NUOVI ISTROMENTI
PER LA
DESCRIZIONE DI DIVERSE CURVE
ANTICHE E MODERNE.

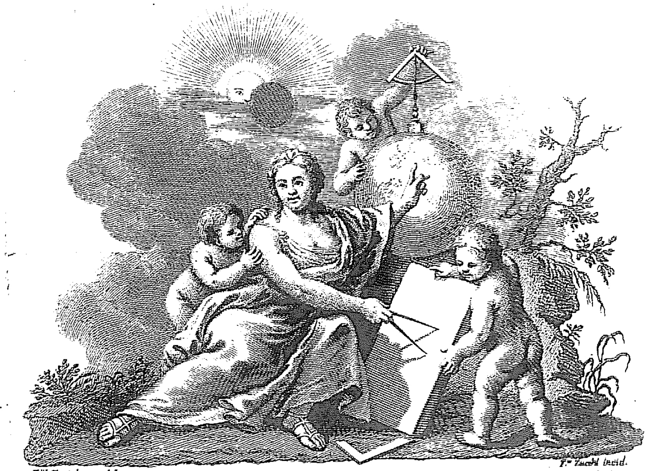
NUOVI ISTROMENTI
PER LA
DESCRIZIONE DI DIVERSE CURVE ANTICHE E MODERNE

E di molte altre, che servir possono alla speculazione de' Geometri, ed all' uso de' Pratici.

COL PROGETTO
DI DUE NUOVE MACCHINE PER LA NAUTICA ED UNA PER LA MECCANICA,

E con alcune Osservazioni sopra de' Poligoni rettilinei regolari

DEL CONTE GIAMBATISTA SUARDI
BRESCIANO.



F.co Fontebasso del. F.co Zucchi incid.

IN BRESCIA: MDCCLII.
Dalle Stampe di Gian-Maria Rizzardi.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Fortunatus Pasquetti pinx.

Franc. Zucchi ornav: et sculp.

AL SERENISSIMO PRINCIPE

FRANCESCO LOREDANO

DOGE DI VENEZIA

GIAMBATISTA SUARDI.

GLi Scrittori di quante nazioni ebbero in pregio le lettere e le ſcienze ſi tennero in ogni tempo tanto più fortunati e glorioſi, quanto più loro occorſe di poter dedicare

§ 2 le

le opere loro a Personaggi più illustri, o per la fama degli Antenati, o per proprio merito chiari e ragguardevoli. Perciò, SERENISSIMO PRINCIPE, allorchè, emulando anch' io l' altrui lodevole costume, ardii di umilmente presentarvi questi primi frutti del mio tenue ingegno, e che con somma degnazione vi compiaceste d' accettarli, se si considera la grandezza di V. SERENITA', a cui furono consacrati, tornò in mia grandissima riputazione ed onore. Ma per dir vero non tanto m' indusse a fare scelta di Voi l' onorata immortale memoria de' Vostri Avoli, che cotanto in pace e in guerra fiorirono, come un Francesco, un Giovanni, un Antonio, un Pietro, un Lionardo, e cent' altri celebri nell' Istorie d' Italia, quanto la Sovrana Virtù propria di V. SERENITA'. Questa parve che da que' Vostri Maggiori, ne' quali erasi amplamente

mente

mente diffusa e sparsa, si fosse poi tutta tornata a riunire in Voi solo, per chiudere con quanto v' ha di sublime, di magnanimo, e d' ottimo l' eletta schiera di tante generose Anime trapassate. Imperocchè siccome Virtù tanto singolare altamente si distinse ne' più ardui affari di cotesta Repubblica per divino favore da tanti secoli dominante, e nella cospicua dignità di Generale in Palma, e nel vasto carico di Savio-grande in Patria, così non meno luminosa comparve in quella non mai abbastanza ammirata magnificenza e splendidezza a signorile cortesia e affabilità mirabilmente congiunta. Per il che da cotesto santissimo e augusto Senato fu poi anche segnalata e distinta, non solo quando foste eletto Ambasciadore alle Maestà degl' Imperadori Carlo VII. e Francesco I., ma molto più allora, che con universale aspettazione, e fra le acclamazioni di tutti i

buoni

buoni foste dal Serenissimo Maggior Concilio al supremo grado della Repubblica elevato. Novella, SERENISSIMO PRINCIPE, che fu bensì con infinito aggradimento ricevuta anche da tutti i Monarchi d' Europa, ma che però non giunse loro improvvisa; perchè eglino nell' egregia indole e saggia mente di un tale amplissimo e ornatissimo Senatore renduto famoso per innumerabili gesta, e valorose azioni, avevano già chiaramente letto il felice presagio, che da gran tempo vi destinava al trono, come modello di ottimo e perfetto Principe. Ma che vo io rivolgendomi in mente l' eccelse vostre qualità, che quanto più grande vi conosco, tanto meno adeguate grazie render vi posso per l' onore, a cui crebbero i miei scritti ornati dall' eterno Vostro Nome? In fatti quand' anche per alcun loro difetto non potessero tener gran posto

tra

tra i fasti di questo eruditissimo secolo, avverrà se non altro, che gli Scrittori delle più colte Nazioni m' abbiano invidia di un sì gran Mecenate come è VOSTRA SERENITA', a cui per fine prego dal Cielo con tutto lo spirito ogni più desiderata felicità, e colla maggior riverenza mi raccomando.

TA-

. . . . . *neque te ut miretur turba labores*
Contentus paucis lectoribus.

Horat. lib. I. Sat. 10.

TAVOLA

Delle materie contenute in questo Volume.

* Figure

Quadra-

Errori più notabili da correggersi.

		ERRORI	CORREZIONI
Pag. 12.	Lin. 28.	è	e
Pag. 17.	Lin. 4.	nel Commento *Fig.* 3.	*Fig.* 4.
Pag. 21.	Lin. 12.	NDFQ	MDFQ
	Lin. 31.	CG	CH
Pag. 23.	Lin. 2.	C*b*	CD
Pag. 26.	Lin. 19.	avvegnachè forse, se	avvegnachè, se
Pag. 69.	Lin. 26.	Che si	Che se
Pag. 79.	Lin. 23.	recarvele	recarvela
Pag. 80.	Lin. 10.	della Tavola	delle Tavole
Pag. 89.	Lin. 4.	raggio *rs*	raggio *r*S
Pag. 97.	Lin. 20.	vengono	vengano
Pag. 105.	Lin. 7.	retna	retta
Pag. 133	Lin. 5.	*ng*; che	*ng*, che
Pag. 155.	Lin. 2.	*qd*	Q*d*
Pag. 168.	Lin. 21.	l' assile D	l' assile D*a*
Pag. 172.	Lin. 19.	nel Commento *infra nullum*	*infra lineam*
Pag. 182.	Lin. 25.	dell' Equatore	dall' Equatore
Pag. 188.	Lin. 30.	in tal caso tanto men	in tal caso andrà tanto men
Pag. 245.	Lin. 3.	*qn*Q	*q*NQ
Pag. 265.	Lin. 27.	all' angolo, alla periferia	all' angolo alla periferia
Pag. 273.	Lin. 27.	*bd*, *a* &c.	*bda* &c.

NUO-

NUOVI ISTROMENTI

PER LA DESCRIZIONE

DI

DIVERSE CURVE

ANTICHE E MODERNE,

E di molt' altre, che servir possono alla speculazione de' Geometri, e all' uso de' Pratici.

PREFAZIONE.

LA campagna, che per ordinario riesce altrui di sollievo e di ricreazione, a me già porse motivo di più serio trattenimento, quando accadendomi di osservarla con più attento animo nelle sue produzioni, ed ammirando specialmente i fiori, e le foglie m'avviddi, che per lo più portavano vagamente impressa la forma di una qualche Curva. Questo riflesso traendomi d'una in altra cosa m'indusse a voler tentare, se si potesse richiamare alle leggi di Meccanica la forma di alcune di quelle, e delineare con qualche ingegno le Curve, che ne caratterizzano le diverse specie. Per quanto strano mi paresse da principio questo pensiero, tuttavia dappoi tanto mi vi addomesticai, che d'indi passando a metter mano all'opera, mi venne fatto finalmente di descrivere con alcuni stromenti, oltre diverse Curve note a Matematici antichi e moderni, altre non poche somiglianti a un di presso a quelle, che osservate ne' campi erano state l'occasione, ed il soggetto delle prime mie meditazioni.

La costruzione adunque, e l'uso di cotali stromenti è appunto ciò che mi son ora determinato di dare alla luce; non per altra cagione, che più possa dar credito al mio consiglio, se non perchè mi son lusingato, che tal cosa potesse vantare qualche pregio di novità; la quale quanto suole piacere al pubblico, altrettanto rende scusabile un autore, che si lascia egli pure traportare da quella passione, che si ha di piacere ad altrui nel fargli un presente benchè tenue de' suoi ritrovamenti.

In fatti io posso asserire costantemente di non aver mai saputo, che altri abbiano prima scoperto cosa pubblicata ora da me come di mia invenzione. E benchè non essendomene forse assicurato con tutte le possibili diligenze, potrebbe alcuna cosa da me creduta mia essere già stata ritrovata da altri; nonostante mi parrebbe assai difficile, che o nella specie delle descritte Curve, o nel modo del descriverle, se per avventura fossero già state descritte, andassi io così sempre ad appormi, *mi, e fatalmente urtare nello altrui, che in tutto questo trattato non avesse ancora a restarvi qualche cosa del mio.*

Tuttavia non può negarsi, che ad un' Opera, cui non si contenda il titolo di novità, non si richieggano ancora delle altre prerogative, acciocchè venga generalmente ricevuta come degna delle stampe; quali forse sarebbero la dignità della materia, la rettitudine del discorso, e la purità dello stile, le quali da taluno o tutte od in parte si potriano in questi miei scritti desiderare. Ma che che siasi sperarei di poter agevolmente comportare, che altri mi accusasse di qualche mancamento, e si ponesse eziandio a contraddirmi liberamente; giacchè poi quanto al primo nulla più mi accaderebbe, che trovarmi avvolto nella folla di molti, che soggiacquero ad egual sorte, per esser tale la condizione delle umane imprese, che niuna veramente va esente da difetto. E quanto al secondo professandomi io d'apprezzare sopra tutto la verità, avrei anzi per bene, che conforme all' antica consuetudine di Socrate si procurasse di dargli un più bel giorno per mezzo della contraddizione. Questa però come che sogliasi spesso adoperare a capriccio, e rivolgere del pari contra le vili, e le pregevoli cose, non permette, al dir di Cicerone, altro modo più sicuro di sottrarsi al suo rigore, che rimanersi del tutto dallo scrivere. Il che se finora fosse accaduto, siccome non avrebbe il mondo letterato a dolersi di molte inutili e stucchevoli inezie, così per contrario deplorarebbe la privazione di non poche stupende, e vantaggiosissime scoperte. Nè è già che io quindi presuma di porre le mie piccole cose in paragon di queste ultime, ma d'inferire solamente, che per timore della contraddizione non doveva ritenermi dal pubblicarle; perchè quantunque non sia così insensibile di non risentirne diletto, quando almeno vengano accolte con benigno compatimento, però nemmeno sono per reputare ad ingiuria, quando vengano criticate o riprese, mentre per altissimo favore mi ritrovo in tale disposizione di animo, che più amo il merito che la lode, e sono egualmente preparato a soffrire un biasimo che mi faccia accorto de' miei falli, che a ricevere un' approvazione, che a torto ricompensi le mie fatiche.

ISTRO-

ISTROMENTO I.

PER LA DESCRIZIONE ORGANICA DELLE CONCOIDI.

SEBBENE Nicomede, Diocle, Dinostrato, Archimede nell' investigare la duplicazione del cubo, la trisezione dell' angolo, o la quadratura del circolo furono men fortunati d' Ippocrate da Chio, cui per lo meno avvenne di quadrare geometricamente alcune porzioni o segmenti di quello, non perciò si conserva di tutti loro meno onorata memoria, sicchè delle quattro curve a tal fine inventate da essi, come d'ingegnose produzioni della rispettabile antichità, non si faccia tuttavia grandissima stima. Ma perchè, non potendosi esse delineare geometricamente, riuscivano affatto inutili a quel fine appunto cui erano destinate; perciò ho creduto, che per avventura fosse lodevol cosa descriverle almeno con qualche artificio meccanico, e prima

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Concoide di Nicomede.

NOn è già ch' io intenda di riferire l'origine di questa curva (inventata (1) dal suo Autore per la duplicazione del cubo) o di qualunque altra, perchè pensi, che

(1) Serve questa curva per determinare (Milliet De-Chales *Geom. Tract.* lib. III. prop. 31.) rispetto a' due dati estremi la posizione d'una retta eguale ad una data, e menata da un dato punto; per mezzo della quale si viene poi al conseguimento di due medie continue proporzionali. Ma come parmi, che l'applicazione, che si fa della Cissoide a questo medesimo effetto, sia molto più breve, e l' operazione meno implicata; così quando occorresse la duplicazione del cubo, meglio sia attenersi a questa, la quale ricordaremo a suo luogo, come si metta in pratica.

che essa sia meno altrui nota, ma perchè ciò è troppo per venirmi in acconcio, quando passarò a provare la struttura degl' Istromenti annessi.

Sia però (*Fig.* 1. *Tav.* 1.) perpendicolare alla *direttrice* indeterminata DR la retta PC *costante* data, dal cui estremo punto P, che dicesi *polo*, sono tirate molte parimente indeterminate *Pt*, *Pt* ec. secanti detta *direttrice*. Di queste col compasso si recidano altrettante quantità, che *intercette* appellansi, eguali ad una data, o al di sopra della *direttrice*, quali sono *pt*, *pt*, ec., o al di sotto, come *tn*, *tn* ec., ovvero *tr*, *tr* ec. *to*, *to*, ec. Allora la linea LTZ condotta per i punti *p*, *p* ec. sarà una Concoide *esteriore*, e Concoidi *interiori* le tre linee GMH, BPE, KPQPS; la prima delle quali unisce i punti *n*, *n* ec., la seconda passa per i punti *r*, *r* ec., la terza per i punti *o*, *o* ec., corrispondenti appunto per ordine ai tre casi della Concoide *interiore*: primo, quando la *intercetta*, come *tn*, è minore della *costante* CP. Secondo, quando è eguale, come *tr*. Terzo, quando è maggiore, come *to*.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione scenografica dell' istromento per la Concoide.

Oltre che io mi recai a noja lo spiegare in disegno il *piano orizzontale*, e *verticale* di questa macchinetta, parvemi ancora che la sua perfetta costruzione si potesse raccogliere assai bene dalla sola elevazione in prospettiva. Di che per convincersi figuriamoci, che alla tavoletta orizzonle BEFK (*Fig.* 2.) sia fermato con due viti NN un telaro DMQR composto di un pezzo DR, nelle due estremità del quale sono eretti due stanti DM, RQ, che sostengono un altro pezzo MQ. Il pezzo DR è un parallelepipedo di legno o di metallo, solcato per il lungo da una scannellatura di tal forma, che nell' interiore sua cavità ricever possa il prisma *pt* della *Fig.* 3., e combaciare al di dentro con l' esteriore superficie di detto prisma. Laonde questo prisma *pt* fornito di un pivolo *t* al di sopra, già figuriamolo inserto e mobile per essa scannellatura nella direzione DR; cosicchè il pivolo *t* annesso tracci una linea retta, che rappresenti la *direttrice* DR della *Fig.* 1.; ma per ora via si tolga (*Fig.* 3.) il raggio *t*K, che quanto prima ad altre curve sia d' uopo.

Nelle due estremità del parallelepipedo DR sono, come già dissi, eretti due stanti RQ, DM, ai quali pure sta in alto afferrato un altro parallelepipedo MQ, il di cui piano verticale apparente in figura perpendicolarmente sovrasta alla linea detta di sopra, che per il lungo della scannellatura DR si concepisce esser tracciata dallo scorrente pivolo *t*. Nel mezzo di questo parallelepipedo avvi per di sotto un incastro di quella forma, che è l' asta PH in esso introdotta ad angoli retti, e che si ferma in qual punto più si vuole con una vite superiore C. Dall' estremo punto P di quest' asta discende perpendicolarmente un palicello d' acciajo PZ quale, come meglio osservaremo in sezione, poichè è entrato nella scannellatura del regolo AG, dilatandosi in cerchio, riempie il largo di quella cavità. La distanza poi PC presa in detta asta da P fino all' incontro del piano verticale MQ, secondo che più o meno si caccia innanzi, sostiene le veci d' ogni *costante* data, ed il palicello PZ sta in luogo di *polo*.

Il regolo AG circa la metà di sua lunghezza ha un forame verticale, in cui per di sotto (interposta prima una laminetta rotonda perforata, come nella *Fig.* 5., e grossa quanto il raggio *t*K della *Fig.* 3.) entra il pivolo *t*, e quindi parte una scannellatura verso A, in cui s'introduce, come si è detto, il palicello d' acciajo PZ. E' poi circondato da due anelli rettangoli forniti ciascheduno di uno ſtilo S, onde la curva ſi deſcrive; ma l'anello a ſiniſtra preſſo *n* in luogo d'abbracciare perfettamente detto regolo, come prima va a baciare il margine della ſcannellatura rimane interrotto, e laſcia paſſaggio libero al palicello PZ: lo che, diſſi, aſſai più chiaramente ſi dà a vedere in ſezione (*Fig.* 4.) dove il parallelogrammo A*n* per ombra diſtinto rappreſenta l'anello A*n* della *Fig.* 2. coll'anneſſo grafio S, e con la vite *d*, onde ſi fermi in quel punto, che più piace; il ſeguente parallelogrammo da quello circoſeritto, e che tiene tuttavia la bianchezza della carta, rappreſenta un taglio del regolo AG fatto per traverſo; e finalmente l'intimo PZ da queſto bianco racchiuſo ſignifica il palicello PZ della *Fig.* 2. che ſi dilata e riempie detta bianca cavità.

Lo ſpazio *t*A preſo ſu detto regolo AG, a qualunque data *intercetta* ſi può eguagliare, ſoſpingendo li anelli, e fermandoli in data diſtanza con le opportune viti. Avvertendo per fine, che tanto ſiano lunghi li ſtili e palicello PZ, quanto fa di meſtieri, acciò i *piani orizzontali* dei parallelepipedi, aſta, e regolo ſiano tra di loro ed all'orizzonte paralleli.

Ciò fatto qualora ſia data qualunque *interiore* o *eſteriore* Concoide da deſcriverſi, preparata prima, come ſi è detto, la macchinetta, niente più importa, che con la deſtra dar moto al regolo AG, acciocchè movendoſi in *t* nella direzione DR, e ſtriſciando nello ſteſſo tempo d'intorno al palicello PZ, dalli ſtili S overo *ſ* vengan deſcritte le propoſte curve, vale a dire, dallo ſtilo *ſ* la Concoide *eſteriore*, e dallo ſtilo S l'*interiore*.

AR-

ARTICOLO TERZO.

Origine e deſcrizione organica della Concoide della Conteſſa Agneſi.

NOn è da tralaſciare, che la Concoide KPQPS (*Fig.* 1.) che la celebre Conteſſa Maria Gaetani Agneſi (1) produſſe nelle ſue *Inſtituzioni Analitiche*, non è ſtata, che ſi ſappia, prima da altri conoſciuta. Eſſa ſi avvolge in nodo, e nel *polo* P ſi interſeca e riſulta, come già diſſi, dall'eſſere le intercette *to*, *to* ec. più lunghe della data *coſtante* CP, della quantità PQ. Onde per deſcriverla ſi dovrà far di modo, che la diſtanza *t*A (*Fig.* 2.) ſia maggiore della CP, come appunto ſi ritrova a caſo nella preſente figura.

ARTICOLO QUARTO.

Origine delle Concoidi di baſe circolare.

CErta coſa è preſſo tutti i Matematici, che la linea retta aver ſi può come porzione della periferia di un circolo infinito; onde ne ſegue, che le Concoidi di Nicomede, che hanno per baſe o ſia *direttrice* una retta, han per baſe o *direttrice* una porzione della periferia di un circolo infinito; e ſono caſo particolare, e dipendente da un generale, nel quale le Concoidi naſcono da baſe, che ſia un circolo finito. Dopo aver dunque detto di quelle ormai vecchie nella memoria degli uomini paſſeremo ad eſporre l'origine e deſcrizione organica di queſte, che, ſe mal non penſo, non furono note per lo innanzi.

Pertanto ſe per i punti (*Fig.* 1. *Tav.* 2.) della periferia

(1) *Inſtit. Analit.* Lib. I. cap. 5. probl. 4.

ria TT*tt* ec. e per il *polo* R si tirino molte rette indeterminate PTNRN, PTNRN ec. ed in queste col compasso siano definite le *intercette* eguali ad una data, o al di sopra della *direttrice*, come sono TP, TP, *tp*, *tp* ec., o al di sotto come TN, TN, *tn*, *tn* ec. la linea scorrente per i punti PP *pp* ec. sarà una Concoide *esteriore* ed *interiori* quelle, che uniranno i punti NN *nn*, NN *nn*, le quali tutte è da notare, che avranno l' asse eguale al diametro del *circolo generatore*, o sia periferia *direttrice*.

Due cagioni poi concorrono a modificare la forma apparente delle Concoidi di questo genere. Prima, perchè le *intercette* TP, TP, *tp*, *tp* ec. o sia TN, TN, *tn*, *tn* ec., ovvero (*Fig.* 2.) TO, TO, *to*, *to* ec. sono pareggiabili ad ogni data; onde le Concoidi *interiori* ora accadono tra il *polo*, e la periferia *direttrice* dentro l'angolo *t*R*t*; ora al di qua del *polo* comprese nell'angolo al vertice opposto *a*R *a*; talora sono eguali e dal *polo* egualmente distanti, come NN *nn* ec., NN *nn* ec., ma sempre per il vertice opposte; e talora parte di una medesima Concoide, come OO ec. (*Fig.* 2.) sta situata di qua, e parte *oo* di là dal *polo*, cosicchè precisamente nel punto polare R se stessa interseca, formando due seni, che esser possono eguali, o l'uno dell'altro maggiore, o minore; e in questo caso la Concoide OOR, *oo* ec. è analoga a quella della Contessa Agnesi celebrata di sopra; perchè parte delle *intercette*, come TO, TO metton capo tra il *polo* R, e la periferia *direttrice* sotto l'angolo *t*R*t*, e parte come *to*, *to* cadono nell' apertura dell'angolo opposto *o*R*o*. In secondo luogo variano dette Concoidi, perchè la distanza, che è dal *polo* R al *centro* C della periferia *direttrice*, può parimenti eguagliarsi ad una *costante* data, quale se si supponga infinita, e però nell' infinito andato anche il *polo*, le indeterminate dovendosi in tal caso considerare a se stesse parallele, le *intercette* poi non potrebbero altra curva fornire, che una periferia

riferia eguale affatto alla periferia *direttrice*. Ma se il *polo* è situato di qua dall' infinito (prescindendo per ora dalla lunghezza delle *intercette*) più o meno acuto risulta il vertice della curva, secondo che più o meno essendo distante il *polo* della periferia *direttrice*, risulta l'angolo al *polo* di maggiore o minore apertura. Onde è qui da notare ciò che aggradiranno per avventura i Meccanici, ed è, che se la *costante* CR sarà eguale a otto diametri incirca del circolo generatore, e le *intercette* a tre, ovvero $13 \frac{1}{2}$ incirca, ne verrà una curva (*Fig.* 3.) o tra il *polo*, e la periferia per il primo caso, cioè se le *intercette* saranno eguali a tre diametri del circolo generatore; o di qua dal *polo* per il secondo caso, cioè se dette *intercette* saranno eguali a $13 \frac{1}{2}$ diametri di detto circolo, la quale gentilmente rappresentarà una sezione di uovo, di cui spesso può occorrere l'uso, per fare di una simil forma o quadri di pittura; o cornici; o che altro so io.

ARTICOLO QUINTO.

Descrizione organica delle Concoidi di base circolare.

LA descrizione organica di questo genere di Concoidi si riduce felicemente alla macchinetta di sopra esposta. Primieramente sol basta condurre il prisma *pt* (che già s' intende essere dentro la scannellatura dal parallelepipedo DR) nella giusta metà di essa, cosicchè il pivolo *t* soggiaccia verticalmente a quel punto del piano verticale MQ, in cui va a urtare la linea PC. Si fermi poi in detto punto il prisma con la vite *q* situata nel fianco del parallelepipedo, giacchè resta per queste Concoidi inutile affatto la scannellatura DR. Indi levata dal pivolo *t* la laminetta espressa nella *Fig.*

Fig. 5., bisogna mettervi in suo luogo il raggio *t*K della *Fig.* 3., e far entrare (*Fig.* 2.) nel forame *t* del regolo AG non già il pivolo *t*, ma la estremità K uncinata di detto raggio *t*K. Per altro tanto le *intercette* TP, TN, TO della *Fig.* 1. *e* 2. *Tav.* 2., quanto la *costante* CR a qualunque data si eguagliano, prendendo rispettivamente quelle nel regolo AG (*Fig.* 2. *Tav.* 1.) e facendo *ta*, ovvero *t*A eguale a dette *intercette*, e questa nell' asta PH, facendo CP eguale alla data *costante* CR della *Tav.* 2., non altrimenti che se si trattasse di preparare la macchinetta alla descrizione delle Concoidi di Nicomede, cosicchè il pivolo *t* vaglia per il centro C della *Fig.* 1. *e* 2. *Tav.* 2., ed il palicello PZ per il *polo* R di dette figure. E per ciò che riguarda il moto di detta macchinetta, dove per le Concoidi di Nicomede il forame *t* del regolo AG era mosso nella direzione DR, ora per questa sarà con la mano spinto per un cerchio, il di cui raggio sia *t*K della *Fig.* 3. *Tav.* 1. Notando che quantunque detto raggio *t*K sia sempre il medesimo, perchè però si può modificare ad arbitrio l'asta PH, che fa, come dissi, per la data *costante* CR, si ponno nondimeno conseguire infinite Concoidi di questo genere di base circolare.

Qui però io non voglio dissimulare una difficoltà, che da' Meccanici potrebbe venir fatta in proposito della descrizione da me loro promessa della sezione di un uovo; perchè intorno a picciole sezioni, qual' è quella della *Fig.* 3. *Tav.* 2., non v'è che ridire, ma se ad un quadro o cornice si dovesse dare la forma di una tal curva, di cui l'asse maggiore *ab* fusse (che poi non sarebbe gran fatto) lungo cinque soli piedi di Parigi, ne seguirebbe che sebbene accadesse la descrizione tra il *polo* e la periferia *direttrice* (supponendo le *intercette* eguali a' tre diametri di detta periferia) nonostante, essendo stata supposta la *costante* CR eguale ad otto diametri della periferia medesima, la porzione PC dell' asta PH della *Fig.* 2. *Tav.* 1. verrebbe per lo meno ad essere

essere lunga 40. piedi di Parigi. Perchè essendo l'asse dato di piedi cinque, di cinque piedi parimenti sarebbe il diametro del circolo generatore, che, come abbiam detto, all' asse della curva si eguaglia; ma la data *costante* CR, ovvero CP, cui si suppone eguale, si suppone dover essere eguale a otto diametri incirca del circolo generatore; e perciò moltiplicato 8 per 5, la lunghezza della data CR, ovvero CP ascenderebbe certamente fino a 40. piedi di Parigi. Onde chi non vede essere la bottega di un Artefice angusta troppo per una macchina tanto enorme? Pure io son per farmi incontro a questa obbiezione, non già con animo di risolverla, ma col tentare di procacciar loro questa comodità per altra via. E però oltre che assai bene riesca una simil curva dall' accozzamento di un semicircolo *mbn* con un semielisse *man* (*Fig.* 3. *Tav.* 2.) di cui l'asse minore *mn* sia eguale, e coincida col diametro di quello, spiegarò inoltre a suo luogo (1) come conseguir anche si possa con l'uso di un semplice filo; metodo, per vero dire, di cui nell' opinione degli Artefici non v'ha il più utile, nè il più facile. Ma per ora basti della descrizione ed uso di questo primo Istromento.

(1) Istrom. VI. Art. III. e IV.

ISTROMENTO II.

PER LA CISSOIDE DI DIOCLE, E PER LA CURVA DI M.R CARRE'.

Cospirarono ad un medesimo fine le invenzioni di Nicomede, e di Diocle, poichè quello la Concoide, e questo la Cissoide inventarono per la duplicazione geometrica del cubo (1); ma essendo che per questa non che gli antichi Filosofi indarno travagliarono, ma ancora i moderni vanamente v' impiegarono le forze del loro ingegno, noi contenti di più umili ricerche, dappoichè abbiam detto della Concoide, passeremo soltanto a spiegare l' origine e descrizione organica della Cissoide.

ARTICOLO PRIMO.

Dell' origine della Cissoide.

Sia dunque (*Fig.* 1. *Tav.* 3.) la retta QO tangente il *semicircolo generatore*, e posta ad angoli retti del diametro QP, e siano dal punto estremo P alla tangente condotte molte rette Pb, Pd, Pf ec. delle quali le porzioni ab, cd, ef ec. comprese tra la periferia del semicircolo, e la tangente siano col compasso trasferite dall'altra parte sulle medesime linee rispettivamente; cosicchè facendo sempre capo in P, siano P$t = ab$, P$r = cd$, P$z = ef$ ec. Allora la linea scorrente per i punti P, t, r, z, y sarà la proposta Cissoide.

(1) Voglio dire per trovare due medie proporzionali. Conciossiacchè quando fosse proposto di trovar due medie continue proporzionali x, z tra due dati estremi A, B si segni, (*Fig.* 1. *Tav.* 3.) sul diametro QP la QI = alla data A; e da I si meni la perpendicolare Iu = alla data B. Poi dal punto Q per u occorra nella già descritta curva PZ la retta QZ; e si faccia A ad x, come QL ad Lm; e come mL ad LP, così x a z, perchè le rette x, z che ne verranno, saranno le due medie cercate.

Il P. Milliet (*Geom. Prat.* Lib. III. Prop. 28.) facilmente dimostra, che tirato per qualunque punto z della Cissoide la mL perpendicolare al diametro PQ risulta ∺ QL . Lm . LP . LZ. Ma QI sta ad Iu, come QL ad LZ; ed è QL ad LZ in ragion triplicata di QL ad Lm, cioè in ragion triplicata di A ad x; così pure QI ad Iu in ragion triplicata della medesima A ad x, ed anche di x a Z. Dunque le rette xZ sono medie continue proporzionali tra QI ed Iu, cioè tra A e B. Ciò che era a dimostrarsi.

Quando perciò di questi quattro termini ∺ A . x . z . B si supponesse che A fosse doppio di B, il cubo eretto sulla Z sarebbe (come già si sa) doppio del cubo eretto sulla B; ed il gran Problema risolto.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Cissoide.

