Unde si duo flumina in unum confluant; coniuncta (582) habebunt minorem fundi declivitatem, quam separata.

Corollarium IV.

584. Et ideo si plura flumina confluant successive in aliud maius; hoc lineam fundi habebit (583) instar polygoni dispositam, cuius latera superiora maiorem semper cum horizonte angulum comprehendunt, quam inferiora. Hoc polygonum accipi etiam potest ut curva superius cava.

Corollarium V.

585. Verum si flumen per aliquem eius tractum eandem servet altitudinem aquae vivae, eandemque subinde etiam fundi declivitatem; tunc linea eius fundi in parvis distantiis erit sensibiliter quidem re-

cta,

cta, sed absolute, et in distantiis maioribus erit curva *spiralis* dicta, cuius nempe tangentes cum rectis a centro terrae ad contactuum puncta ductis, aequales semper angulos comprehendunt. Quo magis autem hi anguli ad rectos accedunt, eo magis etiam linea fundi accedet ad circuli circumferentiam, cuius centrum est idem cum centro terrae.

Corollarium VI.

586. Quod si velocitas aquae fluminis pendeat a sola alvei declivitate, tunc quamdiu accelerabitur motus aquae, tamdiu augebitur eius vis, et in fundo alvei excavatio. Hinc declivitas fundi (574) minuetur indesinenter, maiorque erit in illis locis, quae a principio fluminis parum distant, et contra minor in aliis remotioribus ab eodem.

Corollarium VII.

587. Usquedum igitur motus aquae in flumine acceleratur, linea eius fundi est curva superius cava, cuius tangentes cum rectis a centro terrae ad contactuum puncta ductis, angulos continent eo maiores, quo puncta haec a principio fluminis magis distant.

Corollarium VIII.

588. Cessante autem acceleratione, et aqua ad aequabilitatem physicam iam redacta, fundus alvei disponetur in linea, vel sensibiliter recta, vel in spirali, cuius declivitas ubique est uniformis.

Propositio CXX.

589. *Si flumen tantam habeat aquae vim, ut absque auxilio declivitatis valeat fundi partes rodere, et secum ferre; tandem efficiet sibi stabilem fundum horizontalem.*

Quoniam vis aquae in flumine tanta est, ut absque auxilio declivitatis valeat rodere fundi partes; nulla diminutio declivitatis sufficiens erit ad corrosionem hanc impediendam. Posita ergo quavis utcunque exigua declivitate, vis aquae ab excavando fundo alvei non cessabit, et ideo flumen denique sibi efficiet stabilem fundum horizontalem.

Corollarium I.

590. Hinc linea fundi erit (585) circuli circumferentia, in qua scilicet rectae ex centro terrae ad contactuum puncta ductae, rectos, sive aequales angulos cum respectivis tangentibus comprehendunt. Si tamen haec fundi linea in parva distantia accipiatur; eadem velut recta censenda erit.

Co-

Corollarium II.

591. Et si haec vis augeri concipiatur, fiet quidem maior in fundo alvei excavatio, sed horizontalis positio fundi non variabitur.

Corollarium III.

592. Unde horizontalia flumina prope illorum ostia, per quae in mare effundi solent, ut plurimum habent altiorem fundum, quam in aliis tractibus superioribus. Dum enim flumina dilatantur, aquae altitudines minuuntur, et ita illorum celeritates, et vires minores fiunt. Sed horizontalia flumina prope eorum ostia ut plurimum dilatantur ob resistentiam, quam subeunt ab aqua maris, dum in hoc ingredi conantur; ergo amittunt quoque vim necessariam ad sibi excavandum, et conservandum fundum horizontalem. Hinc nisi aliquo artificio ad arctiores limites reducantur, habebunt ibi altiorem fundum, quam in tractibus superioribus. Non itaque est mirandum, si fundi fluminum prope mare ut plurimum sint acclives.

Propositio CXXI.

593. *Si flumen, quod ex se habet vim sufficientem ad sibi efficiendum, et conservandum fundum horizontalem, excipiat aquas alterius fluminis influentis; contingere potest, ut vim hanc amittat, et propterea eius fundus aliquam sibi acquirat declivitatem.*

Flumen ADIE (Fig. 131.) in quo altitudo viva aquae est DI; vel AE, vim ex se habeat sufficientem ad sibi efficiendum, et conservandum horizontalem fundum EI. Deinde paullulum infra I excipiat aquas alterius fluminis influentis, ob quas subinde acquirat altitudinem novam, et quidem rectae DG aequalem. Cum igitur infra I quantitas aquae in flumine aucta sit, ibi etiam maiori vi rodere debet fundum, qui propterea deprimetur (591) usque ad horizontale planum GC, inferius ipso EI. Iam, quia tanta est (ex hyp.) vis aquae in flumine ADIE, ut posita quavis declivitate in eius fundo, perpetuo hunc corrodat, multo magis corrodet materiam plani IG perpendicularis ad horizontem, fundusque eius proinde acquiret declivitatem aliquam, ut HG. Atqui vis aquae ob declivitatem hanc novam augeri debet; igitur multo magis quam antea fundum rodet, ac deprimet, ideoque si flumen ADIE non obstante hac nova fundi depressione, adhuc idoneam vim haberet ad sibi efficiendum fundum horizontalem, hic deprimeretur tandem usque ad MG, ita ut fundi MG, GC in eodem essent plano horizontali MC. Sed dum fundus EI deprimitur versus MG, fluminis superficies AD deprimi quoque debet; haec igitur deprimetur, magisque

da

ad planum M G accedet. Sed cum superficies A D aquae A D I E non possit deprimi versus M G, quin pars aliqua altioris aquae D O C G cadat supra inferiorem aliam A D I E, huiusque proinde motum retardet, et vim diminuat; ergo dum fundus E I deprimitur versus M G, flumen A D I E amittit partem aliquam suae vis. Si ergo eius vis residua non sufficiat ad sibi efficiendum fundum horizontalem M G, necessario ipse declivis erit.

SCHOLION.

594. Neque haec declivitas causa erit, ut horizontalis positio fundi in superiori tractu fluminis immutetur. Nam si ponamus hanc declivitatem esse F G; evidens est, quod ipsa conveniente cum recta E I in F, flumen recuperabit in puncto F pristinam altitudinem vivam K F, vel A E, atque adeo supra F habebit vim sufficientem ad conservandum sibi fundum horizontalem E F.

PROPOSITIO CXXII.

595. *Manente eadem vi aquae in alveo progredientis, quo maior erit tenacitas materiae, ex qua componitur idem alveus, eo maior quoque erit declivitas eius fundi.*

Quoniam vis aquae, quae rodit alveum, est eadem (ex hyp.), quo maior erit tenacitas materiae, ex qua alveus coalescit, eo minor vicissim erit eiusdem alvei excavatio. Sed quanto minor est alvei excavatio, tanto maior vicissim est (574) declivitas eius fundi; ergo quo maior erit tenacitas materiae, ex qua alveus constat, eo maior quoque erit declivitas eius fundi.

COROLLARIUM I.

596. Ergo flumina, quae habent alveum argillaceum, habebunt quoque fundos decliviores, quam quae in arenoso, aut limoso alveo promoventur.

COROLLARIUM II.

597. Et si materia, ex qua alveus constat, diversam in variis locis habeat tenacitatem, diversas quoque in iisdem locis habebit fundus declivitates, et quidem eisdem (595) tenacitatibus proportionales.

COROLLARIUM III.

598. Unde ubi materia fundi est arenosa, ibi etiam maiores in eo fient excavationes; contra autem minores, ubi est argillosa. Neque alia ex causa oriri solent illae inaequalitates, quae passim in fundis fluminum observantur.

PROPOSITIO CXXIII.

599. *Iisdem positis, si fundus fluminis sit compositus ex crassioribus materiae partibus separatis, uti sunt lapides, et arenae; tunc quo maior erit specifica gravitas earundem, eo maior quoque erit declivitas eius fundi.*

Quanto maior est gravitas specifica materiae partium, quae mutuo separatae componunt fundum, tanto difficilius ipsae possunt a data vi aquae iuxta cursum fluminis promoveri. Verum dum hae expelluntur e locis suis, excavatur, atque deprimitur eius fundus; ergo quo maior est gravitas specifica materiae partium, quae mutuo separatae componunt fundum, eo difficilius hic excavatur, depriniturque. Sed quanto minor est excavatio fundi, tanto maior vicissim est (574) eiusdem declivitas; ergo quo maior erit specifica gravitas materiae partium quae separatae componunt fundum, eo maior quoque erit huius declivitas.

COROLLARIUM I.

600. Quia flumina, dum intra montes progrediuntur, fundos habent compositos ex lapidibus; ibi quoque habere debent declivitatem maiorem, quam in planitie, in qua fundi ex solis arenis constant. Similiter in illis locis, in quibus fundi sunt arenosi, declivitates perpetuo sunt maiores, quam ubi compositi sunt ex limo.

COROLLARIUM II.

601. Cum flumina in superioribus tractibus sui cursus ut plurimum fundum habeant lapidibus magnis stratum, qui postea successive eo minores fiunt, quo ab origine fluminum magis distant; sequitur, flumina in glareosis locis progredientia, lineam fundi habere superius cavam, quae pro maiori distantia ab origine eorundem, minores semper cum recta horizontali angulos comprehendit.

COROLLARIUM III.

602. Liquet similiter, quod si flumen postquam intra montes, et supra fundum compositum ex lapidibus se evolverit, ad planitiem denique reducatur, ibique rursus intra arenosum, et limosum alveum progrediendo, in mare influat, quin in itinere suo excipiat aquas alterius fluminis influentis; tunc linea eius fundi partim superius concava erit, et partim convexa. Quamdiu enim flumen in gla-

glareoſo, aut argilloſo alveo promovetur, ſuperius concava ſemper erit; dum vero in arenoſo, aut limoſo progreditur, erit convexa.

PROPOSITIO CXXIV.

603. *Si flumen praeciſe habeat vim ſufficientem ad revolvendum lapidem datae molis ſupra eius fundi aſperitates; non poterit quoque alium lapidem priori ſimilem, et homogeneum, ſed maioris molis, aut ponderis promovere.*

Sint duo lapides ſphaerici A, et B (Fig. 132.) ex eadem materia compoſiti, et diameter primi A ſit pedum 2, diameter autem ſecundi B pedis 1; eritque ſuperficies globi A quadruplo maior altera globi B, ſed pondus illius octuplo maius erit quam huius pondus. Nunc finge hos duos globos incumbere fundo ſcabro, et inclinato CE fluminis alicuius, in quo tanta ſit aquae vis, ut praeciſe valeat promovere ſupra eundem fundum globum minorem B. Dico, hanc vim omnino imparem eſſe promovendo alteri globo A. Vis enim aquae ſollicitans globum A, eſt ad illam, quae impellit alium globum B, ut numerus filamentorum aquae impingentium in globum A, ad numerum illorum, qui urgent alium globum B, ſive ut ſuperficies globi A ad ſuperficiem globi B, ſive (ex demonſt.) ut 4 ad 1. Unde vis aquae ſollicitans globum A, erit quadrupla illius, quae urget alium globum B. Sed pondus globi A eſt octuplum ponderis globi B; igitur aquae vires, quibus globi A, et B urgentur, minus creſcunt quam pondera, aut reſiſtentiae eorundem. Sed vis aquae ſollicitans globum B, praeciſe ſufficiens eſt ad promovendum globum minorem B; ergo vis aquae impellens alium globum A, impar omnino erit promovendo eidem globo, niſi vis minor aquae maiori fundi declivitate compenſetur.

SCHOLION.

604. Et ſane, aucta fundi declivitate, ob duplicem cauſam aqua facilius promovebit maiorem lapidem ſupra fundum. Non ſolum enim ob auctam fundi declivitatem, vis aquae impellens lapidem maior fit; ſed etiam lapis minus attolli debet ſupra horizontem, ut poſſit fundi ſcabritiem ſuperare.

COROLLARIUM.

605. Et ideo flumina in glareoſis locis progredientia, quo minorem habent fundi declivitatem, eo minores etiam lapides ſecum ferunt.

CAPUT XIV.

De modo, quo ſolet flumen convenientem efficere ſibi alveum per depoſitionem materiae extraneae in eius fundo.

DEFINITIO XVII.

606. MAteria aquae *extranea* illa dicitur, quae etſi non ingrediatur eius compoſitionem, una cum ipſa tamen in eodem alveo promovetur.

SCHOLION I.

607. Quando haec materia extranea ita aquae particulis ſe immiſcet, ut cum illa ferme conſtituat unam maſſam; tunc ſolet etiam eſſe cauſa, ut perturbetur aquae denſitas uniformis, et ideo aqua fiat lumini impervia, turbida, et opaca.

SCHOLION II.

608. Materiae extraneae, quas flumina ſecum ferunt, ad tres ſpecies reducuntur. Prima ſpecies eſt illarum, quae ſunt in ſpecie multo graviores aqua, uti ſunt lapides, et arenae craſſiores, et ideo impulſae ab huius vi, in altum non evehuntur, ſed ſolum radentes fundum, vel ferri ſolent lateraliter ripas verſus, vel iuxta fluminis directionem, vel tandem in loco aliquo accumulantur. Unde oritur conſtans illa mutabilitas alveorum in fluminibus illis, quae ſupra fundum refertum glarea progrediuntur. Secunda ſpecies comprehendit materias illas, quae ſunt aqua ſpecifice leviores, atque adeo ipſi innatant, et ſolum iuxta curſum fluminis transferuntur. Tertia tandem ſpecies eſt illarum materierum, quae ſunt nonnihil graviores aqua, ac proinde ab huius impulſu, et agitatione extolluntur a fundo uſque ad fluminis ſuperficiem. Huiuſmodi ſunt arenae ſubtiliores, et terreſtres aliae particulae, quae ab aquae velocitate, atque agitatione in altum evectae, atque ſuſpenſae, illius particulis ſe permiſcent, unamque ferme cum illis maſſam componunt. Quamvis autem velocitas, et agitatio aquae praecipuae cauſae ſint, cur ſubtiliores terrae particulae ab aqua ſuſtineantur; ad hoc tamen etiam concurrit tum exiguum earum pondus, tum etiam figura, et ſuperficies, ob quas ipſae idoneae minus fiunt ad ſuperandam inferiorem particularum aquae tenacitatem. Quare manente hac aquae agitatione, materiae in illa ſemper ſuſpenſae manent;

sed statim ac aquae agitatio diminuitur, ipsae a proprio pondere animatae deorsum cadunt.

SCHOLION III.

609. Difficillimum est determinare gradum velocitatis, et agitationis, qui per se sufficiens sit ad materiam extraneam, et contentam in dato flumine sustinendam. Nam quo maior est gravitas huius materiae, et quo maior est pariter eius quantitas, eo maiori quoque est opus velocitate, et agitatione, ut suspensa in flumine conservetur. Unde illa agitatio aquae, quae sufficiens per se est ad aliquot materiae particulas sustinendas, non poterit similiter sustinere maiorem copiam earundem, nisi et ipsa quoque agitatio aquae proportionaliter augeatur.

PROPOSITIO CXXV.

610. *Si flumen materias etherogeneas eius aquae permixtas habens, velocitatem paullatim, ac per quosdam veluti gradus amittat; primum deponet in eius fundo materias specifice graviores, et postea leviores.*

Quia materiae extraneae elatio, atque suspensio (608) ab aquae velocitate, et agitatione procedit; utique quo maior erit specifica gravitas materiae extraneae, quae aquae fluminis se permiscet, eo maiori opus erit (609) aquae velocitate, et agitatione, ut ipsa in altum evehi, et ibi etiam suspensa manere pergat. Igitur si velocitas, atque ita etiam agitatio aquae paullatim, ac velut per gradus quosdam diminuatur; primo deorsum cadent materiae graviores, utpote indigentes maiori aquae agitatione, ut in eadem suspensae manere possint; deinde vero minus graves, adeo ut quae pauxillum sunt aqua specifice graviores, sint quoque tardissimae omnium ad descensum.

PROPOSITIO CXXVI.

611. *Contingere potest, ut in aliquo loco fluminis aquas turbidas deferentis, nulla materia extranea deorsum cadat, in altero autem plurima deponatur in eius fundo.*

Velocitas aquae fluminis ortum ducit (511) vel ab altitudine viva aquae, vel a fundi declivitate. Atqui tam altitudo viva aquae, quam declivitas fundi in diversis locis eiusdem fluminis est diversa; ergo et velocitas aquae in diversis locis eiusdem fluminis va-

varia erit. Quare aliqua aquae pars esse poterit ita velox, ut graviores, et crassiores materias suspensas teneat, dum reliqua e contrario impar omnino est etiam levioribus, et subtilioribus sustinendis. Propterea primo in loco nulla materia extranea deorsum cadet, in altero autem plurima deponetur in eius fundo.

COROLLARIUM.

612. Quia maxima est (478) velocitas fluminis in eius filo, et minima prope ripas; consequens est (611), ut vel nihil, vel parum materiae extraneae sub filo fluminis deponatur, et multum prope ripas. Quapropter flumina recta, in quibus scilicet filum aquae aequaliter distat ab eius ripis, fundum habent in medio profundiorem, quam prope ripas. Oppositum autem succedit in fluminibus curvilineis, cum haec habeant aquae filum prope ripam concavam constitutum.

PROPOSITIO CXXVII.