L' Istromento preparato (*Fig.* 2.) alla descrizione organica di questa curva nella simplicità e geometrica eleganza va, se non erro, del pari con quelli che per le sezioni coniche, o altre curve si inventarono. Egli consiste primieramente in una tavoletta LNP, il di cui margine LCP sostiene le veci del diametro del circolo generatore PQ, quale appunto s' intende essere ad esso margine eguale, e messo per dritto con tutto il rimanente della *Fig.* 1. quivi posta a lato. Ad angoli retti poi di detto margine, o sia diametro LCP sta afferrato alla tavoletta un regolo PG, ch' è invece della tangente QO, e ad essa parallelo incavato per il lungo di una scannellatura, non altrimenti che il parallelepipedo DR della *Fig.* 2. *Tav.* 1., ed in esso altresì scorre un prisma fornito al di sopra di un pivolo D. Due altri pivoli P ed L stanno pure fissi nei due estremi del margine, o sia diametro LCP. Un altro pivolo ancora è posto in C, intorno a cui si muove l'asta CR, che sta per raggio del semicircolo PRL al generatore eguale, e che incurvandosi nella estremità R, s' introduce ed abbraccia i lati fessi di due norme indeterminate ADB, FPE, la prima delle quali gira d'intorno al pivolo fisso nel prisma D, e riceve nel fesso lato AD il pivolo L, oltre il detto raggio

 unci-

uncinato CR. L'altra poi è mobile d'intorno al pivolo P, ed un lato PF, come dissi, si attiene parimenti all'introdotto uncinato raggio CR, e nell'altro PE ha un anello scorrente fatto come in sezione z fornito di uno stilo, che s'insinua nella fessura del lato della prima norma ADB, e quindi perpendicolarmente discende sul piano della carta. Ora fermata al detto piano con la sinistra la tavoletta LNP, e situate prima le parti in guisa tale, che CR coincida per quanto sia possibile con CP, DL con PL, PF con PG, PE con PQ, ed i punti RDS siano uniti tutti nel punto P; traendo poi con la destra il pivolo D con lo scorrente prisma verso G, dallo stilo S del lato BD della norma ADB sospinto, verrà descritta la proposta curva. Della quale alcuni soli punti mancaranno in P, perchè ivi non può darsi in pratica un preciso concorso dell'uncino R, pivolo D, e stilo S; difetto che sarebbe considerabile, se anche ad altre macchinette inventate da' più celebri uomini (1) non fosse comune. E molto più se (ciò che non è) rendesse inutile la curva in quell' uficio, cui è stata destinata.

Per verificare poi la prefata costruzione per rapporto all'origine della curva, dimostrarò essere Pe costantemente eguale ad SH. Imperciocchè dovendo in qualunque posizione l'angolo LRP esser retto, retto del pari sia l'angolo PRD, e così essendo gli angoli ai punti P, D per supposizione retti, retto pure sarà l'angolo PSD, e quindi sarà PRDS un parallelogrammo, e però il lato PR parallelo è eguale al lato SD, ed il lato RD costantemente parallelo ed eguale al lato PS. Ma essendo LP posto in diretto con PQ, la retta QL cadendo sopra le parallele ESP, DRL, fa l'angolo esterno EPQ eguale all'interno PLD, e quindi gli archi Qe, PR, dalla metà de' quali vengono mi-

(1) Le macchinette di Francesco Schooten composte col filo per le sezioni coniche soggiacciono al medesimo difetto.

surati, appartenendo a' cerchj eguali, saranno parimente tra loro eguali.

Inoltre perchè ne' due triangoli PLD, QPH gli angoli PLD, QPM sono stati mostrati eguali, e gli angoli in P, Q sono per supposizione retti, e per supposizione pure il lato LP è eguale al lato PQ, sarà anche il lato PD al lato QH eguale.

Quindi ne' due triangoli misti RPD, eQH i lati PR, PD dell'uno saranno eguali ai lati corrispondenti Qe, QH dell'altro, ed essendo gli angoli RPD, eQH da essi compresi eguali, per esser angoli che fanno le tangenti PD, QH cogli archi rispettivi PR, Qe di cerchj eguali, sarà anche la base RD d'un triangolo misto eguale alla base eH dell'altro; ma RD si è mostrato eguale a PS; sarà dunque PS sempre eguale ad eH. E togliendo ad ambedue la porzione comune eS, restarà Pe=SH. Ciò che era da provarsi.

ARTICOLO TERZO.

Descrizione organica della Curva di M.r Carrè.

Se poi tolte via dall'Istromento le parti inutili, si componga la norma ERF in quella situazione, che dimostra la *Fig.* 3. e che con la vite z si fermi l'anello con l'annesso stilo, qualora RS sia eguale a PL, movendo il raggio CR, e ritenendo ferma con la mano la tavoletta LNP, risultarà la descrizione della Curva di M.r Carrè (1) celebra-

(1) *Memoires de l'Academie. An.* 1705. *pag.* 56. Ivi il testo Francese dà a veder chiaro, che la curva descritta dall'Istromento è appunto quella di M.r Carrè. Perchè (mutate le sole lettere del testo in quelle della mia figura) si esprime così: *Soit décrit le demicercle* PRL; *si l'on suppose que son diamêtre* PL *se meuve sur le point* L, *tandis que l'extremitè* P *parcourt la demi-circonference* PRL, *il est visible que l'autre extremitè de ce diamêtre decrira dans ce mouvement une courbe* LSD, *qui à pour axe la ligne* LD=PL. E però anche l'equazione viene ad essere la medesima, che ivi se gli assegna: cioè che Sn=RL—Lm.

brata nelle memorie dell' Accademia, e la di cui origine non espongo, come quella che dal necessario moto dell'Istromento si mostra chiaramente.

Di più, se levato via il raggio CR (*Fig. 2.*) e la norma FPE, e nelle braccia dell'altra norma ADB fusse introdotto, e fermato in qualunque sito *m*, ovvero *x* l'anello con lo stilo S, mentre il pivolo D fusse condotto da P verso G lungo il regolo PG, il punto *m* descriverebbe una Concoide *interiore*, ed il punto *x* una *esteriore*; delle quali sarebbero LP la data *costante*, L il *polo*, PG la *direttrice*, D*m*, D*x* le *intercette*; potendosi generalmente prendere in considerazione un qualunque altro punto del circolo *gxmq*, di cui il diametro *gm* prodotto sempre passi per il *polo* L, mentre il centro D sia guidato per la base PG: perchè qualunque sito D acquisti il centro D partito da P verso G, primo le intercette D*x* (giacchè sull' intercetta D*m* non cade quistione, essendo il caso semplicissimo della Concoide *interiore* di Nicomede) tra la Curva, e la *direttrice*, benchè costituenti con l'indeterminata LD un angolo dato LD*x*, restano anche in questo caso tuttavia eguali. Secondo, è da concepire che in principio di moto, quando D era in P, *q*D*x* era posto in diretto con GP prodotto; ed *m*D*g* con LPQ coincideva. Onde sospinto poi D verso G, la differenza dell' angolo d'inclinazione, che le intercette per esempio D*x*, D*g* fanno di mano in mano con la *direttrice* PG, è sempre la medesima quantità *o*D*q* passata di sotto della *direttrice*; e ciò così rispetto al punto *g*, che prima in P faceva un angolo retto con detta *direttrice*, come rispetto al punto *x*, che con essa *direttrice* formava due angoli parimente retti, e rispetto a qualunque altro punto, che fosse preso su detta circonferenza *g*, *x*, *m*, *q*. E quindi si può dedurre una proprietà molto semplice e comune a qualunque punto preso su detta periferia *g*, *x*, *m*, *q*, qual è, che il rettangolo della porzione di base PD moltiplicata nell' intercetta, sarà sempre eguale al rettangolo della porzione dell' indeterminata LD moltiplicata in *oq*, seno della differenza *o*D*q* di detto angolo d'inclinazione qualunque dato. Perchè (tirate le perpendicolari *gr*, *qo* prodotta in *y*) i triangoli *g*D*r*, LDP sono simili; ma sono pur simili *g*D*r*, *y*D*o*; e per esser D*o* perpendicolare ad *yq*, e l'angolo *g*D*q* retto, sono simili anche i triangoli *y*D*o*, D*qo*, e quindi simili *g*D*r*, D*qo*; e per conseguenza simili LDP, D*qo*. Onde DL. DP :: D*q*. *qo*. Dunque per fine $PD \times Dq = LD \times oq$. Ciò che era a dimostrare.

Io avrei potuto di leggiero, modificando la mia prima macchinetta, renderla atta a descrivere anche tutte queste *Concoidi*, se non tanto l'inutilità e facilità del progetto, quanto la difficoltà di poterla dare poi ad intendere in disegno con eguale nettezza, non me ne avesse distolto.

ARTICOLO QUARTO.

Quali Curve si convenga descrivere con un medesimo Istromento.

Pregiando io al sommo il giudicio di un Uomo preclaro tra i più illustri di questa nostra età, ho motivo non piccolo di dubitare, che donando egli forse, quando che sia, qualche riflesso alla costruzione del predetto Istromento, trovi che opporvi, massimamente avendo altra volta dimostrato in questa parte l'animo suo dicendo: (1) *Instrumenta . . . . . non alia facile recipienda esse . . . . præterquam illa, quorum unumquodlibet lineas infinitas generis ejusdem describere queat*. Ma appunto questo giudicio di lui quanto più da me venerato, altrettanto mi conforta a produrre il mio parere. Sembrami dunque, che, rettamente esaminando, abbiasi a distinguere, se le Curve, che intraprendiamo a descrivere, siano di tal genere, che non v'abbia altra differenza tra l'una e l'altra, che di maggiore o minor

(1) Poleni in Epist. ad Jacobum Hermannum.

nor grandezza, come la *Cissoide*, il *Circolo*, la *Cicloide*, che sono mutabili soltanto secondo il più ed il meno, immutabile restando la loro simmetria; o siano pur di tal sorta, che non solo siano alterabili secondo il più ed il meno, ma in varie e nuove guise spiegandosi, e flessi e regressi variando, all'occhio d'esse più non appajano, quantunque lo sieno, e per tali vengano dall'equazione accusate. Il che avviene delle *Concoidi*, mentre per la forma apparente le *esteriori* alle *interiori* non s'assomigliano nè le prime, nè le seconde a quella della Contessa Agnesi. E però dico, che si debbano descrivere con un solo Istromento infinite Curve d'un istesso genere di quest'ultima razza, perchè così veggasi la Curva trasformarsi, e passare per tutti li stati suoi quasi per gradi. Intorno poi a quelle di tal genere, che altra alterazione non patiscono, che di maggiore o minor estensione, distinguo di nuovo: O elleno tornano frequentemente in uso agli uomini, come il *circolo*, l'*elisse*; o sono per questo capo tuttavia inutili, come la *catenaria*, e simili. Nel primo caso parmi, che costruendo l'istromento si debba aver riguardo ad infinite grandezze di un medesimo o *circolo*, o *elisse*, o altre tali, intendendo però il termine d'infinito per il suo dritto. Nel secondo della *catenaria*, e simili, stimo certamente soverchio, che un prudente inventore indirizzi a tale scopo le sue meditazioni; sì perchè manca una certa utilità, che lo persuada, sì anche perchè questi tali Istromenti non ad altro occupano i tavolini de' Geometri, che per tosto fornir loro una curva, qualora per avventura solleciti di una bella figura, che dovesse incidersi in rame, o usare in qualche dimostrazione, vogliono sottrarsi al tedio di un più lungo metodo. Per altro era facile a me il render capaci di modificazione le distanze CR, CP, CL (*Fig.* 2. *Tav.* 3.) per conseguire *Cissoidi* infinite, le une maggiori dell'altre, quando avessi giudicato, che altri non avessero saputo farlo da se, siccome mi son ingegnato di fare per la descrizione organi-

ca

ca della *Cicloide*, conformandomi appunto al piacere del sopra celebrato Autore per le ragioni addotte. Ma sia per ora fatto fine a questo ragionamento.

ISTROMENTO III.

PER LA LINEA QUADRATRICE.

E' Sempre stato, e credo che mai sempre sarà un arcano profondissimo della Geometria l'arte di dividere colla sola riga, e compasso un angolo qualunque in tante date parti, e specialmente in tre; così pure la maniera di quadrare l'area di un circolo dato. Perciò sin da più alti secoli si è investigata la ragione, che passa tra il raggio e la periferia, come quella che avrebbe potuto condurci allo scoprimento dell'uno e dell'altro mistero. Dinostrato fissando l'animo a questo doppio scopo inventò la sua linea *Quadratrice*, la quale se si potesse descrivere geometricamente, manifestando la suddetta ragione, sciorrebbe li due (1) celebri problemi; ma

C non

(1) Per mostrare come questa curva soddisfi alla prima intenzione dell'Autore, che è la trisezione dell'angolo, supponiamo per esempio (*Fig.* 3. *Tav.* 2.), che sia proposto l'angolo MCD da dividere in tre parti date. Onde dal punto S, in cui il raggio CD s'interseca con la curva MSBH (che già si vuol supporre descritta) sia condotta una SP perpendicolare al lato MC. Di poi si divida geometricamente, come far si può, la retta MP nelle tre date parti, dalle quali tirate altrettante parallele a PS, per li punti, dove queste tagliano la curva, si menino tre raggi dal centro C, li quali divideranno l'angolo MCD nelle tre parti date.

Circa poi al secondo progetto, che è la quadratura del circolo, quando geometricamente si desse, come in vero non si dà, la precisa situazione del punto estremo H; e che CH *base*, come si dice della *Quadratrice*, fosse rigorosamente data, mostrando Apollonio, ed il P. Milliet (*Lib.* 2. *De Indivis. pro.* 4. *de Quadratrice linea*) che ∺ CH. CQ. QM circonferenza del quadrante, dati i primi termini CH, CQ, si conseguirebbe anche il terzo QM. Onde poichè si sa, che l'area d'un circolo è eguale ad un triangolo, di cui sia base la circonferenza, ed altezza il raggio; ovvero eguale ad un rettangolo, del quale un lato sia detta circonferenza, e l'altro lato la metà del raggio, l'area di un quadrato eretto sopra una retta media proporzionale tra la circonferenza data per mezzo della *Quadratrice*, ed il raggio, sarebbe eguale all'intiera area del circolo dato.

non potendosi ciò così conseguire, tenteremo almeno di delinearla per mezzo d'un Istromento.

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Quadratrice, e sua descrizione per punti.

PEr dare ad intendere l'origine di questa curva, descritto prima il quadrante MCQ (*Fig.* 4. *Tav.* 2.) figuriamoci che il semidiametro MZ, conservandosi sempre ad angoli retti al lato MC, si porti con un moto equabile verso il lato CQ, ed ivi giunga a coincidere nello stesso tempo, che vi perviene anche il raggio CM, il quale ruotando equabilmente intorno al centro C, scorre tutti i punti DFQ di detto quadrante. Imperocchè allora tutti i punti d'intersezione del lato MZ col ruotante raggio CM presi insieme forniranno una curva MSBH, che è la *Quadratrice* di Dinostrato, ma in rigore mancante dell'ultimo punto H, il quale, ivi non seguendo più intersezione, si perde.

Si manifesta questa tale origine anche dalla descrizione per punti della medesima curva. Imperocchè diviso prima il lato CM in quante più si può parti eguali MP, PG, GC ec., e l'arco MDFQ in altrettante, conducendo poi ad angoli retti del lato CM le ordinate MZ, PS, GB ec. ed alla circonferenza li raggi CM, CD, CF, li punti d'intersezione MSB ec. saranno elementi della *Quadratrice*, che intraprendo ora a descrivere col seguente Istromento.

AR-

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Quadratrice.

IL P. Milliet (1) si lusinga, che la descrizione organica di questa curva sia facile, ma la prova mi fa accorto del contrario. Non ostante qualunque siasi, propongo la presente, e m'immagino che KAEN sia (*Fig.* 5. *Tav.* 2.) un telaro, di cui nel lato NE scorra la guida Z*o* connessa ad angoli retti col fesso regolo *o*P. D'intorno poi ad un pivolo C fisso nel lato AK movasi un quadrante C*ax*, di cui il raggio *x*C prolungato sia verso D, e fesso esso pure in una parte di sua lunghezza, e corredato di una guida S fermata ad uno stilo, il quale passando per le fessure del raggio *x*C prolungato, e del regolo *o*P, discenda sul piano a descrivere la curva.

Sia inoltre alla guida Z*o* attaccato un filo o catenella, la quale piegandosi indi d'intorno alla carrucola E vada per fine a congiungersi col quadrante suddetto nel punto *x*. Si rilevi poi la circonferenza del quadrante *ax* col farlo girare da Q verso Z, come per descrivere un quarto di *Cicloide*; e si rimova il punto *o* da Q verso Z uno spazio QZ eguale alla suddetta circonferenza *ax*. Cosicchè in principio di moto P*o* coincida con MZ; il lato *x*CD del quadrante con CM; ed il lato *ca* con CQ; e la catenella sia in questa prima situazione tangente in *x*. Perchè poi con la mano posta nella sommità D fatto volgere da M il regolo CD a destra sino in Q, avverrà che giungendo CD a coincidere con CQ, pervenga C*a* nella direzione CM, e la catenella diventi tangente a detto quadrante in *a*. Essendosi tanta quantità di essa avvolta sulla circonferenza del quadrante, quanta si è ritirata da Z fino a Q; giacchè per la costruzione QZ=*ax*; e però anche il regolo P*o* verrà tirato nel medesimo tem-

C 2 po,

(1) Lib. II. *De indivisib.* prop. 1. *Descriptio lineæ Quadratricis.*

po, mantenendosi sempre verticale ad MC sino in CQ; e lo stilo S dalli due regoli CD, *o*P determinato alla descrizione della suddetta curva.

Questo Meccanismo (accresciuto di una correzione omessa a bella posta, ma necessaria per non perdere (*Fig.* 4.) i primi punti della curva in M, nè gli ultimi in C di un'altra curva M*r*C) regge sicuramente per conseguire una sola *Quadratrice*, di cui il lato ZQ, cioè MC sia eguale (*Fig.* 5.) ad *ax* circonferenza costante del quadrante. Ma per soddisfare intieramente al Problema, e molto più perchè questa curva entrarebbe nel numero delle curve utili, sarebbe stato mestieri, che, potendo modificare a piacere la circonferenza del quadrante *ax*, l'Istromento descrivesse una *Quadratrice* di un lato MC qualunque dato; il che non è così facile, come pare al P. Milliet. Tuttavia se si supponesse che il quadrante C*ax* fusse la base di un quarto di cono, di cui il vertice andasse perpendicolarmente a cadere nel centro C, si potrebbero sulla sua superficie prendere anche quadranti di diverse grandezze; ordinando poi le parti dell'Istromento in modo, che la carrucola E, ed il punto d'attacco *o* si potessero portare a livello delle differenti altezze de' quadranti presi d'intorno alla superficie del cono eretto su detta base C*ax*.

Un' opposizione ancora potrebbesi fare a questa macchinetta, ed è, che si prende la ZQ eguale al perimetro *ax* del quadrante, che si mette in uso; dunque nella costruzione di questo Istromento si suppone quel che si cerca col beneficio della curva da descriversi. A che risponderei, che si cerca nell' atto di costruire l' Istromento, come nell' atto di fabbricare un compasso di proporzione si cercano le sue divisioni; ma quando si vuole adoperarlo, senza altro tentare non si ha che portare il punto *o* nel Z già determinato.

A dir vero però io era per questa opposizione in procinto di rigettare l' Istromento, come non soddisfacente al Problema in modo perfetto. Ma nonostante dappoi un nuovo animo mi suggerì di pubblicarlo, avvisando cosa onde si scemi in parte l'opposizione suddetta, e porgasi al leggitore di che pascere l'avida sua mente con nuova scoperta. Trovo adunque (*Fig.* 4. e 5.) che la ragione di ZQ comparato ad *ax* si riduce a tre casi: cioè ZQ eguale ad *ax*; ZQ maggiore di *ax*; ZQ minore di *ax*. Quando $ZQ = ax$, il raggio percorre la periferia di tutto il quadrante MDFQ, mentre l'ordinata scorre per tutti i punti del lato MC, e nasce la MSBH *Quadratrice* di Dinostrato, che ha per base CH. Quando $ZQ > ax$, mentre il raggio CM percorrerebbe tutto il quadrante NDFQ, l'ordinata compisce per esempio $\frac{2}{3}$ soli del lato MC, e nasce la curva M*m*F, la quale non può mai giungere a toccare il lato CQ, appunto perchè, non compiendo l'ordinata tutti tre i terzi del lato MC, non arriva nemmeno essa a coincidere con CQ; ma più che sarà maggiore lo spazio percorso da detta ordinata su detto lato MC, la piegatura della curva in F si farà maggiore e più vicina al punto H, dove così a poco a poco disponendosi, anderà a cadere, quando detta ordinata percorra tutto il detto lato MC, e la curva si trasformarà nella *Quadratrice* MSBH, mentre svanisce una parte di se confondendosi con la porzione HQ del lato CQ. Quando $ZQ < ax$, allora mentre il raggio CM percorre per esempio $\frac{2}{3}$ soli del quadrante MDFQ, l'ordinata compie intanto tutto lo spazio MC, e giunge a coincidere con CQ, e quindi deriva la curva M*r*C, la quale sempre tiene un' estremità nel centro C, e con una piegatura tanto più vicina al punto H, quant' è maggiore l'angolo MCF, si dispone a rimanere finalmente in H, trasformandosi essa pure nella *Quadratrice* suddetta MSBH, mentre svanisce una parte di se, perchè si combina, e si confonde colla porzione CG del medesimo lato CQ.

Ora

Ora questi due ultimi casi soggetti alla macchinetta sono casi particolari di un altro, che comprende anche quello della *Quadratrice* di Dinostrato, ed altri nove ancora, come qui appresso osservaremo, e che potrebbe in termini generali esser esposto così: Descrivere una curva formata dai punti d'intersezione del raggio CM moventesi equabilmente in un quadrante MDFQ intorno al centro C, e dell' ordinata MZ pure moventesi nel medesimo quadrante equabilmente, e sempre verticale ad alcuno dei quattro lati di esso quadrante. Quindi nel caso che tanto l'ordinata MZ, quanto il raggio CM si avvanzino verso la medesima metà CQ, si ponno immaginare, secondo la ragione delli spazj rispettivi percorsi equabilmante, moltissime curve; tutte però simili ad una delle tre MSBH, M*m*F, M*r*C, per mezzo delle quali si potrà sempre dividere in parti date un angolo dato, che non sia però maggior di quello, a cui sono opposte. La curva per esempio MSBH è opposta all'angolo retto MCH, e perciò vale a dividere in parti date qualunque angolo, che non sia maggiore di un retto. La Curva M*m*F ed anche la curva M*r*C essendo per supposizione opposte al medesimo angolo MCF vagliono a poter dividere in parti date un angolo, che non sia maggior del detto angolo MCF. In fatti supponiamo che sia proposto l'angolo MCF da dividere in due date parti per mezzo di ciascheduna delle tre curve suddette. Onde volendo primieramente adoprare la curva MSBH, si conduca dal punto B d'intersezione di detta curva, e del raggio CBF, che determina l'angolo MCF, si conduca, dissi, BG ad angoli retti del lato CM, indi dalla metà di GM si meni la perpendicolare PS, che il raggio CD condotto per S dividerà l'angolo MCF nelle due date parti. Secondo, così volendo far uso della curva M*m*F, tirata F*b* perpendicolare al lato MC, e dalla metà di *b*M condotta la verticale *dm*, avverrà che il medesimo raggio CD condotto per *m* dividerà l'angolo MCF in due date parti. Terzo, presa pure

alle mani la curva M*r*C, e dalla metà del lato CM condotta la perpendicolare *yr*, ancor qui l'istesso raggio C*b*, che passa per *r*, dividerà l'angolo proposto MCF in due parti date. Onde tutti i punti d'intersezione S, *m*, *r* dell' ordinate PS, *dm*, *yr* col perimetro delle curve corrispondenti MSBH, M*m*F, M*r*C cadono nel medesimo raggio CD, e il dato angolo MCF viene diviso nelle due date parti per mezzo di qualunque delle tre curve proposte.

Non so veramente se queste due ultime curve abbiano una proprietà simile a quella, che tanto brilla nella *Quadratrice* di Dinostrato, cioè se, siccome in detta *Quadratrice* è ∺ CH. CQ. QM, così in quelle si possano fissare tre termini continui proporzionali, l'ultimo de' quali sia una porzione della periferia di un circolo; ma io credo di no, perchè nella *Quadratrice* un termine della proporzione è la base CH, e abbiamo già osservato, che la curva M*m*F non ha base, perchè non giunge mai a toccare il lato CQ, così M*r*C non ha base, perchè va sempre a restringersi nel centro C. Nonostante io concludo in favore del mio Istromento, che quand' anche le curve nate dal non essere QZ eguale ad *ax* non servissero a rilevare la circonferenza del quadrante MDFQ, per quindi definire la quadratura del circolo, almeno però soddisfano alla trisezione dell' angolo, che fu uno dei progetti, cui Dinostrato pretese di applicar la sua celebre *Quadratrice*.

Finora, supposto il raggio CM ruotante da CM verso CQ, mentre l'ordinata MZ si avanza verso la medesima metà CQ, abbiam distinti tre casi; ma tre simili casi si ponno immaginare nel caso che (sempre ruotando il raggio CM da CM verso CQ) l'ordinata andasse da CQ verso MZ; tre altri quando detta ordinata progredisse da CM verso QZ; tre casi pure quando detta ordinata partisse da QZ verso CM; onde dodici curve risultano corrispondenti a questi dodici casi tutti compresi nel caso generale sovra enunciato.

Di tutte queste curve almeno sei sono descritte per mezzo della mia macchinetta. Imperocchè primieramente si è visto come si faccia uso di essa nel caso che ruotando il raggio CD (che fa per tutti i raggi) da CM verso CQ, l'ordinata poi (cioè il regolo P*o*, che fa per tutte le ordinate) proceda da MZ verso CQ. Ma quando detto regolo dovesse muoversi da CQ verso MZ, la catenella passata su la carrucola E facciasi passare anche sopra un' altra carrucola N prima di fermarla a detto regolo P*o*; perchè allora mentre il raggio CD da CM girerà verso CQ, il regolo P*o* da CQ procederà verso MZ. Se poi la guida *o*Z col regolo P*o* annesso si trasporti nel lato del telaro KN, e la catenella passi sopra le due carrucole E, N; allora esso regolo movendo il raggio CD da CM verso CQ, si avanzerà da CM verso QZ. Se finalmente la catenella passerà sopra tutte tre le carrucole E, N, K, prima di essere attaccata al regolo PO, che si suppone ora scorrente nel lato KN, dico che procedendo il raggio CD tuttavia da CM verso CQ, il regolo si moverà da QZ verso CM.

Pare che queste curve, essendo ambedue i mobili generatori affetti di moto equabile, siano per avere fra esse un qualche comune rapporto, e ben sarebbe stato l'indagare le proprietà di ciascuna. Ma io lascio per ora da parte tali ricerche aliene in certo modo dal mio soggetto, acciocchè se gli aggrada, ne vadino in traccia quelli, che sono in materia d'ozio e in valore d'ingegno più di me felici.

Sarebbe qui il luogo ove riporre l'accennata *Spirale* d'Archimede, come quella che è nel numero delle curve antiche; ma si trova (1) altrove esposta per essere compresa negli usi di un altro Istromento.

(1) Istromento IX. P. II. Artic. X.

ISTROMENTO IV.

PER LE SEZIONI CONICHE.

ARTICOLO UNICO.

CONobbero gli Antichi l'origine di queste mirabili curve nascenti dalla diversa sezione di un cono, e li Moderni le recarono a profitto, e non prima furono applicate alla *Catottrica*, *Diottrica*, *Prospettiva*, e in una parola all' *Ottica* tutta, non men che alla *Gnomonica*, e *Meccanica*, che diventarono le delizie de' Geometri più insigni; e però altri (1) dappoi trattarono della loro *descrizione per punti*, altri (2) della *Organica*. Ma tacendo della prima, che non entra se non per accidente nel mio instituto, circa alla seconda dico, che parecchi Istromenti furono inventati, e per quanto sia arrivato a mio lume, tre avvene per la *Parabola*, sei per l'*Iperbola*, dieci o dodici per l'*Elisse*, e per la medesima altri ancora, ma di minor pregio; perchè in molte arti occorrendo spesso la *descrizione organica* dell' *Elisse*, molti più chiari ingegni intorno a questa, che a verun' altra curva si occuparono. Ma per dire il vero quasi tutti questi Istromenti, quantunque affatto geometrici, in pratica però soggiacciono a molte incomodità e difetti, ai quali non si può facilmente trovare rimedio. Quindi è, che l'Istromento chiamato d'*Immitazione*, quantunque, anzichè parer geometrico, sia in vero troppo rozzo e volgare, perchè però per opinione anche d'altri (3) torna meglio di qualunque altro all' uso di un Professore,

(1) Midorgio ha trattato diffusamente della *descrizione per punti* delle *Sezioni Coniche*.

(2) Francesco da Schooten della *descrizione Organica*. Ed altri ancora.

(3) Il P. Castel Traité LVI. *Descrip. General des Courbes*, dice: *Une methode organique, que je crois la meilleure des toutes pour décrir assez exactement toutes sortes de courbes, c'est celle de l'imitation. Prenez une lame ec.*

io sopra tutti lo pregio. Laonde non sarà forse altrui discaro, che io qui ne rechi un simile per la descrizione delle tre curve suddette, quanto men considerabile da una parte, altrettanto più spedito dall'altra, più semplice e sicuro. Sia dunque preparata una polita lamina d'argento, o altro metallo, in cui (*Fig.* 1. *Tav.* 5.) col metodo per punti si descriva diligentemente un' *Iperbola* HIL, una *Parabola* PRo, ed un' *Elisse* ABMN. Dipoi con finissima lima si tolga via tutto il superfluo, cosicchè non rimanga se non quanto appare in figura. Ora con la mano guidato uno stilo o penna strettamente d'intorno ai margini della restante lamina, quella sezione verrà, che piuttosto volevasi delineare. Tale è l'Istromento, che per tali descrizioni tengo ancor io per mio uso.

ISTROMENTO V.

PER LA LOGARITMICA E TRATTORIA.

NOn senza grande riputazione del nome loro Nepero trovò la *Logaritmica*, Claudio Perralto la *Trattoria*, ed il Sig. Marchese Poleni dell'una e dell'altra la *Descrizione Organica*. Ma avvegnacchè forse, se mal non m'avviso, riducendo la macchinetta del prefato Sig. Marchese a più poche parti, potrebbe forse la composizione della medesima riuscire più facile ed intelligibile, ho pensato, che così fosse bene descriverla come sta in figura, lasciando nel piacere del discreto artefice l'aggiungervi da se altre parti, quando in pratica le trovasse necessarie, e conferenti alla natura dell'Istromento. E però vediam prima come si generi la *Logaritmica*, che poi passeremo alla sua descrizione.

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Logaritmica.

PEr dar chiaramente a conoscere l'origine di tal curva (*Fig.* 1. *Tav.* 4.) dai punti A*bcd* ec. egualmente distanti, e presi nella linea A*f*, che sarà la *direttrice* della curva, siano perpendicolarmente erette le linee A16, *b*8, *c*4 ec. che saranno le ordinate decrescenti in data ragione geometrica. La linea 16, 8, 4, ec. che detti punti unisce, sia la *Logaritmica* proposta, della quale l'essenziale proprietà è l'essere la di lei *sottangente* eguale ad una costante data. Proprietà appunto su cui l'insigne Autore fondò l'ingegnoso suo Istromento, quale per me, come dissi, non si muta, ma si ristrigne, per così dire, in poco, acciocchè più agevolmente la sua costruzione si concepisca.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Logaritmica.

ECco pertanto di nuovo (*Fig.* 2.) un parallelepipedo EP simile a quello della *Fig.* 2. *Tav.* 1. scavato per il lungo di una scannellatura, in cui scorre un lungo prisma *d*A di simil forma, di cui parte sta incassato nella cavità di quello, e parte sovrasta al di fuori, abbracciato circa l'estremità *d* da una lamina trasversale T*cd*, nel sito *cd* similmente per di sotto incavata, e che ad angoli retti a detto prisma con una vite *c* si può in qualunque punto di quello fermare, come più chiaramente si mostra in sezione (*Fig.* 3.) dove D*c*R rappresenta la lamina trasversale T*cd* della *Fig.* 2.; EP dimostra un taglio fatto per traverso del parallelepipedo PE, e la parte T nel mezzo con puntini ombreggiata è la sezione del detto prisma dA, che quivi si vede, come per la sua forma colla vite superiore c si possa stringere con la lamina trasversale DR. Parte di questo prisma (*Fig.* 2.) è anche il pivolo g, che sulla cima in spira si avvolge, e si accoppia con la madrevite y, di modo che, fermato comunque il parallelepipedo PE al piano della carta, se messa mano al manichetto M, si tira il prisma dA verso E, seco esso porta anche il pivolo g, e la lamina trasversale Tcd, perchè tutti tre insieme, quasi che formano un medesimo solido.

Semplice e intelligibile del pari risulta anche la costruzione della seguente asta oD e per la *Fig.* 2., e per un tronco di detta asta trasportato più in grande nella *Fig.* 4.. Essa quindi (introdotto il pivolo g nella fessura, ond'è per il lungo aperta e larga quasi così come quello è grosso) giace sul prisma dA, e quindi presso D è sostenuta da una ruota R verticale all'orizzonte, alla quale un'altra ruota K sovrasta a quella eguale, ma all'orizzonte parallela e mobile d'intorno al pivolo m, situata di modo che una linea condotta dal centro di questa ruota al punto, in cui la ruota verticale R tocca il piano della carta, passar debba precisamente pel centro di detta ruota verticale R. Questa ruota R dovendo segnar la curva sulla carta, termina la sua circonferenza in acuti e minutissimi denti; l'altra ruota all'opposto in un margine liscio, eguale, e polito, acciocchè volgendosi sulla lamina trasversale, non si scomponga, e turbi il moto dell'altra ruota R; avvertendo che se detta ruota R fosse troppo leggiera per imprimere la curva sulla carta, si potrebbe render più grave, caricando di una sferetta V il pivolo m prodotto al di sopra della ruota orizzontale K. Si vuole inoltre (*Fig.* 2.) che i due maggiori piani dell'asta oD siano costantemente paralleli all'orizzonte, al che cospira e la grandezza della ruota verticale R, e la madrevite y, che a quest'uopo nel fondo è assai larga, ed intorno al pivolo g serrandosi, frena e ritiene la instabil asta oD, cosicchè non vacilli nè declini dal detto parallelismo, ma pure liberamente muovasi. La lamina poi trasversale Tcd nel sito cd in grossezza tanto si estende, che la distanza cd dal piano verticale cT apparente in *Fig.* 2. al piano verticale d di detta lamina sia eguale al raggio della ruota orizzontale K.

Ma ormai si concepisca, la *direttrice* della curva essere una linea, che pel lungo tagliando per metà il parallelepipedo PE, si arresti nel piano, e stia invece della *direttrice* Af della *Fig.* 1.; ond'io dico ora, che la linea tirata dal punto R (ove la ruota verticale tocca il piano della carta) al punto, che perpendicolarmente nella linea dell'asse, o sia *direttrice* EP soggiace al punto d, sarà un'ordinata alla curva; la linea tirata dal medesimo punto di contatto R al punto, che nella linea dell'asse soggiace al punto g, sia la tangente; e la *sottangente* sarà la linea presa nell'asse e definita dai punti perpendicolarmente cadenti nel detto asse dai punti d, e g. Onde si vede, che per modificar detta *sottangente*, non si ha che rimovere, o accostare al pivolo g la lamina trasversale Tcd, e poi in detta distanza fermarla con la vite c al prisma dA.

Tutte queste cose poste, tirando col manichetto M il prisma dA verso E, e conseguentemente la lamina trasversale Tcd, gireranno tutte e due le ruote, ed il punto di contatto R si moverà per una linea, di cui la *sottangente* dg sarà costante, e quindi descriverà la *Logaritmica*.

AR-

ARTICOLO TERZO.

Della Trattoria di Perralto, sua origine e descrizione per approssimazione.

ESsendo che i prudenti e dotti uomini talvolta negli oziosi tempi degnarono della loro attenzione alcune cose, che da prima parevano dispregevoli, ma poi da quelle a grandi scoperte si trovarono impensatamente condotti; così Perralto un dì osservando attentamente il movimento del suo orivolo portatile tirato per un capo della catenella annessa lungo una riga, s'accorse di una curva tracciata dall'orivolo sul piano della tavola. Onde (1) fattone consapevole il Leibnitzio, e poi venutane notizia a Cristiano (2) Hugenio, e da essi richiamata a sottil esame la natura sua, si ebbe presto trovato, che era ben degno oggetto di que' due insigni Geometri quella curva, che prima sol fu trattenimento di un saggio Osservatore; perchè e per essa si quadrarebbe l'*Iperbola*, e somministra i punti della *Catenaria*, e della *Logaritmica*, e di altri teoremi belli e leggiadri è feconda, esposti ampiamente e divinamente dal Sig. Marchese Poleni nella sovracitata epistola. Ma fra le eccellenti sue proprietà una principale, e che per ora fa al mio proposito, è, che di tutte le *tangenti* alla curva le porzioni intercette fra essa e la sua *direttrice* siano eguali; e però da questa si potrebbe dedurre la seguente descrizione per *approssimazione*.

Laonde presa (*Fig.* 5.) col compasso una data *costante* aB, e fatto centro in un punto m qualunque di detta *costante*, ma più vicino ad a che sia possibile, si segni il punto

(1) Negli *Atti di Lipsia* mese di Settembre 1693.

(2) Nel *Giornale de' Letterati Oltramontani* mese di Febbrajo 1693.

to C nella linea BK, che sarà la *direttrice*, a cui da m sia condotta la retta mC; poi fatto centro in n tanto da m distante, quanto m da a, e con la medesima apertura tagliata BK in D, sia condotta la retta nD; e così via via fatto centro in o, secata BK in E, sia tirata oE ec. La linea scorrente per i punti a, m, n, o ec. sarà la proposta *Trattoria*. Imperciocchè e le linee Ba, Cm, Dn ec. sono per la costruzione eguali, e sono anche *tangenti*; mentre dacchè la intercetta Fd qualunque costitui una parte di se bd per elemento della curva, ancorchè poi venga prodotta in z, non però entra mai più nell'interno di quella; perchè quinci la porzione bF col prossimo elemento bc forma l'angolo esteriore FbG; e quindi nella parte opposta la prodotta bZ con l'elemento bo l'angolo parimenti esteriore Zdo; cosicchè per la costruzione tutte le intercette l'una nell'altra incontrando sempre alla parte interiore con un angolo d'inclinazione qualunque (angolo però, il di cui lato opposto è costantemente una qualche parte della *direttrice* BK) ne segue, che dopo l'intersezione, l'angolo al vertice opposto sempre occorra del pari alla parte esteriore, e però le intercette Ba, Cm, Dn ec. siano *tangenti*, e la curva descritta una *Trattoria*.

Ma qui m'occorre d'avvertire, che la suddetta descrizione è dalla descrizione dell'altre curve diversa in questo, che in quelle (come nella *Logaritmica Fig.* 1.) almeno alcuni pochi punti 16, 8, 4 ec. sono realmente punti della descritta curva, benchè poi gli altri posti fra il 16. e 8., fra 8 e 4 ec. non siam sicuri che se le appartenghino. Ma nel mio caso (*Fig.* 5.) niun punto si potrebbe veramente dire, che fosse punto di *Trattoria*; perchè se fosse altrimenti, converrebbe, che su le *tangenti* fossero state prese le particelle am, mn ec. infinitamente piccole, ma col compasso non si potevano prendere se non di finita grandezza; onde ne segue che la proposta descrizione della *Trattoria* per approsper *approſſimazione* (1) vera in aſtratto, ſia impoſſibile in pratica. Tuttavia parmi che il metodo uſato in detta *Fig.* 5.

quan-

(1) Dalla conſiderazione di queſta curva pare che ſi poſſa dedurre una nuova foggia di armare un trave (*Fig.* 7.) BK, che alcun grave peſo doveſſe ſoſtenere, componendo per di ſotto a quello alcuni vetti Cm, Dn ec. in guiſa di *tangenti* ad una *Trattoria*; perchè a prima viſta ſi vuol credere, che di tutto il peſo del trave BK parte debba gravitare contro il fianco della muraglia mB, e parte della ſua forza premente venire converſa in ſe ſteſſa. Imperciocchè ſuppoſto che il vette mC quinci poggi al muro nel punto m, e quindi nel punto C ſoſtenga il trave BK, parmi (perchè il vette è applicato obbliquamente nel punto C) che la ſua forza riſpetto all' inclinazione della potenza a cui reſiſte, ſi poſſa conſiderare come riſolvibile nelle due mB, mx, le quali reſiſtono al trave in C: la prima da C verſo b, che ſi oppone alla ſua gravità, l'altra da C verſo K; perchè è evidente, che, ſe il trave non foſſe ben ſerrato nel muro, la gravità ſua, e la obbliquità del vette coſpirerebbero a farnelo uſcir fuori.

Ora per trattenimento vorrei dimoſtrare, che ſe v' aggiungo un altro vette Dn, la gravità del trave nel punto D, che per mezzo del vette Dn va ad agire nel punto n del vette mC, accreſcerà la forza del vette mC, che reſiſte nella direzione Cb, e diminuirà quella ordinata nella direzione CK. Doppio vantaggio onde il trave ſia più validamente ſoſtenuto, e ritenuto nel muro nel ſuo luogo B. E ciò perchè la forza mC, che prima era di ſemplice reſiſtenza, viene ora per l'urto del ſecondo vette Dn accreſciuta di una forza attiva riſolvibile in due, una delle quali, come farò vedere, agiſce in conſeguenza della direzione Cb, ſcaricando così il muro di una parte di preſſione, e l'altra opera da C verſo B, cioè in verſo contrario della direzione CK.

Riſolta la forza del ſecondo vette Dn (*Fig.* 8.) nelle due gn, en, certo è che ſulla forza gn non cade quiſtione, perchè queſta agendo nella medeſima direzione del vette cm, ſicuramente ſi adopera contro la muraglia in m; ma la forza en agiſce nel punto n ad angoli retti del vette mc; onde qui ſi troviam nel caſo di una leva del terzo genere, in cui la potenza ſi eſercita in n contro due reſiſtenze, l'una in c, l'altra in m. Dunque l'azione della forza en ſarà in c ed m in ragion reciproca delle diſtanze nc, nm. Si divida perciò la forza ne in i in ragion di dette diſtanze, coſicchè $cn : nm :: ni : ie$. E poi alla eſtremità della parte minore nm ſi faccia a detto vette mc una perpendicolare mz eguale alla maggior porzione ni, ed alla eſtremità c della parte maggiore nc ſi tiri la perpendicolare cd eguale alla minor porzione ei. Ora la retta mz rappreſenta l'azione della forza en del vette Dn eſercitata parimenti nella muraglia; la retta poi cd rappreſenta la quantità dell' azione, che detta forza en adopera contro il trave BK.

Finalmente anche queſta forza cd ſi riſolva nelle due cq, cb; e ſi vedrà che cb opera in conſeguenza della forza ſuppoſta nella *Fig.* 7. reſiſtente nella direzione Cb; e perciò aumenta detta forza di una forza viva eguale a cb a ſcarico della muraglia. La forza poi cq, perchè opera in verſo contrario alla forza ivi ſuppoſta ordinata nella direzione cK, diminuirà detta forza diretta per cK di una forza viva egua-

le

quantunque rigoroſamente falſo, nonoſtante in pratica ſi potrebbe ammettere, perchè ſe non altro, prendendo dette particelle am, mn ec. più piccole che ſi può, tanto detta deſcrizione fiſicamente ſi accoſta al vero parametro della curva, che ſi può dire quaſi eſſer deſſa; e ſpicca del pari quella proprietà principale detta di ſopra, ſu cui ſi fonda anche la ſeguente deſcrizione organica.

E AR-

le a cq; onde il trave BK ſarà meno sforzato ad uſcir fuori della muraglia. Ciò che era da dimoſtrarſi.

Un tale raziocinio ſtando per tutti gli altri vetti (*Fig.* 7.) oE ec. le forze contranitenti al trave dovrebbonſi poi intendere come ſottrate da quel peſo aſſoluto, con cui in altra guiſa nel muro gravitato avrebbe. Mentre benchè a fortificar detto trave potrebbero immaginarſi altre diſpoſizioni di vetti, come ſe tutti dai punti C, D, E andaſſero ad unirſi nel punto m; nonoſtante e allora graviterebbe il trave contro il muro con tutta la ſua forza aſſoluta, e l'area Emno, che nel mio caſo ſi reca a guadagno, n' andrebbe per quelli impedimenti perduta.

Che ſe il trave BK (replicando a deſtra le *Figg.* 7. e 8. roveſciate) ſtaſſe con ambidue le eſtremità ripoſto per eſempio ſu due muraglie per ſervire di volta, o ſulle ſponde di un fiume navigabile in luogo di ponte; in tal caſo (oltrecchè l'area Emno raddoppiata ſarebbe molto opportuna acciocchè la volta riuſciſſe più aperta, ó i Navigj trovaſſero più ſpazioſo e libero il paſſaggio) ſembrarebbe poi anche, che la propoſizione doveſſe eſſere più probabile; perchè laſciando andare le forze cq ec. a ſiniſtra diſtrutte dalle ſimili contrarie a deſtra (nelle quali a mio parere verſava la maggior difficoltà) nulladimeno tutte le forze ſimili alla cb reſtarebbero, le quali contrapponendoſi alla gravità del trave, alleggerirebbero le muraglie, o le ſponde di una parte del ſuo peſo aſſoluto; anzi viene in via di corollario, che quando il trave ſi caricaſſe di più, le forze contranitenti doveſſero riſultare maggiori.

Forſe, avendo riguardo alla fleſſibilità del legno, e volendo che il peſo ne' punti C, D, E ſia maggiore, più che ſi ritrova diſtante da B verſo K, potrebbe queſto mio diſcorſo riuſcire anche più retto; ma io non vommene dichiarare in verun modo garante, e quand' anche andaſſe per avventura tutto ad urtare in qualche paralogiſmo, come pure ho qualche ragion di dubitarne, e che il trave, nonoſtante tale combinazione di vetti, caricaſſe tuttavia la muraglia con tutto il ſuo peſo aſſoluto; contuttociò ho voluto queſto mio ſoſpetto ſemplicemente produrre per animare altrui a tentare con più efficace induſtria di recare la *Trattoria* a qualche uſo, come il celebre Nepero fece della ſua *Logaritmica*, proponendo ſull' idea di queſta curva il ſuo ſiſtema de' *Logaritmi*.

ARTICOLO QUARTO.

Descrizione organica della Trattoria di Perralto.

Siccome Leibnitzio, che descriveva questa curva con un peso attaccato ad un filo, ed Ugenio con una rigida verga fornita alle due estremità di una punta, non erano contenti di questi loro Istromenti, perchè involgevano il Problema, ed erano lo stesso che tirar per la tavola l'orivolo di Perralto, in quella guisa appunto che sarebbe apposto a biasimo, se per descrivere le sezioni coniche, altri recasse prestamente innanzi tre pezzi di un cono, intorno a' quali una penna si avesse a guidare; così per la stessa ragione il Sig. Marchese Poleni non avrebbe di che esser molto lieto dell'Istromento suo, se non si potesse considerare come ad altra curva inventato, e quasi per un di più applicato anche alla *Trattoria*; e se di quello del Leibnitzio, e di Ugenio non fosse senza alcun dubbio migliore, e l'inventarne un ottimo sulle presenti equazioni impresa quasi che disperata non fosse.

Perlocchè ripigliando l'Istromento suddetto, dico che per descrivere la *Trattoria* basta (*Fig.* 2.) estrarre fuori del prisma A*d* la lamina trasversale *dc*T, e porla da canto come inutile, e nel forame *o* dell' asta *o*D far entrare il pivolo *g*, e usar poi l'Istromento, come si è detto, che così detta asta sarà la *tangente*.

Ma acciocchè la *tangente* si possa far eguale ad una costante data, in vece d'introdurre il pivolo *g* nel predetto forame, si faccia che entri nel forame di un anello, di cui (*Fig.* 6.) *ab* sia il piano orizzontale, ed il piano verticale sia *bd*, quale nei voti di mezzo riceva detta asta, espressa qui per il tronco GH, e che si possa a qualunque punto di quella fermare con la vite laterale *b*; avvertendo, che l'anel-

l'anello non circondi affatto detta asta, ma si arresti come prima tocca il margine del piano inferiore orizzontale di quella; acciò detta asta nel sito *g* non sia per la grossezza dell' anello più alta in questo caso della *Trattoria*, che non fu in quello della *Logaritmica*.

ARTICOLO QUINTO.

Trattoria di base circolare, sua origine, e descrizione per approssimazione.

Potendo noi non che le *Trattorie* pensate (1) dal Bernuglio, e dal Leibnitzio (2), ma infinite altre immaginare per lo variare infinito delle lor direttrici, dovrebbero restar in tanta dovizia le nostre brame spente, e di una già esposta contente. Pure non vo' mancare di accennare almen quella di base circolare, e per essere gentil cosa, e per essere un caso generale, che per le ragioni altrove addotte, comprende anche la *Trattoria* di Perralto.

Se dunque si concepisca (*Fig.* 2. *Tav.* 5.) un filo *ab* eguale per esempio al raggio del circolo *bcd* ec. di cui ad un' estremità *a* alcun peso sia attaccato, e l'altra *b* sia condotta per la periferia *bcd* ec. il peso *a* descriverà una *Trattoria* *a*, *e*, *f*, *g* ec. di cui *ab* sia la *tangente* eguale ad una costante data, e la base, o sia *direttrice* sarà la periferia *bcd* ec.

Questa curva si descrive altresì per *approssimazione*, come quella di Perralto; imperciocchè presa col compasso la data costante *ab*, che non ecceda il raggio del detto circolo *bcd*, e fatto centro in *e* punto vicino ad *a* più che sia possibile, si segni il punto *c* nella periferia direttrice *bcd* ec. cui da *e* sia condotta *ec*; poi fatto centro in *f* tanto da *e* distante, quanto *e* da *a*, e tagliata con la medesima aper-

E 2 tura

(1) Bernuglio negli *Atti di Lipsia* mese di Giugno 1693.

(2) Leibnitzio negli *Atti di Lipsia* mese di Settembre 1693.

tura la periferia in *d*, sia condotta *fd*; e così procedendo fatto centro in *g* tagliata la periferia in *h* si tiri la retta *gh* ec. Allora la linea *aef* ec. rappresenta una *Trattoria* di base circolare; in cui, come in quella di Perralto, il peso *a* sempre più s'accosta alla base BK senza arrivare mai a una minima distanza, cioè a toccarla; così in questo caso della base *bcd* sempre più s'allontana, senza mai pervenire ad una distanza massima, cioè senza mai andar nel centro *c*, dove inclinando per una spirale *efgm* ec. sempre più s'avvicina, e non vi arriva giammai. Inoltre come (*Fig. 5. Tav. 4.*) nel caso di Perralto, scorrendo nella *direttrice* BK il *raggio* G*u* insieme col *quadrante conjugato* L*bu*G, ovunque in *b* taglia detta *Trattoria*, la taglia ad angoli retti; così anche in questo caso (*Fig. 2. Tav. 5.*) scorrendo il centro di un quadrante per la periferia *bcd* ec., e un sito *u* qualunque acquistando, dovunque ad un medesimo verso le spire della *Trattoria* da quello si tagliano in *m* ed *n*, si tagliano appunto ad angoli retti. Ma voglio lasciare nell'altrui piacere di rincontrare con più lungo confronto le restanti proprietà di queste due curve, giacchè ciò non appartiene al mio argomento.

ARTICOLO SESTO.

Descrizione organica della Trattoria di base circolare.

PEr non fabbricare appostatamente un Istromento per questa sola curva, basterà per ora levare da quello della *Fig. 2. Tav. 4.* l'asta *o*D, e messo un pivolo nel forame *o* di detta asta, o in quello dell'anello *ab* (*Fig. 6.*) che la circonda, condurre poi detto pivolo per la periferia di un circolo già prima segnato con lapis sul piano della carta. E qui voglio che la materia delle *Trattorie* sia spedita e al suo fine condotta.

ISTRO-

ISTROMENTO VI.

PER LA CICLOIDE.

IN quella guisa che le *Concoidi*, e le *Trattorie*, e tant' altre curve variano per lo infinito variare delle loro *direttrici*, così le *Cicloidi*, che generalmente nascono dalla revoluzione di un cerchio sopra una linea qualunque data, per lo infinito variar di detta linea, infinitamente variano. Ma per non entrare in questa interminabile varietà, a quelle sole conviene attenersi, che o per il volger di un cerchio sopra una retta, o sulla periferia di un altro cerchio risultano; giacchè, come fu altre volte notato, l'un caso l'altro contiene, perchè si reputa la linea retta essere una periferia di un circolo infinito. Laonde riservando per un altro luogo (1) le *Cicloidi* della seconda classe, si comincierà da quelle della prima, cioè di base retta; le quali avvegnachè siano di tal genere che non ripigliano nuove forme, ma ricevono soltanto alterazione di grandezza o estensione; nonostante nella costruzione del presente Istromento voglio riguardare anche a questa sorta di cangiamento; sì perchè questa curva negli orivoli a pendolo utilmente si potrebbe forse adoperare, sì anche perchè l'Autore altre volte da me (2) lodato in proposito della *Cicloide* espressamente dice: *Rotulam, cujus rotationis ope delinearetur Cyclois, inter germana organa haudquaquam ponerem, cum rotula una ad unam tantum Cycloidem delineandam usui esse possit.*

AR-

(1) Istromento IX. Artic. IX.

(2) Il Sig. Marchese Gio: Poleni nel luogo sopracitato.

ARTICOLO PRIMO.

Dell' origine e proprietà della Cicloide.

SE adunque suppongasi (*Fig.* 3. *Tav.* 5.) un dato *circolo generatore* VRD ruotare sulla retta base, o sia *direttrice* DK dal punto V preso nella periferia di detto circolo, verrà descritta una curva VSK, che sarà una *Cicloide*, e le proprietà sue inservienti alla seguente costruzione saranno:

I. Che la *tangente* RT del *circolo generatore*, determinata dalla *tangente* ST della *Cicloide* nel punto d'intersezione T, eguaglia la porzione RS dell'*ordinata* OS compresa fra la curva VSK, e la *periferia generatrice* VRD.

II. La porzione RS è eguale all'arco VR; ma la *tangente* RT è eguale a RS: dunque RT eguale all'arco VR; e perciò la *tangente* RT si chiama anche *devoluta* dell'arco VR.

III. La *Cicloide* VSK, di cui sta il vertice nel punto V, due volte presa è eguale a quattro diametri VD.

IV. Se finalmente si produca la sottensa DR, finchè occorra nella *tangente* ST della *Cicloide*, dico che la prodotta DR nel punto N divide per metà, e ad angoli retti la porzione di detta *tangente* definita dai punti estremi dell'*ordinata* OS, e della *tangente*, o sia *devoluta* RT. Conciossiacchè essendo eguali gli angoli ERD, DRF, perchè misurati dalla metà d'archi eguali FD, DR, saranno eguali gli angoli al vertice opposti TRN, NRS; ma sono eguali parimenti gli angoli TSR, STR, perchè opposti a lati per la costruzione eguali TR, RS; e perciò il triangolo STR è *isoscele*. Dunque la prodotta DR dal vertice dell'*isoscele* R condotta nella base ST, giacchè divide per metà l'angolo TRS al vertice R, tagliarà parimenti per metà, e ad angoli retti la base ST a quello opposta.

Tutte queste cose si vogliono aver dette in qualunque punto della periferia VRD occorra il punto R di comune intersezione delle linee ET, DN, OS, e raggio CR. Onde mi piace di seguire questo punto d'intersezione R per tutto il corso della *periferia direttrice* VRD, ed esaminare i moti particolari di dette linee intersecanti, che per rapporto alle suddette proprietà devono risultare.

ARTICOLO SECONDO.

Nuova origine della Cicloide risultante dalle sue proprietà.

QUel *circolo generatore* VRD, che nel precedente Articolo fu detto, che generava la *Cicloide* ruotando sopra la *direttrice* BK, ora intendo, che immobile stia, e che la curva derivi da tali movimenti relativi alle sue proprietà.

Laonde acciocchè primieramente la porzione RT della *devoluta*, o sia *tangente* ET (in qualunque punto R tocchi la periferia direttrice) sia eguale alla porzione VR di detta periferia, fà di mestieri, che prima coincida con la retta VB, e l'estremo suo punto T si trovi precisamente nel vertice V, e che poi a poco a poco da detta periferia discostandosi dalla parte VRT, ed accostandovisi dalla parte DRE, finalmente vada a finire nella retta DK, e l'estremo suo punto T nell'estremo punto della curva K coincida.

La *norma* poi (che così mi giova chiamar le due linee DN, TS congiunte insieme in N ad angoli retti) perchè deve esser toccata e repulsa dalla *devoluta* RT in T, e non declinare però mai nè dal punto D, nè dal punto R di comune intersezione, avrà tal movimento, che il punto N sarà prima stato precisamente in V, ma poi dalla *devoluta* RT quasi, dirò così, urtata e respinta, anche il punto N si sarà sempre più allontanato dalla periferia, finchè nel punto K sia anch'esso concorso, ed il lato DN coincida con DK.

Segue l'*ordinata* OS, quale acciò costantemente formi l'angolo

golo FRD eguale a DRE, coinciderà precisamente con la retta VB, e s'andarà poi di modo allontanando da quella, ed accostando a DK, che a queste ad a sestessa sia costantemente parallela, e normale al diametro VD.

Quanto al *raggio* CR mobile intorno al centro C coinciderà prima con CV, e seguendo poi anch'egli di continuo il punto R di comune intersezione, finalmente terminerà in CD, e sarà sempre normale alla *tangente* RT.

Ora per questi movimenti eccitati tutti in un tratto, come necessariamente dipendenti e inseparabili dalle sovr'accennate proprietà, avviene, che il punto d'intersezione S si debba costantemente in un punto della curva ritrovare. Anzi quantunque nel punto V, e nel punto K non sia per essere alcuna intersezione, perchè però ivi è per essere il principio ed il fine di quella, il punto V ed il punto K dovranno nonostante annoverarsi fra i punti della curva. Ma giova qui ricordare una cosa, che quanto prima occorrerà, cioè che in principio di moto il punto estremo T della *devoluta* RT; i due punti d'intersezione R ed S si troveranno ristretti nel punto N, e questo N in V, onde tutti si troveranno raccolti nel punto V; e che nel fine di detto moto, cioè quando il punto R sarà pervenuto in D, i punti T ed S saranno ridotti in N, ed N in K; e però T, N, S uniti tutti coincideranno in K.

Tutte queste cose poste, concludo che composta una macchinetta con tali e tante parti, che alle predette linee, cioè al *circolo generatore* VRD, al *raggio* CR, alla *devoluta* RT, alla *norma* DNTS, all' *ordinata* OS corrispondano; e ciascheduna movasi con movimenti ai moti di quelle rispettivamente conformi, questa potrà fornire la descrizione della *Cicloide* proposta. Ma per far prova di questo fatto, prestamente passerò alla descrizione di detta macchinetta, e dirò prima del suo *piano orizzontale*.

AR-

ARTICOLO TERZO.

Piano orizzontale dell' Istromento per la Cicloide.

Dovrebbe riuscir facilissimo a comprendersi il *piano orizzontale* di questa macchinetta, perchè le sue parti (*Fig.* 1. *Tav.* 6.) corrispondono appunto alle linee sopraddette della *Fig.* 3. *Tav.* 5., e sono indicate colle medesime lettere, con i medesimi nomi, e non resta se non da mostrare, come siano anche capaci di quei medesimi movimenti, che furono a ciascheduna attribuiti nell' antecedente Articolo.

E' dunque VRD il *circolo generatore*, qualunque dato preso nella superficie di un tronco d'un cono di legno, espresso nel *piano verticale* della *Fig.* 2. per il trapezio *p a b f*, qual circolo s'intende essere nella detta *Fig.* 2. la linea *e g*, e parallelo alla base *p a* di detta *Fig.* e stare sempre immobile. D'intorno al centro C di detto circolo (torniamo alla *Fig.* 1.) gira orizzontalmente in luogo di *raggio* l'asta CR (che porta un cilindro *n* ombreggiato mobile pure orizzontalmente) da R prodotta fino al forame *n*.

Tra questo cilindro (fatto come in sezione *b d Fig.* 2.) e la periferia del *circolo generatore* VRD è interposto un regolo di legno TE, che sta per la *tangente*, o sia *devoluta*, quale (mentre il *raggio* CR da V si muove verso D, e porta seco il cilindro *n*, che nell' istesso tempo volgesi orizzontalmente intorno al proprio asse) vien quasi per una sorta di trafila spremuto fuori delle due periferie del cilindro, e del *circolo generatore*; cosicchè detto regolo successivamente si muove, e si scosta dalla periferia VR dalla parte VRT, ed a quella vassi di mano in mano combaciando dalla parte DRE, finchè giunga a toccare la periferia nel punto D, dove fermandosi il raggio CR col cilindro annesso *n*, anch'esso cessa di più moversi. Onde a buon conto qui si può osservare, che la *devoluta* risponde

F a

a quelle leggi di moto, che le furono poco fa assegnate. Perchè ed è *tangente* al *circolo generatore* nel punto R, e normale al *raggio* CR, ed accade che la porzione RT sia eguale all' arco VR, nel supposto che in principio di moto la sua estremità T coincidesse in V.