613. *Si sectio fluminis recti quoad longitudinem, et latitudinem stabilis supponatur, eiusque figura sit parallelogrammum rectangulum, adeo ut eius ripae insistant ad rectos angulos horizonti; eadem sectio non mutabitur a vi aquae, quamdiu haec pura, et clara erit. At si turbida inde evadat; tunc nedum fundus fluminis deprimetur in eius medio, et ad latera attolletur, sed etiam amplitudo supremae eius superficiei maior fiet.*

I. Finge arte effectum esse alveum rectum, cuius fundus sit planum ita declive, ut a vi currentis aquae nec mutari, nec rodi possit. Finge praeterea eius ripas perpendiculares esse ad horizontem, et tali compositas ex materia, ut in hoc verticali situ manere possint, habeantque praecise sufficientem vim resistendi alteri vi aquae radentis illas. Finge tandem parallelogrammum rectangulum CBDF (Fig. 133.) esse huius fluminis sectionem. Dico, quod haec non mutabitur, quamdiu aqua per ipsum transiens, erit clara. Bifariam enim divide in A, et E rectas CB, FD, quarum prima exponit fluminis superficiem, et altera eius fundum. Pone dein materiam, ex qua alveus coalescit, ubique esse uniformiter resistentem. Cum itaque aqua transiens per hanc sectionem, fundum stabilem FD habeat; hic utique a vi aquae (578) corrodi, aut deprimi prorsus nequit. Sed neque etiam a materia aquae extranea attolletur, cum aqua fluminis (ex hyp.) clara sit; ergo aqua transiens per sectionem CBDF, eandem semper altitudinem vivam EA servabit. Demum quia verticales ripae CF, BD ex tali materia compositae supponuntur,

 tur,

tur, ut praecise resistant vi aquae radentis illas; permanebunt ipsae in locis suis. Igitur nullo modo mutabitur sectio CBDF.

II. At si turbida sit aqua, quae intra alveum promovetur; tunc nedum fundus fluminis deprimetur in eius medio, et ad latera attolletur, sed etiam amplitudo supremae eius superficiei fiet maior. Nam aqua in fundi medio punto E maiorem habere solet velocitatem, quam prope ripas, veluti in O, et H; ergo si eadem supponatur habere in puncto E praecise vim sufficientem ad impediendam depositionem materiae eodem in puncto E, utique sufficientem vim non habebit in puncto H, et multo minus in puncto F, ubi nempe velocitas currentis aquae est magis impedita a resistentia ripae CF. Unde inter E, et F materia extranea deponetur, et ita sectio minor fiet. Sectione autem fluminis diminuta, aquae altitudo in illa augeri debet, ex quo sequitur necessario, ut eius quoque velocitas, et vis crescat in loco E, atque adeo fiat nova in fundo cavitas usque ad K, donec scilicet sit vis aquae in aequilibrio cum resistentia fundi in K. Ulterius ob auctam altitudinem sectionis, velocitas etiam aquae ubique crescit, et propterea eius vis, quae prius erat in aequilibrio cum resistentia riparum CF, BD, nunc maior effecta ob acquisitum novum gradum velocitatis, rodere debebit ripas, quae propterea delabentur, et obtinebunt positiones GH, IO ita declives, ut earum resistentiae aequilibrentur cum aquae viribus ita auctis. Id autem fieri prorsus nequit, nisi etiam superficies CB aquae dilatetur usque ad G, et I; ergo si turbida fuerit aqua, quae intra alveum promovetur, non solum fundus fluminis deprimetur in eius medio, et ad latera attolletur, sed etiam amplitudo supremae eius superficiei fiet maior.

COROLLARIUM I.

614. Hinc fundus fluminis recti profundior erit in eius medio, quam ad latera, aut ripas versus, et ideo ibi erit velocitas aquae maxima, aut (378) filum fluminis.

COROLLARIUM II.

615. Et propterea vel constabit ex duobus planis versus eius medium inclinatis, aut ex concava superficie, verticem habente in eius medio.

PROPOSITIO CXXVIII.

616. *Si alveus recti fluminis sit compositus ex materia inaequaliter resistenti; ibi excavabitur eius fundus, ubi resistentia materiae erit minor, et e contrario attolletur, ubi resistentia materiae maior erit,*

Sit

Sit BKIDNOA (Fig. 134.) sectio recti fluminis, alveum habentis compositum ex materia inaequaliter resistenti. Sit autem resistentia maior in parte KID, et minor in parte altera DNO. Dico, quod deprimetur pars fundi DNO, et contra attolletur altera KID. Finge enim alveum esse factum vel per excavationem, vel per materiae extraneae depositionem, et vim aquae in eo progredientis, tum eandem omnino esse in partibus KID, DNO, tum praecise idoneam etiam esse ad impediendam depositionem materiae in eius fundo. Finge rursus vim aquae currentis in KID esse in aequilibrio cum resistentia fundi in KID. His positis, ita obstenditur propositio. Vis aquae eadem est (ex hyp.) in partibus KID, DNO, at resistentia in KID est maior quam in DNO. Sed vis aquae in KID est (ex hyp.) in aequilibrio cum resistentia in KID; ergo vis aquae in DNO erit maior quam resistentia in DNO, et ideo in hac parte corrosio fiet, et consequenter aquae profunditas augebitur. Sed aucta aquae altitudine in DNO, simul etiam eius velocitas, et vis crescet; igitur ibi aqua maiori vi rodere fundum perget. Pone nunc, quod vi aquae facta sit cavitas DFO, ita ut ibi nova altitudo aquae sit GF; igitur sectio BKIDNOA aucta fuit magnitudine DFO, et ideo quantum crevit altitudo, et vis aquae in DFO, tantundem minuetur in KID. Vis autem, quam prius habebat aqua in KID, praecise sufficiens erat ad impediendam depositionem materiae in KID; ergo haec minor facta in KID, impar omnino erit huic effectui producendo. Quare pars fundi KID attolletur usque ad KMD, et nova sectio fluminis erit BKMDFOA.

COROLLARIUM I.

617. Cum maxima aquae velocitas, atque adeo (378) filum fluminis sit (616) proximum ripae AO; haec necessario corrodetur, et e contrario in locis proximis ripae BK, materia terrea deponetur, et alluvio fiet.

COROLLARIUM II.

618. Hinc alveus convexus fiet in KMD, et concavus in OFD, proindeque flumen, quod rectum prius erat, in curvilineum convertetur.

SCHOLION.

619. Ex his omnibus satis patet, tales dari posse in flumine mutationes, ut hoc alveum suum mutet. Id vero eveniet quando aqua ita ripam in aliquo loco rodit, ut aperiat sibi viam ad loca

alia

alia depressiora. A velocitate autem, qua aqua in viam hanc penetrabit, pendebit antiqui alvei fatum.

PROPOSITIO CXXIX.

620. *Si turbidum flumen influat in paludem; ipsum intra proprias alluviones novum alveum sibi efficiet secundum viam, quae determinabitur ab eius ultima directione, ab impedimentis existentibus in palude, et a situ emissarii, per quod ex hac erumpit.*

I. Flumen turbidum ABCD (Fig. 135.) per ostium BC influat in paludem CGEFB, cuius emissarium positum sit in E, et ultima directio fluminis sit HC. Dico, tres causas concurrere ad determinandam viam fluminis ex C ad E, quarum prima est ultima eius directio HC; secunda est resistentia ab aqua fluminis superanda, dum progreditur in palude; tertia denique est positio emissarii eius E. Cum fluminis aqua in ultimo tractu HC velocitatem aliquam habere debeat, eiusque praeterea altitudo in H vel aequalis, vel maior sit, quam in C; motu utique actuali nitetur ingredi in paludem. Sed ex adverso paludis aqua in loco C ipsi resistit solum simplici conatu ad motum; igitur aqua fluminis ABCD per ostium BC in paludem ingredietur, impetuque inde concepto, per aliquod saltem spatium cursum suum intra illam continuabit in recta linea HCS. Cum vero aqua praetergressa ostium BC, non amplius a ripis, uti prius, coerceatur, vi propriae fluiditatis lateraliter diffundetur, veluti ad N, et M, atque sic diminuta altitudine aquae currentis ex C ad S, sensim eius velocitas minuetur, usquedum ad quietem sensibilem reducatur, quae quidem in N, et M citius quam alibi sequi debebit. Finge nunc aquam progredientem iuxta CS, motum omnem amittere in puncto S; ergo turbida aqua fluminis postquam pervenerit usque ad S, sensibiliter stagnans ubique erit, unica illa excepta, quae replet spatium BCSK. Cum itaque currat aqua in BCSK, et sit immota in N, et M, maiores hic, quam ibi fient materiae extraneae depositiones, quae altitudine sua claudent spatium BCSK, intra quod aqua veluti per principium novi alvei progredietur. Cum vero postea ob sequentes alias materiae extraneae depositiones, ita paullatim attolli debeant eius ripae BK, CS, ut tandem assurgant supra paludis aquam; ideo ipsae cogere debent flumen ad cursum suum in novo alveo continuandum, et ad eius ostium etiam protrahendum secundum rectam lineam HCS. Quare directio novi alvei efficiendi intra paludem, pendet a directione HC, quam in ipsomet ostio habet flumen.

II. At si aliqua essent obstacula in palude, non amplius novum flumen cursum suum continuaret secundum viam ab eius directione ultima indicatam. Finge enim intra paludem CGEFB virgultis ubique plenam, aliquo artificio patefactam fuisse viam aliquam, ut CP. Hoc posito, statim ac aqua fluminis ingressa fuerit in paludem, nitetur quidem cursum suum protrahere iuxta rectam lineam HCS; sed brevi dein amisso motu, ob resistentias perpetuas in quas incurrit, cogetur assumere viam CP, utpote nullis obstaculis impeditam. Atque hinc ratio patet, cur flumina, quae proprias aquas deferunt in paludem, frequenter in plures rivulos dividantur.

III. Directio novi alvei etiam pendet ab emissarii positione, per quod aqua egreditur ex palude. Nam si concipias in palude nullum aliud esse emissarium praeter E; omnis aqua, quae postquam transivit a flumine in paludem, stagnans effecta fuit, habebit cursum notabilem versus E. Similiter cum flumen, quod ob repetitas alluviones paullatim alveum sibi efficit in palude, nequeat ex hac egredi quam per E; idem (etsi totam paludem antea circumiret) eo tandem perveniet, ubi prior alter incipit cursus aquae versus emissarium E, et ideo novo cursu composito ex his duobus, tandem ad E se conferat opportebit.

Corollarium.

621. Hinc ratio reddi potest, cur flumen, quod in palude convenientem alveum sibi efficit, ut plurimum esse soleat curvilineum. Varii enim eiusdem flexus partim procedunt (620) a directione, quam habet aqua dum ingreditur in paludem, partim a resistentiis, quibus in hac occurrit, et partim a situ emissarii, per quod egreditur ex palude.

PROPOSITIO CXXX.

622. *Si flumen progrediens supra fundum compositum ex crassioribus materiae partibus separatis, quae multum resistant excavationi, longo tempore opus habeat ad sibi fundum stabilem excavandum, et priusquam hunc absolvat, in eius alveum introducatur materia extranea eiusdem indolis, ac naturae cum illa, ex qua componitur idem fundus; nunquam poterit excavando, efficere sibi fundum vi eius aquae, et resistentiae materiae convenientem.*

Fundus AB (Fig. 136.) sit ille, quem tandem flumen ope excavationis stabilem sibi efficeret, si nulla materia extranea in ipsum ingrederetur. Tum intelligatur incumbere huic fundo triangulum AQB ex eadem materia constans, ex qua componitur idem fundus. Dico, quod fundus fluminis nunquam perveniet ad AB. Cum enim aqua sufficientem vim habeat corrodendi materiam [illegible] qui est declivior quam AB, utique etiam debebit rodere, [illegible] materiam illam, ex qua constat triangulum AOB. Sed cum haec excavatio instantanea esse nequeat, sed (ex hyp.) longo solum tempore perficiatur, ponamus post illud tempus, quo per excavationem abiret fundus ex OB in DB, tantam materiae extraneae quantitatem a torrente aliquo transferri in flumen, quanta praecise est necessaria ad implendum triangulum DOB, sive ad attollendum fundum ex DB in OB. Cum ergo vis aquae, et resistentia materiae in fundo OB sint eaedem quae prius, fiet equidem in hoc fundo nova altera excavatio, quae eundem reducet iterum ad DB. Sed postquam haec cavitas facta erit, materia extranea, quae rursus transferetur in alveum a torrente, praecise replebit (ex hyp.) triangulum DOB; igitur eius fundus restituetur denuo in OB. Id vero etiam debet successivis temporibus evenire; igitur nunquam fundus perveniet ad AB.

Corollarium I.

623. Hinc si DB sit illa declivitas, ad quam potest excavatio pervenire durante maximo illo temporis intervallo, quod intercedit inter unam, et aliam materiae introductionem; tunc fundus alvei per excavationem nunquam perveniet ad AB, sed ad summum usque ad DB. Similiter si OB sit maxima altitudo, ad quam semotis impedimentis, potest assurgere fundus alvei ob materiam extraneam in eundem alveum introductam; nunquam ipse declivitatem OB praetergredietur. Quare stabilis fuudus alvei censendus erit ut positus inter declivitates OB, et DB.

Corollarium II.

624. Quia crassiores materiae solent in flumina introduci a torrentibus in eorum praecipue eluvionibus; consequens est, ut quo longiora sunt temporis intervalla inter unam, et aliam torrentium eluvionem, eo minorem quoque habeat fundus declivitatem.

Corollarium III.

625. Et quoniam torrentium eluviones quanto magis *sunt* turgidae, et diuturnae, tanto maiorem quoque materiae extraneae quantitatem in flumina introducunt; ideo quanto maiores, et diuturniores erunt torrentium eluviones, tanto maiorem quoque habebit fundus fluminis declivitatem.

Corollarium IV.

626. Rursus quia quo turgidior, et diuturnior est eluvio fluminis alicuius, ipsum eo maiori vi, et longiori temporis intervallo excavat eius fundum; sequitur, quo turgidior, et diuturnior erit eluvio fluminis, eo minus declivem fore illius fundum.

Co-

Corollarium V.

627. Cum itaque eluvio fluminis tam in magnitudine, quam in temporis diuturnitate ab ipsis torrentium eluvionibus oriatur, et prima efficiat (626) minorem fundi declivitatem, secundae vero (625) maiorem gignant; liquet a nobis non posse determinari, an declivitas fundi sit per fluminis eluvionem augenda, aut minuenda, nisi antea dignoscatur quaenam ex hisce duabus causis alteri sit praepollens.

Propositio CXXXI.

628. *Si flumen, quod sibi fundum stabilem iam effecit, turbidas dein torrentis aquas in se recipiat, nec habeat vim idoneam ad particulas terreas, quas ab eodem torrente excipit, sustinendas; initio quidem hae deponentur in eius fundo, sed postea cessante turbidae aquae influxu, iterum idem fundus ad declivitatem pristinam reducetur.*

Pone flumen antequam turbidas torrentis aquas in se recipiat, vi eius aquae sibi fundum AB (Fig. 136.) stabilem effecisse. Pone dein a turbidis torrentis aquis in fundo AB deponi tantam materiae terreae quantitatem, quanta praecise est necessaria ad implendum triangulum ADB, adeo ut fundus transeat ex AB in BD. Hoc posito, statim ac torrens non amplius in flumen aquas turbidas introducit, eadem aquae massa, quae antea descendebat super plano parum declivi AB, tunc delabetur supra magis declive DB; ideoque vis aquae currentis in plano DB, erit maior quam vis eiusdem progredientis in plano AB. Sed vis aquae currentis in plano AB erat (ex hyp.) in aequilibrio cum resistentia terrae in plano AB; igitur vis eiusdem progredientis in plano DB, praevalebit resistentiae terrae in plano DB, consequenter rodetur massa trianguli ADB, sicque fundus restituetur ad priorem declivitatem AB.

Scholion.

629. Ut autem id praestet flumen, brevi solum tempore opus habet. Cum enim massa terrea ADB ex particulis terrae constet in fundum AB delapsis, quae utpote madefactae sunt parum invicem cohaerentes; utique ipsa parum resistet aquae currentis vi, et ideo brevi etiam tempore corrodetur.

E e PRO-

PROPOSITIO CXXXII.

630. ***Si flumen, quod fundum stabilem sibi effecerat, turbidas dein torrentis aquas in se recipiat, nec vis idonea ipsi desit ad particulas terreas, quas a torrente excipit, sustinendas; eius fundi declivitas minuetur.***

Sit DB (Fig. 136.) stabilis fundus, quem flumen antequam exciperet torrentis aquas, sibi effecit. Quamvis aqua, quae in flumine promovetur, particulis terreis sit permixta; non tamen desinit esse fluida, unde manente eadem altitudine aquae vivae in data fluminis sectione, eadem quoque erit eius velocitas, atque vis, sive aqua sit turbida, sive clara. Sed aucta altitudine aquae clarae in flumine decurrentis, crescit similiter eius vis, qua conatur rodere eius fundum; ergo si quoque in flumine augeatur aquae turbidae altitudo, ipsa etiam maiori vi nitetur rodere eius fundum. Sed postquam flumen turbidas torrentis aquas in se recepit, eius altitudo pariter aucta fuit; ergo et eius fundum conabitur excavare maiori vi, quam cum solum proprias aquas ferret. Atqui tunc eius vis erat in aequilibrio cum resistentia stabilis fundi DB; ergo postquam turbidas torrentis aquas in se recepit, vis aquae praevalebit resistentiae huius fundi, consequenter hunc excavabit, atque reducet (574) ad minorem declivitatem, ut AB.

PROPOSITIO CXXXIII.

631. ***Flumen inclinatum, habensque fundum stabilem in AB (Fig. 337.), vim habeat praecise sufficientem ad ferendas turbidas aquas usque ad mare. Dein ob alluviones in ora maritima inde ortas, cogatur terminum eius B protrahere usque ad D. Dico, quod eius fundus continuo attolletur, donec acquirat declivitatem CD, priori AB aequalem, aut parallelam.***

Quoniam aqua currens supra fundum declivem AB, habebat (ex hyp.) vim praecise sufficientem ad terrae particulas sustinendas; utique illas nequibit postea sustinere, dum supra fundum horizontalem BD incedet, unde ipsae cadendo in eius fundum, hunc paullatim attollent, atque ad positionem inclinatam ad horizontem, velut ED, reducent. Rursus cum fundus ED minus declivis sit, quam AB; ne aqua quidem supra ED incedens, idoneam vim habebit ad particulas terreas sustinendas, quare fundus ED pariter se extollet, veluti in AD, et sic deinceps. Fundi itaque elatio non cessabit, donec usque ad originem fluminis sit protracta, sive donec linea novi fundi rursus acquirat declivitatem CD, priori AB aequalem, aut parallelum.

SCHOLION I.