Segue la *norma* di metallo DNTS fessa per mezzo per tutti i lati, regolata al dovuto suo moto da tre pivoli d'acciajo. Il primo dal punto estremo T del regolo, o sia *devoluta* RT, cui sta afferrato, cala giù nella fessura del lato NT, e movendosi insieme con detta *devoluta*, risospinge sempre più ed allontana dalla periferia VR la *norma*, che prima col punto N coincideva nel punto V; finchè si arresta, arrestandosi detta *devoluta* nel punto D. Il secondo fisso nel punto D dell'immobile periferia VRD s'introduce nella fessura del lato ND, e ritiene detto lato, acciocchè da detto punto D non si scosti. Il terzo ed ultimo pivolo, essendo per di sotto fisso nel punto R del rotante *raggio* CR, entra nella fessura del lato ND, e costantemente fa che non declini dal punto R di comune intersezione; onde tenendo detta *norma* ai due punti D ed R; ed essendo dall'estremità della *devoluta* T risospinta, come si è detto, viene appunto a quel moto determinata, che s'era già divisato.

Questo medesimo ultimo pivolo R portato dal *raggio* CR urta, e fa muovere una verga di metallo *tt* F 4 con puntini distinta, che porta le veci di *ordinata*, e che sebbene men si ravvisa in questo *piano orizzontale*, però assai bene si mostra nel *verticale* della *Fig.* 2. per le lettere *qa* K 3 4. Ella è (*Fig.* 1.) connessa e normale ad un prisma *tt* mobile nella scannellatura AQ, che è parallela al diametro VD. Si dirigge detta *ordinata* da *tt* a sinistra verso F, e poi (vedi anche la *Fig.* 2.) ripiegandosi per di sotto a destra arriva fino a 4, e s' interseca col lato della norma N*y* nel punto S, dove è uno stilo afferrato ad un anello, o sia guida mobile per N*y*, che questa intersezione continuamente seguendo, descrive intanto sul piano della carta la proposta *Cicloide*. Imperciocchè mentre detta *ordinata* è dal pivolo R urtata, l'annesso prisma *tt* cedendo scorre da A verso Q, e intanto l'*ordinata tt* F 4 si muove sempre a se stessa parallela, e normale al diametro VD, e s'accosta per di sotto al punto D, e s'interseca anch' essa nel punto di comune intersezione R, perchè non si muove, se non se essa è appunto dallo spingente pivolo R determinata a muoversi.

Dirò ora, per qual causa alcune parti di questa macchinetta siano in disegno ora espresse con linee vive, ora con morte. Onde egli è da sapere, che le parti dell'Istromento sono realmente collocate a diverse altezze, come meglio si potrà poi anche osservare nel *piano verticale* della *Fig.* 2. La *norma* DTNS (che nel *piano verticale* della *Fig.* 2. è espressa per *x* 7 8 *y*) è nel più basso luogo di tutte le altre; sopra a quella segue l'*ordinata tt* F 4 (che in *Fig.* 2. si mostra per *qa* K 3 4); d'indi più alta sta la *devoluta* ET (espressa *Fig.* 2. per *eb*) superata però da una porzione del cilindro *n*, e per fine nel più sublime posto avvi il *raggio* CR*n* (che in *Fig.* 2. compare per *rpn*), ed avvi pure una porzione dell' *ordinata tt* F (che in *Fig.* 2. è la porzione *qa* K). Quindi è che quella porzione di esse parti, che nel *piano orizzontale* viene ricoperta da quelle, che si trovano situate in maggior altezza, è con soli punti disegnata; e distinta poi con linee vive resta in vista quella porzione, che sotto a quelle perpendicolarmente non cade. Perciò ora si concepisca (*Fig.* 1.) come parte della *norma* DTNS si mostra abbagliata, e coperta sotto dell' *ordinata tt* F 4; questa coperta dalla *devoluta* ET, benchè in figura veramente non appare; la *devoluta* dal cilindro *n*; il cilindro dal *raggio* CR*n*. Ma facciamsi ormai appostatamente da capo al *piano verticale*, di cui soltanto di passaggio alcuna cosa si è detta.

ARTICOLO QUARTO.

Piano verticale dell' Istromento per la Cicloide.

MOlte cose appariranno in questo *piano*, che in quello *orizzontale* o per evitar la confusione non si son poste, o se poste anche vi sono, non si potevano però abbastanza concepire; perchè per la intelligenza di qualunque costruzione organica un piano reciprocamente l'altro ajuta, riuscendo per lo più in un piano men distinte quelle parti, che aperte e chiare risultano nell'altro.

Si concepisca dunque (*Fig.* 2.) che sia con una vite N fermato ed eretto sopra una tavoletta orizzontale RS un forte piedestallo d'acciajo RLC forato in C ed L, ed indi si supponga un chiodo *mr* A, che trapassi per l'asse del cono *fbap*, poi per un bucco *r* circolare della verga *rpn*, e quindi per detti due forami quadrangolari C ed L; finchè per ultimo nella sommità A con una vite si stringa, e ritenga il cono al predetto piedestallo sospeso, di modo che e questo, e quello, e la tavoletta orizzontale formino un corpo costantemente immobile; acciocchè quindi per primo capo nella superficie di questo cono dare e prender si possano infiniti *circoli generatori*.

L'asta poi *rpn* mobile orizzontalmente intorno al punto *r*, cioè d'intorno all'asse del cono, o sia chiodo *mr* A sta per il *raggio* C*n* della *Fig.* 1., nel di cui forame *n* s'introduce il palicello *i o n* d'acciajo talmente ripiegato, che la porzione *nb* divenga parallela al lato del cono *pf*, e dopo due piegature, una verticale, l'altra parallela all'orizzonte seguiti la porzione *o i* parallela all'asse *mr* A, e verticale in un con detto asse all'orizzonte. Questa porzione *o i* (perchè per linea retta mira nell'estremo punto R del raggio CR della *Fig.* 1., ed insieme col raggio *rn* della 2. volgesi d'intorno nel punto *r*) descriverà un cerchio eguale al dato *circolo generatore* VRD della *Fig.* 1., ovvero *eg* della 2., e la modificazione di detto circolo niente più importarà, che spingere su, o giù nel forame *n* il palicello *ion* fermandolo poi con la vite laterale, qualora la porzione *io* miri nel punto *e* del circolo *ge* qualunque dato.

Segue ora il *tangente* regolo, o sia *devoluta* ET, che nel *piano orizzontale* della *Fig.* 1. è situata, di maniera che nel *verticale* della 2. esprimer non si può se non per la sezione *eb* con puntini ombreggiata. Nulladimeno si scorge, come (essendo interposta fra il lato del cono *p f*, e del cilindro *bd* mobile d'intorno ad una porzione del palicello *i o n*) per lo volger di detto cilindro dal *raggio r p n* portato, possa anch'essa girare d'intorno al cono dalla superficie di questo, e da quella del cilindro spremuta fuori quasi, come già dissi, per una sorta di trafila. Ma non si può del tutto rilevare, come dal punto estremo *e* di detta *devoluta* cali giù perpendicolarmente un altro palicello pur d'acciajo, parallelo anch' esso all' asse *mr* A, essendo situato, e coperto di dietro alla porzione *o i*, perchè tanto il punto *e*, che corrisponde al punto T della *Fig.* 1., quanto detta porzione *o i*, che risponde al punto R, occorrono in disegno nella medesima retta *e i* TR.

Ma giacchè abbiam detto di due palicelli, che fanno per i supposti pivoli T ed R moderatori della *norma*, ed *ordinata* della *Fig.* 1., parliam qui anche di un altro palicello, che risponda al terzo pivolo D in detta prima figura supposto. Però il trapezio, o sia figura piana *p a b f* rappresentando in verità la superficie di un solido, cioè di un tronco cono (ciò che è da imprimersi bene nella mente) segue che la linea *rm* condotta sulla superficie del cono della linea *pa* alla linea *f b*, si debba concepire non solo eguale al lato *p f*, ma ancora all' asse del cono egualmente inclinata, e quindi la parte pure *r t* egualmente inclinata, ed eguale alla

alla parte *p e*. Ciò posto, s'intenda esser fatta nel lato *r m* una tale scannellatura, qual dimostra la *Fig.* 1. nel punto D, in cui si muova, e con una vite si fermi in qualunque punto *t* un prisma di simil forma *lz* congiunto ad un palicello *z&*, che nel punto *z* costituisca con detto prisma un angolo *lz&* eguale all'angolo formato dal lato del cono col suo asse; onde avverrà, che il palicello *z&* (cioè il palicello *t*V, che ormai si vuole intender lo stesso) sia parallelo all'asse del cono, ed al rotante palicello *o i*, e si ritrovi nella circonferenza del medesimo circolo da detto palicello *oi* descritto; perchè il punto *e*, in cui si dirigge la porzione *io*, ed il punto *t*, in cui si è fissato il palicello *t*V, sono dai punti *p* ed *r* rispettivamente equidistanti. Questo palicello *t*V, fisso che sia con la vite al cono, starà insieme con detto cono costantemente immobile; e tutti questi tre palicelli introdotti nella fessura della *norma* determinaranno ai detti moti non solo la *norma* (di cui in questo *piano verticale* non si mostra se non la costa *x* 7 8 *y* sostenuta da nodi sotto fermati con picciole viti contro i detti tre palicelli) ma anche la seguente *ordinata*, perchè verrà urtata dal prodotto palicello *o i*, che come rispondente al punto R della *Fig.* 1., regola anche la comune intersezione delle dovute parti.

La verga dunque *qa*K 3 4, che già poc'anzi fu accennato essere la *ordinata*, quando viene urtata dal palicello *oi*, scorre per la scannellatura superiore *q* corrispondente a quella orizzontale AQ della *Fig.* 1., e segue di essa (quantunque in questo *piano verticale* non possa apparire) una intersezione col lato della *norma* 8*y* dichiarato per N*y* della *Fig.* 1., e condotto con la mano dietro a questo punto d'intersezione uno stilo MS connesso, e normale ad una guida mobile in detto lato 8*y*, dalla punta del detto stilo S vien descritta la curva sul piano della carta.

Ora per passare ad un esempio, nella superficie del tronco

co cono dato sia per *generatore* della proposta *Cicloide*, invece del supposto *circolo eg*, il *circolo* EG, che risponde nella *Fig.* 1. al *circolo u*. Onde prestamente calato giù il palicello *n o i*, e fermato con la vite *n*, quando *i o* mirerà in E, spontaneamente discenderà anche la *devoluta e b* in un col cilindro *b d*, che la sostiene ed abbraccia. Così il palicello *t* V sia giù cacciato fino al punto T, e con la vite fermato. Di più essendo stato detto (1) che in principio di moto (*Fig.* 1.) i pivoli T ed R, e lo stilo S debbano ridursi in N, ed N coincidere col vertice V, tanto dovrà ora seguire (*Fig.* 2.) del palicello della *devoluta be*, del palicello *o i*, e dello stilo MS, che quei pivoli e stilo rappresentano. Onde (questi ristretti prima nel punto 8 della *norma*, cioè N della *Fig.* 1., e questo 8 condotto insieme con l'*ordinata* nel vertice *u*, che qui è coperto dall'anteposto punto T, ma è visibile nel *piano orizzontale*) si move poi con la sinistra il *raggio rpn* verso chi legge d'intorno al punto *r*, e con la destra messa in M sia lo stilo MS guidato appresso al punto, dove la *norma* s'interseca con la *ordinata*, che si conseguirà la descrizione proposta.

Notate per fine, che sebbene quanto si è detto sembra difficile a comprendersi, ed esiga per dir vero non poca forza di fantasia, nonostante se tornate bene a mente le leggi di Prospettiva, si farà diligente riflessione alle sole linee parallele morte condotte dal *piano orizzontale* al *verticale*, molto meno ardua riuscirà la intelligenza di questa costruzione; e molto meno ancora, quando per un momento si avran messi gli occhi sulla seguente tavola, che la elevazione scenografica rappresenta.

AR-

(1) Artic. II. di questo Istromento.

ARTICOLO QUINTO.

Scenografia dell' Istromento per la Cicloide.

QUesta *Fig.* 1. *Tav.* 7. è tanto per se stessa chiara, che non avrebbe forse mestieri di altra esposizione, ma pure volendo qui recar in poche le molte parole dette nei piani antecedenti, sappiate che le parti dell' Istromento messe qui in prospettiva portano rispettivamente le medesime lettere delle medesime parti descritte nell' antecedente *piano verticale*; perchè RCL è il piedestallo (fermato ad una tavoletta orizzontale con la vite N) a cui per mezzo del chiodo *mr* A (qui non si vede *m*) sta in alto il tronco cono sospeso ed immobile. Intorno a detto chiodo in *r* gira verso *q* il *raggio r n*, che seco porta il palicello *n o i*, intorno a cui movesi il cilindro *d*; e tra la superficie di questo, e del predetto cono lo interposto regolo *tangente*, o sia *devoluta b e* si spreme, e sempre più s' allunga dalla parte di *e*, dove un palicello cala giù dritto ad introdursi nella norma *x* 7 *y*, nella quale s' introduce pure l'immobile palicello TV, ed il palicello *n o i*. Questo palicello *n o i* urta nel medesimo tempo contro la *ordinata q* K 3 4, onde ella scorre nella scannellatura superiore da Z verso *q*; ed intanto lo stilo S connesso alla sua guida M, scorrendo per il lato della *norma* 8 *y* dietro al punto d' intersezione della *norma* coll' *ordinata*, segna sul piano della carta RS la proposta *Cicloide*. Avvertendo che il lato *y* 7 della *norma* sarà sempre tangente alla curva; ed inoltre che sta nel piacere altrui il fare che o l'*ordinata* urti nel palicello *o i*, o che piuttosto il palicello urti nell' *ordinata*, come in figura. Così è arbitraria la situazione della scorrente guida coll' annesso stilo MS; perchè in figura è messa nel lato 8*y* della *norma*, ma tanto si poteva anche introdurre nella *ordinata*, facendo però, che lo stilo passasse per la fessura di detta *norma* prima di discender nel piano. Ma perchè tante parti adoprando in questa macchinetta, e troppi moti seguendone, si potrebbe dubitare della felice sua riuscita, voglio almeno nel seguente Articolo farmi incontro a quelle obbiezioni, che mi potrebbero venir mosse dagli altri.

ARTICOLO SESTO.

Obbiezioni alla costruzione predetta, e sue risposte.

NOn volendo io, come altri fanno, dissimulare accortamente i difetti di questa mia macchinetta, io medesimo li produco, quali alla meglio correggendo, e quali così lasciando stare come stanno. Potrebbesi dunque opporre

OBBIEZIONE I.

Che essendo due palicelli, ed uno stilo, che (*Fig.* 1. *Tav.* 6.) nel principio di moto hanno a concorrere nel punto N, lo stilo S per la grossezza loro non trovandosi precisamente in detto punto N, non potrà (*Fig.* 3. *Tav.* 5.) segnare i primi punti della Curva in V, e così nemmen gli ultimi in K; poichè la verga, che sta per l'*ordinata*, quando arriverà a toccare il palicello D, o sia *t*V della *fig.* 2. *Tav.* 6. la punta dello stilo sarà lontana da K la metà della grossezza dello stilo, tutta la grossezza dell' *ordinata*, e la metà della grossezza del palicello *t*V; e però la curva rettificata non reggerà all' equazione, cioè (*Fig.* 3. *Tav.* 5.) la *semicicloide* VSK non sarà eguale a due diametri VD, nè tutta a quattro, come dovrebbe.

G Ri-

RISOLUZIONE.

L' obbiezione non ha altra riſpoſta, ſe non che queſta imperfezione è, come già notai altrove (1), comune anche ad altri Iſtromenti inventati da altri ſingolariſſimi uomini.

OBBIEZIONE II.

Ancorchè non andaſſero diſperſi alcuni punti della Curva in K ed V, pure nòn ſi ha, che una ſola *ſemicicloide* VSK, reſtando deluſi dell' altra metà a ſiniſtra.

RISOLUZIONE.

Ma volendo pure conſeguire anche l'altra metà, laſciando ſtar fermo il tronco cono nella preſente ſituazione, e ſoltanto portato a man deſtra il piedeſtallo RLC *Fig.2.Tav.6.* e meſſa la *ordinata qa*K 3 4 nella ſcannellatura B, ſi potrebbe deſcrivere anche l'altra metà della *Cicloide* a ſiniſtra; e ciò baſtar dovrebbe, come baſta per la perfezione d'altri ſimili Iſtromenti in queſto genere, che non deſcrivono le Curve, per le quali ſono inventati, ſe non ad una metà per volta. A queſto s'aggiunga, che per li uſi meccanici baſterebbe il poter deſcrivere una mezza Cicloide, come per eſempio nella fabbrica degli Orologi a pendolo.

OBBIEZIONE III.

Eſſendo piuttoſto lunghi i palicelli, e lo ſtilo, e dovendo il palicello *oi*, e il palicello *e* (*Fig.1.Tav.7.*) urtare e reſpingere la *norma*, è da temere, che per l'elaterio intrinſeco della materia metallica ſi pieghino i palicelli avanti di po-

(1) Iſtromento II. Art. II.

poter muovere le riſpettive parti, e però non duri in eſſe quella mutua azione, che ai movimenti già ſtabiliti ſi richiede.

RISOLUZIONE.

Onde anche queſta infermità pare ſenza rimedio, perchè non può uom mortale togliere dalla natura l'elaſticità. Si potrebbe però ſe non altro diminuirla, fabbricando l'Iſtromento di materia poco elaſtica e dura aſſai, e più grande che in figura non è.

OBBIEZIONE IV.

Il regolo *tangente*, o *devoluta eb* (*Fig. 2. Tav. 6.*) non è poſſibile che, volgendoſi intorno alla ſuperficie del cono, cammini eſattamente col margine *e* nella periferia del dato *circolo eg*; perchè naturalmente inclina anzi per una ſpirale verſo la baſe di detto cono *pa*.

L'eſperienza può preſto render paghi i curioſi di queſta verità dipendente da una propoſizione (1) già dimo-

G 2 ſtrata,

(1) Queſta medeſima propoſizione, benchè enunziata differentemente, è dimoſtrata dal P. Andrea Tacquet nella Diſſertazione Fiſico-Matematica: *De Circulorum volutionibus Theor. VIII.* dalla quale derivano alcune conſeguenze, che non mi pajono in vero così poco gentili, che ſi abbiano a tralaſciare. Segue dunque:

1. Che, più che ſarà lungo il cono, ſi moverà nell'area di un maggior circolo, perchè (*Fig. 7. Tav. 5.*) più acuto che è l'angolo al vertice C, più aperti ſono alla baſe gli angoli CKS, CSK compreſi tra il lato del cono, ed il diametro della ſua baſe SK. Ma una ſpirale non è che una curva, che paſſa per i punti di un cerchio ai punti di un altro cerchio maggiore. Dunque ſe nel medeſimo tempo che il cono rotola il punto di concorſo C dei convergenti lati KC, SC, paſſando in *x*, poi in *d*, *b* ec. s'allontanaſſe ſempre più dalla baſe KS, il cono in tal caſo moverebbeſi ſul piano per una ſpirale KS*z*; finchè andando detto punto C all'infinito, e (*Fig. 8.*) diventato il cono un cilindro I*n*, moverebbeſi in tal caſo per un circolo infinito; cioè ivi in tal caſo ſi moverebbe per una retta *nm*. Se poi i lati diveniſſero convergenti dalla parte oppoſta, il cilindro diventato di nuovo un cono, tornerebbe ai medeſimi movimenti ſpirale e circolare. E tanto ſi

ſtrata, qual' è, che fatto rotolare ſul piano dell' orizzonte un cono roveſciato KSC (*Fig. 4. Tav. 5.*) per un impulſo che

ſi vuole aver detto anche riſpetto ad un ſolo tronco di cono Kg, Se (*Fig. 4.*) Perchè non altrimenti che ſe foſſe intiero, non reſta che i lati Kg, Se non ſiano tuttavia convergenti, e però muoverebbeſi in un circolo, il di cui centro accada nel punto, dove detti lati Kg, Se prodotti verrebbero ad unirſi, cioè nel centro C. Oppure moverebbeſi per una ſpirale per una retta; e poi di nuovo per una ſpirale, o per un circolo, ſecondo che entraſſero in ſuppoſto o l'uno o l'altro dei predetti caſi.

2. Immaginiamoci (*Fig. 2. Tav. 7.*) che un pezzo anteriore ed un poſteriore di un carrettino a quattro ruote, o pur anche di tre, ſia colla vite D ſtretto e confitto l'un all'altro, coſicchè diventi immutabile l'angolo KDS, ed in conſeguenza anche l'angolo KCS formato dai convergenti aſſili Kg, Se in C prodotti. Per l'analogia che queſta macchina ha col tronco cono rotante della *Fig. 4. Tav. 5.* e per la medeſima ragione addotta nel Teſto, onde detto cono moveſi in un circolo, ſi raccoglie che urtata comunque nel centro della ſua gravità, debba muoverſi anch' eſſa in un circolo, di cui C ſia il centro. Di più ſe nel tempo che rotola, rallentata la vite D, l'angolo KDS ſi apriſſe ſempre più, e l'angolo KCS ſempre più facendoſi acuto, ſi andaſſe C accoſtando all' infinito, eſſa moverebbeſi per una ſpirale, e poi giunto che fuſſe C all' infinito, per una retta ec. Perchè in ſomma ha qui luogo l'antecedente annotazione con tutte le ſue parti.

Quindi bellamente ſi ſcorge, quant' è per eſſer d'uopo nell' idea di una carrozza, che doveſſe andare non ſolo in un perpetuo cerchio, artificio già fatto volgare, ma andare (ciò che fu viſto ſulla piazza di S. Marco in Venezia anni fa) e per dritto e per traverſo, e volgerſi per ogni parte da ſe, o per l'opera delle perſone che dentro foſſero. Concioſſiacchè o per una validiſſima molla, che per mezzo di ruote dentate intermedie faceſſe volger li aſſili Kg, Se fermi alle ſue ruote, o ſupplendo gli uomini all' azione della molla (ſecondo che queſta azione foſſe applicata o a ſoſpingere, o a reſpingere) la carrozza o innanzi, o indietro moverebbeſi. Ma acciò ſi moveſſe anche o per dritto, o a deſtra, o a ſiniſtra, ſecondo che la tortuoſità della ſtrada il richiedeſſe, in quella guiſa che l'accorto Nocchiero col timone guida la ſua nave, così avrebbeſi qui a preparare l'ingegno in modo che ſi poteſſe ad ogni occaſione ſtringere preſtamente, o allargare, ed annullare l'angolo KDS, e reſtituirlo anche, quando biſogno foſſe, dalla parte oppoſta. Meccaniſmo che quanto in eſecuzione rieſce mirabile, altrettanto importa meno di ſagacità nell' inventarlo. E' ben vero per altro, che quando ſi voleſſe applicare la carrozza al traſporto di enormi peſi, non potendoſi ſuperare le grandi reſiſtenze, ſe non con grande diſcapito della velocità, perciò tal macchina non ſi potrebbe recare in pratica con gran vantaggio della ſocietà. Concioſſiacchè lo ſforzo di un cavallo, che ſeguitamente affatica in luogo di una potenza, può vincere al più una reſiſtenza di 1230. lire; e lo ſforzo di un uomo, una reſiſtenza di lire 205., ſforzi che ſono come 6 a 1. Onde ſuppoſto che la carrozza tirata da quattro cavalli, e pa-

che duri nel centro della ſua gravità, deve egli muoverſi in un circolo Syz, nel di cui centro C ſtarà ſempre il vertice di detto cono. Perchè eſſendo i lati KC, SC del cono convergenti ad una medeſima parte C, e ſempre egualmente convergenti, il cono ſi deve muovere per una curva, che non ſolo ſia inclinata ad una medeſima parte, ma ſempre egualmente inclinata; e queſta Curva non è altro che il circolo. Se per contrario ſi faceſſe muovere il piano Syz d'intorno al fermo cono, il piano ſi muoverebbe in un circolo, perſiſtendo col punto C nel vertice C di eſſo cono; perchè o che ſi muova il cono ſul fermo piano, o che ſi muova il piano ſul fermo cono, niente però ſi muta

peſante inſieme col carico 4920. lire (che è la ſomma delli ſforzi di quattro cavalli) faccia il viaggio di una lega all' ora; ſe doveſſe eſſere ſpinta innanzi da quattro uomini applicati per dentro a farla muovere per mezzo di ruote dentate, dovendo la forza dell' uomo eſſere accreſciuta di ſei con altrettanta neceſſaria diminuzione della velocità, eſſa non farebbe in tal caſo più di una lega in ore ſei. Tardità in vero faſtidioſa, per non dire inſopportabile.

3. Quindi dipende anche l'uſo che ſi fa (*Fig. 3. Tav. 7.*) de' cilindri per traſportare, dove che ſia, qualche grave peſo; perchè ſe eſſi ſono paralleli, il peſo avanza per drittura (facendo aſtrazione dalla inegualità del piano, del peſo, e de' cilindri) ſe convergenti, per circolo ec.

4. Nei molini coſtrutti per macinare il ſeme di lino ſi fa uſo (*Fig. 4. Tav. 7.*) di una pietra LG della forma di un pezzo di cilindro in queſto modo: ſta verticale all' orizzonte eretta un' antenna AB mobile intorno a ſe ſteſſa, per lo volger di una ruota traſportata dalla corrente di un rio. Da queſt' antenna ſi ſpicca un forte braccio verſo G, che introdotto nell' aſſe del cilindro, e in un coll' antenna movendoſi, trae ſeco in giro il peſante macigno, quale girando intorno al braccio, ed inſieme rotolando ſul piano, frange così e peſta il ſottopoſto ſeme. Onde a me pare, che ſe detto macigno foſſe piuttoſto della forma di un tronco cono KSge tornerebbe aſſai meglio. Perchè un cilindro roveſciato urtato nel centro della ſua gravità naturalmente, come ſi diſſe, inclina per una retta; onde volendolo contro alla ſua natura determinare ad un moto circolare, non ſolo biſogna molta più acqua, ma dovendo altresì il macigno, e le ruote adoperare maggior forza, la macchina aſſai più preſto ſi logora. Che ſe in luogo del cilindro LG foſſe poſto in pratica un tronco cono Kg, e S portato in cerchio ſul piano orizzontale LS dal braccio AC, che ſi piega nel vertice C di detto cono, e per l'aſſe del medeſimo trappaſſa (perchè il cono ſoſpinto naturalmente moveſi in circolo) incontrando perciò la macchina minor reſiſtenza, le parti ſue ſarebbero men toſto conſonte, ed un minor volume d'acqua baſterebbe.

ta la figura del cono, e del piano, la quale interviene a produrre un tale effetto. Secondariamente, non è altro il cono (*Fig. 6. Tav. 5.*) che un settore SCz (*Fig. 5.*) di un circolo, che è a tutta l'area SCyz, come (*Fig. 6.*) il raggio RS della base del cono al lato CS di detto cono. Imperciocchè si concepisca (*Fig. 5.*) il settore SCz ombreggiato essere una carta mancante dell' intiera area di un circolo, la porzione Syz, onde approssimati, e fatti combaciare i due lati Cs, Cz in uno, venga formato (*Fig. 6.*) il cono SCR. Quindi tosto si scorge, che il raggio CS ovvero Cz (*Fig. 5.*) diventa il lato Cs del cono SCR della *Fig. 6.* Di più la porzione di periferia ombreggiata Sz (*Fig. 5.*) pareggia (*Fig. 6.*) tutta la periferia della base del cono. E però essendo le periferie come i diametri, sarà (*Fig. 5.*) tutta la periferia Syz alla porzione Sz, come (*Fig. 6.*) CS ad SR. E perchè i settori di un medesimo circolo sono in ragione delle loro porzioni di periferia, tutta l'area del circolo (*Fig. 5.*) sarà alla parte ombreggiata, come (*Fig. 6.*) CS ad SR.

Queste cose premesse, ingegniamoci ora di mostrare per qual causa un regolo messo a traverso, e ad angoli retti di un cono, se lo si fà muovere sopra la superficie di esso cono, anzi che persistere sopra quel circolo parallelo alla base, su cui fu posto, naturalmente per una spirale verso detta base inclini. Proposizione verissima (1), ma che per

(1) Dalla proposizione, e da quanto il Testo contiene in appresso si rileva

1. Che il regolo I*m* (*Fig. 4. Tav. 5.*) tracciarà sopra un cono o più di una spira, o meno di una spira, o una intiera per lo appunto, secondo che il *settore conico* *n*C*d* sarà più o meno prossimo ad un quadrante *n*C*y*, e secondo che il regolo I*m* sarà situato più o meno vicino a C*y*.

2. La spirale tracciata sul cono sarà sempre eguale alla retta I*m*; perchè è la medesima retta, dirò così, che sulla superficie del cono si avvolge.

3. Questa *spirale conica* impressa sulla superficie del cono rovesciato, rotolando esso descriverà vicendevolmente sul piano la retta I*m*.

4. Si potrebbe meccanicamente descriver questa spirale sulle superficie del cono, tagliando prima in carta il triangolo rettangolo CI*m*, di cui l'ipote-

compreñderla, ben sarebbe, che prima se ne facesse in fatti una prova meccanica sopra una piramide, e poi sopra

nusa C*m* fosse eguale al lato del dato cono, ed applicando il lato CI di detto triangolo al lato di detto cono in modo che l'angolo C stasse nel vertice; perchè piegando poi detta carta d'intorno alla superficie conica il lato I*m* indicarebbe la proposta spirale. Ma non essendo questa tale descrizione per essere molto utile ai Meccanici, ne proporrò un' altra; non già perchè creda che ella sia loro necessaria, sapendo benissimo, che già non mancano altri metodi, ma perchè questa è tale, che ha direttamente relazione a quanto si è detto, e può avere un amplissimo uso.

Sia dunque, per il modo che si accennarà nell' *Istromento IX. P. III. Art. X.* descritta (*Fig. 5.*) sul piano una spirale qualunque S*ab* ec. (che sarà quella di Archimede nel caso, che si propongano eguali li spazj tra una spira, e l'altra) e postovi sopra un cono rovesciato, che col vertice occorra nel centro C di essa, si faccia rotolare, che sarà dalla *spirale del piano* tracciata sulla superficie del cono una spirale (*conica* da me detta) di un numero di spire eguale al numero delle spire della *spirale del piano*, moltiplicato per il numero delle volte, che il *settore conico* SCz entrarà nell' area di un circolo, di cui il raggio sia eguale al lato del dato cono. Onde nel caso della Figura, essendo 2 il numero delle spire della *spirale del piano*, e 3. il numero delle volte che il *settor conico* SCz entra nell' area del circolo; moltiplicato 2 per 3 verrà 6 numero delle spire della *spirale conica*. E la ragione è perchè quante sono le spire della *spirale del piano*, tante sono le porzioni di essa in ciaschedun *settore conico* impresse, e queste porzioni diventano spire intiere nella superficie del cono.