632. At si flumen stabilem fundum habeat in horizontali recta aliqua, ut HB, superque illum ita incedat, ut usque ad mare deferat eius limum; tunc etiamsi terminus eius B protrahatur usque ad D, nulla in eo tamen depositio limi sequi debebit. Cum enim flumen declivitatem, quam non habet, nullo modo mutare queat; ipsum cum eadem adhuc velocitate moveri perget, cum qua antea ferebatur. Sed dum terminus eius erat in B, nulla fiebat depositio limi in eius fundo; ergo neque eadem sequi debebit, etiamsi terminus eius B protrahatur usque ad D.

SCHOLION II.

633. Si autem acciderit, ut dum terminus B fundi inclinati AB protrahitur usque ad D, nova aquae copia in flumen introducatur, ob quam vis eius aucta, impediat ne terrestres particulae deponantur in fundo minus declivi AD; tunc prior fundi linea IAB abibit in minus declivem alteram FAD. Imo quia copia maior aquae profundius ostium exigit; utique si ponamus hoc deprimi ex D in O, tunc nova fundi linea disponetur in recta PO, parallela ad FAD, quae nedum erit minus declivis quam IAB, verum etiam depressior ista erit.

SCHOLION III.

634. Denique si flumen, in quo aucta fuit quantitas aquae, ac proinde etiam velocitas, et vis eius, stabilem fundum habeat in horizontali recta HB; idem post protractionem fundi ex B in D, et depressionem ostii ex D in O, sibi fundum stabilem efficiet (591) super horizontalem aliam rectam GO, inferiorem scilicet prima HD.

CAPUT XV.

De mutationibus, quae in fundo fluminis producuntur, ob ipsi oppositam cataractam.

DEFINITIO XVIII.

635. *Cataracta* est obstaculum, quod fluminis cursui est oppositum, et quidem protensum ab una usque ad alteram eius ripam.

SCHOLION I.

636. Opponitur flumini cataracta, ut fundus alvei superioris altior conservetur quam fuisset, si haec abesset; unde impedit corrosiones, quae alioquin a rapidiori cursu fluminis gignerentur. Saepe etiam cataracta flumini applicatur, ut aqua, quae ab ipso deducitur in canalem, tantam acquirat celeritatem, quanta nempe est necessaria ad pistrini, aut alterius aedificii rotas circumagendas.

SCHOLION II.

637. Ob varias causas varii pariter esse solent motus aquae properantis ad cataractam. Imprimis enim si directio cataractae sit perpendicularis ad cursum fluminis cui opponitur; aqua moveri perget in eodem plano verticali, in quo antea ferebatur. At si directio cataractae obliqua sit ad fluminis directionem; tunc aqua movebitur iuxta rectam inclinatam ad illam partem, versus quam cursus aquae cum cataracta obtusum angulum comprehendit. Diversi quoque solent fieri aquae motus propter figuram variam cataractae. Quando enim haec ita est perpendicularis ad horizontem, ut aqua eius fastigium praetergressa, non amplius ipsam tangat; tunc singulae eius guttae e fastigio cataractae se praecipites deiicientes, describent curvam, quae sepositis resistentiis, erit parabola apoloniana. Quod si contingat, ut immediate post cataractam appositum sit planum aliquod inclinatum, et quidem protensum usque ad fastigium cataractae; hoc in casu singulae aquae guttae post hoc fastigium superatum, rectilineo ferri debebunt motu, et quidem parallelo ad idem planum.

PRO-

PROPOSITIO CXXXIV.

638. *Si flumen, cui cataracta obiecta fuit, aliam causam non haberet suae velocitatis praeter eius fundi declivitatem; hic ob materiae extraneae depositionem, eveheretur usque ad fastigium cataractae, adeo ut novus fundus stabilis inde ortus, evaderet tandem veteri parallelus, et hunc veterem quoque fundum declivitate, et flexu omni imitaretur.*

Sit A B (Fig. 138) stabilis fundus fluminis, et B C eidem opposita cataracta; flumen autem non habeat aliam causam suae velocitatis, quam declivitatem eius fundi A B, super quo descendit usque ad cataractam. Dico, hunc ipsum fundum evehendum esse usque ad fastigium cataractae, adeo ut novus fundus stabilis inde ortus, evadat tandem veteri parallelus. Ducta enim per cataractae fastigium C horizontali recta C E, quae fundo A B occurrat in puncto G, agatur C F parallela eidem fundo. Quia antequam flumini cataracta obiiceretur, fundus A B stabilis ponebatur, aqua supra illum cadens, tali erat praedita velocitate, ut vim haberet praecise sufficientem ad secum rapiendum quidquid terrae, aut ponderosioris materiae sibi admixtum habet. Sed cataracta B C obiecta, velocitas aquae progredientis supra fundi tractum G B, subito diminuitur, quippe ob aquam, quae initio fit stagnans in cavo G C B, omnes fluminis sectiones factae in tractu G B, manifeste sunt impeditae; igitur huic aquae deerit vis idonea ad ponderosiorem materiam, uti antea, transferendam. Haec ergo in fundum G B delapsa, implebit primo cavum integrum G B C, et fundum G B reducet ad positionem horizontalem G C. Iam quia nunc aqua transit a plano declivi A G in horizontale G C; vis eius in plano G C, valde minor erit quam illa, quam habet in altero plano A G. Atqui vis aquae currentis in plano A G, praecise sufficiens est (ex hyp.) ad sustinendam materiam, quam sibi admixtam habet; ergo vis aquae progredientis in plano G C, impar omnino erit huic materiae sustinendae, quae proinde ad fundum G C delapsa, eundem usque ad O C attollet. Rursus cum planum O C minus declive sit quam A O, etiam aqua currens in plano O C, vim minorem habebit quam dum labitur per A O; ergo in hoc quoque plano O C materia terrea deponetur, ideoque hic etiam fundus usque ad L C denuo attolletur. Simili modo ostendam, quod flumen per totum alveum superiorem aliam, atque aliam deiiciet semper materiam in eius fundum, neque ab hac deponenda unquam cessabit, usquedum fluminis novus fundus adeptus fuerit positionem F C parallelam veteri fundo A B; hac siquidem acquisita, suam velocitatem rem acquiret flumen, cui cataracta obiecta fuit, et admixtam sibi materiam secum feret. Si ergo flumen, cui apponitur cataracta, aliam causam non haberet suae velocitatis quam fundi declivitatem; hic ob materiae extraneae depositionem attolleretur usque ad fastigium cataractae; adeo ut novus fundus stabilis inde ortus, fieret tandem veteri parallelus, et hunc veterem ipsum fundum declivitate, et flexu omni imitaretur.

PROPOSITIO CXXXV.

639. *Sive flumen libere se deiiciens ex fastigio cataractae, describat lineam parabolicam, sive descendens per planum inclinatum appositum cataractae, motu rectilineo progrediatur; semper necesse erit, ut antequam perveniat ad fastigium cataractae, augeat velocitatem, quam propter declivitatem alvei superioris antea acquisiverat.*

Cum nullum planum inclinatum est appositum cataractae, aqua ex eius fastigio se deiiciens, non clivo aliquo sustinetur, non fundi, non riparum asperitatibus retinetur; sed ab obstaculis omnibus liberata, ingenio suo ruit, et ideo eius motus celerrimus longe fiet. Sed aquae cataractam celerrime transeuntes, aliquam cohaesionem habent cum insequentibus; ergo hae quoque trahi ab illis debent, atque ad motum similem concitari. Quare antequam aquae ad cataractam perveniant, per breve aliquod saltem spatium suos motus accelerabunt, hoc est debebunt fieri celeriores. Hoc ipsum quoque evenit, quando aqua post superatum fastigium cataractae, statim descendit per planum aliquod inclinatum. Finge enim hoc planum sursum protrahi usquedum conveniat cum suprema fluminis superficie. Hoc posito, ubi aqua accedens ad cataractam, pervenerit ad sectionem communem utrique plano, descendere incipiet per planum magis declive, et quidem usque ad cataractam. Sed quando aqua a declivi plano in declivius aliud transit, necessario auget illam velocitatem, quam in plano antecedenti antea acquisiverat; ergo antequam aqua perveniat ad cataractam, velocitatem illam augere debet, quam prius ob declivitatem superioris alvei acquisiverat.

SCHOLION I.

640. Dum libere cadit aqua ex fastigio cataractae, eius motus accelaratio sensibiliter incipit paullo supra illam. Iuxta enim Eustachii Manfredii experimenta, corpora innatantia non accelerant sensibiliter suos motus, nisi quando sunt proxima cataractae; unde evidens quoque erit, superficiem supremam aquae in locis tantum pro-

proximis cataractae incipere magis quam antea inclinari, hoc est ibi solum sensibile fieri incrementum illud velocitatis, quod altitudinem aquae minuit.

SCHOLION II.

641. Si tamen fides habenda est Barattierio, viro in aquaria re peritissimo, locus ubi aquae incipiunt accelerari, magno intervallo etiam distat a cataracta. Ipse enim (a) factis duodecim stationibus, accurate descripsit Sisterii superficiem per longitudinem sex miliarium, sive a Burgo S. Domnini usque ad cataractam, ex qua eius aqua se praecipitem demittebat. Ex hac autem viri doctissimi descriptione aperte liquet, eiusdem fluminis superficiem iam multum deprimi ad distantiam dimidii miliarii a cataracta. At si ita esset, acceleratio aquae properantis ad cataractam, ad magnam quoque ab illa distantiam sursum protenderetur; quamvis differentia velocitatum, quae ab humano oculo discerni potest in corporibus innatantibus, sensibilis tantum fiat in parva distantia a cataracta.

COROLLARIUM.

642. Hinc patet duplicem esse causam velocitatis aquae properantis ad cataractam. Prima est declivitas alvei superioris, in quo descendit, et altera est motus aquae praeeuntis, et cataractam celerrime transilientis, quae in similem motum rapit, et allicit insequentem.

PROPOSITIO CXXXVI.

643. *Quamvis obiecta flumini cataracta in causa sit, ut eius fundus paullatim usque ad illius fastigium evehatur; ipse tamen ad talem formam se tandem accommodabit, ut ubique sit inferior plano ducto per fastigium cataractae, et ad veterem fundum fluminis parallelo.*

Sit AB (Fig. 139.) stabilis fundus fluminis, cui cataracta BC obiecta fuit. Sint quoque plana CK, CH ita ducta per fastigium cataractae, ut primum sit parallelum ad horizontem, et alterum ad fundum AB. Dico, quod hic fundus ad talem formam se tandem accommodabit, ut sit ubique inferior plano CH. Si fieri potest, fundus AB concipiatur ita evectus esse, ut congruat cum CH, et incrementum celeritatis, quod acquirere solet aqua accedens ad cataractam, sensibile esse incipiat in puncto F. Aquae currentes supra fundos HF, AB, suas velocitates a solis horum declivitatibus recognoscunt. Sed fundi HF, AB ponuntur aeque declives esse;

(a) Lib. 6. Cap. 10.

se; ergo aquae in illis progredientes habebunt quoque aequales celeritates, atque ita aequalibus etiam viribus nitentur corrodere eorum fundos. Sed hi duo fundi utpote aequaliter inclinati, aequaliter etiam resistunt excavationi; igitur cum vis aquae currentis in fundo A B esset in aequilibrio cum resistentia fundi A B. etiam vis aquae promotae in fundo H F, erit in quilibrio cum resistentia fundi H F. His autem positis, ita ostenditur propositio. Quia ob cataractae oppositionem, aqua velocius fertur in plano F C quam in H F; vis aquae currentis in plano F C, maior erit quam illa, qua eadem aqua fertur in altero plano H F. Sed resistentia fundi est eadem in utroque; igitur cum vis aquae currentis in plano H F, sit (ex dem.) in aequilibrio cum resistentia plani H F, sequitur vim aquae progredientis in plano F C, maiorem esse quam resistentia in plano F C, et ideo aqua planum F C corrodet, usquedum hoc acquirat positionem minus declivem E C, et quidem talem, ut vis aquae currentis in novo hoc plano E C, cum resistentia huius aequilibretur. Rursus cum planum F E sit declivius quam H F, aqua cadens in plano F E, vim maiorem habebit, quam quae in plano H F descendit. Sed resistentia plani F E est (572) minor quam resistentia plani H F; igitur cum vis aquae cadentis in plano H F, sit in aquilibrio cum resistentia plani H F, consequens est, ut vis aquae descendentis in plano F E sit maior quam resistentia huius plani, quod proinde effodietur, et minus declivem situm G E acquiret. Simili modo ostendam, fore ut denuo excavetur tam hoc planum G E, quam quodlibet aliud ductum ex E ad H G veluti est O E; ergo fundus H F continuo excavabitur, donec acquirat positionem I E parallelam tum sibi, tum veteri fundo A B, adeo ut linea novi fundi reducatur tandem ad I E C. Haec autem linea I E C est manifeste inferior ipsa H C, quae parallela est veteri fundo A B; ergo quamvis ob obiectam flumini cataractam, eius fundus A B paullatim usque ad huius fastigium attollatur, ipse tamen ad talem formam se tandem accommodabit, ut sit ubique inferior plano ducto per fastigium cataractae, et ad veterem fundum fluminis parallelo.

Scholion I.

644. Hunc autem fluminis novum fundum necessario stabilem esse oportet. Cum enim pars fundi I E parallela sit veteri, et stabili fundo A B; nihil materiae, quam sibi aqua admixtam habet, in ea deponi debet. Sed nihil eiusdem quoque deiiciendum erit in partem alteram fundi E C; nam si illa in hac deponeretur, subito augeretur declivitas fundi E C, et ideo hic deberet denuo excavari, usquedum rursus ad priorem declivitatem E C rediret.

Scholion II.

645. Nec dici potest, quod producta C E in S, sit S C quaesita linea stabilis novi fundi. Cum enim S E minus declivis sit quam I E, vel A B; aqua descendens supra S E, vim idoneam non habebit ad materiam, quam sibi admixtam habet, usque ad E ferendam.

Corollarium I.

646. Si ergo dum locus E (ubi aquae acceleratio sensibilis esse incipit) parum distat a cataracta, novi fundi linea I E C est manifeste inferior quam H C, quanto magis ipsam oporteret deprimi infra H C, si locus E distaret a cataracta per dimidii miliarii intervallum, ut Barattierius in Sisterio flumine expertus fuit? Si autem hoc verum esset, non tantum mali immineret a cataractis quantum vulgo existimatur, errarentque proinde, qui eas timide aedificarent.

Corollarium II.

647. Quam ob rem si progrediente aqua ex E in C, eius velocitas continuo augeretur; pars fundi E C curvilinea quoque esset, superius cava, atque declivis. Nam quo magis velocitas aquae crescit, eo minor vicissim sit (580) declivitas fundi; si ergo dum fertur aqua ex E in C, eius velocitas continuo augeretur, tunc pars fundi E C eo minorem declivitatem haberet, quo magis accederet ad cataractae fastigium C, hoc est evaderet curvilinea, superius cava, atque declivis.

PROPOSITIO CXXXVII.

648. *Acceleratio motus aquae properantis ad cataractam non protrabitur usque ad huius fastigium.*

Plures observationes a praestantissimis mathematicis institutae ostendunt, aquas properantes ad cataractam, ubi factae sunt celeriores, relinquere quoddam cavum, in quod e superiori parte velocissime delabuntur, impetuque inde concepto, adversam acclivitatem superant, et transiliunt cataractam. Hanc acclivitatem vidit Baciallius (a) in canali, cui de industria opposuerat cataractam. Aquae enim currentes in suprema fluminis superficie, ut libella docebat, manifeste acclives erant, proindeque si aqua vel fundum rodere potuisset, vel materiam, quam in fundum deiiceret, habuisset, utique in hoc etiam acclivitatis suae vestigia reliquisset. Reipsa autem Baciallius hanc

(a) In Act. Acad. Bononien.

perspexit acclivitatem in fundo Rheni ad Casalicchii cataractam, eandemque Zendrinus quoque in aliis fluminibus observavit. His autem praemissis, ita ostenditur propositio. Acceleratio motus aquae properantis ad cataractam desinere ibi debet, ubi fundus e loco declivi ad alium acclivem transit. Sed fundus proximus cataractae, a loco ubi incipit acceleratio usque ad cavum declivis est, acclivis autem a cavo usque ad fastigium cataractae; ergo acceleratio motus aquae properantis ad cataractam cessare debet in ipso cavo, sive antequam ipsa per eius fastigium transeat.

Scholion I.

649. Eadem acclivitas, quam habet fundus proximus cataractae, in ostiis etiam fluminum observatur. Gulielminus siquidem tradit fluvios, ubi in mare erumpunt, habere alveos altiores, et per acclive in illud ferri. Id autem ex eo fieri arbitratur, quod cum fluvii in eorum ostiis latissimi esse soleant, habeantque maximas sectiones, per has quidem transire potest conveniens aquae copia, etiamsi retardet acclivitas eius motum. Verum haec ratio non convenit cataractis, sed alia ducta a maxima velocitate, quam aquae acquirunt in ipso cavo, in quod tanta vi irruunt priusquam perveniant ad cataractam. Sic enim aucta velocitate tum earum quae se praecipitant, tum illarum quae insequuntur, fieri debet, ut ipsae postea per acclive possint transcendere cataractam, et admixtam ponderosiorem materiam secum ferre.

Scholion II.

650. Non tamen colligi inde licet, novum stabilem fundum fluminis posse determinari per planum a cavo ductum, et quidem fundo veteri parallelum. Cum enim aqua appulsa ad cavum, eam solum haberet velocitatem, quam ob huius fundi declivitatem adipisceretur; utique ipsi deficeret vis idonea ad transferendam per planum acclive ponderosiorem materiam usque ad fastigium cataractae. Quare deiiceret hanc in fundum, qui proinde attolleretur, et consequenter stabilis esse non posset.

Corollarium.

651. Quare pars fundi EC curvilinea esse debebit, et quidem superius cava, sed partim declivis, et partim acclivis erit: declivis quidem a puncto E usque ad cavum, acclivis autem ab eodem cavo usque ad fastigium cataractae.

Caput XVI.

De effectibus ab unione, et divisione horizontalium fluminum oriundis.

Definitio XIX.

652. **F***lumen horizontale* illud appello, quod vel reipsa est parallelum ad horizontem, vel tale, ut velocitas ab ipso acquisita per descensum antecedentem, sensibiliter sit elisa, et illa solum in eo velocitas sit superstes, quae a currentis aquae altitudine derivatur.

Propositio CXXXVIII.

653. *Esto* AC (*Fig.* 140.) *sectio fluminis horizontalis, cuius altitudo* DC, *et latitudo* CB. *Tum vertice* D *circa axem* DC *descripta concipiatur parabola* DE. *Dico, velocitates particularum aquae effluentium per* DC, *esse ut ordinatae eisdem particulis respondentes.*

Ducantur ordinatae HI, CE. Quoniam aqua inferior nullam aliam (ex hyp.) habet velocitatem, quam quae oritur a pressione superius incumbentis, velocitates in H, et C erunt (512) respective aequales illis, quas acquirere posset grave libere cadendo ex altitudinibus DH, DC; unde quadratum velocitatis aquae in H erit ad quadratum velocitatis eiusdem in C, ut altitudo DH ad altitudinem DC. Sed etiam quadratum ordinatae HI est ad quadratum ordinatae CE, ut altitudo DH ad altitudinem DC; ergo et quadratum velocitatis in H erit ad quadratum velocitatis in C, ut quadratum ordinatae HI ad quadratum ordinatae CE, ideoque etiam velocitas in H erit ad velocitatem in C, ut ordinata HI ad ordinatam CE. Pari modo etiam constabit, velocitates aquae in reliquis altitudinis DC punctis esse ut ordinatae, quae illis respondent; ergo velocitates particularum aquae effluentium ex altitudine DC, erunt ut ordinatae eisdem particulis respondentes.

Corollarium.

654. Hinc parabolicum spatium DEC erit (469) complexus velocitatum, quas singulae particulae aquae habent, cum transeunt per DC.

PROPOSITIO CXXXIX.

655. *Singulae aquae particulae, quae simul transeunt per* DC, *pari tempore absolvunt ordinatas sibi respondentes in parabola* DE.

Particula C tempore dato absolvat ordinatam sibi respondentem CE. Quia particulae C, et H motu aequabili progrediuntur secundum directiones CE. HI, earum velocitates erunt, ut spatia ab ipsis pari tempore absoluta. Sed velocitas particulae C est (653) ad velocitatem particulae H, ut ordinata CE ad ordinatam HI; ergo et ordinata CE erit ad ordinatam HI, ut spatium tempore dato a particula C percursum, ad spatium a particula alia H eodem tempore absolutum. Sed ordinata CE (ex hyp.) est aequalis spatio tempore dato a particula C percurso; ergo et ordinata HI aequabit spatium a particula H pari tempore absolutum. Simili modo ostendam, alias particulas etiam aquae, quae transeunt per DC, tempore dato absolvere ordinatas sibi respondentes in parabola DE.

COROLLARIUM.

656. Hinc quantitas aquae effluens per DC tempore illo, quo particula C venit ex C in E, integrum occupabit parabolicum spatium BEC, et propterea huic aequalis erit.

PROPOSITIO CXL.

657. *Dato complexu velocitatum, quas habet aqua dum transit per altitudinem sectionis in flumine horizontali, mediam eius velocitatem determinare.*

Sit AC (Fig. 140.) sectio alicuius fluminis horizontalis, et complexus velocitatum, quas habet aqua transiens per DC, sit (654) parabolicum spatium DEC; quaeratur autem velocitas eius media. Sumpta CM aequali duabus tertiis partibus ordinatae CE, agatur MN parallela ad axem DC parabolae DE, quae huic occurret in puncto I, et ordinetur HI. Dico, hanc esse mediam aquae velocitatem, quae petebatur. Compleatur enim rectangulum DCMN, quod (ut patet ex conicis) aequale erit parabolico spatio DEC. Iam si omnes aquae particulae, quae transeunt per DC, eandem velocitatem HI haberent, qua nempe (653) particula H movetur, utique illo tempore, quo haec veniret ex H in I, per altitudinem DC transiret quantitas aquae aequalis rectangulo DCMN, aut spatio parabolico DEC, quod (ex demonstr.) eidem rectangulo est aequale. Sed tem-

tempore illo, quo particula H veniret ex H in I, quantitas aquae, quae velocitatibus variis per altitudinem DC transit, aequatur (656) spatio parabolico DEC; ergo si singulae aquae particulae velocitatem HI haberent, tantum aquae transiret dato tempore per DC, quantum per ipsam velocitatibus variis fluit. Unde erit (472) HI velocitas media aquae per altitudinem DC fluentis.

COROLLARIUM I.

658. Hinc velocitas media HI ad maximam CE erit, ut 2 ad 3. Nam CM est (657) ad CE, ut 2 ad 3. Est autem HI ipsi CM aequalis; ergo et HI erit ad CE, ut 2 ad 3.

COROLLARIUM II.

659 Quia in aliis quoque perpendiculis, sive altitudinibus sectionis ABCD velocitas media aquae est eadem quae in DC; utique cum HI sit (657) velocitas media aquae per altitudinem DC fluentis, eadem erit quoque velocitas media aquae, quae transit per sectionem ABCD.

PROPOSITIO CXLI.

660. *Si parabolae* DE, GQ *(Fig. 140. 141.), ad quas terminantur velocitates aquae fluentis per altitudines* DC, GO *sectionum* AC, LO, *fuerint tales, ut velocitas maxima aquae respondentis altitudini* DC, *sit ad maximam aquae velocitatem, quae altitudini* GO *respondet, ut ordinata* CE *parabolae* DE *ad ordinatam* OQ *parabolae* GQ; *hae duae parabolae aequabuntur.*

Parameter parabolae DE sit DV, parabolae autem GQ sit GT. Quia ordinata CE est (ex hyp.) ad ordinatam OQ, ut velocitas aquae in C ad velocitatem aquae in O, etiam quadratum ordinatae CE erit ad quadratum ordinatae OQ, ut quadratum velocitatis in C ad quadratum velocitatis in O. Sed quadratum ordinatae CE est ad quadratum ordinatae OQ, ut rectangulum ex DC in DV ad rectangulum ex GO in GT, et quadratum velocitatis in C est ad quadratum velocitatis in O, ut altitudo DC ad altitudinem GO; ergo et rectangulum ex DC in DV erit ad rectangulum ex GO in GT, ut altitudo DC ad altitudinem GO. Id autem fieri prorsus nequit, nisi mutuo sint aequales parametri DV, GT; ergo hae parametri aequabuntur, ac proinde parabolae DE, GQ erunt aequales etiam inter se.

PRO-

PROPOSITIO CXLII.

661. *Iisdem positis, quae in theoremate praecedenti, velocitas media aquae fluentis per altitudinem* DC *erit ad mediam velocitatem aquae transeuntis per altitudinem aliam* GO, *ut radix quadrata altitudinis* DC *ad radicem quadratam altitudinis* GO.

Ordinatae HI, RS parabolarum DE, GQ referant medias velocitates aquae fluentis per altitudines DC, GO. Velocitas media HI est (658) ad maximam CE, ut 2 ad 3. Sed in eadem quoque ratione esse debet velocitas media RS ad maximam OQ; ergo velocitas media HI erit ad maximam CE, ut velocitas media RS ad maximam OQ, et permutando, velocitas media HI erit ad mediam velocitatem RS, ut velocitas maxima CE ad maximam velocitatem OQ. Sed cum parabolae DE, GQ (ex hyp.) sint aequales, velocitas maxima CE est ad maximam velocitatem OQ, ut radix quadrata altitudinis DC ad radicem quadratam altitudinis GO; ergo et velocitas media HI erit ad mediam velocitatem RS, ut radix quadrata altitudinis DC ad radicem quadratam altitudinis GO.

PROPOSITIO CXLIII.

662. *Iisdem positis, quantitates aquae dato tempore effluentes per sectiones* AC, LO *duorum fluminum horizontalium sunt in ratione composita latitudinum* CB, OF, *altitudinum* DC, GO, *et radicum quadratarum altitudinum earundem.*

Quantitates aquae dato tempore effluentes per sectiones AC, LO, sunt (475) ut prismata habentia pro basibus sectiones AC, LO, et pro altitudinibus velocitates medias HI, RS. Sunt autem haec prismata in ratione composita basium AC, LO, et altitudinum HI, RS; ergo et quantitates aquae dato tempore effluentes per sectiones AC, LO, erunt in ratione composita sectionis AC ad sectionem LO, et velocitatis mediae HI ad mediam velocitatem RS. Sed sectio AC est ad sectionem LO in ratione composita latitudinis CB ad latitudinem OF, et altitudinis DC ad altitudinem GO, pariterque velocitas media HI est (661) ad mediam velocitatem RS, ut radix quadrata altitudinis DC ad radicem quadratam altitudinis GO; ergo et quantitates aquae dato tempore effluentes per sectiones AC, GO erunt in ratione composita latitudinum CB, OF, altitudinum DC, GO, et radicum quadratarum altitudinum earundem.

COROLLARIUM I.

663. Hinc si accipiatur radix quadrata altitudinis DC, eademque ducatur prius in altitudinem DC, et subinde in latitudinem CB; factum inde ortum exponet quantitatem aquae per sectionem AC dato tempore effluentem. Similiter si sumatur radix quadrata altitudinis GO, eademque ducatur tam in altitudinem GO, quam in latitudinem OF; productum inde emergens, exprimet quantitatem aquae, quae per sectionem LO tempore dato fluit. Cum enim primum factum sit ad alterum in ratione composita latitudinum CB, OF, altitudinum DC, GO, et radicum quadratarum altitudinum earundem; etiam quantitas aquae transiens per sectionem AC erit (662) ad illam, quae pari tempore effluit per sectionem LO, ut primum factum ad alterum.

COROLLARIUM II.

664. Quare datis latitudinibus CB, OF, et altitudinibus DC, GO duarum sectionum AC, LO, statim invenietur proportio aquarum, quae per has sectiones tempore dato fluunt.

EXEMPLUM

665. Habeat sectio AC latitudinem CB ped. 760, altitudinem vero DC ped. 30, cuius radix quadrata est $5\frac{477}{1000}$. Tum haec radix multiplicetur per altitudinem DC ped. 30, et per latitudinem CB pedum 760; factum 124875 referet (663) quantitatem aquae per sectionem AC fluentis. Sit modo latitudo FO sectionis LO ped. 139, altitudo autem GO ped. 11, cuius radix quadrata est quamproxime $3\frac{317}{1000}$. Haec radix dein multiplicetur per altitudinem GO ped. 11, et per latitudinem FO ped. 139; factum 5071 referet (663) quantitatem aquae, quae interea transit per sectionem LO. Unde quantitas aquae per sectionem AC fluentis erit ad quantitatem illius, quae interea transit per sectionem LO, ut 124875 ad 5071.

PROPOSITIO CXLIV.

666. *Si latitudines* CB, OF (*Fig.* 142. 143.) *sectionum* AC, LO *aequales fuerint inter se; quantitates aquae per illas dato tempore effluentes, erunt in ratione composita altitudinum* DC, GO, *et radicum quadratarum altitudinum earundem.*

Quantitates aquae dato tempore effluentes per sectiones AC, L O, sunt (662) in ratione composita sectionum A C, L O, et velocitatum mediarum H I, R S. Atqui sectiones A C, L O utpote (ex hyp.) aeque latae, sunt ut altitudines D C, G O, et velocitates mediae H I, R S, sunt (661) ut radices quadratae altitudinum D C, G O; ergo quantitates aquae per sectiones A C, L O dato tempore effluentes, erunt in composita ratione altitudinum D C, G O, et radicum quadratarum altitudinum earundem.

Corollarium

667. Unde si accipiantur radices quadratae altitudinum D C, G O, eaeque postea multiplicentur per altitudines D C, G O; facta inde orta expriment quantitates aquae, quae per sectiones A C, L O tempore dato fluunt.

EXEMPLUM

668. Sit altitudo D C ped. 16, altitudo autem G O ped. 9; eritque radix quadrata altitudinis D C ped. 4, et radix quadrata altitudinis G O ped. 3. Unde factum ex radice quadrata altitudinis D C in altitudinem eandem ducta, erit ped. 64, et factum ex radice quadrata altitudinis G O per eandem altitudinem multiplicata, erit 27. Quare quantitas aquae per sectionem A C fluentis, erit ad quantitatem aquae, quae eodem tempore transit per sectionem L O, ut 64 ad 27.

Scholion

669. Hic modus determinandi rationem illam, quam habent aquae duorum fluminum inter se, tacite supponit (660) velocitates aquae fluentis per altitudines D C, G O duarum sectionum A C, L O, terminari ad duas parabolas D E, G Q, quae non solum pro axibus habeant easdem altitudines D C, G O, et vertices in superficie currenti in D, et G, sed praeterea esse debeant eiusdem parametri, seu aequales. Nam in hac solum hypothesi demonstravimus (667), quod radices quadratae altitudinum D C, G O in easdem altitudines ductae, exprimant rationem, quam habent aquae duorum fluminum inter se. Verum enim vero etsi haec hypotesis possit habere locum in liberis sectionibus fluminum absolute horizontalium, quorum superficies velut immobiles sunt censendae, non potest tamen in rigore geometrico convenire illis fluminibus, quae in hoc capite horizontalia appellantur; quippe aquae particulae constitutae in eorum superficiebus, semper retinent aliquam saltem partem velocitatis a declivitate fluminis oriundae. Unde quantitas aquae fluminis iuxta adductam regulam supputata, ad summum quamproxime pro vera ad-

mitti debet. At si eadem regula adhibeatur in supputanda quantitate aquae currentis in sectionibus fluminum impeditis, notabilis inde error oriri posset. Cum enim aqua in sectione impedita (546) altius attollatur quam si libera ipsa foret, utique factum ex altitudine aquae in eius radicem in primo casu, maius erit quam factum ex altitudine aquae in eius radicem in altero. Sed eadem aquae quantitas tempore dato fluit per utramque sectionem; ergo si quantitas aquae fluentis per impeditam sectionem iuxta adductam regulam supputabitur, eadem iusto maior semper futura erit. Cum autem, caeteris paribus, maior sit resistentia in minori flumine quam in maiori; consequens etiam erit, ut haec regula semper tendat ad augendam quantitatem aquae minoris fluminis relate ad illam maioris, sive ad augendam proportionem minoris fluminis ad aliud maius.

PROPOSITIO CXLV.

670. *Si latitudines* C B, O F (*Fig.* 142. 143.) *sectionum* A C, L O *invicem sint aequales; quantitates aquae per illas dato tempore transeuntes, erunt ut cubi maximarum velocitatum* C E, O Q.

Quantitates aquae, quae pari tempore transeunt per sectiones A C, L O sunt (666) in ratione composita altitudinum D C, G O, et radicum quadratarum altitudinum earundem. Sed altitudines D C, G O sunt ut quadrata maximarum velocitatum C E, O Q, et radices quadratae altitudinum D C, G O sunt, ut velocitates maximae C E, O Q; ergo quantitates aquae, quae pari tempore transeunt per sectiones A C, L O, erunt in ratione composita quadratorum maximarum velocitatum C E, O Q, et earundem velocitatum C E, O Q. Sed cubus maximae velocitatis C E est ad cubum maximae velocitatis O Q in ratione composita quadratorum maximarum velocitatum C E, O Q, et earundem velocitatum C E, O Q; ergo et quantitates aquae, quae pari tempore transeunt per sectiones A C, L O, erunt ut cubi maximarum velocitatum C E, O Q.

PROPOSITIO CXLVI.

671. *Si radices cubicae quantitatum aquae dato tempore effluentium per aeque latas sectiones* A C, L O, *in se ipsas ducantur; illarum quadrata erunt, ut altitudines* D C, G O.

Quantitas aquae fluentis per sectionem A C est (670) ad illam, quae tempore eodem transit per sectionem L O, ut cubus C E ad cubum O Q. Sed quando quatuor quantitates sunt proportionales,

etiam

etiam illarum radices cubicae sunt proportionales; ergo radix cubica quantitatis aquae fluentis per sectionem AC, erit ad radicem cubicam illius, quae tempore eodem transit per sectionem LO, ut CE ad OQ. Sed cum quatuor quantitates sunt proportionales, illarum quadrata sunt quoque proportionalia; ergo et quadratum radicis cubicae quantitatis aquae fluentis per sectionem AC, erit ad quadratum radicis cubicae quantitatis aquae eodem tempore transeuntis per sectionem LO, ut quadratum CE ad quadratum OQ. Sed cum parabolae DE, GQ (ex hyp.) sint aequales, quadratum CE est ad quadratum OQ, ut altitudo DC ad altitudinem GO; ergo et quadratum radicis cubicae quantitatis aquae fluentis per sectionem AC, erit ad quadratum radicis cubicae quantitatis aquae, quae pari tempore transit per sectionem LO, ut altitudo DC ad altitudinem GO.

PROPOSITIO CXLVII.

672. *Datis altitudinibus, et latitudinibus duorum fluminum horizontalium, quorum unum in aliud influit, invenire altitudinis incrementum, quod recipiens adipiscetur postquam influentis aquas in se exceperit.*

Sit AC (Fig. 144.) sectio fluvii influentis, cuius data sit tam altitudo AB, quam latitudo BC. Sit quoque DE (Fig. 145.) sectio recipientis, cuius altitudo DF, et latitudo FE notae sint. Debeant autem hi duo fluvii currere simul iuncti sub eadem latitudine FE, et quaeratur incrementum DH altitudinis recipientis postquam hic exceperit influentem. Ex datis altitudinibus AB, DF, et latitudinibus BC, FE investigetur (664) proportio, quam habet aqua influentis AC ad illam recipientis DE; unde si aqua AC intelligatur addita ipsi DE, ita ut cum hac componat aquam sectionis HE, etiam nota fiet ratio aquae HE ad aquam DE. Nunc extrahatur radix cubica numeri, qui exponit quantitatem aquae in solo recipiente DE currentis, et ex illa quadratum fiat. Similiter extrahatur radix cubica numeri exponentis summam aquarum influentis AC, et recipientis DE, sive aquam HE, et fiat eius quadratum. Tandem ut primum quadratum ad secundum, ita fiat altitudo FD solius recipientis ad quartum terminum proportionalem; hic (671) quaesitam dabit altitudinem AH, ad quam recipiens attolletur postquam in se exceperit influentem. Unde si ab altitudine inventa FH subducatur alia FD, quam habebat recipiens ante unionem, prodibit DH quaesitum eius altitudinis incrementum.