Quindi dato un cono, di cui il *settor conico* sia parte aliquota dell' area di un circolo, ben si vede, che si potrà scolpire di qual spirale più piace, e di un numero di spire qualunque; perchè sta nel voler nostro descrivere sul piano quella spirale che più faccia mestiere, e poi applicare sul dato cono i settori di carta SCz, zC*y*, *y*CS, e le porzioni spirali di ciascheduno di mano in mano nella superficie di quello riportare e scolpire. Onde seguita che anche in questo caso la *spirale conica* sarà eguale alla *spirale del piano*; e che o rotolando il cono sul fermo piano, o facendo volgere il piano sul fermo cono, traccierassi sulla superficie o dell' uno o dell' altro rispettivamente la già impressa spirale.

5. Già si è detto che un cilindro I*n* (*Fig. 8. Tav. 5.*) rovesciato sul piano, ed urtato nel centro della sua gravità rotolando naturalmente movesi per una retta. Conciossiacchè abbiam visto, che un cono rovesciato sul piano ed urtato nel centro della sua gravità, rotolando naturalmente si muove nella periferia di un circolo. Onde supposto che il centro suo fosse andato all' infinito, si moverebbe nella periferia di un circolo infinito Ma un cilindro non è altro che un cono, di cui appunto il vertice sia andato all' infinito, e la periferia di un circolo infinito non è più che una retta. Dunque un cilindro rovesciato sul piano rotolando movesi per una retta. Inoltre a similitudine del cono per ciascheduna revoluzione spiega e distende la sua superficie sul piano in un settore, per così dire, infinito, cioè in un rettangolo (*Fig 8. Tav. 5.*) supponiamo *n*IA*d*, che

pra un cono; giacchè il cono non è altro, che una piramide d'infinite faccie. Nonostante immaginiamoci, che (*Fig.* 4. *Tav.* 5.) un cono rotolando sul piano, dopo un'intiera conversione fatta d'intorno al proprio asse, abbia spiegata la superficie in un settore, supponiam per esempio *n*C*d*, (che sarà a tutta l'area del circolo *Syz*, come CS lato del cono al raggio S*n* della sua base) indi dopo un'altra conversione in un altro egual settore *d*C*b*, poi in un altro ec. passando il lato del cono C*n*, che tocca il piano nella prima stazione, passando, dico, da C*n* in C*d* poi ec. Ora se fosse supposto che prima di muoversi il cono, fosse ad angoli retti del lato C*n* designato sul piano un regolo I*m*, qual Curva tracciarebbe detto regolo sulla superficie del cono rotante, toccandolo di mano in mano in diversi punti successivi? Una spirale certamente che verso la base del cono inclina, e gli spazj fra una spira e l'altra intercetti saranno eguali alle differenze, che sono da CI a C*t*; da *ct* a *cb*; da *cb* a ec. Conciossiacchè il lato C*n* passato in C*d* è dal regolo I*m* toccato in *t* punto alla base tanto più vicino, che non è il punto I, quanto *dt* è minore di *n*I. Il che se non fosse, non solo *dt* sarebbe o eguale, o maggiore di *n*I, ma anche l'angolo *dtm* sarebbe o eguale, o maggiore dell'angolo *n*I*m*, che non può essere, perchè *d*C, *n*C sono per la costruzione convergenti sempre dalla medesima parte di C. Finita poi la seconda revoluzione, ed il medesimo lato C*n* (dopo esser stato in C*d*) trasferito in C*b*, sarà da detto regolo I*m* toccato in *b*, punto alla base vicino anche più di *t* ec. perchè non solo *bb* è minore di *dt*, ma anche l'angolo *bbm* deve esser minore dell'angolo *dtm*, e molto più minore di *n*I*m*. Onde in somma il regolo I*m* descriverà sulla superficie del cono rotante l'accennata spirale. Ma se in vece che il cono volgasi sul piano immobile *Syz* affetto del regolo I*m*, s'immaginasse, come pur ora dicevamo, che divenisse mobile il piano, e girasse d'intorno al fermo cono; tanto ancora ne seguirebbe, e nè più, nè meno avrebbe il regolo I*m* a tracciar sulla superficie di quello la data spirale. Se per fine, prescindendo poi col pensiero da tutta l'area del piano, come se non vi fosse, si figurassimo che non altro, che quella parte bianca, che forma il regolo I*m*, rotasse intorno al fermo cono; nulladimeno quella traccia, che sulla superficie di esso tiene la parte I*m*, quando vien mossa unita al suo tutto, è la medesima che terrebbe disgiunta. Con-

che dovendo perciò pareggiare la superficie di esso, lo chiamo *rettangolo cilindrico*.

Siccome poi per incidere una spirale nella superficie di un cono con una retta I*m* (*Fig.* 4.) fu prima detta I*m* supposta verticale al lato di esso cono, che aveva i lati obliqui e convergenti. Ora perchè essendo il cilindro un cono prodotto all'infinito, ha i lati retti e paralleli, si adoprarà (*Fig.* 8.) quì pure la retta I*m*, non però verticale, ma anzi all'opposto messa obliqua al lato di esso, per la quale dico, che rotolando il cilindro verrà appunto tracciata una spirale sulla sua superficie. Perchè dopo la sua prima rivoluzione, ed il lato I*n* passato in A*d*, la retta I*m* toccarà il lato del cilindro in *t* punto vicino alla base *d* più che non è il punto I dopo la seconda revoluzione detta retta I*m* toccarà il lato del cilindro I*n* passato in F*b* in *b* punto più vicino alla base anche più di *t*. Onde risultarà primieramente che quanto maggior sarà l'angolo *n*I*m* (pur che sia minor di un retto) molte più saranno le spine, che verran sul rotolante cilindro tracciate dalla retta I*m*. 2. Il numero delle spire sarà eguale al numero dei *rettangoli cilindrici* segnati dalla retta I*m*, come era anche nel caso dei *settori conici* della *Fig.* 4. 3. Essendo impossibile definire sul piano un *rettangolo cilindrico* *n*IA*d*, perchè non si può giustamente rilevare la periferia della base del cilindro, si piegarà d'intorno ad esso una carta, che lo capisca, e circondi per l'appunto, quale distesa indi sul piano, supporremo ora che pareggi detto rettangolo *n*IA*d*; onde volendo poi segnare il cilindro di un numero di spire qualunque dato (in *Figura* sono 3) si ordinino per dritto altrettanti *rettangoli cilindrici*, e si tiri la retta I*m*, che detta spirale si conseguirà, o avvolgendo d'intorno al dato cilindro tutti i (3) *rettangoli cilindrici*, e le porzioni della retta I*m* di ciascheduno nella superficie di essi incidendo, o come comunemente si fa, piegandovi d'intorno un solo rettangolo, anzi i soli triangoli I*et*, *tob*, *bhm* in esso riportati. Imperciocchè le rette I*t*, *tb*, *bm* formaranno le tre spire, e tutte insieme la spirale. 4. Ancor quì risulta assai più leggiadramente che altrove, che scolpita in sulla superficie di un cilindro una spirale qualunque, ma che gli spazj tra una spira e l'altra siano eguali, rotolando il cilindro, sempre si spiegarà essa sul piano in una retta eguale anche in questo caso alla *spirale cilindrica*; e quando essa spirale non si distenda in una retta, certo è che non sono eguali gli spazj tra l'una e l'altra spira; e spiegarà sul piano rotolando una Curva.

ciofciossiacchè non perciò il cono resti di non un essere cono; ed il regolo un piano; condizioni che, come si è detto, sole concorrono ad un tal fatto produrre. E quindi finalmente concludo, che la devoluta *eb* (*Fig.* 2. *Tav.* 6.) non insistendo esattamente col margine *e* nella periferia del dato circolo generatore *eg*, non è nè meno ordinato l'Istromento a quei movimenti supposti necessarj alla descrizione della proposta Cicloide.

RISOLUZIONE.

Ora per quanto sembri grave questa obbiezione, pure risolvendola di leggiero, forse avverrà che la presente costruzione acquisti maggior riputazione e chiarezza; e perciò, oltre che la forma del cilindro *bd* trattiene sufficientemente il regolo *eb* della *devoluta* nel suo conveniente sito, e che quand' uopo fosse, nè meno mancarebbero altri ripieghi, è poi stato anche un opportuno avvedimento il far sì, che il detto regolo *eb* non toccasse la superficie del tronco cono, se non con un angolo *e*, il quale formando però per il lungo di esso regolo non già un piano, ma una linea, questo non fosse in fatti stato atto a creare l'accennata difficoltà, e rendere almen per questo capo imperfetto l'Istromento. Alla dichiarazione del quale sia quì posto fine.

ISTRO-

ISTROMENTO VII.

PER LE OVALI DI CARTESIO APPLICATE ALLE REFRAZIONI.

ARTICOLO PRIMO.

Descrizione organica di dette Ovali.

PAre in certo modo, che mal si convenga il nome d'Istromento ad un filo, che solo (1) adopera nella descrizione delle Curve proposte; ma io stimo all'opposto, che tanto più le stia bene, quanto n'è più spedito l'uso, e più esatto ne risulta l'effetto. Se dunque si concepisce, che (*Fig.* 7. *Tav.* 8.) appunto un filo sia con una estremità legato ad un pivolo P fitto nel piano, e quindi condotto verso un altro pivolo F pure fitto nel piano, vi s'avvolga d'intorno, e poi in M, ovvero *m* vada a finire, dove abbia connesso uno stilo mobile così, che mentre tenuto ben teso, e con la mano guidato urta nella porzione di detto filo PF, il filo sul pivolo F sdrucciolando, tanto (*Fig.* 1, 2, 3) l'esteriore porzione PMF si aumenti, quanto scema l'interiore FM; lo stilo M tendendo verso B descriverà una Curva AMB di un tal genere, che principalmente abbraccia, oltre le *sezioni coniche*, ed altre Curve, anche le *Ovali Cartesiane*; e di cui al fine del seguente Articolo con due lettere scrittemi a questo proposito dal Chiarissimo P. Ruggiero Boscovich si darà una notizia minuta più, che non contiene il mio Testo. Per altro questa costruzione è tanto semplice, che si può ben credere, che io sia per averne fatte mille prove.

H 2 AR-

(1) Il mio metodo di descrivere codeste Ovali ha questo particolare vantaggio sopra quello del Cartesio, che per il mio basta un semplice filo, dove che egli adopera nel suo un filo applicato ad un regolo, e però la costruzione risulta più composta.

ARTICOLO SECONDO.

Per quai modi variando queste Curve diventino le Ovali Cartesiane.

ESsendo pertanto (*Fig.* 1, 2, 3. *Tav.* 8.) semplice il filo in PM, e raddoppiato in MF, la essenziale proprietà della Curva sarà, che condotte dai due fochi P, F a qualunque suo punto M due rette PM, FM, l'aggregato della prima insieme col doppio dell'altra sia eguale ad una lunghezza costante, cioè alla lunghezza del filo. E però presa col compasso detta lunghezza, e fatto centro in P (*Figure suddette*) si descriva il circolo DHC, cui in H occorra la prodotta PM. Ora sarà MH doppia della retta MF; sarà questo caso particolare di un altro più generale, in cui sia FM ad MH in qualunque data ragione; e la periferia CHD sarà la direttrice, sulla quale dal raggio PH vien condotto il punto H. Onde se fosse il circolo infinito, la periferia direttrice diventarebbe una retta, ed avrebbero quì luogo anche le *sezioni coniche*. Ma quantunque il filo non si possa comporre ad una direttrice retta: non ostante anche nel solo supposto della direttrice circolare possono variare queste Curve assaissimo in due maniere.

Primieramente se, mantenendosi la ragion data da PM ad MF (cioè nel caso nostro di 1 a 2, perchè il filo in PM è semplice, e raddoppiato in MF) si muti la sola posizione del foco F rispetto al foco P, cosicchè accada, che la porzione del filo FM sia ora maggiore della distanza de' fochi PF, la quantità P*m* (*Fig.* 7. *e* 1. *Tav.* 8.); ora minore la quantità PM (*Fig.* 7. *e* 3.); ora eguale (*Fig.* 7. *e* 2.); e nei due primi casi, principalmente quando sia piuttosto piccola la differenza (*Fig.* 7.) di FP ad F*m*, ovvero M, verranno descritte bellissime sezioni di un Uovo da me già promesse nel luogo delle Concoidi. Nel terzo caso poi, cioè quando (*Fig.* 7.) la porzione FM sia eguale alla porzione FP risulta appunto una *Concoide di base circolare* BMP (*Fig.* 2. *Tav.* 9.) di cui la base è PXZ; le intercette sono ZB, XM ec. al raggio BZ eguali, ed il polo P è situato nella periferia direttrice, e questa *Concoide* è dal Sig. di Roberual chiamata: *Le Limaçon di M.r Pascual*. Curva soggetta all' Istromento delle Concoidi.

Secondariamente, lasciando ferma la posizione dei fochi F, e P, variano queste curve per lo variar della ragione di PM ad MF; onde potendosi il filo ordinare a molte ragioni, che siano però di numero a numero, si estende la sua operazione anche alle *Ovali di Cartesio*, perchè, confrontando con queste le applicate da lui alla Diottrica e Catottrica, si intende, che, acciò i raggi partiti da un dato punto P vadono ad unirsi nel punto F, dopo la rifrazione nella superficie generata da una Curva che si cerca, non si hà che a raddoppiare tante volte il filo in MF, quanto esprime il numero del seno dato d'incidenza, ed in MP quanto esprime il numero del dato seno di rifrazione. Onde acciò i raggi per esempio dal luminoso punto P diffusi, e dall'aria in una superficie di vetro rifratti, si raccolgano nel punto dato F, la superficie di vetro dovrà esser generata da una Curva, la quale (perchè nel vetro dall'aria il seno d'incidenza al seno di rifrazione è come 3 a 2) allora si descriverà quando, come nella *Fig.* 4. *T.* 8., il filo in FM*i* sarà triplicato, e duplicato in M*i*P.

Lette-

Lettera 16. Marzo 1748. scrittami dal Chiarifs. P. Ruggiero Boscovich della Compagnia di Gesù in proposito delle *Ovali Cartesiane*.

PROBLEMA.

D*Ue estremità di un filo* (Fig. 1, 2, 3, Tav. 9.) *sieno fisse una in* P *sul piano della carta, e l'altra sullo stilo mobile* M, *in modo che lo stesso filo più lungo si avvolga intorno allo stesso stilo* M *e passi fino a un pivoletto pur fissato nella carta in un punto* F, *intorno a cui si avvolga, tornando allo stilo* M. *Girato ora lo stilo* M *in modo, che sempre tenga teso il filo, si cerca la natura della Curva che descriverà.*

Il filo in PM *sarà semplice, ed in* MF *raddoppiato. Onde la proprietà essenziale della Curva sarà, che da due fochi* P, F *menate a qualunque suo punto* M *due rette, la somma della prima insieme col doppio della seconda sia eguale ad una lunghezza costante, cioè alla lunghezza del filo.*

Fatto centro in P *coll'apertura della lunghezza del filo sia il circolo* DHC, *che incontri in* D, C *la retta menata per* PF, *e prodotta la* PM *fino al medesimo circolo in* H, *dovrà essere* MH *il doppio di* MF. *Quindi si vede che questa Curva è un caso particolare di un altro assai più generale, in cui sia* FM *ad* MH *in data ragione. Si potrà questo caso generale esprimer anche così: Dato un punto* F *comunque, e un cerchio* DHC *qualunque trovar la natura di una Curva tale, che tirata da qualunque suo punto* M *una retta* MF, *al dato punto* F, *e un'altra* MH *perpendicolare alla periferia del dato circolo, sia la prima alla seconda in data ragione.*

In quest'aria si vede subito la relazione, che queste Curve hanno colle sezioni Coniche. Nelle sezioni Coniche vi è una retta direttrice tale, che tirata da qualunque punto della Curva una retta a un fuoco, ed un'altra alla direttrice, sia la prima alla seconda in data ragione, la quale se sia ragione di minore diseguaglianza si avrà l' Elisse, *se di eguaglianza si avrà la* Parabola, *se di maggiore diseguaglianza si avrà l'* Iperbola. *Sicchè queste Curve differiscono dalle sezioni Coniche col avere per direttrice una periferia circolare in cambio di una retta. Se la direttrice di quelle si avvolge in un circolo, quelle si mutano in queste, e all'opposto se il circolo di queste diviene una retta, queste divengono sezioni Coniche. Anzi di più si vede, che le sezioni Coniche sono un caso particolare di queste Curve più generali. Basta in queste far, che il centro* P *vada all'infinito, e questo caso particolare dà subito le sezioni Coniche; ed è cosa graziosa il vedere come in questo modo anche l'* Elisse *è una di queste Curve, la quale buttandosi il circolo in una retta divien* Parabola. *Se la ragion data sia d'eguaglianza sarà* FM *eguale ad* MH *e però la somma di* PM, MF *eguale alla* Costante PH *e la Curva verrà* Elisse. *Se il circolo diviene una retta, va il centro* P *all'infinito, e l'* Elisse *si muta in* Parabola. *Onde l'*Elisse *si muta in* Parabola, *e la* Parabola *in* Elisse *anche col solo considerare, che la direttrice divenga retta dall'essere circolare, o si avvolga in circolo dall'esser retta.*

Di qui si vede, che il trattare di queste Curve porta assai più che il trattare delle sezioni Coniche, essendovi dentro tutte quelle in un sol caso particolare, e infinite di più. E così ogni Curva è un argomento d'innumerabili ricerche; e si vede quanto è limitata la nostra mente, quanto povera e cieca la nostra Geometria. Cosa poi sarebbe, se per direttrice si pigliasse qualunque altra Curva? Quanto più crescerebbe il numero delle Curve, e quanto più fecondo sarebbe il caso? e se qualunque funzione di MF *a qualunque di* MH *dovesse assere un qualunque rapporto esposto comunque, quanto più in là si andarebbe?*

Io qui solo mi restringerò a darne la costruzione geometrica per punti, e a tirar le tangenti. Darò l'equazione ne *ne caverò alcuni Corollarj, distinguerò alcuni casi, e mostrerò, che in alcuni vengono alcune Curve particolari già cognite.*

Si prenda PE *a* PC *nella data ragione, e col centro* P *coll' apertura* PE *si faccia un circolo, che incontri la* DC *in* G, E. *Da qualunque punto* H *del circolo* DHC *pel centro* P *si tiri una retta indefinita, e un' altra pel punto* F. *Se questa seconda incontra il circolo* GE *in qualche punto* I, i, *si tirino le due rette* PI, Pi; *indi da* F *due parallele* FM, Fm *alle medesime, e se queste incontreranno la* HP *in* M, m, *saranno i due punti* M, m *alla Curva cercata. Imperocchè sarà* FM *ad* MH, *come* IP *a* PH, *cioè come* PE *a* PC *in ragion data, e la stessa è la dimostrazione per* m.

E' chiaro, che rispetto al punto H *non vi saranno altri punti, che i così determinati, perchè dovendo essere* PE *a* PC, *come* FM *ad* MH, *come* IP *a* PH, *ed essendo* PH *eguale a* PC, *sarà* PI *eguale a* PE, *e però* I *nel circolo descritto col raggio* PE. *Onde se si concepirà girare la* PH *intorno a* P, *descrivendo* H *tutta la circonferenza del circolo, e facendosi sempre la stessa costruzione; i punti* M, m *descriveranno tutta la Curva cercata senza lasciarne fuori alcun punto. Inoltre non potendo la retta* HF *incontrar il circolo in più di due punti; per conto del punto* H *non vi potranno essere più di due intercezioni della retta* HP *sulla curva. Ma come la stessa retta prodotta divien di nuovo perpendicolare al circolo dalla parte opposta; potranno esservi due altri punti, le perpendicolari de' quali si terminino a quest' altra estremità. Che se la retta* HF *sarà tangente del circolo* GIE *concorrendo i due punti* I, i *in un solo; sarà ancora la* HP *tangente della Curva, la qual cosa potrà accadere quando il punto* F *non sia dentro al circolo* GIE, *come nelle* Figure 2. *e* 3., *e se la retta* HF *non incontrerà il circolo* GIE, *nella retta* HP *non vi sarà alcun punto alla Curva per conto del punto* H.

Dall' essere i due semicircoli di qua e di là dalla DC *affatto eguali e simili, si vede che essa dividerà la Curva in due parti eguali e simili, e sarà un asse, il quale incontrerà la Curva ne' punti* AB, ab *dati. Mentre deve essere* FB *a* BC, FA *ad* AD, Fb *a* bc, *e* Fa *ad* aC, *come* FE *ad* FC *in ragione data.*

Ora in due maniere principalmente si possono variare queste Curve: Prima, mantenendosi la ragion data di PE *a* PC, *e variandosi la posizione del punto* F *rispetto al circolo* GIE, *ed essendo or dentro detto circolo, come nella* Fig. 1., *or nella periferia, come nella seconda, ora fuor del circolo, come nella terza. La seconda variandosi la ragion stessa.*

Le prime variazioni sono delineate nelle 3. *figure colla ragion di uno a due. Qualunque sia la ragione, nel primo caso sempre la retta* HF *incontrerà il circolo* GIE *in due punti. Onde sempre si trovaranno due punti* M, m. *Anzi perchè i due punti* I, i *giaceranno di qua e di là da* F, *anche i due* M, m *giaceranno di qua e di là da* P; *e però uno de' due, come* M *verso* H, *e l' altro come* m *dalla parte opposta. Quindi la somma di* PM *e di* MH, *che alla* MF *sta in data ragione, sarà eguale alla costante* PH, *ma delle* Pm, mH *lo sarà solamente la differenza; o pur anche la somma, se la* Pm, *che va verso la parte opposta di* PM, *si consideri, come negativa; giacchè la somma di un negativo porta sottrazione. Quindi nel girare la* PH, *e il punto* H, *i punti* M, m *descrivono due perimetri di Curva, ciascun de' quali, dopo l' intero giro di* H, *torna a se stesso: ma il solo descritto da* M *sarà quello, che descriverà lo stilo nel caso proposto.*

Solo nel caso che la ragion data sia ragione d' egualità, il punto i *va in* H, *e diventando* FM, HP *parallele, il punto* m *va all' infinito, e non vi è più: onde nel caso che la Curva descritta dal punto* M *diventi* Elisse *Conica, il ramo compagno descritto dal punto* m *va in infinito e non vi è più: e nel caso in cui il punto* F *vada in* P, *rimane data tanto la ragione di* PM *ad* MH, *quanto la ragione di* Pm *ad* mH, *giacchè rimangono le* FM, Fm *eguali alle*

I PM,

PM, Pm. *Quindi rimangono date le* PM, Pm, *e i due rami divengono due circoli: e simili trasformazioni varie vi sono ne' casi seguenti ancora.*

Nel secondo caso in cui il punto F *cade in* E *nella circonferenza del secondo circolo, tirate le* HP, HF, *la seconda incontrerà il circolo in* F, *e in* I *generalmente; onde uno dei punti della Curva anderà sempre in* P, *e vi sarà generalmente un altro* M. *Se per* F *si tiri* VFu *perpendicolare all'asse. Questa sarà tangente del circolo* GIF, *e però tanto* VP, *quanto* uP *saranno tangenti della Curva in* P; *talmente che girando* H *da* C *fino ad* V, *girerà* I *per il semicircolo* GIE, *e il punto* M *descriverà un mezzo nodo* BMP, *quindi andando* H *in* h *per l'arco* VhD, *anderà* I *in* i *per il semicircolo* FIG, *e il punto* m *descriverà l'arco* bma, *e seguitando* h *per* Du *prima, indi per* uC, *si descriverà il resto* aPB, *scorrendo* l'I *il circolo un' altra volta. Così verrà una Curva che segherà se stessa in* P, *ed avrà un nodo, descrivendosi il nodo nel giro di* H *per* uCV, *e in un' intera revoluzione di* I *pel circolo* GIE, *e il resto nel giro di* h *per* VDu, *e in un altro giro di* i *per lo stesso circolo.*

Nel terzo caso tirate per F *le due tangenti* VZu, Nzn *al circolo* GIE; *tutti i punti* H2 *presi nell' arco* Vn, *che sta nello stesso angolo* VFn, *in cui il circolo* GIE, *serviranno per trovare due punti per ciascuno al ramo* A M2 m2 aA; *tutti i punti presi nel* NHiu *serviranno per trovare due altri punti per uno al ramo* B Mi mi b; *giacchè le rette da essi tirate per* F *sempre urteranno in due punti del circolo* GIE. *Per l' opposta ragione è manifesto, che i punti degli archi* NV, nu *non serviranno. Le rette poi* PN, Pu *toccheranno in qualche luogo in* X, *e in* x *il ramo* B Mi B, *e le rette* VP, nP *toccheranno in qualche luogo* S, s *il ramo* A M2 aA; *e coll' ajuto de' punti* VN, un, *e della soluzione generale si troveranno i contatti.*

Per

Per trovare cosa accaderà a vertici degli assi AB, ab, *basta vedere come i medesimi si determinino. Si trovano* A, *e* B *segando* FD *ed* FC *in ragione di* AE *ad* AC, *sicchè il punto* B *starà da* F *verso* P, *e verso la parte contraria, secondo che il punto* F *starà fuori del circolo* DHC, *o dentro, il quale secondo caso mostrano tutte trè le figure. Il punto* A *starà verso la parte contraria di* F *rispetto a* P, *o in* P, *o verso* F, *secondo che sarà il punto* F *dentro al circolo* GIE, *come nella* fig. 1.; *o nella sua circonferenza come nella* fig. 2.; *o fuora come nella* fig. 3. *Imperocchè essendo* FA *ad* AD, *come* PE *a* PD, *dovrà il punto* A *segare la* FD *in una ragione maggiore, eguale, o minore della ragione di* FP *a* PD, *secondo che sarà* PE *maggiore, eguale, o minore di* PF, *e però giacere di là da* P, *in* P, *o più vicino a* F. *Pigliandosi* a *fuori della* FD *in modo, che sia* Fa *ad* aD *in ragione di* PE *a* PC, *se sarà* PE *minore di* PC *giacerà rispetto ad* F *dalla parte opposta di* P; *se sarà* PE *eguale a* PC, *anderà all' infinito; se maggiore, dovrà cadere nella* FD *prodotta dalla parte di* D. *Dovendosi pigliare* b *in modo che stia fuori della* FC, *e sia* Fb *a* bc *nella stessa ragione; il punto* b *giacerà da* F *verso* P, *anderà all' infinito, ò caderà di là da* C, *verso dove ora nella figura cade l'*a, *secondo che sarà parimente la* PE *minore, eguale, o maggiore della* PC; *e nel primo caso espresso dalle figure caderà di là da* P *rispetto ad* F, *in* P, *o verso* F, *secondo che la ragione di* Fb *a* bC *sarà maggiore, eguale, o minore della raggione di* FP *a* PC, *cioè secondo che la* PE, *sarà maggiore di* PF, *come lo è nel primo caso della* fig. 1.; *o eguale come nel secondo nella* fig. 2.; *o minore come nel terzo nella* fig. 3.

Quindi nella fig. 1. *stando fermi i due circoli, e stando* F *in* P, *i due rami sono circoli anch' essi. Camminando* F *verso* E, *si muta la loro forma, e i punti* bA, *si accostano a* P, *e fra loro; e i punti* B, a *se ne scostano, e si scostano fra di se; ma* B *si accosta ad* F, *ed* a *se ne scosta. Nell' atto che*

I 2 *il*

il punto F *arriva in* E *si muta la figura prima nella seconda. I punti* bA *vanno in* P*; e i due rami formano una curva continua, che si sega, dove quei si attaccano; dovendo a tal fine nella* fig. 1. *in* A *crescere la curvità all' infinito prima dell' attacco, e in* b *rientrare la Curva in dentro con flesso contrario, giacchè amendue non potendo mutare la direzione per salto in* A, *e in* b, *devono fare da ambe le parti colla tangente lo stesso angolo, e aver la tangente comune, che essendo perpendicolare all' asse quando erano circoli, si deve esser mantenuta tale; onde in* A, *e in* b *deve sempre necessariamente essere la curva perpendicolare all' asse; ma per non finire per salto nella punta* b, *nel momento in cui già ivi l'arco di un ramo si continua coll' arco dell' altro, onde già fa l' angolo obliquo coll' altro arco suo, deve essere cresciuta la curvità nella* fig. 1. *nella punta* A *assotigliata verso* b, *e nella* b *assotigliata in dentro verso* A *per tutti i gradi fino all' attacco, e al rompimento e mutazione di continuazione, che si fa nell' arrivare il punto* F *in* E.