SCHOLION I.

673. Iuvat autem hic observare, quod quando dixi altitudinem recipientis ante eius unionem cum influente esse FD, et post unionem esse FH, id non intelligi ita debet, ut nova aqua debeat promoveri sub altitudine sola DH, antiqua vero etiamnum remanere sub altitudine priori FD. Hoc enim erroneum prorsus esset; quippe altitudo, sub qua progreditur nova aqua, multo maior est quam DH, et contra illa, sub qua antiqua fertur post unionem, multo minor est quam FD. Aqua enim recipientis DE, quae ante unionem cum influente habebat velocitatem ut K, eadem post hanc unionem cum influente, maiorem habebit velocitatem ut G; unde quantitas aquae, quae in primo casu tempore dato per sectionem DE fluebat, in altero casu fluet per sectionem IE tanto minorem prima, quanto velocitas G est (481) maior velocitate K. Altitudo itaque recipientis, quae ante unionem erat FD, post eandem reducitur ad FI. Sed altitudo iunctorum fluminum est FH; igitur altitudo, sub qua progreditur nova aqua, erit IH, maior scilicet quam DH.

SCHOLION II.

674. Animadverti hic quoque debet, quod altitudinis incrementum hoc modo inventum, in praxi est iusto maius. Nam quia influens AC est recipiente DE minus, etiam resistentia in primo erit maior quam in secundo, et ideo adducta regula (667) semper tendet ad augendam quantitatem aquae influentis relate ad illam recipientis. Ex hoc autem fiet, ut altitudo FH illorum summae evadat etiam iusto maior. Quamvis ergo ope adductae regulae inferri nequeat iusta ratio, quam habent aquae duorum fluminum inter se; ex illa tamen deduci potest altitudinis incrementum saltem non minus vero, quod recipiens ob unionem influentis adipiscetur.

EXEMPLUM.

675. Influens AC habeat latitudinem BC ped. 139., et altitudinem AB ped. 11. Sit quoque latitudo FE recipientis DE ped. 760, altitudo autem DF ped. 30, eritque (665) aqua currens in influente, exposita numero 5071; illa vero quae fluit in recipiente, expressa erit numero 124875. Si autem hanc iunxeris cum priori, habebis aquarum summam expressam numero 129946. Iam si radix cubica extrahatur ex primo numero 124875, ipsa invenietur $49\frac{98}{100}$, cuius quadratum est 2498. Similiter radix cubica secundi numeri 129946 est $50\frac{65}{100}$, cuius quadratum est ferme 2565. Unde si fiat, ut 2498 ad 2565, ita altitudo recipientis FD ped. 30 ad quartum terminum proportionalem, qui erit ped. 30, et poll. 10;

10; hic quaesitam dabit (671) altitudinem FH fluminum coniunctorum, ed ideo incrementum DH erit poll. 10.

PROPOSITIO CXLVIII.

676. *Si eadem quantitas aquae eidem flumini horizontali diversis temporibus adiiciatur; altitudinis incrementum, quod ipsa in eo gignet, pro vario eiusdem statu diversum erit.*

Sive parva, sive magna sit velocitas fluminis horizontalis, eadem (511) semper oritur a solo pondere, aut pressione eius aquae superioris in inferiorem. Sed quando eadem quantitas aquae diversis temporibus eidem horizontali flumini superadditur, huic pariter idem pondus, et eadem pressio rursus accedit; ergo etiam velocitas eius aquae aequaliter semper crescet, ideoque adiecta aqua non magis accelerabit tardum motum fluminis constituti in exiguae aquae statu, quam celeriorem quo fertur dum mediocres habet aquas, aut etiam velocissimum quo movetur in statu maximae eluvionis. Quare velocitas, quam post novam additam sibi aquam, habebit flumen, minor etiamnum erit in exiguae aquae statu, maior in statu aquae mediocris, maxima tandem in statu maximae eluvionis. Cum itaque nova aqua, quam excipit in se flumen constitutum in exiguae aquae statu, supra hoc tardius progrediatur, quam dum mediocrem aquam continet, aut est in statu maximae eluvionis; consequens etiam erit, ut eadem in primo casu maximum altitudinis incrementum (412) in eo gignat, mediocre in secundo, minimum autem in tertio. Ergo si eadem quantitas aquae eidem flumini horizontali diversis temporibus adiiciatur, altitudinis incrementum, quod in eo gignet, pro vario eius statu diversum erit.

COROLLARIUM

677. Si ergo aliquis fluvius semper manens in eodem statu, diversis temporibus in alium influat; altitudinis incrementum, quod producet in recipiente, pro vario huius statu diversum erit. Illud siquidem erit (676) maximum, si dum influens transit in recipientem, sit hic in exiguae aquae statu; mediocre vero, si in mediocris aquae statu; minimum tandem, si in statu maximae eluvionis.

PROPOSITIO CXLIX.

678. *Si eadem quantitas aquae ab eodem flumine diversis temporibus auferatur; altitudinis decrementum, quod in eo gignet, pro diverso eius statu diversum erit.*

Dum

Dum eadem aquae copia diversis temporibus eidem flumini superadditur, incrementum altitudinis quod producit in recipiente, maximum (676) est, si inveniat ipsum in statu maximae depressionis; mediocre vero, si in mediocris aquae statu; minimum tandem, si in statu maximae eluvionis. Igitur e contrario, si eadem aquae copia, quae prius in flumen ingressa erat, diversis temporibus ab hoc postea subtrahatur; maximum futurum erit decrementum altitudinis in eodem, dum ipsum exiguas aquas defert; mediocre vero, si fuerit in mediocris aquae statu; minimum tandem, si in statu maximae eluvionis. Quare si eadem quantitas aquae ab eodem flumine diversis temporibus auferatur; decrementum altitudinis, quod in eo gignet, pro vario eius statu diversum erit.

COROLLARIUM.

679. Quapropter si quando flumen est in statu maximae eluvionis, pars aliqua eius aquae se exoneret in canalem de industria excavatum, tunc fluminis superficies insensibiliter deprimetur.

SCHOLION

680. At aliquis forsan inquiet: si dum est flumen in statu maximae eluvionis, in eius aggere efficiatur hiatus aliquis satis magnus, per quem effluat eius aqua, statim videmus eius superficiem deprimi sensibiliter; cur ergo non etiam sensibiliter deprimetur, cum eiusdem fluminis aqua effluit per canalem ad eundem aggerem applicatum? Fateor quidem aquam ob enormem declivitatem quam habet initio effluxus, copiose transfluere in canalem, et sic fluminis superficiem sensibiliter etiam deprimi; paullo post tamen quia impleto canali, magna ex parte haec declivitas evanescit, longe minor pariter aquae copia influit in eundem; ex quo fieri debet, ut brevi fluminis superficies ad priorem ferme altitudinem reducatur. Accedit etiam, quod flumen post amissam aquam quae influit in canalem, habebit in tractu alvei inferioris vim multo minorem illa, quam habet in superiori, propterea si in hoc habeat praecise vim sufficientem ad crassiores terrae particulas transferendas, ineptam omnino habebit in inferiori. Igitur haec materia extranea deponetur in eius fundo, qui propterea altior factus in causa erit, ut licet flumen minorem deferat aquae copiam, in agros tamen finitimos effundatur. Quare diductio aquae ex flumine in canalem de industria excavatum ad avertendam ab agris finitimis alluvionem, plus detrimenti, quam commodi afferre solet.

F I N I S.

Tab. I

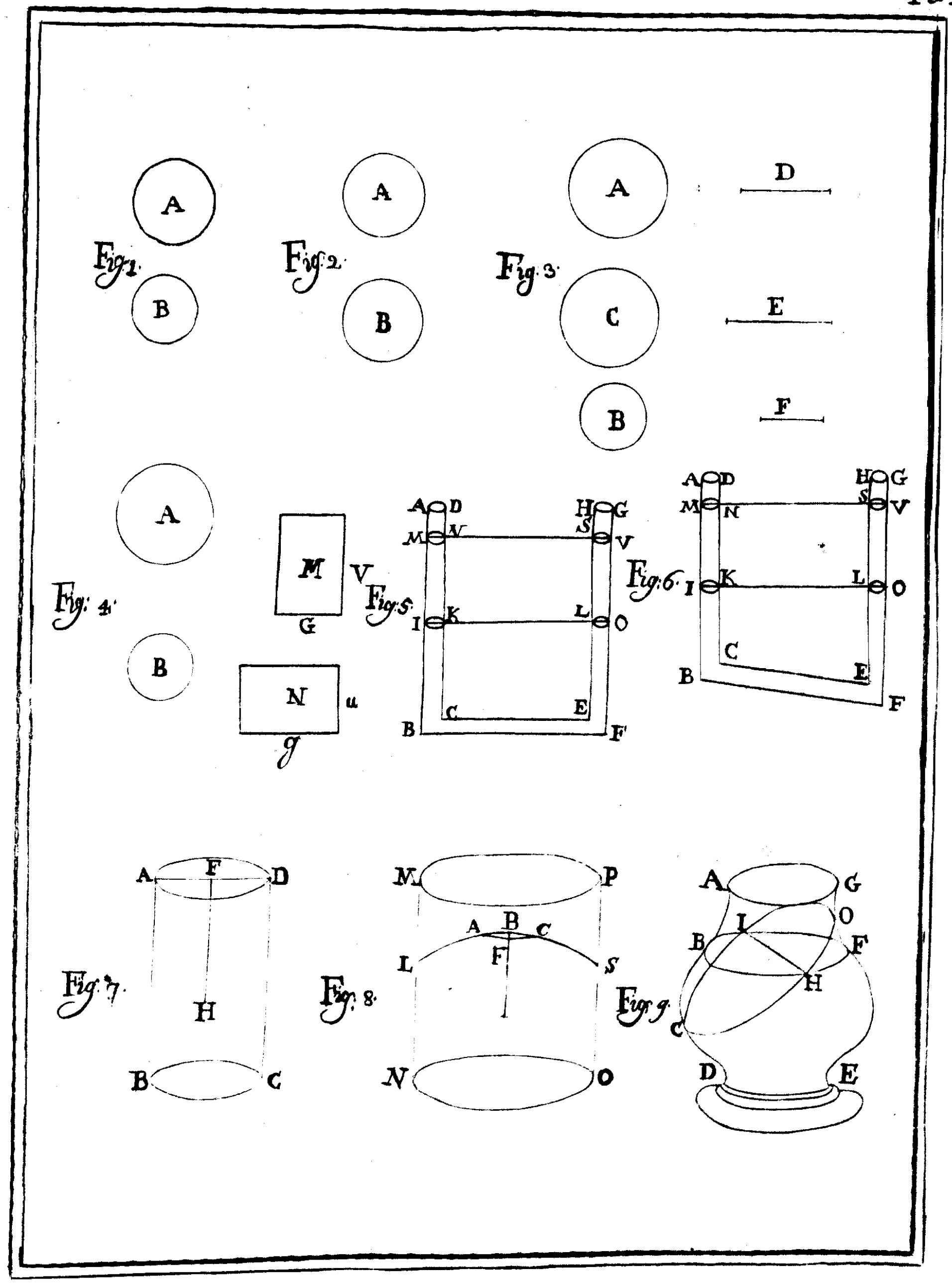


Fig. 1.
A
B
Fig. 2.
A
B
Fig. 3.
A
C
B
D
E
F
Fig. 4.
A
B
M
V
G
N
u
g
Fig. 5.
A D H G
M N S V
I K L O
B C E F
Fig. 6.
A D H G
M N S V
I K L O
B C E F
Fig. 7.
A F D
H
B C
Fig. 8.
M P
A B C
L F S
N O
Fig. 9.
A G
I O
B F
H
C
D E

Fig: 10.

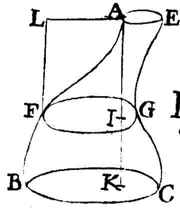


Fig: 11.

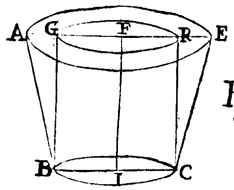


Fig: 12.

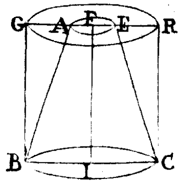


Fig: 13.

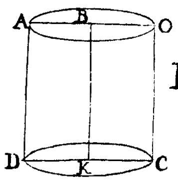


Fig: 14.

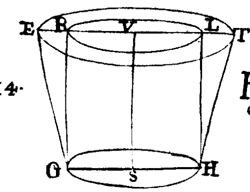


Fig: 15.

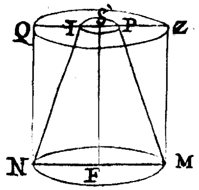


Fig: 16.

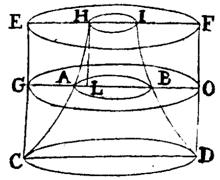


Fig: 17.

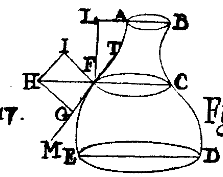


Fig: 18.

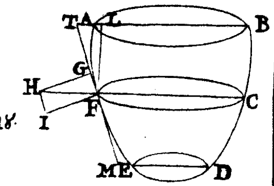


Fig: 19.

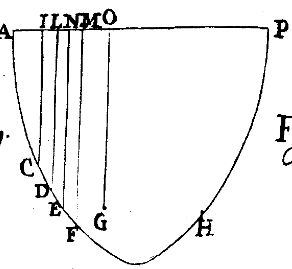
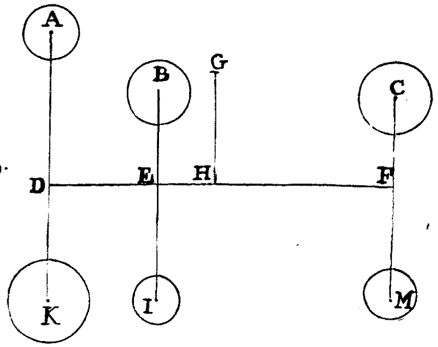


Fig: 20.



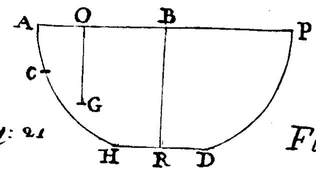


Fig: 21

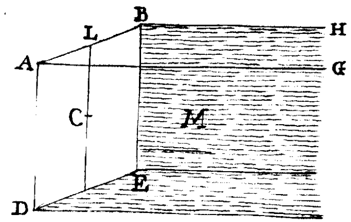


Fig: 22

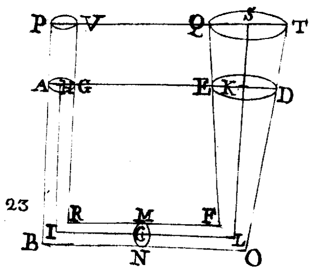


Fig: 23

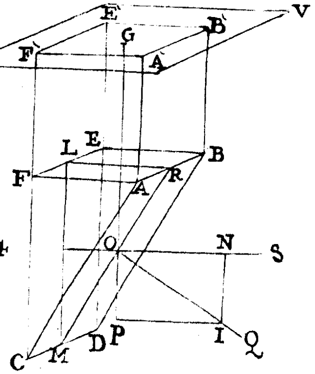


Fig: 24

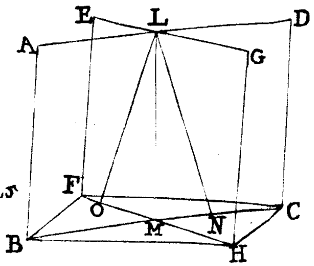


Fig: 25

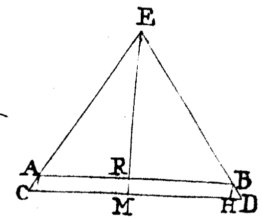


Fig: 26

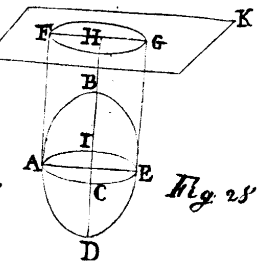


Fig: 27

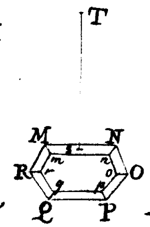


Fig: 28

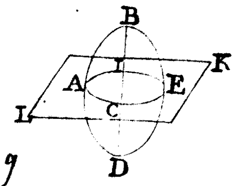


Fig: 29

Tab: IV

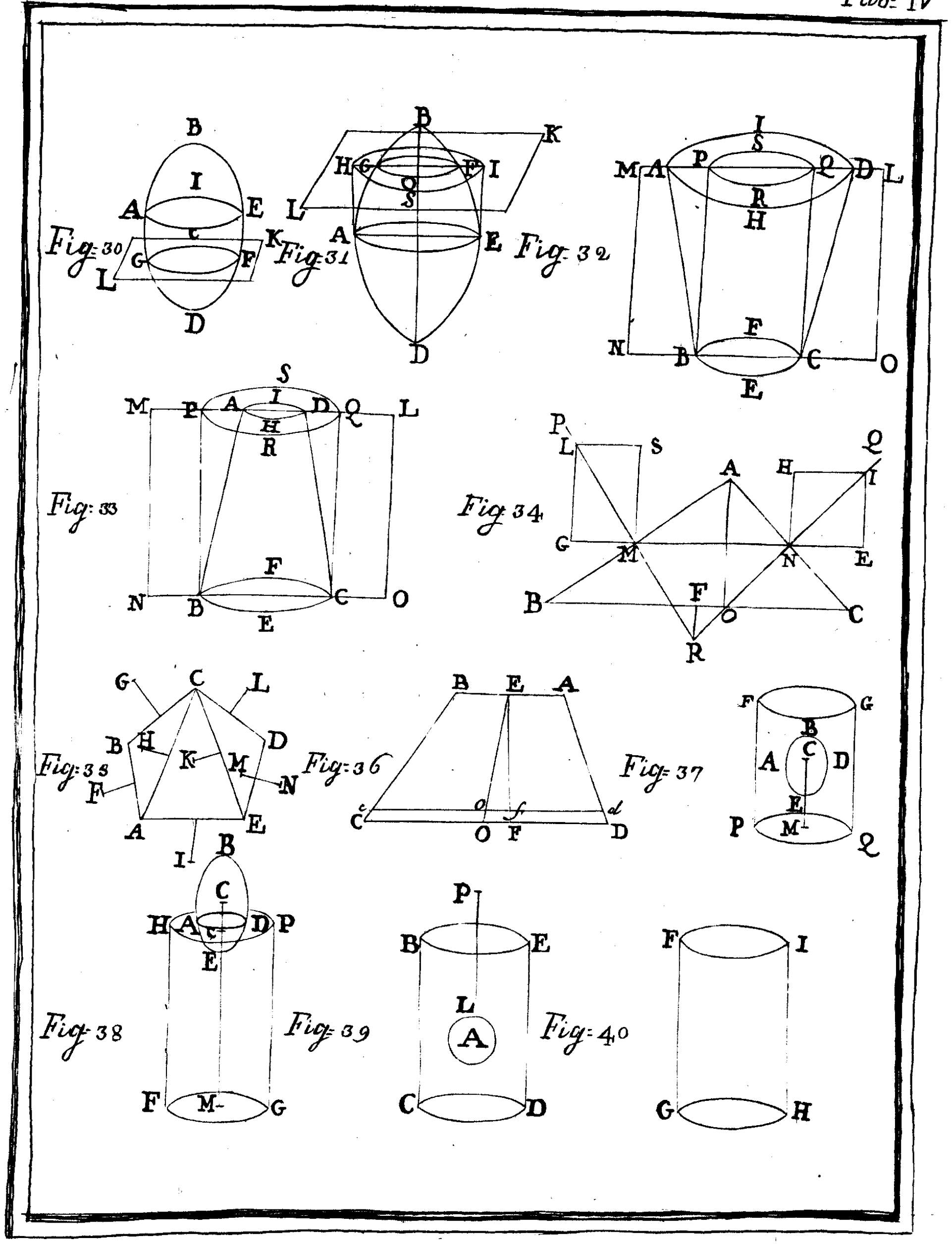
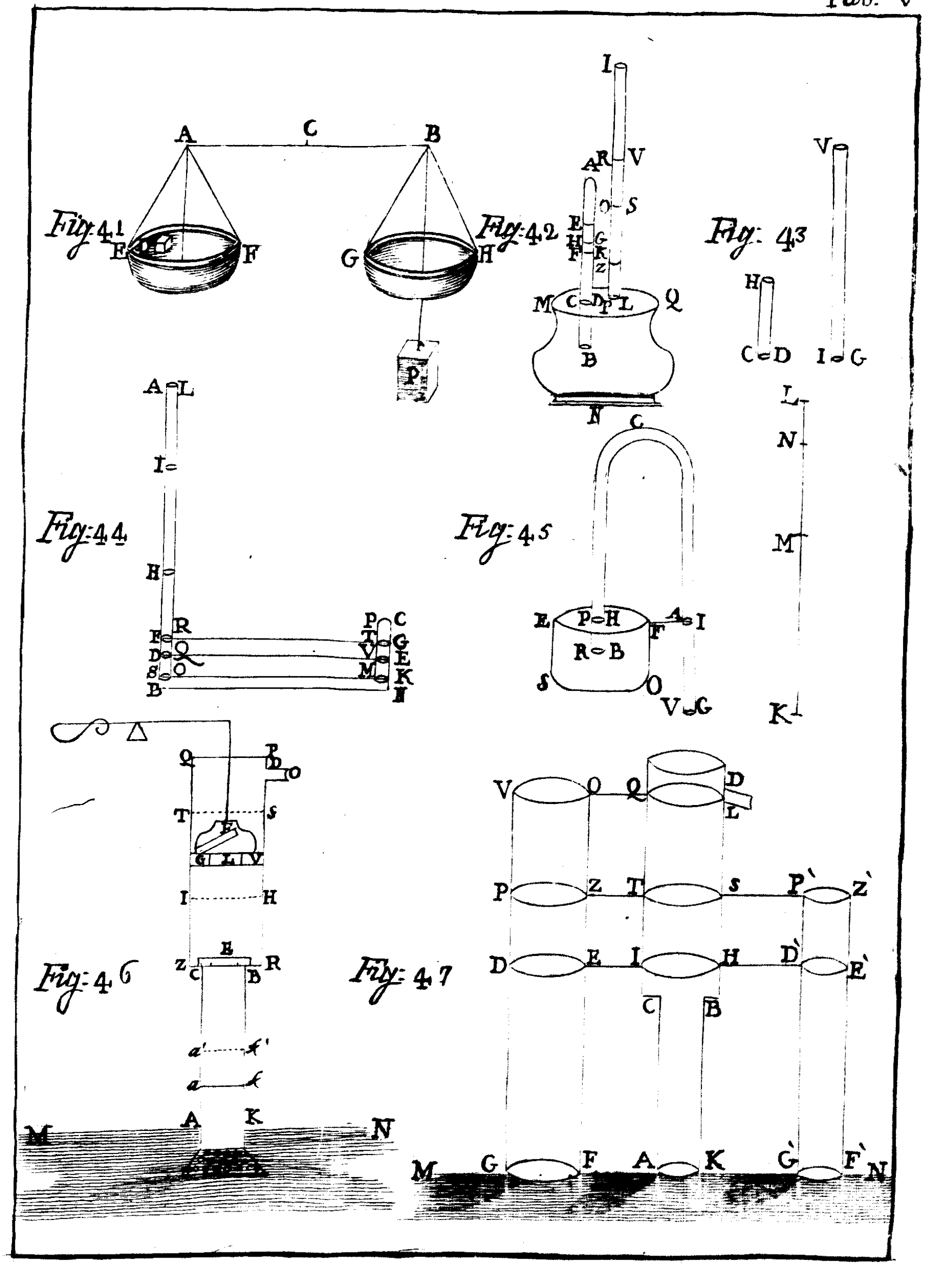


Fig: 30
Fig: 31
Fig: 32
Fig: 33
Fig: 34
Fig: 35
Fig: 36
Fig: 37
Fig: 38
Fig: 39
Fig: 40

Tab: V



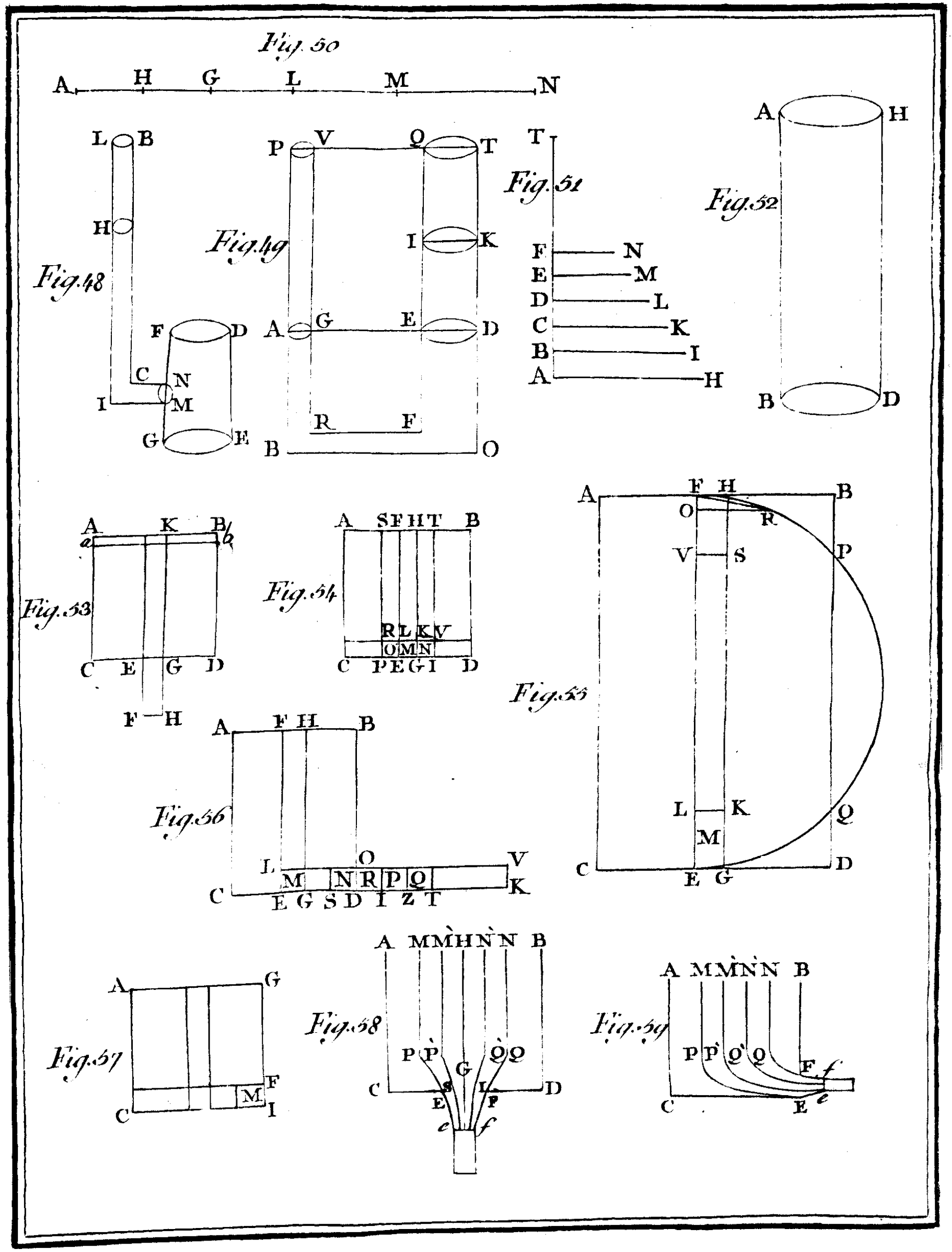


Fig. 50
Fig. 48
Fig. 49
Fig. 51
Fig. 52
Fig. 53
Fig. 54
Fig. 55
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 58
Fig. 59

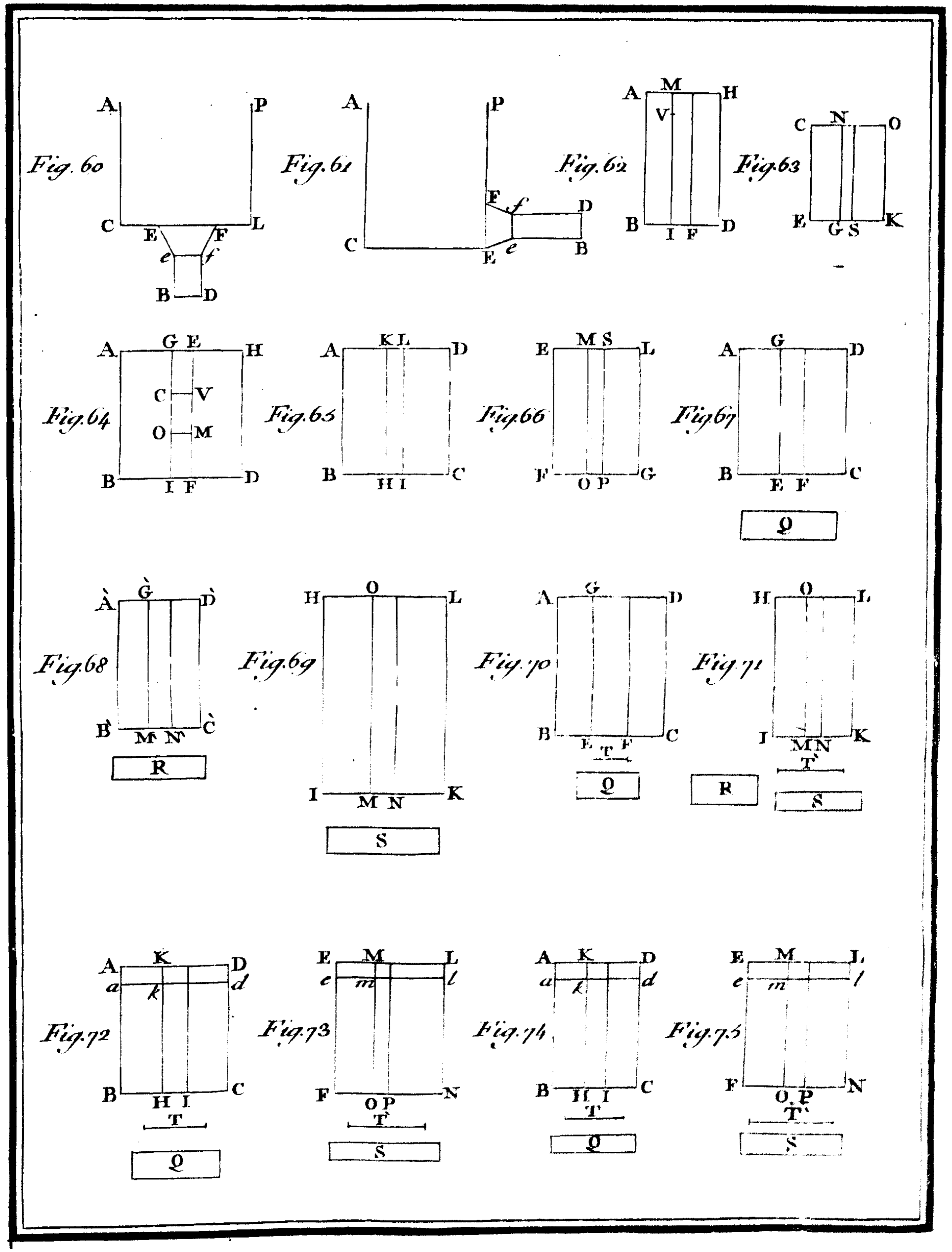


Fig. 60
Fig. 61
Fig. 62
Fig. 63
Fig. 64
Fig. 65
Fig. 66
Fig. 67
Fig. 68
Fig. 69
Fig. 70
Fig. 71
Fig. 72
Fig. 73
Fig. 74
Fig. 75