Passando il punto F *di là da* E *fuor del circolo, si stacca di nuovo l' un ramo dall' altro, e la* fig. 2. *va nella* 3., *ma il punto* b *già ha passato l'*A, *e non appartengono più i punti* A, B *al ramo istesso quantunque in* A *si seghi la* FD, *e in* B *la* FC, *come prima, in data ragione di* PE *a* PC. *Ma in quell' attacco della* fig. 2. *si sono cambiati i vertici, essendo passato* b *nel ramo di* B, *e* A *nel ramo di* a*; come appunto anche le due intersezioni* M, m *regolate dallo stesso punto* H *appartengono ambedue allo stesso ramo, dove nella* fig. 1. *appartenevano uno per ramo. Che se così camminando* F *arriva in* C, *si uniscono all' ora i punti* FBC *insieme, anzi annullandosi l' arco* Nu, *va in* F *in un punto tutto il ramo* BMi mi bxB. *Indi passando* F *più oltre, rimane ad ogni modo il* B *fra* F, *e* C, *e però* F *di là da* B *ancora passandolo, mentre passa* C, *ed entrando* B *nello spazio* FP, *all' opposto a* C *passa dove prima era* B, *e ogni punto* M *verso la parte contraria di prima, capovoltandosi tutto il ramo, nel quale in quel caso rimane ogni* Mi, mi *fuori del circolo, e le* H Mi, H mi *negative; onde la differenza di* FM, MH *viene allora eguale al filo, e non ha luogo la descrizione della Curva coi fili. Vanno di poi crescendo amendue i rami, e coll' andare* F *all' infinito si perdono anch' essi nell' infinito.*

Tornando indietro F *verso* E *nella* fig. 3., *i punti* VN, un *si vanno accostando impiccolendosi gli archi inutili* VN, un*; finchè all' arrivo di* F *in* E *si riducono le* Vu, Nn *alla sola* VFu *della* fig. 2. *e rientrando* F *nel suo circolo nella* fig. 1. *ogni tangente menata per* P *svanisce; onde* 4. *rette menate dal centro* P *toccano le Curve nel caso terzo,* 2. *nel caso secondo, e niuna nel primo.*

Tenendo ora fermo il punto F *vada mutandosi il solo punto* E. *Se esso nella* fig. 3. *si unisce a* P, *amendue i rami vanno in un punto solo in* F, *perchè annullandosi la ragione di* Fm, *a* MN, *e stringendosi l' angolo* NFu, *e* nFV *all' infinito, si annulla ogni* FM1, FM2. *Camminando* E *verso* C *crescono amendue i rami, finchè arrivando* E *in* F *si uniscono nella* fig. 2. *Passando oltre il punto* E, *si va nella* fig. 1., *dove accostandosi* E *verso* C, *e andando la ragion data verso l' egualità; vanno le rette* PA, FB *accostandosi all' eguaglianza, e la forma del ramo* AMB *alla forma di un'* elisse. *E intanto i punti* ab, *e tutto il secondo ramo si scostano alle infinito. All' arrivo di* E *in* C, *diviene il raggio interiore una vera* elisse*; svanisce l' esteriore, nè vi è più. Che si il punto* E *va fuora di là da* C, *e la ragione diviene di maggiore diseguaglianza, i vertici* a, *e* b *mutano le parti andando* a *di là da* D, *e* b *di qua da* C, *con un capovoltarsi molto ordinario nelle trasformazioni de' luoghi geometrici. Anzi allora ogni punto* m *va dalla parte di* H *nella* PH *prodotta. Andando innanzi* E *all' infinito, si scemano la* MH, *e la* mH *(che già si trova fuor del circolo dalla parte di* H*) all' infinito; e però amendue i rami si accostano all' infinito al* *al circolo, in cui vanno a terminare quando il raggio* CE *diviene infinito.*

Ma se queste mutazioni della ragione si facciano collo scemare il raggio PC, *succede lo stesso, cioè nell' accostarsi* C *ad* E *va il ramo esteriore in* elisse *nell' arrivo di* C *in* E. *Indi torna il ramo esteriore dall' infinito, ma capovoltato, e all' arrivo di* C *in* F, *va in* F *anche il* B; *e scemando sempre più il raggio* PC, *si scema il ramo* AMB, *e all' arrivo di* C *in* P *vanno in* P *i punti* AB; *e tutto il ramo tanto interiore, quanto esteriore; giacchè la ragione di* FM *ad* MH, *cioè in quel caso ad* MP, *e di* FM *ad* mH, *cioè ad* mP *dovrà essere infinita, e però le* PM, Pm *nulle.*

Ora è tempo di dar un' occhiata a una elegantissima maniera di determinar le tangenti. Si faccia l' angolo MFR, *o* mFr *verso* H *eguale ad* FHM, *e si tiri per* M *la retta* SMT *perpendicolare alla* FR, *che sarà la tangente, e allo stesso modo* mts *perpendicolare alla* Fr.

Per dimostrar questo metodo, e non intrigar la figura si è cavata parte di essa fig. 1. *a fianco a man dritta. Sieno* MV *due punti infinitamente vicini del perimetro della Curva, e co' centri* FP *sieno gli archetti* VX, VY, *che taglieranno la* MY *incremento della* PM *andata in* PV, *e decremento della* MH *andata in* Vh, *e la* MX *decremento della* FM *andata in* FV; *e per essere* FV *ad* Vh, *come* FM *ad* MH, *sarà anche levando proporzionali da proporzionali* MX *ad* MY *nella stessa ragione di* FM *ad* MH. *Ora gli archetti* VX, VY *scemando all' infinito, si potranno prendere per linee rette perpendicolari alle rette* FM, PM; *onde se inoltre si tiri* FT *perpendicolare alla retta* MV *prodotta, la quale incontri la* PM *in* R, *sarà il quadrilineo* FXVT *per gli angoli* X, *e* T *retti in un circolo, e il quadrilineo* RYVT *parimente in un circolo per gli angoli* T, *e* Y *retti. Quindi saranno i rettangoli* FMX, RMY *eguali ciascuno a* TMV, *e però anche fra loro; onde sarà* MR *ad* MF, *come* MX *ad* MY, *cioè*

come

come FM *ad* MH; *e però i triangoli* RMF, FMH *simili, e l' angolo* RFM *eguale all' angolo* FHM, *la qual cosa si verificarà accuratamente, quando i punti* V *ed* M *coincidano, e la* MT *divenga una tangente. La dimostrazione pel punto* m *è la stessa.*

Quindi si vede, che anche non avendo il circolo DHC, *ma la sola Curva, e quella ragion data; basta produrre* PM *in* R *in modo, che sia* MR *ad* MF *in quella ragion data, e tirata* FR, *menare una perpendicolare alla medesima, che sarà la tangente cercata.*

Si vede inoltre, che in tutti que' vertici dell' asse, che non saranno in P, *come lo è il vertice della attaccatura* Ab *della* fig. 2.: *sempre le tangenti saranno perpendicolari all' asse. Benchè sempre la* MR *caderà sull' asse; e però la* FR *coinciderà coll' asse, e converrà che la tangente sia perpendicolare all' asse medesimo. L' unico caso, in cui la dimostrazione generale non cammina è quando il punto* M *va in* P, *il che può accadere nella* fig. 2.; *perchè allora non andando il punto* M *fuori di* P *nell' asse, può la* PH, *e però la* FR *avere qualunque direzione, e conviene trovar quella, in cui* PM *svanisce andando* M *in* P, *il che accade quando l'* H *vada in* V, *o in* u, *dove anche con questo metodo si troverebbe la tangente, che già si è trovata di sopra essere la stessa* PV, Pu; *cosa che anche di qua facilmente si ricavarebbe.*

Finalmente si noti che, se la ragion data fusse ragion di egualità, sarebbe il triangolo FMR *isoscele, e la tangente segarebbe per mezzo l' angolo* FMR, *come accade nella* elisse conica.

Quando la ragione di FM *ad* MH *è di unità a numero, che sia* n, *come lo è nel caso de' fili; i punti* M *si trovano più facilmente così. Prese* (Fig. 1. Tav. 9.) PC, PD *eguali alla lunghezza del filo, divisa la* FC, *e la* FD *in parti* n + 1, *si piglino* FB, *ed* FA *verso* C, *e* D *eguali ad una*

di

di dette parti. *Indi diviſe le ſteſſe in parti* $n-1$, *ſi piglino* Fb, Fa *verſo le parti oppoſte eguali a una di eſſe: così ſi troveranno i vertici; mentre ſarà* FB *a* BC, *e* FA *ad* AD, *come pure* Fb *a* bC; *ed* Fa *ad* aD, *come* 1 *ad* n. *Poi preſa* FO *eguale alla lunghezza del filo, e fatto centro in* F *con qualunque apertura, che ſtia in mezzo tra la* FA, *e la* FB, *ſi faccia un arco di cerchio verſo* M, *indi la medeſima apertura ſi traſporti da* F *verſo* O *numero di volte* n; *finchè ſi arrivi a qualche punto* Q; *ſi prenda* OQ, *e col centro in* P *con detta apertura* OQ *ſi faccia l' interſezione coll' arco di prima in* M, *e così ſi troveranno ſempre due punti* M *di qua, e di là dell' aſſe molto accuratamente. Lo ſteſſo ſi farà per li punti* m *pigliando le aperture* Fm *medie fra* Fb, Fa, *e arrivando in* q. *La dimoſtrazione è tanto facile che ſi vede da ſe.*

Paſſando ora a determinare l' equazione, il metodo è facile. Tirata ML (Fig. 1. Tav. 9.) *perpendicolare all' aſſe ſi ponga* $PE = n$, $PC = m$, $PF = a$, $PL = x$, $LM = y$, $PM = \sqrt{xx+yy} = z$. *Sarà per la* 13. *del lib. II. di Euclide.* $FMq. = FPq + PMq - 2\,FP \times PL = aa + zz - 2ax$. *Onde facendo come* $n.\ m :: FM = \sqrt{aa+zz-2ax}$. $MH = \frac{m}{n}\sqrt{aa+zz-2ax}$, *ſi avrà* $PM + MH = z + \frac{m}{n}\sqrt{aa+zz-2ax} = PH = m$. *Quindi* $m - z = \frac{m}{n}\sqrt{aa+zz-2ax}$, *e però* $mm - 2mz + zz = \frac{mmaa}{nn} + \frac{mmzz}{nn} - \frac{2mmax}{nn}$; *cioè ripulita queſta equazione* $(mm - nn)\,zz - 2mmax + 2nnmz + mmaa - nnmm = 0$. *In queſta ſoſtituendo per* zz *il ſuo valore* $xx + yy$, *traſponendo* $2nnmz$, *indi quadrando, e riſoſtituendo per* zz *il valor ſuo, viene l' equazione per* x, *e* y, *che verrà di quarto grado. Onde ſi vede, che queſte ſono Curve di terzo ordine.*

Ma

Ma intanto giova prima contemplarla alquanto così con z. *Se ſia* $m = n$, *ſvaniſce* $(mm - nn)\,zz$, *e reſta il tutto diviſibile per* m, *rimanendo ſolo* $-2max + 2nnz + m\,(aa - nn) = 0$. *D' onde ſi cava* $2mnz = m\,(nn - aa) + 2amx$, *e di qui, quadrando viene l' equazione all'* eliſſe, *dopo di avere ſoſtituito per* zz *il ſuo valore* $xx + yy$.

Se ſarà $a = n$, *che è il caſo della* fig. 2., *ſvanirà l' ultimo termine* $mmaa - mmnn$, *e ſi avrà* $(mm - nn)\,zz - 2mmax + nnmz = 0$. *Ora di qui ſi cava, che queſta Curva è la ſteſſa, che la* Concoide, *in cui la baſe ſia un circolo, e il polo nella circonferenza. Imperocchè ſarà* $(mm - nn)\,zz = 2mmax - 2nnmz$. *Onde* $z = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z} - \frac{2nnm}{mm-nn}$. *Poſto queſto ſi piglj* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$, *e ſi faccia attorno a un tal diametro un circolo, che dalla* PM *venga incontrato in* X. *Sarà per l' angolo* PXZ *retto*, $PM = z.\ PL = x :: PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}.\ PX = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z}$. *Onde eſſendo tutta* $PX - XM = PM = z$, *ſarà* $XM = \frac{2nnm}{mm-nn}$. *Dunque è dato il diametro* AZ *di un circolo, e da qualunque* PX *levata una* XM *coſtante, ſi trova il punto* M, *che ſarà a una concoide circolare, che avrà per baſe un circolo, e per polo un punto nella ſua circonferenza. La dimoſtrazione vale anche per* m *chiamando* $Pm = -z$. *Che ſe eſſa ſi chiamaſſe* $+z$ *ſi avrebbe* $mb + bh = z + m = \frac{m}{n}\sqrt{nn+zz-2nx}$, *e però rifacendo il calcolo ſi trovarebbe* $z = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z} + \frac{2nnm}{mm-nn}$; *e poſto lo ſteſſo diametro* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$; *ſi avrebbe la linea* Xm *preſa in fuora eguale al valor medeſimo* $\frac{2nnm}{mm-nn}$.

Da

Da questa riflessione nasce un modo assai più facile per trovare questo nuovo circolo, e descriver la Curva. Trovato il punto B, *ed* a, *come sopra, si seghi la* Ba *in mezzo in* Z, *e col diametro* PZ *si faccia un circolo; indi si giri una riga* PMX *attorno a* P *pigliando sempre il punto* M *da* X *verso* P, *e un altro in fuora coll' apertura* BZ, *e sarà fatto. Si noti solo, che essendo il diametro* PZ $= \frac{2mmn}{mm-nn}$, *e la* ZB $= \frac{2nnmm}{mm-nn}$ *sarà anche* PZ.ZB :: m.n. *Inoltre essendo* PB $= \frac{2mmn-2nnm}{mm-nn}$, Pa $= \frac{2mmn+2nnm}{mm-nn}$ *sarà quella* $= \frac{2mn}{m+n}$, *e questa* $= \frac{2mn}{m-n}$; *onde saranno* AB. Aa :: m−n . m+n, *cosa che anche direttamente si mostra con facilità.*

Se nella equazione generale $(mm-nn)zz-2mmax+2nnmz+mmaa-mmnn=o$ *divenga* $a=o$, *indi* $a=m$, *a infinito, o se* m, *o* n *si mutino dal zero all' infinito; si avranno tutte le vicende, e le trasformazioni vedute di sopra. Dall' equazione* $(mm-nn)zz-2mmax+2nnmz+mmaa-mmnn=o$ *generale, si ricavano facilmente i vertici degli assi. Si ponga prima* $x=z$, *indi* $x=-z$, *e si avranno i casi ne' quali le* AL, AM *si eguagliano, cioè in cui il punto* M *va nell' asse. Si avranno due equazioni* $(mm-nn)zz-2mmaz+2nnmz+mmaa-mmnn=o$, *ed* $(mm-nn)zz+2mmaz+2nnmz+mmaa-mmnn=o$, *e dividendo per* $mm-nn$ *si avrà* $zz+\frac{2nnm\mp 2mma}{mm-nn}z+\frac{mm}{mm-nn}(aa-nn)=o$; *dalle quali si possono ricavare i quattro valori cercati di* z, *che colla geometria semplice più facilmente si sono ricavati.*

Prima di pulire l' equazione generale si avverta, che se si cerchi la curva, in cui dati due numeri h i *qualunque interi o rotti, razionali o irrazionali sia* $h\times PM+i\times MF$ *eguale*

le a una costante; dividendo per h *si avrà* $PM+\frac{i}{h}MF = \frac{e}{h}$. *Onde fatto* $\frac{i}{h}=\frac{m}{n}$, $\frac{e}{h}=m$, *sarà* $PM+\frac{m}{n}MF=m$; *onde torna lo stesso caso.*

Per pulire poi l' equazione dai z, *si dica* $mm-nn=rr$, $aa-nn=cc$, *e in cambio di* $(mm-nn)zz-2mmax+2nnmz+mm(aa-nn)=o$, *si avrà* $rrzz-2mmax+2nnmz+mmcc=o$, *e trasponendo* $2nnmz$, *si avrà* $rrzz-2mmax+mmcc=-2nnmz$, *e però quadrando.*
$r^4z^4-4r^2m^2axz^2+2m^2r^2c^2z^2+4m^4a^2x^2-4m^4c^2ax+m^4c^4=4n^4m^2z^2$, *e quindi trasponendo* $r^4z^4-4r^2m^2axz^2+(2m^2c^2r^2-4n^4m^2)z^2+4m^4a^2x^2-4m^4c^2ax+m^4c^4=o$. *Si faccia* $2m^2c^2r^2-4n^4m^2=t^6$, *e verrà* $r^4z^4-4r^2m^2axz^2+t^6z^2+4m^4a^2x^2-4m^4c^2ax+m^4c^4=o$. *Sostituendo ora* x^2+y^2 *per* z^2, *si avrà* $r^4x^4+2r^4x^2y^2+r^4y^4-4m^2r^2ax^3-4m^2r^2axy^2+t^6x^2+t^6y^2+4m^4a^2x^2-4m^4a^2cx+m^4c^4=o$, *e dividendo per* r^4 *verrà finalmente l'equazione pulita come segue:* $x^4+2x^2y^2+y^4-\frac{4m^2a}{r^2}x^3-\frac{4m^2a}{r^2}xy^2+\frac{t^6}{r^4}x^2+\frac{t^6}{r^4}y^2+\frac{4m^4a^2}{r^4}x^2-\frac{4m^2c^2a}{r^4}x+\frac{m^4c^4}{r^4}=o$.

Da questa col fare $y=o$ *si troverebbero i vertici degli assi in un' equazione di quarto grado, che sarebbe divisibile in quattro di primo. Da questa le tangenti; cose che si sono trovate più facilmente colla Geometria. Da questa finalmente i flessi contrarj, e tutto quello che appartiene alla Curva. Ma basta fin qui di questa ricerca.*

Aggiunta sulla moltiplicità de' casi.

Se si cerca il numero di tutti i casi principali di queste Curve quando il PC *non va all' infinito, essi sono* 35, *che si riducono propriamente a* 29 *per la totale coincidenza di* 6 *con altri tre; e per vedere queste variazioni, vi vorrebbero almeno* 29 *figure diverse.*

Non considerato ancora il punto F; *e stando fermo* C, *può il punto* E *stare primo in* P; *secondo tra* P *e* C; *terzo in* C; *quarto dopo* C; *quinto all' infinito. Intanto il punto* F *può stare primo in* P; *secondo tra* P *ed* E; *terzo tra* E *e* C; *quarto in* E; *quinto in* C; *sesto dopo* C; *settimo all' infinito. Questi sono sette casi per ogni caso delli primi cinque, onde sarebbero* 35. *Ma nel primo caso di* E, *i primi tre di* F *sono gl' istessi, trovandosi in esso sempre* F *in* P. *Nel terzo caso di* E, *il terzo, quarto, quinto di* F *sono gli stessi, trovandosi in essi* F *in* C; *nel quinto caso di* E *gli ultimi tre casi di* F *sono gl' istessi, trovandosi in essi* F *sempre all' infinito. Così rimangono* 6 *di meno, e però* 29.

Se va all' infinito P, *e non* C, *vi sono tutti i casi delle sezioni coniche. Se va all' infinito* C, *e non* P, *vi sono tre casi di* E, *che può essere in* P, *in una distanza finita, e all' infinito. Per questi tre casi, vi sono nel primo tre di* F *in* P, *in una distanza finita, e all' infinito; nel secondo cinque, cioè in* P, *prima di* E, *in* E, *dopo* E, *all' infinito; nel terzo caso tre, cioè in* P, *in una distanza finita, all' infinito. E però altri* 11.

Se C *stia in* P, *vi sono altri tre casi di* E, *cioè in* P, *in una distanza finita, all' infinito. E per essi altri* 11 *di* F.

Dunque tutti i casi insieme si riducono a 29+11+11=51. *Oltre a tutti quelli che appartengono alle sezioni coniche riportate alla direttrice.*

Ognuno di questi casi ha qualche cosa di notabile, e in tutti vi sono delle suddivisioni d' innumerabili casi nati dai particolari rapporti delle tre linee PF, PE, PC, *non contenendosi negli esposti, che il solo eccedersi, annullarsi, infinitarsi, senza considerare le infinite diverse ragioni nel caso degli eccessi finiti.*

Let-

Altra Lettera 27. Aprile 1748. scrittami dal Medesimo sullo stesso soggetto.

Giacchè quelle quattro bagatelle, che io le scrissi intorno alla Curva da Lei propostami considerata nella sua generalità, hanno avuto dell' incontro presso V. S. Illma non voglio lasciare di avanzarle un' altra notizia intorno alle medesime. Benchè le mie occupazioni non mi permettono questa volta di diffondermi più in lungo, nè di far altro che accennarla. Quella contiene tutte le curve considerate dal Cartesio nella sua Geometria sul fine del lib. 2., *per le refrazioni, e la costruzione delle quali il Nevvton generalmente abbraccia nella proposizione* 97. *del libro primo de' suoi principj, e delle quali parla nel Corollario primo. Anzi la costruzione generale del Nevvton coincide a dirittura colla nozion generale della Curva, che ho data, e si può facilmente ridurre a quella costruzione, che ho messa immediatamente avanti all' equazione.*

Il Nevvton trova (Fig. 5. Tav. 8.) *che acciò i raggi partiti dal punto* A *vadano ad unirsi nel punto* B *dopo la refrazione nella superficie generata da una Curva* CDE, *che si cerca, si può prendere il punto* C *ad arbitrio, indi presa pure* CN *verso* B *ad arbitrio, e* CM, *che deve essere incremento della* AC *a* CN *decremento della* BC *nella ragion data del seno d' incidenza al seno di refrazione, co' centri* A *e* B, *cogli intervalli* AM, BN *si determinarà il punto* D, *che sarà alla Curva cercata.*

Ora se si prende CH *verso* B, *a* CB *nella stessa ragion data, e col centro* A *coll' apertura* AH *si faccia un circolo* HI, *che incontri in* D *la* AD *prodotta, sarà ancora* BD *a* DI *in ragion data, cioè in quella di* BC *a* BH, *o del seno di refrazione al seno d' incidenza. Giacchè essendo* BC *a* CH, *e* CN *a* CM *in detta ragione, col togliere proporzionali resterà*

anche

anche BN *ad* MH *nella ſteſſa ragione. Onde eſſendo* BD *eguale a* BN, *e per le* AH, AI, *ed* AM, AD *eguali, anche la* DI *eguale a* MH. *Sarà nella ſteſſa ragion data anche* BD *a* DI.

Sicchè Ella qui vede, che rimangon i punti A,C,B,D,H,I *di queſta figura gli ſteſſi, che nella* fig. 3. Tav. 9. *delle traſmeſſe a Lei nella mia ultima lettera i punti* P,b,F,mi,C,Hi. *Vede inoltre che ogni volta che il ſeno d'incidenza al ſeno di refrazione ſtarà come numero a numero, ſi potrà la Curva deſcriver co' fili. Così nel vetro dall' aria il ſeno d' incidenza al ſeno di refrazione, è come* 3 *a* 2. *Se una eſtremità del filo* (1) *ſi ferma in* F (Fig. 4. T. 8.), *indi ſi piega preſſo allo ſtilo* Mi, *e poi ſi avvolge d'intorno ad un pivolo* P, *quindi vada in* V, *e poi ſi avvolga d'intorno al pivolo* F, *e poi finalmente coll' altra eſtremità vada a metter capo in* Mi, *con lo ſtilo* M *ſi deſcriverà la Curva* Mb *cercata*.

Perchè ſi vede chiaro, che poſta $PMi = z$, $MiF = u$, *tutto il filo* $= a$, *ſarà* $2z + 3u = a$; *e però* $2dz + 3du = 0$, *onde* $2dz = -3du$; *e* $dz . -du :: 3 . 2$. *Onde* (Fig. 5.) *eſſendo nata la* CM *da tutti i* dz *incrementi della* AD (*che è* PM *della* fig. 4.), *e* CN *da tutti i* $-du$ *decrementi della* BD (*che è* MF fig. 4.) *ſarà ancora* (Fig. 5.) CM . CH :: 3 . 2, *come il ſeno d' incidenza al ſeno dell' angolo rifratto*.

Generalmente baſterà fare, che il filo in MF *ſia radoppiato tante volte, quanto eſprime il numero del ſeno d'incidenza, e in* MP *quanto eſprime il numero del ſeno di refrazione, e ſempre ſi avrà la Curva cercata*.

Qui non ſi vede, che uſo abbiano le altre Curve della coſtruzione generale, che le mandai; ma baſterà accennare queſto ſolo, che ſi avranno in eſſe tutti i caſi, ne' quali i raggi portati con direzioni, che paſſano per un punto, o ſia che da quello partano, o che a quello vadano, urtando in una ſuperficie generata dalla revoluzione di una Curva intorno a un aſſe, e ivi o paſſando oltre, o tornando indietro, ma in modo che il ſeno dell' angolo d' incidenza al ſeno dell' angolo refratto, e dell' angolo di rifleſſione ſia in data ragione, debbano avere direzioni che paſſano per un punto, o andando verſo quello, o fugendone. Ed ogni volta che la normale ſegherà l'angolo, che le rette PM, MF *delle* Figure 1. 2. 3. T. 9. *della mia ultima formano verſo la* PF, *e che è l'interno del triangolo* PMF, *ſempre ſi avrà il caſo della rifleſſione; quando poi detto angolo ſarà ſegato dalla tangente, ſi avrà il caſo della refrazione. Benchè il caſo di una rifleſſione fatta con quella legge non eſiſte in natura; eſſendo nella rifleſſione della luce il ſeno dell' incidenza eguale al ſeno di rifleſſione, e negli altri corpi non perfettamente elaſtici, le tangenti di detti angoli ſono in data ragione, e non i ſeni*.

(1) Si avverte, che queſta tale diſpoſizione di filo (*Fig.* 4. *T.* 8.) non è del P. Boſcovich, ma è quella medeſima, che propongo io nel mio teſto, e che non per altro ho qui ſoſtituita alla ſua, ſe non perchè parmi, che il filo ordinato così rieſca più agile, e libero a muoverſi.

ARTICOLO TERZO.

Altre Ovali deſcritte col filo in altra maniera.

QUanto più fuori delle menti degli uomini fu la deſcrizione organica di Curve, che raſſomigliaſſero ad una ſezione d'uovo, altrettanto crebbe in me la voglia di recarvele, ſuggerendo nuove vie, onde detta deſcrizione ſi conſeguiſca. Mettendo adunque ſoltanto (*Fig.* 8. *Tav.* 8.) un altro pivolo E per dirittura a quelli già meſſi in P, ed F, ſecondo la ſituazione che ſortiſce riſpetto a quelli, naſcono nuove Curve. E quando la diſtanza EF ſia eguale ad una quinta parte incirca della diſtanza FP, ed il filo fiſſo in P movendoſi, ſdruccioli d'intorno ai due pivoli F ed E, vengono dallo ſtilo M, ovvero *m* deſcritte altre Ovali, purche la porzione FM non eguaglj la porzione FP, o o la porzione FE due volte presa; perchè nel primo caso la Curva fa un angolo curvilineo in P, e nel secondo in F. Per altro quante mai Curve risultino dalla situazione dei detti tre pivoli fitti nel piano l'uno per dritto all'altro, l'asse loro generalmente è (se la porzione FM è eguale, o minore di FP) è dico l'asse $= ME + \frac{ME + 2EF}{3}$, cioè (*Fig.* 9.) $= AE + EB$. Se poi la porzione Fm è maggiore della porzione FP (*Fig.* 8.) l'asse sarà $= \frac{mP}{3} + PE + \frac{mE + 2EF}{3}$. Espressione, che per addattare la Curva alla data lunghezza della tavola, o cornici, a' Meccanici basterà, giacchè non sarebbe poi facile definire senza calcolo anche la massima larghezza.

Ma se il pivolo E dall'uno o dall'altro pivolo F, o P recedendo, all'uno o all'altro si accostasse tanto, che venisse ad essere tutt'uno, questo caso tornarebbe lo stesso della *Fig.* 1., 2., e 3.

Se poi disposti i fochi per dritto, come nella 8., ed il filo composto come nella 6., e lo stile posto in M, si concepisce il pivolo E accostarsi, e coincidere nell'uno o nell'altro pivolo P, ovvero F; allora verrebbe certo il caso della *Fig.* 1., 2., 3.; ma la ragione di HM ad MF, che ivi era come 2 ad 1, seguirebbe qui (*Fig.* 6.) come 3 ad 1, e nientedimeno si avrebbero sezioni belle di vovo.

Ma se finalmente i pivoli non più si mettessero per dritto, ma tra essi un qualsisia angolo costituissero, nessun altro più fecondo soggetto potrebbesi immaginare in questa materia, ma non voglio più inoltrarmi in tali ricerche, che troppo longi mi condurrebbero. E basti per ora aver indicato di quanti preclarissimi usi sia capace un semplice filo.

ISTRO-

ISTROMENTO VIII.

PER LA DESCRIZIONE DI UNA CURVA INCOGNITA.

Benchè essendo l'equazione (1) di questa Curva (inutile forse così come incognita) troppo alta e composta, avrei potuto dispensarmi di descriverla organicamente, l'ho nonostante descritta; sì perchè somministra Curve somiglianti a sezioni di frutta, o a foglie d'erbe, d'alberi, e fiori, le quali diedero occasione a questa mia bagatella, sì perchè l'immortale Nevvton a ciò fare m'induce con queste precise parole (2): *Æquationis simplicitas non est, sed descriptionis facilitas, quæ lineam ad constructiones problematum prius admittendam esse indicat; nam æquatio ad parabolam simplicior est, quam æquatio ad circulum, & tamen circulus ob simpliciorem descriptionem prius admittitur*. Laonde per esser facile la *descrizione* così *per punti*, che *organica* di questa Curva, vengono per lo meno avvertiti i Filosofi, ch'essa non è affatto indegna delle loro applicazioni. E però principiarò dalla sua *descrizione per punti*.

ARTICOLO PRIMO.

Descrizione di detta Curva per punti.

Condotti pertanto (*Fig.* 1. 2. 3. *Tav.* 10.) dal centro C alla periferia i raggi CV, C1, C2 ec. equidistanti; e

L poi

(1) Presi (*Fig.* 2. o piuttosto 8., *Tav.* 10.) due archi eguali VD, GB, si conduca il raggio CB; e la BP, DI normali ad MV. Poichè per la costruzione l'angolo VCD = all'angolo GCB; sarà anche l'angolo DCG = BCM; e però CI seno dell'angolo DCG = BP seno dell'angolo BCM. Ciò posto sia il raggio CV $= a$, ed abbassata dal punto Q della Curva la QH normale a CV, si chiami CH $= x$. HQ $= y$. E seguendo l'operazione risultarà questa equazione $y = \pm \sqrt{\frac{x^3 - 2axx + aax}{2a - x}}$.

(2) *Arith. univers.* pag. 286.

poi dal vertice V altrettante rette VG, V1, V2 ec. che comprendano alla periferia archi eguali a quelli de' raggi, la linea, che scorrerà per i punti d'interſezione delle rette CV con VG; C1 con V1; C2 con V2 ec. sarà la incognita Curva propoſta.

ARTICOLO SECONDO.

Deſcrizione organica di detta Curva.

SI concepiſca (*Fig.* 4.) ſtare fiſſo ed immobile al piano orizzontale per mezzo di due viti introdotte nei forami A, B un anello pur orizzontale ABD, nella di cui coſta, o margine interiore abbiaſi a muovere in cerchio un altro anello V*ndm* diviſo per diametro da una feſſura *nm*, e nella ſolidità della ſua circonferenza ſcolpito di una ſcannellatura circolare, in cui ſi muova il priſma della *fig.* 6. coll' anneſſo uncino *d*, qual priſma ſi fermi per di ſotto con una vite in qualunque dato punto di detta circonferenza; coſicchè l'anello interiore, il priſma, l'uncino coſtituiſcano, per dir così, un medeſimo pezzo. Un regolo poi VD quinci riceva nella feſſura, onde pel lungo è aperto, riceva, dico, l'uncino *d* conneſſo al priſma ſuddetto, e quindi in un buco V un altro uncino *z*V afferrato all' anello eſteriore ABD. Dove poi le feſſure *nm*, VD s'interſecano in S, trapaſſa giù, e giunge nel piano della carta uno ſtilo S congiunto ad una guida ſcorrente pel lungo del feſſo regolo VD, onde ſi deſcrive la propoſta Curva.

Perchè la ſola feſſura *nm* fa per tutti i raggi (*Fig.* 1, 2, e 3.) CV, C1, C2, ec. e la feſſura VD per tutte le rette VG, V1, V2 ec. E la *fig.* 5. rappreſenta per la ſezione *eb* la groſſezza, e forma dell'anello eſteriore ABD della *fig.* 4. fermato al piano con la vite N, che nella *fig.* 4. andarebbe poſta nei forami A, e B. Per *ca* s'indica la groſſezza, e forma dell'anello interiore V*ndm*; e per il bianco interpoſto s'intende il vuoto ſpazio, in cui deeſi introdurre il priſma coll' uncino *d* della *fig.* 6. che per di ſotto ſi ferma con l'opportuna vite C.