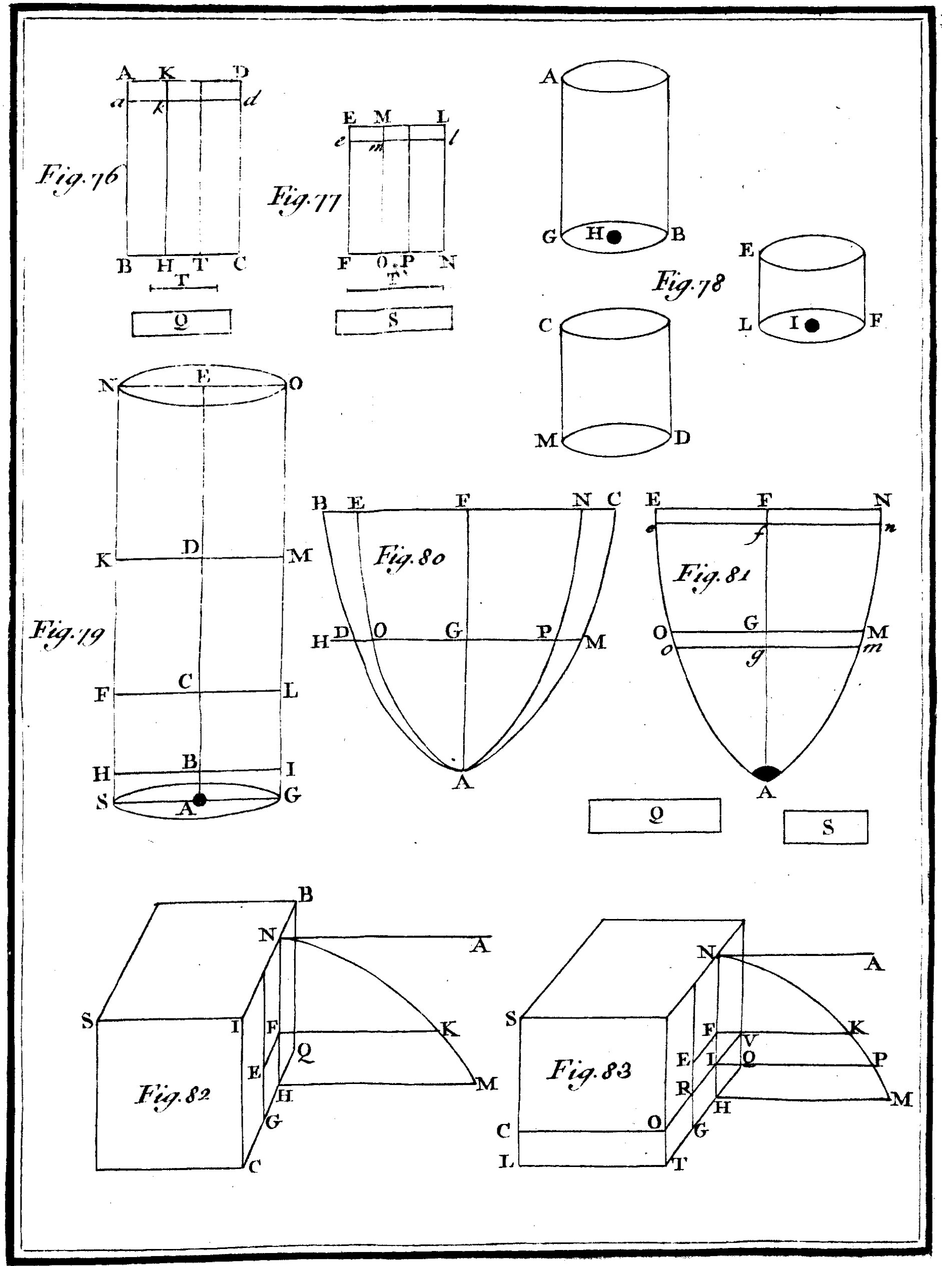


Fig. 76
Fig. 77
Fig. 78
Fig. 79
Fig. 80
Fig. 81
Fig. 82
Fig. 83

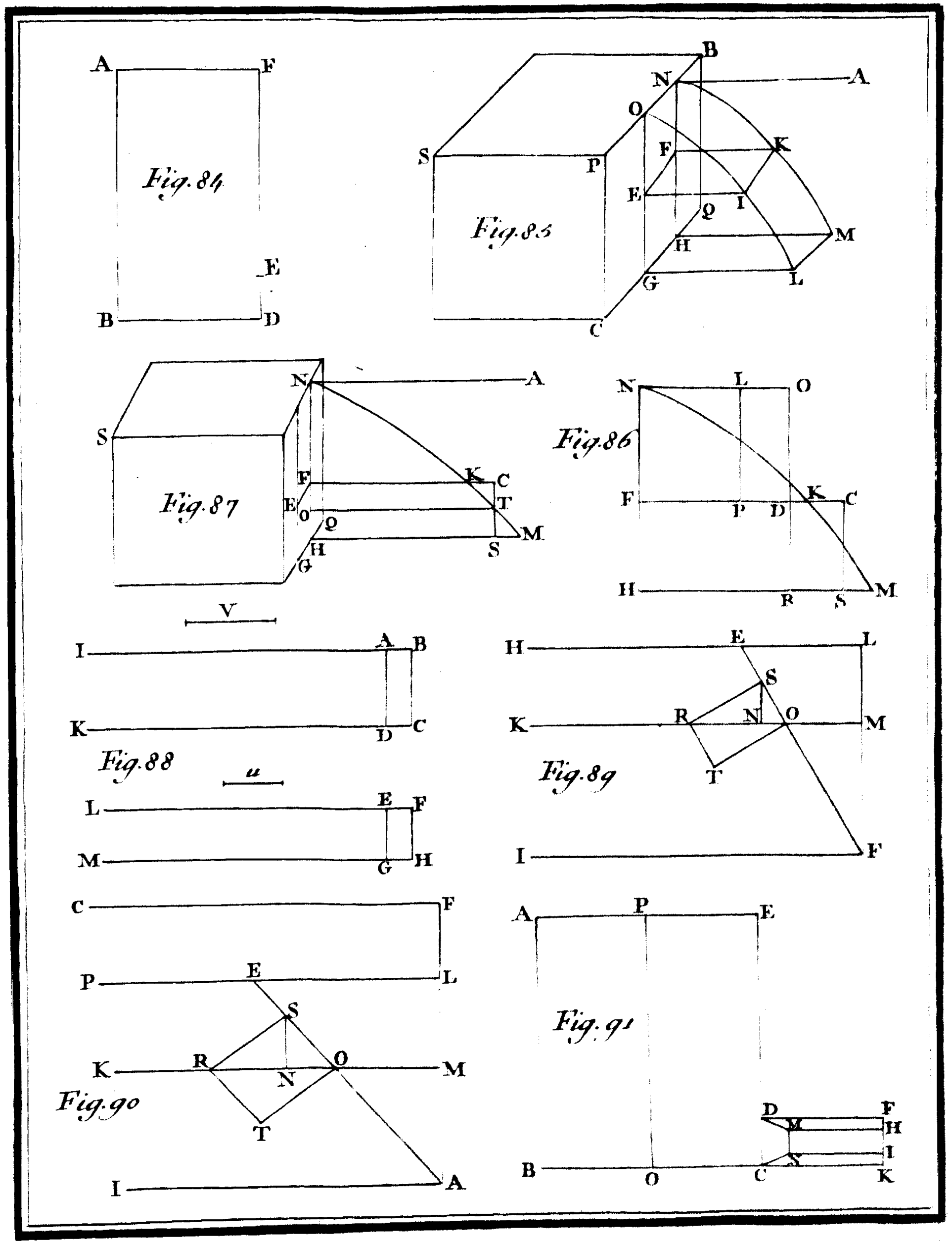


Fig. 84
Fig. 85
Fig. 86
Fig. 87
Fig. 88
Fig. 89
Fig. 90
Fig. 91

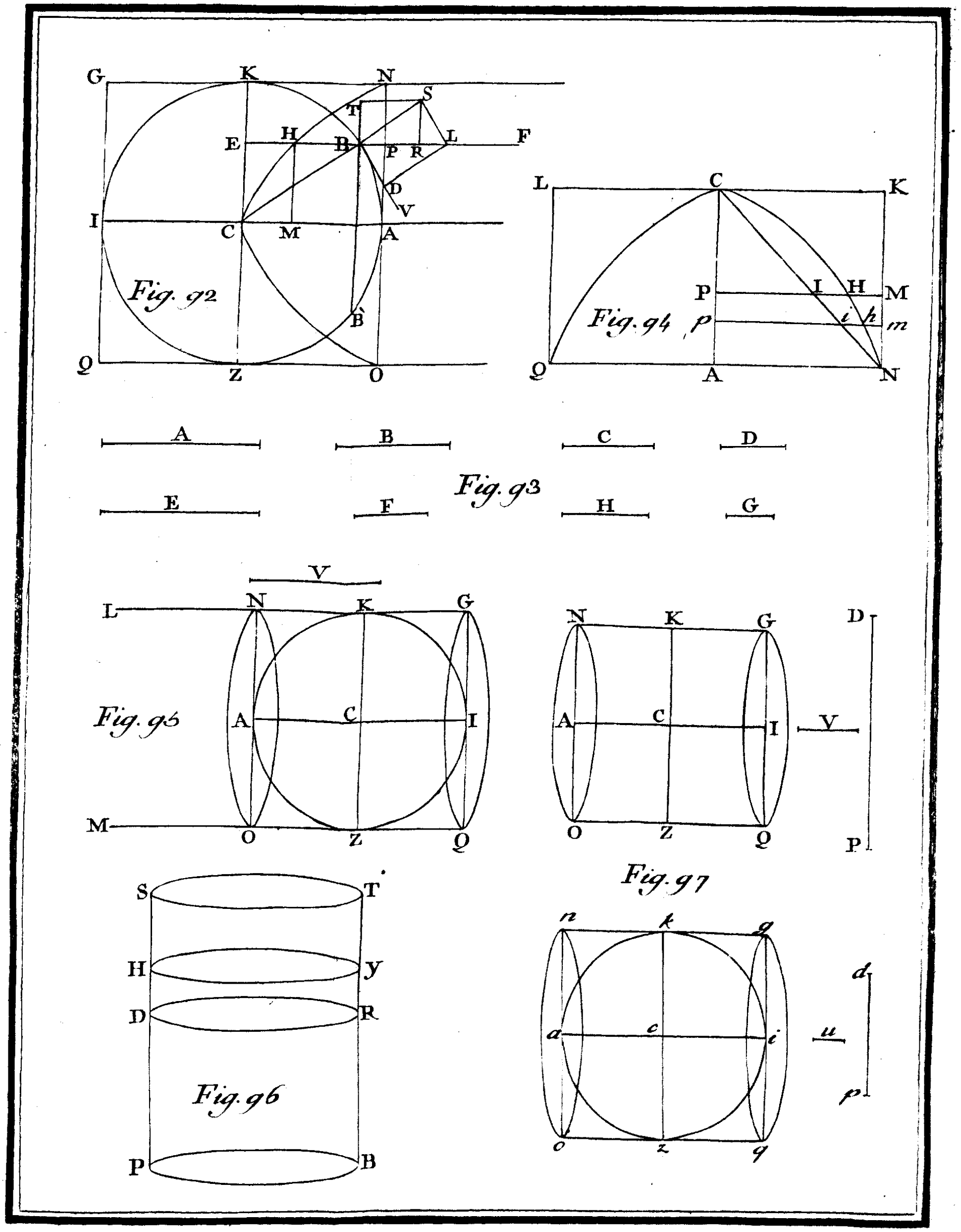


Fig. 92
Fig. 93
Fig. 94
Fig. 95
Fig. 96
Fig. 97

Tab: XI.

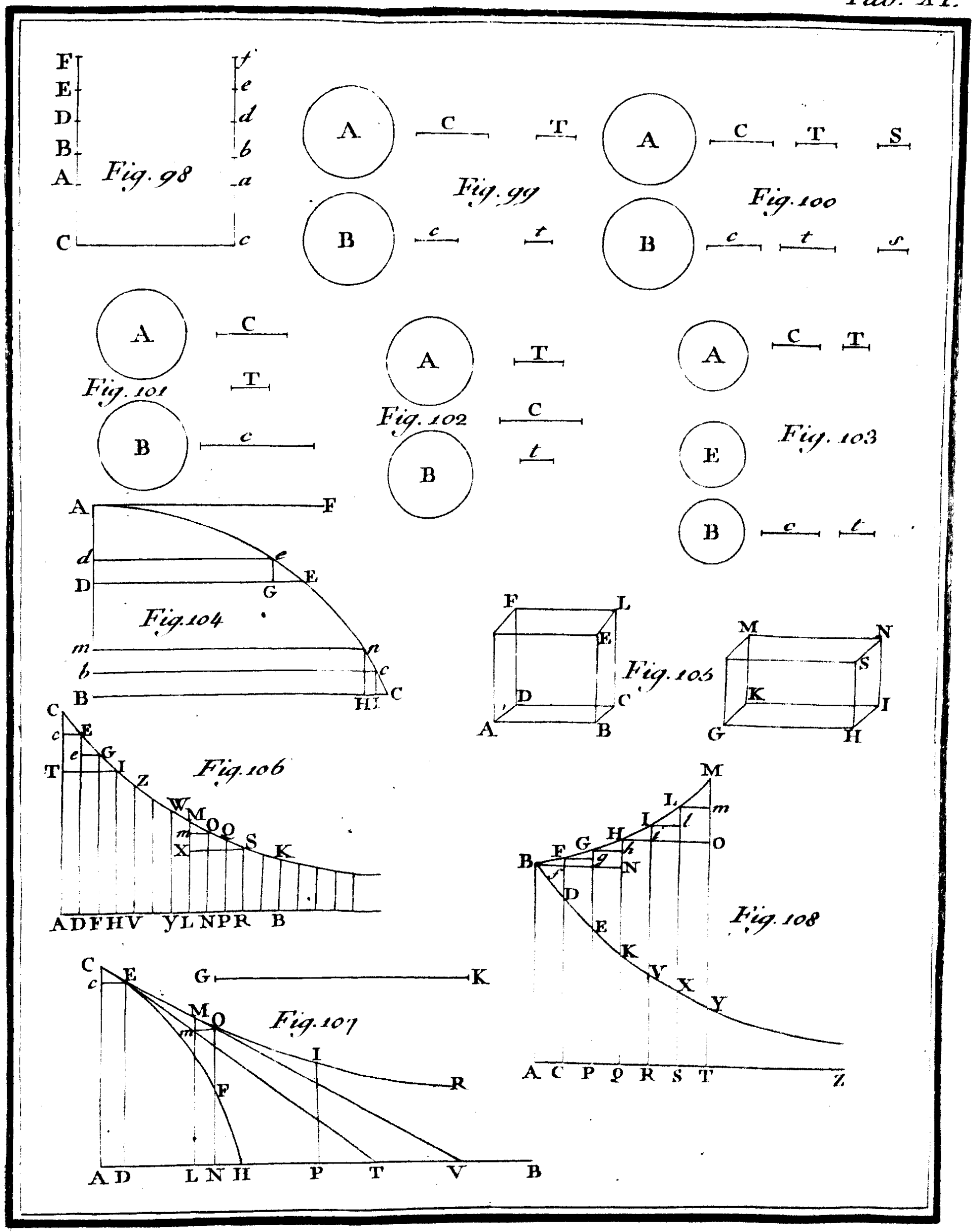


Fig. 98
Fig. 99
Fig. 100
Fig. 101
Fig. 102
Fig. 103
Fig. 104
Fig. 105
Fig. 106
Fig. 107
Fig. 108