Ora per la piena intelligenza, e prova di queſta coſtruzione, ſi concepiſca l'Iſtromento eſſere per eſempio ordinato alla *fig.* 2. nella quale è da conſiderare: Primo, che il raggio CV, e la retta VG ſono le prime linee, le quali interſeccanteſi in V formano il principio, e vertice della Curva nel punto V, e rappreſentano l'Iſtromento nella ſituazione dovutagli prima di eſſer moſſo, cioè ſignificano la ſituazione riſpettiva della feſſura *nm* (*Fig.* 4.) col regolo VD. Secondariamente, che il punto G è diſcoſto una quarta di cerchio dal punto V, ed *n* alla prima coinciderà in V, e *d* in G. Terzo, quanto ſarà per eſſere l'arco V*n* percorſo dal raggio C*n* da V verſo G, altrettanto dovrà eſſer l'arco G*d* percorſo dalla retta V*d* da G verſo M.

Alle quali coſe riguardando ſi farà (*Fig.* 4.) primieramente che l'uncino *d* col priſma anneſſo ſia fermato con la vite per di ſotto, come prima ſia condotto lontano da *n* una quarta di cerchio; onde avverrà che nella primiera ſituazione dell' Iſtromento la feſſura C*n* coinciderà con CV ſuppoſto immobile; il punto *d* col punto G; il regolo V*d* ſtarà come corda dell' arco *nd*, e lo ſtilo S coinciderà ne' punti V, ed *n* pure coincidenti.

Dopo queſta diſpoſizione fatto muovere a deſtra l'anello interiore *ndm* intorno al centro C, perchè i punti *n*, e *d* ſono fiſſi in un medeſimo anello, quanto ſarà receſſo *n* dal punto V, altrettanto il punto *d* ſarà rimoſſo dal punto G, e però l'arco V*n* dal raggio *cn* percorſo ſarà eguale all' arco G*d* percorſo dal regolo V*d*; e trattanto dallo ſtilo S, che ſcorre inſieme colla ſua guida lungo detto regolo VD, verrà deſcritta ſul piano della carta la Curva della *Fig.* 2. Onde ſi raccoglie, che tutte le Curve generate dal movi-

 men-

mento di questo Istromento mutano faccia, secondo che l'uncino *d* è situato più o meno lontano dal punto estremo *n* della fessura *mn*. E la simetria loro partecipa dell' una delle tre Curve, che le *figure* 1, 2, e 3 rappresentano. Cosicchè secondo che l'arco *nd* del circolo interiore sarà eguale all' arco VG della *fig.* 1, 2, 3, o qualunque altra; o la prima, o la seconda, o la terza, o qualunque altra ne verrà.

Si potrebbe ancora coll' uso di alcune molli, o ruote dentate, o altro argomento eccitare nello stilo S certi tremiti regolari, delle quali partecipando la Curva venisse a produrre un parametro rotto, o compartito in spesse, e ben ordinate punte, quali elegantemente spiccano nella *fig.* 7. e 9. Benchè è d'avvertire, che in ogni modo tutte queste Curve saranno per ragione inseparabile del meccanismo diffettive sempre de' primi punti nel vertice V. Ma che vo io ricercando queste piccole cose, se più rara e bella materia nel seguente ragionamento mi si prepara innanzi?

ISTRO-

ISTROMENTO IX.

PER LE CURVE GENERATE DAL MOTO COMPOSTO DI DUE CIRCOLI.

CIOE

Per la LINEA RETTA, ELISSE, CIRCOLO, FIORI GEOMETRICI, CICLOIDI DI BASE CIRCOLARE, SPIRALI, *e particolarmente la* SPIRALE D'ARCHIMEDE.

PER gli usi amplissimi, che porta in fronte questa macchinetta, ho giudicato non disconvenirle il nome di *Penna Geometrica*, e spero che chiunque prenderà in grado di leggere questo scritto, resterà facilmente persuaso, che se gli debba meritamente adattare un simil titolo. Ma affine di dare alla molta materia un certo ordine, l'ho divisa in quattro parti, e distinta ciascuna parte in articoli. La prima delle quali comprenderà la *descrizione per punti* delle proposte linee. La seconda, la *costruzione organica*. La terza, gl'usi dell' Istromento. La quarta, essendo che questo Istromento agisce per il moto composto di due cerchj, conterà gli usi di un Istromento simile nel supposto, che fosse stato concepito come adoperante con tre.

PARTE PRIMA.

ARTICOLO UNICO.

Descrizione per punti delle predette Linee.

IN quella maniera, che per dare ad intendere le stazioni, direzioni, e regressi de' Pianeti Tolomeo s'immaginò, che questi fossero posti nella periferia di un mobile *Epiciclo*, il di cui centro fosse nel medesimo tempo

rapi-

rapito lungo la circonferenza di un altro *primo Mobile*, e quindi nelli ſpazj del Cielo veniſſero a tracciare una Curva ſimile per eſempio alla *Fig. 5. Tav. 15.* Così figuriamſi ora, che (*Fig. 2. Tav. 15.*) di due dati cerchj (il primo *nop* ec. chiamato *primo Mobile*, ed un altro *a*, 1, 2, 6 chiamato *Epiciclo*) il raggio *na* di detto *Epiciclo* volgaſi d'intorno al proprio centro *n* nello ſteſſo tempo, che queſto centro *n* dal raggio *cn* del *primo Mobile* ſia portato per tutti i punti *n*, *o*, *p*, *q* ec. della circonferenza di detto *primo Mobile*. Perchè quindi verranno dal punto *a* qualunque di detto *Epiciclo* generate delle Curve, che il Celebre P. Abate Guido Grandi, ſotto il nome di *Rodonee* generalmente comprende, e ſpecialmente deſcrive (1) col farle paſſare per infiniti rami tirati da un medeſimo centro, ed eguali ai ſeni di angoli corriſpondenti in data ragione, ad altri angoli formati da detti rami con una poſizione coſtante data. Ma con un eſempio, che ſervirà per tutt' altre Curve, che foſſero propoſte di queſta ſchiera, produrrò quella *deſcrizione per punti*, che ſiccome diede animo all' invenzione del preſente Iſtromento, così a quello ha grandiſſimo rapporto. Prima però è da conſiderare, che tre cauſe coſpirano alla modificazione, o ſia generazione di queſte tali Curve.

Prima, perchè la lunghezza de' raggi *cn*, ed *na* dei due *Mobili primo*, ed *Epiciclo*, può eſſer in data ragione diverſa.

Seconda, perchè le velocità angolari de' *Mobili* poſſono parimenti eſſere in data diverſa ragione, che riduceſi a tre caſi: Primo, perchè la velocità dell'*Epiciclo* può eſſer maggiore di quella del *primo Mobile*; ſecondo, perchè può eſſer minore; terzo, perchè può eſſer eguale. E qui notate, che ſempre che ſi diran *velocità*, ſi vogliono intendere *angolari*.

Terza, perchè un *Mobile* può muoverſi, o in conſeguenza

(1) *Flores Geomet.* Par. I. Definit. 1.

za dell' altro, o in verſo contrario. Ora dunque ſia data la *deſcrizione per punti* di una di queſte linee proveniente. 1. da due cerchj, de' quali ſiano i raggi qualunque dati. 2. mobili con velocità date eguali. 3. l'uno dell' altro moventeſi in ſenſo contrario.

Onde primo fatto centro in C coll' apertura C*n* raggio dato del *primo Mobile* ſi deſcriva il circolo *nop* ec. di detto *primo Mobile*. Così fatto centro in *n* coll' apertura *na* raggio del dato *Epiciclo* ſi deſcriva detto *Epiciclo* *a*, 1, 2, 6, ed i raggi C*n*, *na* poſti ſiano per dritto in una medeſima linea, figurandoſi che così ſteſsero prima che foſsero poſti in moto, e che la Curva abbia a principiare, e a deſcriverſi dal punto *a*.

2. Le periferie di detti due Mobili ſi dividano in numero di parti, che ſia in ragion data inverſa della velocità. Come ſe la velocità del *primo Mobile* foſse alla velocità dell' *Epiciclo* come 1 a 2, la periferia del *primo Mobile* ſi potrebbe comodamente dividere in parti 8, e quella dell' *Epiciclo* in 4. Ma eſsendo nel noſtro caſo le velocità date eguali, ciaſcuna periferia ſi divida in 8 parti, ed a quelle del *primo Mobile* dal centro *c* ſiano condotti i raggi *co*, *cp* ec., ed oltre a detta periferia anche prodotti. Poi fatto centro in *o*, in *p* ec. con l'apertura *na* ſi deſcrivano cerchj eguali all' *Epiciclo*.

3. Supponendo, che il raggio del *primo Mobile* della primiera ſituazione *cn* ſi muova a ſiniſtra verſo *o*, *p* ec. e meco porti l'*Epiciclo*, quando il raggio C*n* volgendoſi ſarà pervenuto in *co*, il raggio *na* coinciderebbe con *o*V, ſe anch' egli non ſi foſse moſso o verſo 3, ſe i moti foſser dati in conſeguenza, o verſo *b*, ſe i moti, come nel preſente caſo, dati foſsero contrarj. Inoltre perchè, quando il raggio *cn* è giunto a coincidere con *co* ha già percorſo uno ſpazio *no*, così preſa col compaſso una parte *a*1 della periferia dell' *Epiciclo*, da V verſo *b* ſi ſegni; e ſe il raggio

raggio Cn s'intenda già trascorso due spazj fino a cp; presi parimente due spazj $a\,2$ nella periferia dell'*Epiciclo* da X si segnino verso d, e così andate dicendo. Onde i punti a, b, d saranno elementi della Curva, e di questa maniera si otterranno anche gli altri, e si legaranno poi con una linea, che sarà la proposta, sarà dico un *circolo*, come (1) a suo luogo si dimostrarà.

Qui per fine è generalmente da notare, che procedendo con questo metodo l'arco Vb dell'*Epiciclo* sarà al corrispondente arco no, che si suppone nel medesimo tempo percorso dal *primo Mobile* (o sia l'angolo Vob sarà all'angolo nCo) in ragion data della velocità; la quale, per esser qui stata data eguale, così gli angoli Vob, nCo sono eguali. Esposta pertanto la *descrizione per punti* si passerà all'*organica* nella seguente parte.

PARTE SECONDA.

Della costruzione dell' Istromento.

ARTICOLO PRIMO.

Piano orizzontale di detta costruzione.

Benchè altri s'immaginarono (2) delle Curve provenienti dal moto composto di due cerchj applicati l'uno all'altro, come sopra s'è detto, nissuno però le ridusse per anco alle leggi di meccanica. Laonde questa parte addossandomi io, si supponga che (*Fig.* 1. *Tav.* 11.) un *cilindro* TQZ stia fermo ed immobile nel centro di un *primo Mobile* 2, 3, 4, 5, 6, quantunque il raggio Qr (di cui fa le veci

(1) Part. 3. Art. 5.

(2) Il P. Castel *Traité 50.me de Mathematique: Des Espèces des Courbes Liv. primier des divers Ordres.*

veci l'asta MN) di detto *primo Mobile* si volga d'intorno al centro Q, e si supponga un altro cilindrino mrd stare nel centro r di un *Epiciclo* 2, 3, 4; cosicchè movendosi detto cilindrino mrd in un si muova anche il raggio rs dell'*Epiciclo*, che con detto cilindrino costituisce un medesimo pezzo.

Inoltre nel punto T della periferia del cilindro TQZ sia fissato un filo, che d'indi condotto al punto m della periferia del cilindrino mrd, ed intorno ad esso prima più volte rivolto, pur finalmente vi si fissi. Dico ormai, che dal rotante raggio Qr del *primo Mobile* per i punti di detto *primo Mobile* 2, 3, 4, 5, 6 portato il centro r dell'*Epiciclo*, nel medesimo istante sarà costretto a girare il cilindrino mrd, in un col raggio rS dell'*Epiciclo* d'intorno al proprio centro r. Perchè, stando fermi li due centri Q, ed r nella già determinata distanza, non può una parte qualunque del filo Tm piegarsi sulla circonferenza del cilindro TQZ, che altrettanta parte non si spieghi giù dalla circonferenza del cilindrino mrd; nè spiegar puossi, se il cilindrino cedendo all'attrazione del filo, non si volge d'intorno al proprio centro r, ed intanto da uno stilo posto nel punto S non venga sul piano della carta delineata una Curva, a modificar la quale le tre suddette cagioni cospirano, che si dovranno da quì innanzi aver ben fisse nella memoria, e che nel seguente articolo si richiameranno alla presente costruzione.

ARTICOLO SECONDO.

Cagioni moderatrici delle Curve soggette a questo Istromento richiamate alla presente costruzione.

Tre sono le cagioni, come già dissi, onde queste Curve pigliar possono nuove sembianze, e talvolta nemmeno parer più desse. Alla prima delle quali si vedrà quanto prima nel piano verticale come l'Istromento si componga, e si si determini la lunghezza de' raggi *Qr*, *rS* in data ragione.

Per la seconda cagione essendo tre i casi, come si è detto, delle velocità, a tutti tre per ordine si applicherà l'Istromento. Onde primo è da sapere che le velocità (dico sempre angolari) dei *mobili* sono in ragion inversa dei diametri de' cilindri. Il che per render chiaro con un esempio, supponiamo, che il diametro del cilindrino *mrd* sia al diametro del cilindro TQZ, come 1 a 3; e perchè sono le periferie come i diametri, saranno esse ancora nella stessa ragione di 1, a 3. Supponiamo inoltre essere stato il centro *r* dell'*Epiciclo* trasportato dal raggio *Qr* del *primo Mobile* sino al numero 3., cioè sino alla terza parte della periferia del *primo Mobile*. Onde il filo T*m* avrà acquistata la situazione Z3, e nello stesso tempo, essendosi piegato d'intorno al cilindro TQZ, avrà occupata una terza parte di esso, o sia tutto l'arco TZ; alla quale essendo per supposto eguale l'intiera periferia del cilindrino *mrd*, segue indubitatamente, che il cilindrino *mrd* insieme col congiunto raggio *rS* abbia compita un'intiera revoluzione intorno al proprio centro *r*, e però due altre rimangono da farsi, mentre una sola ne compie d'intorno al proprio centro Q il raggio *Qr*, o sia QR del *primo Mobile*. Dunque la velocità dell'*Epiciclo* è alla velocità del *primo Mobile*, come 3 a 1. Dico in ragion inversa del diametro del cilindrino *mrd* al diametro del cilindro TQZ, che era, come 1 a 3. Quì pertanto non resta, che per le date velocità applicare all'Istromento cilindri, che siano in data ragione. Ma per non andare all'infinito l'ho provveduto di soli 12.; il primo de' quali sia di diametro eguale ad una delle parti eguali della figura seconda; il secondo a due; il terzo a tre ec. Cosicchè il diametro del minimo cilindro sarà eguale ad una parte, ed a tutte dodici il diametro del massimo.

Finora però abbiam supposto la velocità dell'*Epiciclo* maggiore di quella del *primo Mobile*; ma per il secondo caso

caso potrebbe darsi ancora minore, e quindi trasmutandosi la situazione dei termini della ragione delle velocità, doversi trasmutare anche il luogo a' cilindri. I termini della ragione delle velocità furono nell'esempio adotto 3, e 1: vale a dire (poichè le velocità sono in ragione inversa del diametro de' cilindri) il cilindrino *mrd*, ed il cilindro TQZ; però se si trasmutasse reciprocamente il luogo de' due cilindri, di maniera che il cilindrino *mrd* fosse posto nel centro Q del *primo Mobile*; ed il cilindro TQZ nel centro *r* dell'*Epiciclo*, quindi all'opposto del primo caso, seguirebbe la velocità dell'*Epiciclo* minore di quella del *primo Mobile*.

Potrebbe darsi per fine il terzo caso, cioè la velocità de' *Mobili* eguale; onde bisogna aver presto un altro cilindro eguale ad uno di detti dodici, perchè messo uno nel centro del *primo Mobile*, ed un altro nel centro dell'*Epiciclo* vengono detti *Mobili* determinati appunto ad eguali velocità. Ricordando che in ciascun cilindro sia scolpito il numero delle parti eguali prese nella figura seconda, che esso contiene.

Per la terza cagione (nel supposto che il centro *r* dell'*Epiciclo* sia condotto dal raggio *Qr* del *primo Mobile* secondo l'ordine dei numeri 2, 3, 4, 5, 6.) se il filo toccherà i due cilindri alle parti alterne come T*m*, chiaro è che l'*Epiciclo* si moverà in conseguenza di detto *primo Mobile*, cioè e l'un, e l'altro *Mobile* si moverà secondo l'ordine dei numeri 2, 3, 4 ec. 2, 3, 4 ec.; ma se il filo toccherà i due cilindri alle medesime parti, come T*d* (stando ancora il supposto predetto, che il raggio *Qr* del *primo Mobile*, si muova secondo l'ordine dei numeri 2, 3, 4, 5, 6) l'*Epiciclo* girerà contro l'ordine de' proprj numeri 4, 3, 2 ec., cioè i moti de' *Mobili*, in questo caso seguiranno l'un dell'altro inverso contrario. Onde si raccoglie, come questa costruzione regge fin' ora assai bene all'azione di tutte

tre

tre le cause producenti le molte trasformazioni di queste illustri Curve, per poter senz' altro passare al *piano verticale* di detto Istromento.

ARTICOLO TERZO.

Piano verticale del presente Istromento.

Forse altrui sembrerà, che confrontando il sopra esposto *piano orizzontale* con questo *verticale*, si abbiano in questo tralasciate troppo più parti, che non doveasi. Conciossiacchè di questo in quello non si riscontrino altro che il filo, i due cilindri, l'asta MN (che sta pel raggio del *primo Mobile*) ed il raggio *r*S dell' *Epiciclo*. Ma anzi io affermo, che operando altrimenti, e quindi diventando la figura troppo confusa e impedita, nè quanto si è spiegato così, spiegato si avrebbe, nè le parti perciò sarebbero state meglio indicate, come forse riusciranno in questo *piano verticale*.

In quella guisa pertanto, che gli Architetti dai fondamenti principiano gli edificj loro, comincіarò io (*Fig.* 3.) dal piedestallo d'acciajo AEDX, che come quello, che il rimanente della macchina sostenta, è con due valide viti I, I fermato, e congiunto ad una tavola orizzontale immobile AX. Nel sito poi DE è trapassato per il mezzo da un buco quadrangolare, in cui entra il palicello QG pur d'acciajo indicato con puntini, e che prima passa in un forame rotondo dell' asta MN, indi in un cilindro ZT, ed appresso nel prefato buco DE del piedestallo, a cui stretto per fine da una vite G sta attaccato, ed insieme con detto piedestallo e cilindro ZT, e tavola orizzontale AX rimane affatto immobile; ancorchè d'intorno ad esso ruoti l'asta di metallo MN. Dal piano orizzontale di quest' asta si scorge come (*Fig.* 1.) essa deve avere un buco circolare in Q (che è coperto dal cilindro ZT), nel qual appunto riceve il palicello QG della *figura* 3. Poi si fende per il mezzo da Q verso N, e vien cinta da un anello o sia guida *nn* pur di metallo forata con un buco (che è pur coperto dal cilindrino *r*) rotondo, e verticale all'orizzonte in *r*, e di due buchi quadrangolari aperta nel fianco *nn* (*Fig.* 4.), nei quali introdotta detta asta MN, a quella in qual punto più si vuole con la vite C si stringe, e ferma.

Il detto palicello (*Fig.* 3.) QG, (che d'ora in poi *Asse del primo Mobile* chiamaremo) quadrangolare, e dilatato alquanto è presso Q, acciò vaglia a ritenere sospesa in alto la suddetta asta MN; e rotondo seguita dove l'asta MN lo circonda introdotto nel forame suo orizzontale; ed è quadrangolare di nuovo, e più sottile, dove per il cilindro ZT, e per DE, fino in G trapassa.

Un altro palicello RP (chiamato *Asse dell' Epiciclo*), entra prima nel buco rotondo orizzontale della guida *n* (o sia *nn* della *figura* 1.), d'indi nel cilindrino *m d*, ed in fine con una vite P si ferma così, che però volger si possa dentro il buco di detta guida *n*. Questo parimenti è assai dilatato presso R, e trapassato da un forame transversale, in cui s' introduce il raggio QS al suo stilo o penna S annesso, e dovunque si vuole con una vite laterale si ferma. Inoltre detto palicello RP è fornito di un piatello circolare *p z* (indicato dalle perpendicolari morte cadenti da questo piano verticale in quello orizzontale per l' area circolare ombreggiata *nn*); e poi quadrangolare procede, finchè entra nella guida *n* dove è rotondo; d'indi quadrangolare tornato di nuovo per mezzo del cilindrino *dm* fino in P perviene, ed ivi si stringe con la sua vite P. Due molli poi dal perito Artefice applicate comunque nel sito (come in *figura* 1.) *nn*, premano tanto il sottoposto piatello *p z*, che l' *asse* RP dell' *Epiciclo* a quello annesso non così di leggieri volger si possa.

Que-

Questa costruzione spedita esser dovrebbe, avvisando che il cilindro TQZ del *primo Mobile* della *figura* 1. sia in questa 3. il cilindro ZT; per il cilindrino *mrd* dell' *Epiciclo* in quella, in questa il cilindrino *md*; per i centri Q del *primo Mobile*, ed *r* dell' *Epiciclo* in detta figura 1., in questa 3. l' *asse* QG, e l' *asse* RP; e per il raggio qualunque Q*r* del *primo Mobile*, che in quella seco porta il centro *r* dell' *Epiciclo*, in un col cilindrino *mrd*, in questa *figura* 3., ed in quella prima supplisce l' asta MN, quale rotando intorno all' *asse* QG del *primo Mobile*, seco mena, e sostiene l' *asse* RP dell' *Epiciclo*, e l' annesso cilindrino *md*, e per l' opportuno filo T*m*, (che per il movimento di detta asta rotante intorno all' *asse* QG, altrettanto si avvolge d' intorno al cilindro ZT, quanto si svolge dal cilindrino *md*) vien messo in moto anche il raggio QS, che sta per qualunque dato raggio *r*S dell' *Epiciclo* della *figura* 1., perchè si può sospingere, e respingere pel buco presso R, e con la vite laterale fermare, quando si trova nella data lunghezza.

Ma per non mancare a detta asta MN de' necessarj ajuri, e stabilirla così, che sia costretta a rimanere sempre parallela all' orizzonte, e ad angoli retti degli *assi* dei *Mobili* QG, RP, con una vite N si connette a quella un forbice V, che si unisce per di sopra con un' altra vite ad un vette VE mobile pur insieme con detta asta MN d' intorno all' asse QG. Mi piacque in oltre metter sopra la tavola AX un altro piano di cartone FS fornito per di sotto di due molle *ee*, *ee* in modo arrendevoli, che nè del tutto resistano, nè cedano troppo alla pressione dello stilo S. Egli è appunto sopra questo piano di cartone FS, che hassi poi a distendere, e fermare la carta, su cui si pensa descrivere la Curva.

Finalmente per non lasciar cosa, che, ad intendere la fabbrica, ed i movimenti di questo Istromento potesse contribuire, debbo avvertire, che le parti tratteggiate AXGDTZQ formano, dirò così, un sol pezzo, che deve concepirsi permanente in una costante quiete. Le parti M*n* NVE, che sono ombreggiate a puntini si vogliono supporre un altro pezzo, che sospinto con la mano muovasi d' intorno all' *asse* del *primo Mobile* QG; le altre restanti pur tratteggiate parti QSR*pzdm*P rappresentano parimenti un altro pezzo, che tutto insieme gira nel buco della guida *n* d' intorno alla insieme rotante *asse* dell' *Epiciclo* RP; mentre detto asse RP dal riferito pezzo ombreggiato a puntini viene portato per la circonferenza di un cerchio, che è il *primo Mobile*, e di cui il centro di rotazione è l' *asse* QG. Finalmente il piano di cartone FS, e le connesse molle *ee*, *ee*, formano un altro pezzo con puntini leggiermente distinto, e che si muove, come si disse, secondo che per alcuna inegualità di esso piano di cartone, accadesse in esso maggiore, o minore lo sfregamento dello stilo S.

ARTICOLO QUARTO.

Disegno Scenografico del presente Istromento.

La tavola duodecima dimostra così al vivo la forma, e situazione delle parti di questo Istromento, che per essa sola avrebbesi forse potuto dimostrare l' artifizio della sua costruzione. Nonostante soffrite, che almen di volo accenni con quale analogia le parti descritte nelli andati piani si riferiscano alle rispettive parti scenografiche di questa figura. La tavola dunque orizzontale AX della *Figura* 3. *Tav.* 11. è in questo disegno; la tavola &*y*OT; il piano di cartone FS di quella figura, in questa è il piano HCDK; gli *assi* QG, RP sono quì gli stessi QG, RP; così di quella le parti EV, NM sono le medesime in questa, e dell' altre andate via dicendo così, giacchè trovarete che per non ingomgombrare la figura, si è tralasciato di riportar quì il solo piatello pz, e le molle ad esso spettanti; mentre frattanto io preparo detto Istromento a' dati supposti.

Sia però proposto di descrivere una Curva, che provenga 1. dall'eguaglianza de' raggi dei due *Mobili primo ed Epiciclo*; 2. dalla velocità del *primo Mobile* data a quella dell' *Epiciclo*, come 1 a 3; 3. dai moti de' *Mobili* in contrario verso.

Onde primieramente fermata con la vite laterale la guida n, fermo in appresso anche il raggio dell' *Epiciclo* FS (*Tav.* 12.) qualora la parte di detto raggio presa sul piano da S fino all' incontro della prodotta PR in 2. è eguale alla distanza presa da 2. fino all'incontro della prodotta GQ in 3.; cioè qualora S, 2 = 2, 3; ovvero (*Fig.* 1. *Tav.* 11.) qualora Qr è fatto eguale ad rS. Secondo, allentate le viti G, e P, e fuori tirati gli *assi* GQ, PR sostituisco ai quai si sieno presenti cilindri il cilindro segnato 3. per l'*asse* QG del *primo Mobile*, ed il cilindro segnato 1. per l'*asse* PR dell' *Epiciclo*, e ritorno poi l'Istromento nel primiero suo stato. Terzo avvolto il filo sul cilindrino dell' *Epiciclo*, e messa la mano in V muovo l'asta MN all'opposto di chi legge, avvertendo di abbassar con l'altra mano il piano di cartone HCDK, finchè del tutto sia teso il filo, e tangente la periferia d'amendue i cilindri alle medesime parti, che rilasciato poi detto piano di cartone, e seguitando a muover l'asta in giro si conseguirà la Curva proposta, quale sarà la 11. della *Tav.* 16. Quando però due ostacoli non s'incontrino, che si accusaranno in questo prossimo Articolo.

ARTI-

ARTICOLO QUINTO.

Risoluzioni delle seguenti obbiezioni.

1. Avvegnacchè non abbia fatta pruova di questa costruzione, parmi tuttavia, che sia soggetta a due gravissime difficoltà. La prima delle quali è, che forse il filo non si mantenga sempre egualmente teso, ma si raccorci o si stenda non solo per la causa intrinseca della sua incostante flessibilità; ma molto più perchè talvolta (*Fig.* 3. *Tav.* 11.) per qualche inegualità o contranitenza del piano di cartone FS, dovendo lo stilo S vincere una maggiore o minore resistenza, il filo patisca una diversa tensione. Secondariamente perchè nel supposto dell' Istromento mosso come sopra, quando la punta dello stilo S accaderà che sia, dove in figura appunto è, si combinaranno così ad un medesimo verso la resistenza del piano, e l'azione dello traente filo, che potrà per avventura, muovendosi nella sua guida l'*asse* RP per la sola resistenza del piano, l'azione del filo ridursi a zero; e perciò molta più parte di filo svolgersi dal cilindrino md, che non si avvolgerà d'intorno al cilindro ZT.

La seconda difficoltà è, che si possano costruire cilindri tanto esatti, che tutti vengono in ragion data per lo appunto; principalmente perchè a me pare, che il diametro loro debba mancare dalla data ragione di tutta la grossezza del filo: cioè, che volendo per esempio fare, che il diametro di un cilindro sia eguale a cinque parti eguali della *Fig.* 2. non abbia veramente ad esserlo, ma il diametro del cilindro più la grossezza del filo debba esser eguale alle dette cinque parti.

Ora in quanto alla prima obbiezione, per correggere lo specifico rilassamento, e reccorciamento del filo, basta in

N suo

suo luogo sostituire una catenella d' acciajo, o un grosso filo d' ottone simile a quelli, che s' adoprano ne' clavicembali. Ma per ciò che risguarda alla causa estrinseca, cioè per fare, che in qualunque situazione dello stilo S mai la resistenza del piano riduca a zero l' azione del filo, si avrà cura, che le molle prementi il piatello *pz* siano assai più valide, che non sono le molle *ee*, *ee* del piano di cartone; conciossiacchè la resistenza (trattane qualche inconsiderabile inegualità del piano) sia cagionata dalla sola forza di dette molle *ee*, *ee*.

Per la seconda obbiezione si osservi nella *Fig.* 2., che per ciascuna parte eguale è segnata una particola, che significa la grossezza del filo. Onde qualunque volta si prenderanno quante si vogliono di dette parti per riportarle sul diametro de' cilindri da costruirsi, si resterà indietro dal giusto numero una di quelle particole. Ma se a questa necessaria precisione qualunque, la perizia degli Artefici non potesse arrivare, ai cilindri, al filo, o catenella, sostituirò le ruote dentate nel seguente Articolo.

ARTICOLO SESTO.

Ruote dentate sostituite al filo, e cilindri.

Volendo dunque, per agevolare l' esecuzione di questo Istromento in luogo del filo e cilindri, far uso delle ruote dentate, se ne avranno a preparare dodici, il numero dei denti delle quali sia in quella proporzione, che prima furono determinate le periferie, o sia diametri de' cilindri. Onde siccome la serie di quelli era disposta in progression aritmetica; perchè il primo era eguale (*Fig.* 2. *Tav.* 11.) ad una delle parti eguali di detta *Fig.* 2.; il secondo eguale a due di dette parti; il terzo a tre ec. così la prima ruota, supposto che sia di otto denti, la seconda sarà di 16., la terza di 24. ec., fino all' ultima, che sarà di 96.; oltre un' altra ruota di sopra più, eguale ad una di dette dodici, per servire alle velocità date eguali.