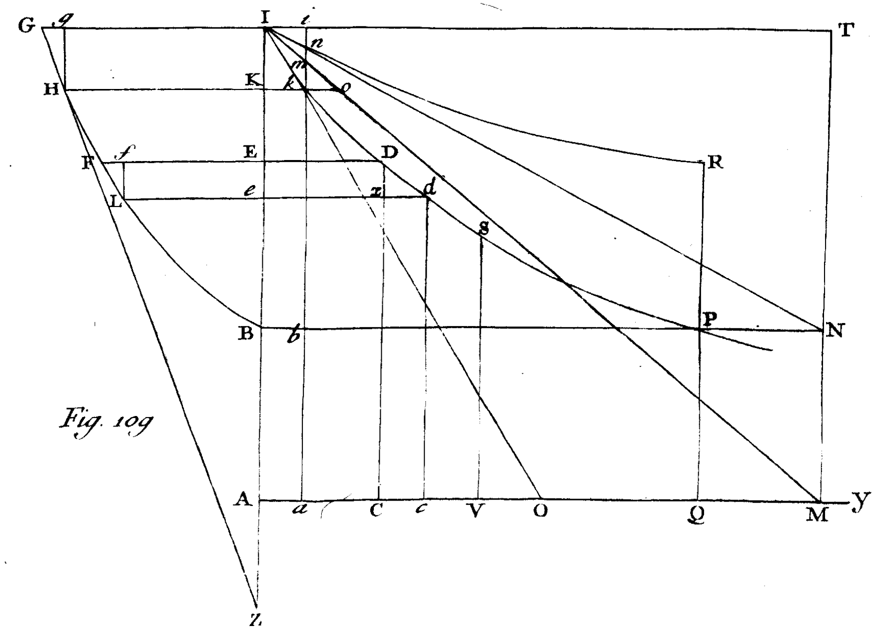


Fig. 109

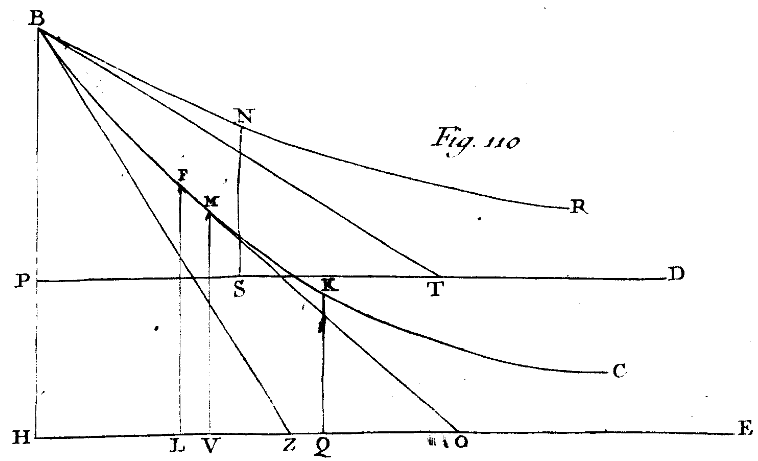


Fig. 110

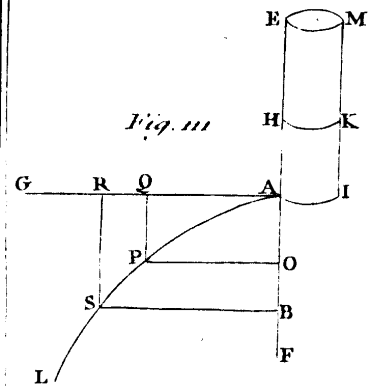


Fig. 111

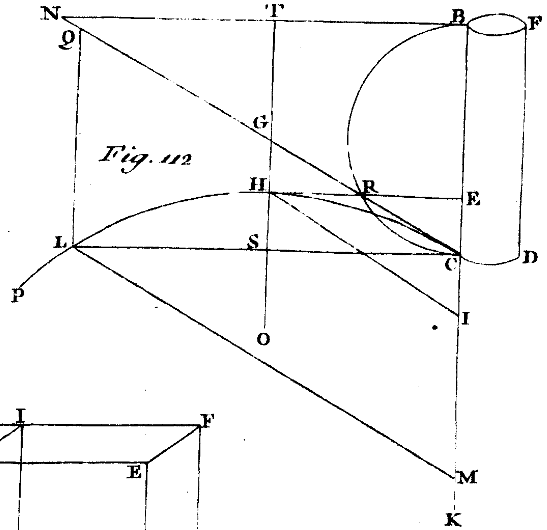


Fig. 112

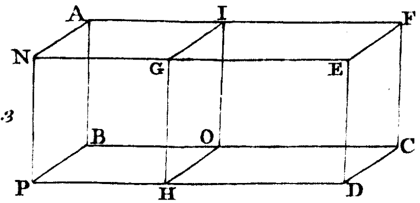


Fig. 113

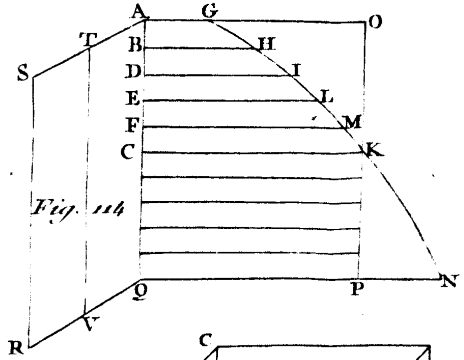


Fig. 114

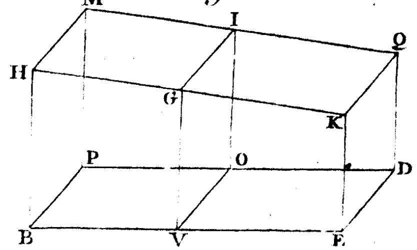


Fig. 115

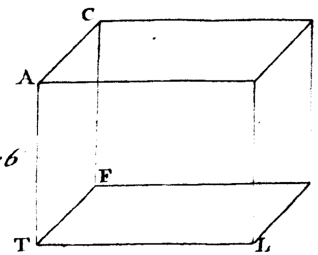


Fig. 116

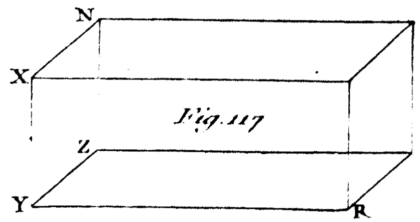


Fig. 117

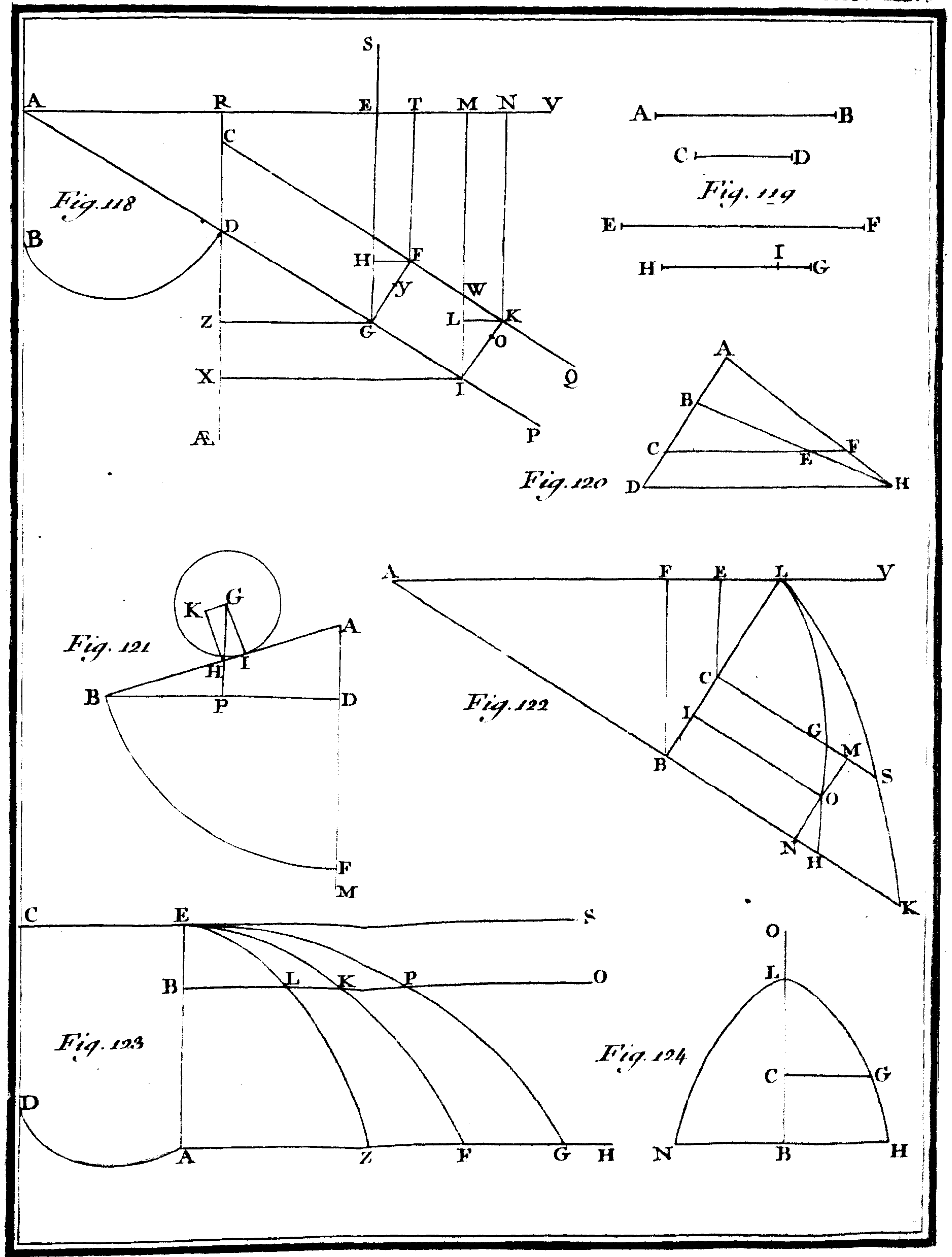


Fig. 118

Fig. 119

Fig. 120

Fig. 121

Fig. 122

Fig. 123

Fig. 124

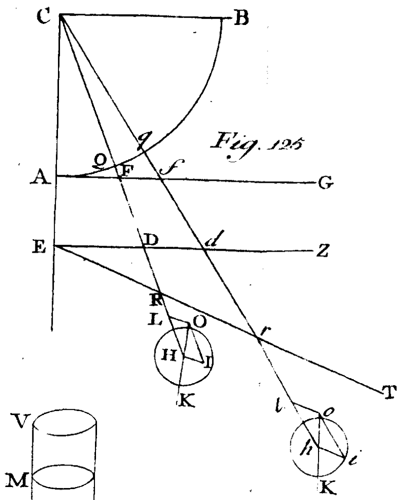


Fig. 125

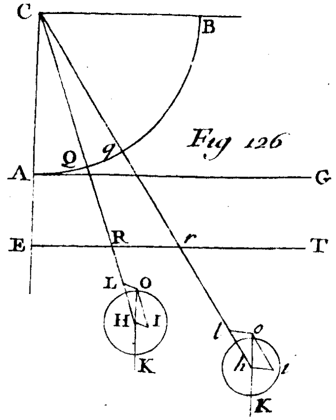


Fig. 126

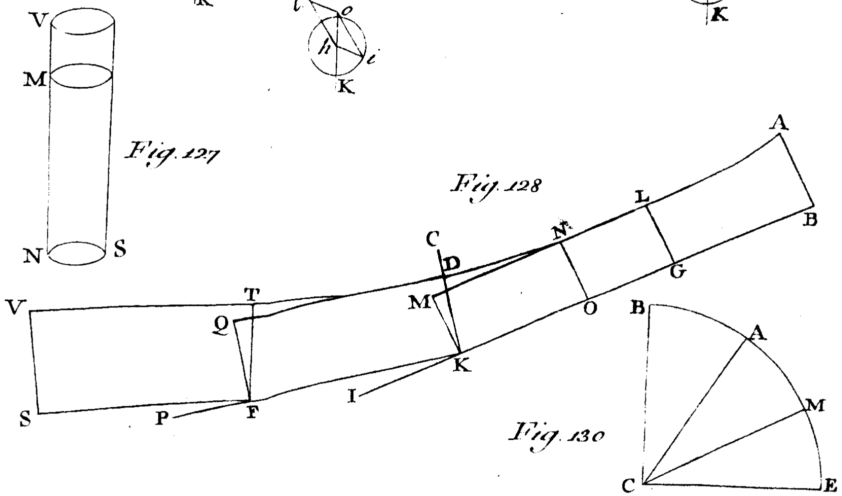


Fig. 127

Fig. 128

Fig. 130

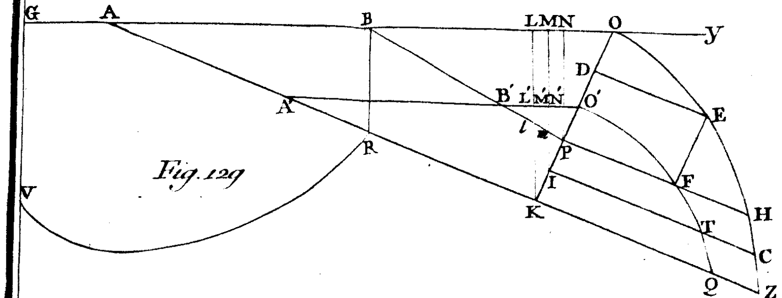
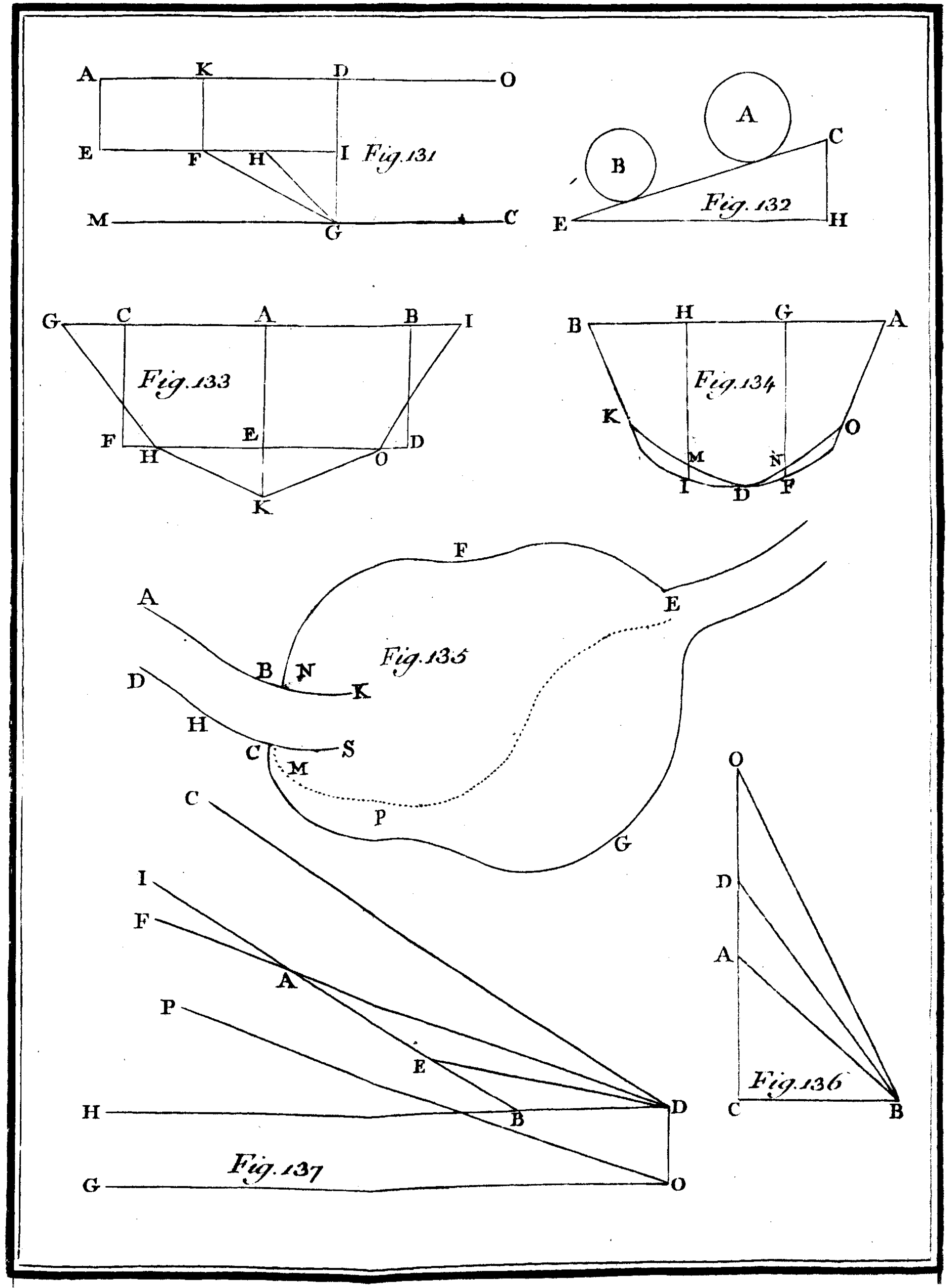


Fig. 129


A K D O E F H I Fig. 131 M G C
A B C E H Fig. 132
G C A B I Fig. 133 F H E O D K
B H G A Fig. 134 K O M N I D F
F A E Fig. 135 B N K D H C S M P G
O D A Fig. 136 C B
C I F A P E H B D G Fig. 137 O

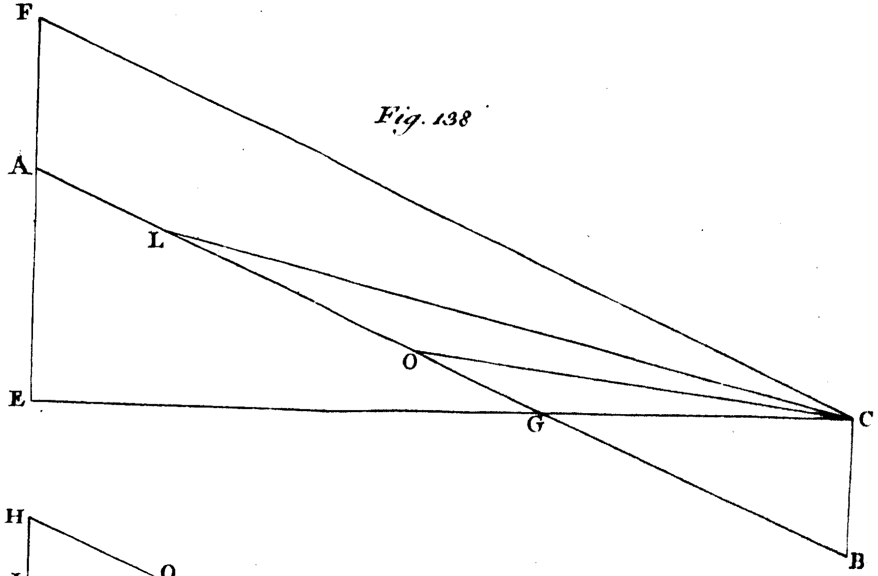


Fig. 138

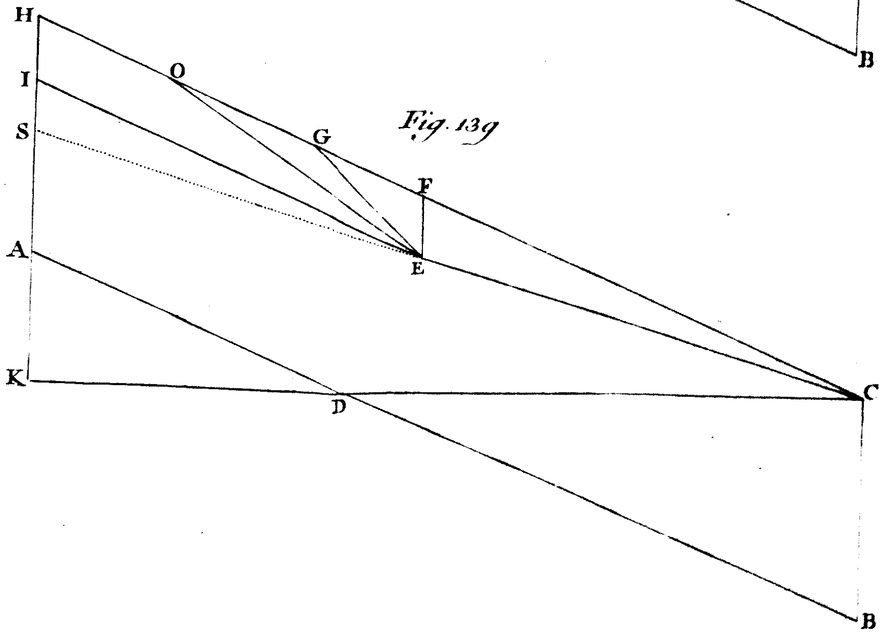


Fig. 139

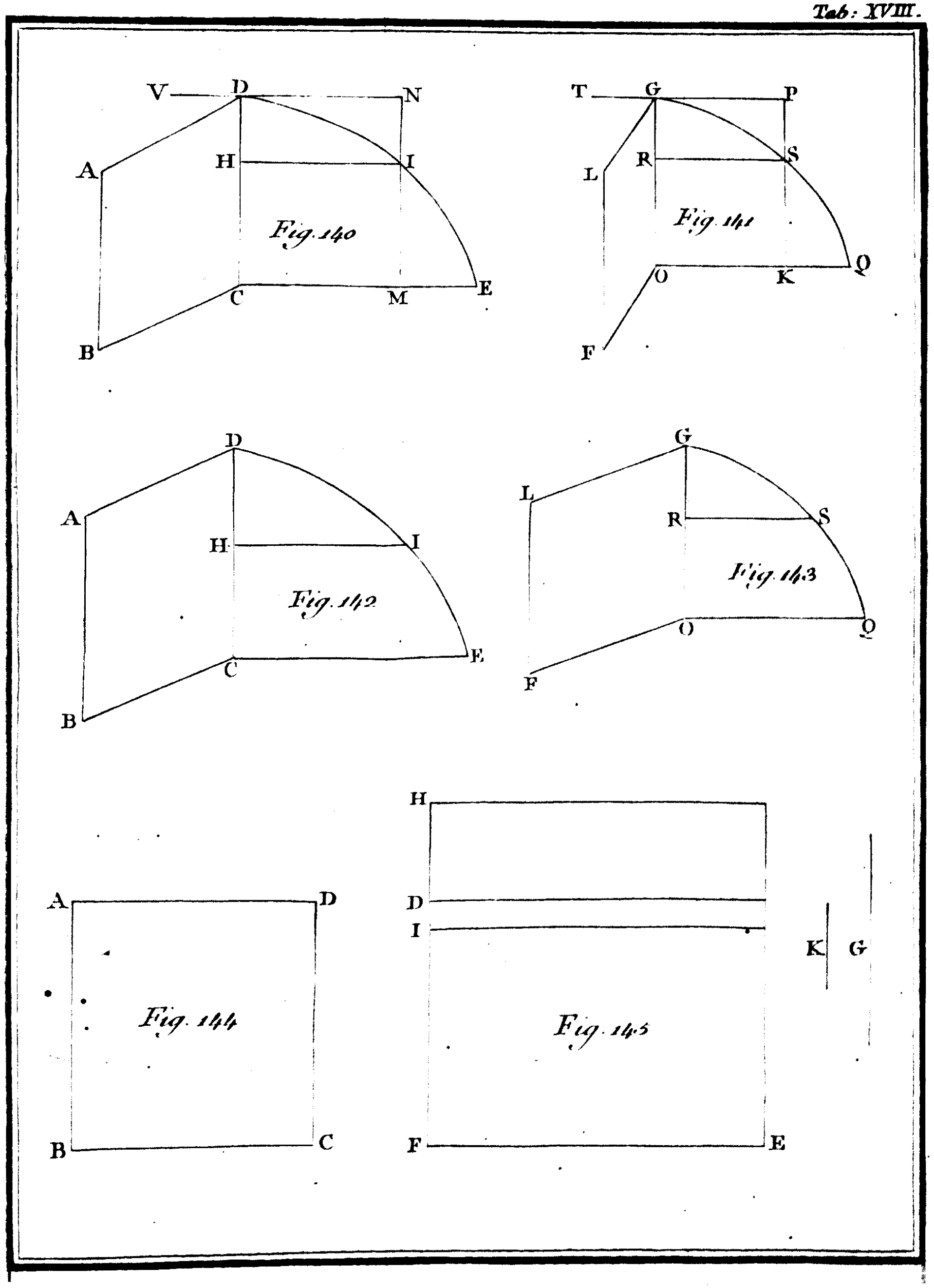


Fig. 140
V D N A H I B C M E
Fig. 141
T G P R S L O K Q F
Fig. 142
D A H I C E B
Fig. 143
G L R S O Q F
Fig. 144
A D B C
Fig. 145
H D I F E K G