Inoltre, per rapporto anche alla situazione delle ruote, deve esser lo stesso, che se fossero cilindri; perchè la ruota, che sarà posta nell' *asse* QG del *primo Mobile* in luogo del cilindro TZ (*Tav.* 13.) starà quasi afferrata a detto *asse*, come detto cilindro costantemente immobile; e quella che si metterà nell' *asse* RP dell' *Epiciclo* in luogo del cilindrino *md* agirà parimenti come se fosse detto cilindro *md*. E se nell' *asse* GQ del *primo Mobile* venisse messa una ruota di 24. denti, ed un' altra di 8. nell' *asse* PR dell' *Epiciclo*, e (fermata la guida *n*, che porta l' *asse* RP dell' *Epiciclo* predetto, subito che accostandola all' *asse* del *primo Mobile*, una ruota giunge ad ingranar con l' altra) si facesse poi muover l' Istromento, le velocità dei mobili seguirebbero pur anche, come nel caso che fu (1) già addotto de' cilindri: cioè l' *Epiciclo* farebbe tre revoluzioni, mentre il *primo Mobile* ne compisce una sola; perchè anche nel caso delle ruote le velocità sono in ragione inversa dei numeri dei denti, o vogliam dire delle periferie.

Una cosa sola è però da riflettere nel caso presente delle ruote dentate, che (*Tav.* 13.) quando la ruota *dm* dell' *Epiciclo* sia immediatamente intralciata colla ruota ZT del *primo Mobile*, i moti dei due mobili seguiranno sempre ad un medesimo verso; e che per causare i moti dei mobili in verso contrario, sarà d'uopo frammettere alle due ruote suddette un' altra ruota, numero di denti qualunque, e ferma ad un suo asse *a* mobile nella sua guida *x*.

Questo Istromento delle ruote sta presso di me, e per lo sperimento più volte fatto nella presenza di Personaggi in questa materia, e nelle matematiche versatisimi posso asserire, che riesce a maraviglia, principalmente quando si met-

(1) Part. II. Artic. II.

mettono in opera due sole ruote, acciò i mobili l'un muovasi in conseguenza dell'altro. Che se si hanno a volgere in senso contrario, e però uso si faccia anche della 3. ruota interposta a quelle, quantunque le Curve, che ne risultano siano leggiadrissime, declinano però tanto o quanto dalla dovuta traccia. Perchè una volta per ciascuna revoluzione dell' *Epiciclo* ha luogo anche quì la prima obbiezione accennata nell'antecedente Articolo. Conciossiacchè aguzzato l'ingegno e adoprando qualche penetrazione si trova, che quando la resistenza dello stilo incontrata sul piano si accoppia coll'azione delle ruote, lo stilo in vece di obbedire alle ruote, cede al piano resistente, e con esso le ruote pur cedendo, tornano indietro quel minimo spazio, che resta vuoto tra il dente di una ruota, ed il dente di un'altra. E perchè questo spazio è un solo nel caso di due ruote, non produce alcun sensibile divario; ma nel caso di tre, perchè sono due i punti ove si toccano le circonferenze di esse ruote, raddoppiandosi detto spazio, tanto o quanto si da, come dissi, a conoscere. Pure io credo, che a questo difetto si possa occorrere, o investigando alcuna sorta di denti meglio addattati, o piuttosto applicando sotto alla ruota *a* di mezzo una molla, la quale per ciascun dente che di essa ruota *a* passa, cada in un incastrino di quei tanti, che scolpiti fossero nel piano superiore della guida *x*, quanti sono i denti di essa ruota *a*; e che perciò non potesse più tornar indietro. Oltre di che si scema questo difetto anche da se più che le ruote sono grandi; perchè così tanto più si diminuisce quel picciolo spazio vuoto, e quindi le Curve molto più si approssimano al vero loro parametro; il numero, e qualità delle quali esaminaremo nella seguente Parte.

PAR-

PARTE TERZA.

Degl' usi dell' Istromento,

CIOE'

Quante, e quali Linee ad esso appartengono.

ARTICOLO PRIMO.

Quante siano dette Linee.

NOn è mai stato, nè credo sia per essere un Istromento di Linee all'occhio tutte diverse così fecondo, come è questa mia PENNA GEOMETRICA. Perchè (lasciando andare, che con poche parti aggiunte, o detratte potrebbesi adattare a tutte le Concoidi, che han per direttrice una *retta*, un *elisse*, un *circolo*, o qualunque altre Curve da essa descritte; e non meno alle inventate del (1) Sig. di Reaumur, eccettuate quelle che han per base l'*Iperbola*, o *Parabola*; e non contando nè meno le spirali, che realmente ad essa appartengono) quelle sole che produce detta *Penna*, stante nella sua essenziale semplicità montano ad un numero prodigioso di ben quasi 1273.

Ed acciò non paja che si voglia altrui imporre, o spacciare a ventura le cose mal intraprese; veniamo al calcolo; nell' instituzione del quale s' introduranno quelle tre cause moderatrici, che furono enunciate nel (2) principio di questo ragionamento.

Cominciando adunque dalla prima, cioè dalla lunghezza de' raggi dei *Mobili*, che può essere in data ragione, la *Tav.* 16. mostra sei figure, quasi dirò di tre lati, la simetrìa delle quali non varia appunto per altro, se non perchè (le altre cose stando le medesime) la sola ragione de'

(1) *Memoires de l' Academie*. An. 1708. p. 197.

(2) Part. I. Artic. Unico.

de' raggi sia mutata. E stante che questa varietà proveniente dalla sola mutazione de' raggi, quasi che in tutte l'altre figure sempre avviene, perciò il numero 6. comincia ad aver luogo nel calcolo.

Ora avuto riguardo alla seconda causa, che era la ragion data delle velocità ridotte a tre casi; perchè per ciascuna Curva adoprano due ruote, o cilindri, che stanno per i termini della data ragione, e da 12. che essi sono, 66. binarj risultano; rigettatine però 21., che come osservaremo (1) nella tavola delle combinazioni, si trovano nella medesima proporzione, restano 45. d'adoperarsi per eccitare la velocità dell' *Epiciclo* maggiore di quella del *primo Mobile*; ai quali altri 45. si hanno da aggiungere per il secondo caso della velocità dell' *Epiciclo* minore di quella del *primo Mobile*, ciò che risulta, come già si disse dalla sola trasmutazione del sito dei termini dei detti binarj; ed un altro binario di eguaglianza si deve aggiungere per il terzo caso delle velocità date eguali; onde sommati rilevano tutti insieme 91. binarj, o siano combinazioni, altro numero per detto calcolo.

Finalmente per la terza causa, che i moti ponno seguire, o in conseguenza, o in senso opposto, entra nel calcolo anche il numero 2.

Moltiplicato pertanto il 6. per 91. viene 546., che altresì moltiplicato per 2. risulta 1092.; che sommato poi con 181. Cicloidi di base circolare derivanti, come poi (2) si dirà, dalle combinazioni predette rileva 1273., numero cercato delle Curve spettanti a questo Istromento, il quale nei seguenti Articoli si comporrà a tenore di quelle leggi di moto, cui dette Curve soggiacciono.

ARTI-

(1) Figura 1. Tav. 18.

(2) Part. III. Artic. 9.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Linea retta.

La prima Linea, che fra gli usi di questo Istromento promisi già fin da principio, fu la *Retta*; e però dico, che (*Fig.* 1. *Tav.* 14.) se: primo il raggio *cn* del *primo Mobile onQ*, ed il raggio *nd* dell' *Epiciclo rcd* saranno eguali; secondo la velocità di quello a quella di questo, come 1 a 2; terzo i moti in verso contrario; l'ultimo punto *d* del raggio dell' *Epiciclo nd* descriverà la *retta* DR.

Si concepisca perciò, che i due raggi *cn*, *nd* prima di esser messi in moto coincidessero con *co* perpendicolare a DCR; e che d'indi il raggio *cn* del *primo Mobile* si sia mosso d'intorno al proprio centro *c* da *o* verso *n* nel medesimo tempo, che il raggio *nd* dell' *Epiciclo* a quello annesso in *n* abbia girato d'intorno al proprio centro *n* da *c* verso *d*, cioè in verso contrario; cosicchè però l'ultimo punto *d* del raggio *nd* siasi sempre trovato in alcun punto della retta CR. L'angolo *cnd* sarà sempre stato doppio dell'angolo *ocn*, o sia, che viene lo stesso, la velocità angolare dell' *Epiciclo*, sarà doppia di quella del *primo Mobile*.

Calata però da *n* la retta *ne* perpendicolare a DR, e parallela alla retta *oc* perchè insistente alla medesima retta DR. Gli angoli alterni *ocn*, *cne* saranno eguali. Ma l'angolo *cnd* è doppio dell'angolo *cne*; perchè essendo per la costruzione i lati *cn*, *nd* eguali, la perpendicolare *ne* divide per metà l'angolo *cnd*. Dunque l'angolo *cnd* è doppio dell'angolo *ocn*. Il che è vero in qualunque punto della retta DR si ritrovi il punto *d*. Si può dunque vincendevolmente inferire: se l'angolo *cnd* sarà doppio dell'angolo *ocn*, il pun-

to *d*

to *d* ſempre perſiſterà nella *retta* DR. Ciò che era da dimoſtrare.

Non altrimenti ſi dimoſtrarebbe il punto *r* dall'altra parte permanere nella *retta ab*, e tutti i punti della periferia dell' *Epiciclo* in *rette* eguali fra ſe, ed alla ſomma de' diametri di amendue i *Mobili primo*, ed *Epiciclo*; perchè quando *d* coincide col punto R, i due raggi *cn*; *nd* ſono diſteſi, e s'eguagliano alla *retta* CR, e così dall'altra parte diſteſi s'eguagliano a CD.

Quindi viene come ſi abbia a componere l'Iſtromento alla deſcrizione della *Linea retta*; perchè primo ſi caccierà innanzi, o indietro il raggio dell' *Epiciclo*, e ſi fermerà poi con la vite, quando (*Fig.* 1. *Tav.* 11.) ſarà $Qr = rS$; ſecondo perchè le circonferenze de' cilindri ſono in ragione inverſa delle velocità, ſi collocherà il cilindro ſegnato 2. nel centro del *primo Mobile*, e l'altro cilindro 1. nel centro dell' *Epiciclo*; terzo prima di muover l'Iſtromento ſi farà, che il filo, o catenella tocchi i due cilindri alle medeſime parti, acciò i moti dei mobili ne ſeguano contrarj.

Se poi l'Iſtromento foſſe colle ruote dentate; primo come nel caſo de' cilindri ſarà fatto $Qr = rS$; ſecondo la ruota di 16. denti ſegnata 2. ſarà meſſa nel centro del *primo Mobile*, e la ruota di denti 8. ſegnata 1. nel centro dell' *Epiciclo*; terzo acciò i moti riſultino in parti oppoſte ſi metterà tramezzo a dette ruote (*Tav.* 13.) la ruota portata dall' *aſſe a* nella ſua guida *x*. Onde per l'uno, e l'altro caſo nella prima rivoluzione dell' *Epiciclo* (*Fig.* 1. *Tav.* 14.) lo ſtilo poſto ſupponiamo in *r* deſcriverà la *retta ab*, e nella ſeconda rivoluzione, non declinando punto dalla primiera traccia, tornerà indietro da *b* ad *a*.

ARTI-

ARTICOLO TERZO.

Linea retta *proveniente dal moto di un* Epiciclo *rotante nella concava periferia di un altro cerchio immobile*.

UNa leggiadra coſa, e degna in vero che altrui venga a notizia, naſce da quanto ſi è detto nel precedente Articolo, qual è, che dato il diametro *ac* (*Fig.* 2.) dell' *Epiciclo adc* ſudduplo del diametro *ab* di un altro cerchio maſſimo *a*D*b*R ruotando detto *Epiciclo* nella concava circonferenza di detto cerchio maſſimo, come ſe per deſcriver una Cicloide ruotaſſe ſopra una *retta*. Un punto qualunque *a* della periferia di detto *Epiciclo* deſcrive la *retta ab*, il punto C la *retta* DR ec.

Conciofſiacchè, primo il centro *n* del rotante *Epiciclo* deſcriverà un circolo *no*, che fingo eſſere il *primo Mobile* eguale appunto per la coſtruzione a detto *Epiciclo*, come nel caſo della *Fig.* 1.; ſecondo poichè eſſendo le periferie come i diametri, la periferia dell' *Epiciclo* viene ad eſſere alla periferia del cerchio maſſimo come 1. a 2.; ſarà la periferia dell' *Epiciclo* eguale all'arco, o ſemi-periferia *a*R*b* di detto cerchio maſſimo; onde l' *Epiciclo* partito dal punto *a* volgendoſi in detto cerchio maſſimo, a detto punto *a* non arriva, ſe non dopo aver compite due rivoluzioni, una ſopra la ſemi-periferia concava *a*R*b*, e l'altra ſopra la reſtante ſemi-periferia *b*D*a*; mentre il proprio centro *n* una ſola ne ha finita intorno a *c*, centro comune del cerchio maſſimo, ed inſieme del finto *primo Mobile noc*. E però la velocità di queſto *primo Mobile* immaginario è alla velocità dell' *Epiciclo*, come 1. a 2.: val a dire nella ragion preſcritta per la deſcrizione della Linea *retta* nella *Fig.* 1.; terzo ſe ben ſi riflette il moto del ſuppoſto *primo Mobile noc* deſcritto, come diſſi, dal centro *n* del rotante *Epici-*

O *clo*,

clo, ed il moto del medeſimo *Epiciclo* occorrono inverſo contrario. Dunque giacchè quanto era d'uopo alla generazione della *retta* nella *Fig.* 1. in queſta ſeconda riſcontra per lo appunto, ſeguita neceſſariamente che il punto *a* qualunque di detto *Epiciclo* deſcriva la *retta ab*, ed il punto C la *retta* DR ec. Il che era da dimoſtrarſi.

ARTICOLO QUARTO.

Eliſſe *generata così dal moto compoſto di due circoli, che dal moto ſemplice di un* Epiciclo *rotante nella concava periferia di un altro cerchio immobile.*

POichè abbiamo facilmente dimoſtrato da quai principj riconoſca il ſuo eſſere la *Linea retta*, moſtraremo ora come dai medeſimi dipenda anche l'*Eliſſe*, e che però la deſcrizione di ciaſcheduna appartiene egualmente a queſta macchinetta. Imperciocchè traſportata parte della *Figura* 1. nella 2., e 3. ſi dimoſtra facilmente, che (*Fig.* 2. e 3.) qualunque punto *b*, ovvero H, preſo dentro o fuori dell'area del rotante *Epiciclo*, deſcrive un' *Eliſſe*.

Sia però dal centro *n* dell'*Epiciclo* condotta una *retta nd* che paſſi per il punto *b*, ovvero H preſo dentro, o fuori dell' *Epiciclo*, ed un'altra *retta* GP che paſſi per il centro C del *primo Mobile*, e per il punto *d*. Ora io non credo, che ſia di biſogno di dimoſtrare, che il punto *d* deſcriva la *retta* PG, giacchè quel medeſimo argomento, che già valſe nella *Fig.* 1., ſuppliſce qui tanto per il punto *d*, quanto per il punto *a* che deſcrive la *retta ab*; perchè il punto *d* era coſtituito come *a*, quando prima coincideva col punto P. Ordinati dunque i raggi de' mobili C*n*, *nd* nella *Fig.* 4., e 5. come ſtanno nella 2., e 3., dico che detto punto *b*, ovvero H, deſcrive un' *Eliſſe*, di cui l'*aſſe*

l'*aſſe* minore è eguale al doppio della *retta bd*, e l'*aſſe* maggiore è eguale al doppio di una *retta* compoſta di C*n*, ed *nb*, ovvero H.

Deſcritti pertanto i circoli A*p*B, IGP per i punti *p*, ed I da *n* così diſtanti, come il punto *b*, ovvero H, ſi conduca alla *retta* GP una perpendicolare ACB, che ſarà l'*aſſe* minore, perchè eguale al doppio di *bd*, e l'*aſſe* maggiore ſarà GP eguale al doppio della *retta* CI compoſta di C*n*, ed *nb* = *n*I.

Ora per provare, che il punto *b*, ovvero H ſi ritrovi nella circonferenza di un *Eliſſe* (prima dai punti *p*, ed I tirate alla *retta* GP due altre perpendicolari *po*, ed I*m*, che paſſano per il punto *b*, ovvero H) dimoſtrarò una ſempliciſſima, ma eſſenziale proprietà di detta *Eliſſe*: cioè che ſia GP. AB :: ovvero PC. AC :: I*m*. *bm*.

Imperciocchè eſſendo ſimili i triangoli C*po*, CI*m*, ſarà IC. I*m* :: *p*C. *po*. Permutando IC. *p*C :: I*m*. *po*; cioè *bm*, perchè eguale a *po*. Ma IC eguale a PC, e *p*C = AC; dunque PC. AC :: I*m*. *bm*. E però la doppia IC, che è GP alla doppia *p*C, che è AB :: I*m*. *bm*. Il che era da dimoſtrarſi. Ma acciocchè niuna parte di queſta dimoſtrazione poſſa rivocarſi in dubbio, proverò anche che la *retta* I*m* ſia perpendicolare alla *retta* GP, quantunque paſſi per il punto *b*, ovvero H. Perchè l'angolo eſterno C*nd* è eguale ai due interni inſieme *n*I*b*, *nb*I, i quali eſſendo eguali per eſſere per la coſtruzione oppoſti ad eguali lati *n*I, *nb*; l'angolo C*nd* viene ad eſſer doppio dell'angolo *nb*I. Ora calata giù la perpendicolare *ne*, queſta dividerà per metà l'angolo C*nd*, perchè per la coſtruzione C*n* = *nd*. E però gli angoli alterni *enb*, *nb*I ſaranno eguali. Dunque *en*, *b*I parallele, ſe dunque per la coſtruzione *ne* è perpendicolare a GP, alla ſteſſa del pari ſarà perpendicolare la *retta* I*bm* parallela ad *ne*.

Conseguenze dedotte dai tre precedenti Articoli.

1. Tutti i punti della circonferenza dell' *Epiciclo* (*Fig.* 1. 2. 3.) descrivano delle *rette* eguali, ciascuna fra loro, al diametro del cerchio massimo *a*D*b*R, ed alla somma dei diametri de' *Mobili primo*, ed *Epiciclo*.

2. Dagl' infiniti punti della periferia del ruotante *Epiciclo* viene in un tratto delineata tutta l' area del cerchio massimo *a*D*b*R, ed essendo i *Mobili primo*, ed *Epiciclo* eguali le *rette* descritte da detti infiniti punti, tutte s' intersecano nel centro C del cerchio massimo, tagliando l' una l' altra se stesse per metà, e diventando ogni metà raggio di detto cerchio massimo, come nella *Fig.* 6.

3. Queste *rette* dividono il circolo massimo in due volte tanti suddupli archi, quanti sono gli archi dell' *Epiciclo* intercetti fra i punti presi della sua periferia. Perchè (*Fig.* 2., e 3.) quando il punto *a* dell' *Epiciclo* descrive la linea *ab*, il cerchio massimo vien diviso in due archi eguali *a*D*b*, *a*R*b*; quando il punto C di detto *Epiciclo* descrive la linea DR, di nuovo il circolo massimo si divide in due altri eguali archi D*a*R, D*b*R. E però ecco l' *Epiciclo* diviso in due archi, ed il massimo in due volte tanti: cioè quattro, e ciò avviene perchè la periferia del circolo massimo è doppio di quello dell' *Epiciclo*. Di più per la medesima ragione l' arco *a*PR del cerchio massimo contiene la metà del numero de' gradi contenuti nell' arco *ad*C dell' *Epiciclo*, quantunque l' arco *a*PR sia di grandezza eguale all' arco *ad*C; e così l' arco *a*P contiene la metà del numero de' gradi contenuti nell' arco *ad*, quantunque detti archi siano di grandezza eguali.

4. Tutti i punti presi dentro, o fuori dell' area dell' *Epiciclo*, eccettuato il punto *n*, centro di detto *Epiciclo*, descrivano delle *Elissi*, che parimenti l' una l' altra s' intersecano, come nella *Fig.* 7., ma non mai nel centro C comune al *primo Mobile*, ed al cerchio massimo; perchè allora sono *Elissi* trasformate in *linee rette*, e soggette alla seconda Conseguenza.

Ma gli *assi* delle *Elissi*, che chiamo *Esteriori*, perchè descritte dal punto H preso fuori dell' area dell' *Epiciclo*, quindi ponno andare all' infinito rimovendo il punto H sempre più da *n*; e quinci terminano in una *retta*, quando detto punto H sempre più accostandosi a detto punto *n* (*Fig.* 2., e 3.), vada in passando a cadere nel punto *d*. Gli *assi* delle *Elissi Interiori* descritte dal punto *b* preso dentro l' area dell' *Epiciclo* hanno alternativamente i suoi termini, cioè quindi il circolo, e quinci una *retta*. Perchè quando *b* giunge a coincidere con *d*, la *retta* GP è l' *asse maggiore* massimo possibile, e l' *asse minore* è il minimo possibile, perchè ridotto a zero; quando poi *b* va a cadere nel centro *n* l' *asse maggiore* è il minimo possibile, perchè diventa zero; e l' *asse minore* è il massimo possibile, perchè eguale a tutto il raggio *nd*, ovvero *cn* due volte preso.

ANNOTAZIONE I.

Si può dire che la *retta ab* sia un vero Proteo geometrico; perchè ora è diametro del circolo massimo, ora mezza Cicloide eguale al diametro due volte preso del suo circolo generatore, ora un *Elisse* senz' *asse minore*, cosicchè (se mi è permesso scherzare in questa parte) si potrebbe ancor prendere per l' orbita di una Cometa. Imperciocchè quantunque *ab* sia un *Elisse*, di cui l' *asse maggiore ab* non è quasicchè infinitamente grande, come si suppongono esser quelli dell' orbite delle Comete; l' *asse minore* però è infinitamente piccolo, cioè eguale a zero; e però l' *asse maggiore ab* paragonato almeno al suo minore, cioè a zero, può considerarsi come infinito.

ANNO-

ANNOTAZIONE II.

Seguita ancor che per applicare l'Istromento alla descrizione dell'*Elisse*, basta comporlo come si è fatto per la *linea retta*, avvertendo solamente, che i raggi dei mobili non siano eguali.

ANNOTAZIONE III.

Si possono descrivere anche delle *Elissi*, di cui gli *assi* siano dati, e quindi secondo la loro distanza relativa descriver tutte le orbite de' Pianeti, o Comete, data che sia la ragion de' loro *assi*. Concissiacchè (*Fig.* 4. *Tav.* 15.) dati essendo gli *assi* maggiore *ab*, e minore *ed*; dove s'intersecano nel punto C fatto centro con l'apertura C*e* si descriva il circolo *edf*; indi divisa per metà la differenza *fa* dei due *semi-assi* in *n*; C*n* sarà il raggio del *primo Mobile noz*; *na* il raggio dell'*Epiciclo aqf*; a tenore dei quai raggi si avrà a regolare l'Istromento. Ma perchè potrebbe avvenire che i diametri delle ruote, o cilindri impedissero di poter precisamente aggiustar detto Istromento al raggio C*n* del *primo Mobile*; se non altro si potrà conseguir un'*Elisse*, se non precisamente quella *abed*, almeno una simile, cioè nella medesima proporzione dei detti dati *assi*: Come C*n* ad *na* :: così l'altro raggio del *primo Mobile* determinato dei diametri dalle ruote, o cilindri; al quarto termine che si cerca, e che sarà il raggio dell'*Epiciclo*. Onde ordinando l'Istromento a questi due ultimi termini, verrà un'*Elisse* a quella della *Fig.* 4. simile, & proporzionale.

ANNOTAZIONE IV.

Dalla passata Teoria facilmente si prova ancora la costruzione di un altro Istromento assai noto sotto il nome di *Compasso elittico*, e si scorge che manca di tutte le *Elissi interne* comprese tra i due ultimi confini *circolo*, e *linea retta*. Questo per altro gentilissimo Istromento consiste (*Fig.* 8. *Tav.* 14.) in una lamina circolare *a*D*b*R scavata ad angoli retti di due canalini *ab*, DR, che ai lati più si allargano più che s'affondano; nei quali scorrono due prismi di simil forma, costrutti ciascuno con un pivolo *d*, ed *r*, quali pivoli entrano nei buchi di un'asta ZQ fornita di una guida annessa ad uno stilo H. Messa però quest'asta in moto, dal pivolo *r* viene determinata nella direzione *ab*, e nel medesimo tempo dal pivolo *d* nella direzione DR. E intanto avviene, che per questo moto implicato lo stilo H descriva sul piano della carta un'*Elisse*.

Imperciocchè diviso per metà lo spazio *rd* in *n*, ed in detto *n* fatto centro coll'apertura *nr*, si descriva il circolo *r*C*d*, che stia per un supposto *Epiciclo*, quale in qualunque posizione dell'asta ZQ passerà per il punto C d'intersezione dei due canalini; perchè per la costruzione l'ipotenusa *rd* non può mutarsi, e l'angolo *r*C*d* alla periferia è sempre retto. Ora fatto centro ancora in C, colla medesima apertura di sopra, si descriva un altro cerchio, che rappresenti il *primo Mobile*. Ormai qui spicca la *Fig.* 1. per appunto, quale, senza che io entri in molte più parole, somministra la dimostrazione da se. Ma perchè (*Fig.* 8.) tutta l'area dell'*Epiciclo r*C*d* cade dentro il margine della lamina orizzontale *a*D*b*R; perciò lo stilo H impedito da detta lamina, non può esser condotto fin nell'area di detto *Epiciclo*. E per questo l'Istromento può descriver le sole *Elissi esterne*, ma non già l'*interne*, come la mia *Penna geometrica* e l'une, e l'altre descrive.

ARTI-

ARTICOLO QUINTO.

Descrizione organica del Circolo.

ENnunciando io fra gli usi di questo Istromento la descrizione del *circolo*, ciascuno che sia provveduto non che di un eletto, ma del più vil compasso non potrà sedare le risa, e acchettarsi, se prima non sa che io intendo di un *circolo* risultante dal moto composto di due circoli. Laonde se (*Fig.* 2. *Tav.* 15.) saran dati: primo i raggi C*n* del *primo Mobile*, ed *na* dell' *Epiciclo* in qualunque ragione; secondo mobili con eguali velocità; terzo in verso contrario. Dico che il punto *a* descrivera un *circolo* eguale al *primo Mobile*.

Ma ritorniamoci prima in memoria quanto si è detto di questa *Fig.* 2., quando nella prima parte di questo ragionamento servi per esempio della descrizione organica. Cioè che i raggi C*n*; *na* posti fossero per dritto, immaginando che così stassero prima di esser mossi, e che mossi poi il raggio C*n* a sinistra, e a destra il raggio *na* accadeva, che per le velocità date eguali, l'arco V*b* percorso dal raggio *ob* dell' *Epiciclo* era simile all' arco *no* percorso nel medesimo tempo dal raggio C*o* del *primo Mobile nop* ec. Cioè l'angolo V*ob* era eguale all' angolo *o*C*n*. Onde seguita che il raggio *ob* dell' *Epiciclo*, in qualunque punto *o* della perrferia *nop* del *primo Mobile* si ritrovi, sia alla retta C*n*, ed anche a se stesso *na* mai sempre parallelo. Perchè *bo*, *an*C formano un angolo eguale alla medesima retta C*o*V. Ciò posto, sarà *ob*, *qe*; *na*, K*f*; *tm*, *rg*; *pd*, S*b* sempre a se stesso eguale. Perchè poi è anche a se stesso parallelo sarà $bo + oe = oe + eq$; $an + nf = nf + fK$; $mt + tg = tg + gr$, e finalmente perchè *pd*, S*b* sono parallele, ed eguali sarà anche $pS = db$. Voglio dire che

che le ordinate al *primo Mobile nop* ec. sono egualmente distanti, ed eguali a quelle della Curva descritta, la quale sarà un *circolo*, giacchè anche il *primo Mobile* è un *circolo*. Quindi i punti *abd* ec. si ritrovaranno, dissi, nella periferia di un *circolo* eguale al *primo Mobile nop* ec. E perchè vale questa dimostrazione, qualunque sia la ragione di C*n* ad *na*, la proposizione si verifica in tutte le sue parti.

Ora quantunque abbia per fermo, che si sappia ormai applicare l' Istromento non solo alla descrizione del presente *circolo*, ma eziandio di qualunque altra Curva, di cui siano note le tre cause moderatrici; non ostante anche per questa volta pigliando io questa parte, dico che primo li raggi Q*r*, *r*S (*Fig.* 1. *Tav.* 11.) ponno essere in qualunque ragione; secondo i due cilindri, o ruote dentate debbono essere eguali; terzo nel caso dell' Istromento col filo, il filo toccherà i cilindri alle medesime parti; nel caso delle ruote, si dovranno separare le due ruote dei *mobili* con la roticella intermedia. E tanto basti di questo, perchè i *Fiori Geometrici* porgano più bella occasione di ragionare nel seguente

ARTICOLO SESTO.

Descrizione organica dei Fiori Geometrici.

IO stimarei che la *Penna* delineatrice di questi *Fiori* dovesse star solamente nelle mani di preclare, e dotte Donne; come quelle che non si curano de' frali, e caduchi, ma vogliono essere *ben d' altro ornate, che di perle, ed ostro*. Ne ha per vero dire, questo secolo d'uopo, onde per tali prodigj di quel sesso, porti invidia alli andati tempi, mentre fra i molti, onde abbonda, vanti una Laura Maria Cattarina Bassi, una Contessa Maria Agnesi, una Marche-

P

chesa (1) del Castelletto, quali e per le Matematiche, e per ogni sorta di Letteraria disciplina, sono ben altro, che non erano le tredici Liriche Donne, o altre celebrate dalle passate età.

Ma acciocchè facendo più a lungo menzione di questi nomi illustri, non sembri che io voglia quindi significare, che la mia *Penna Geometrica* meriti di entrare in considerazione di così fatte Donne, ripigliando un poco più a dietro il mio istituto, ben vi ricorda che il nostro Istromento fu accompagnato da dodici cilindri, o ruote dentate, i diametri delle quali crescevano di mano in mano, come 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; e che per eccitare per qualunque data descrizione le occorrenti velocità, sempre adoperavano due di detti cilindri, o ruote dentate. Come però la varietà, e leggiadria de' *Fiori Geometrici* appunto viene per causa delle cangiate velocità; così mi è parso bene

(1) Su la morte di questa Donna valorosa il Sig. di Voltaire fece questi leggiadri versi:

L'Univers a perdu la sublime Emilie:
Elle aimoit les plaisirs, les arts, la verité
Les Dieux en lui donnant leur esprit, leur genie,
Ils ne garderent pour eux, que l'immortalité.

Versione elegantissima del Sig. Conte Durante Durante.

Lasciato ha Emilia questo carcer frale,
Le grazie, le bell'arti, e il ver le piacque;
Per virtude, ed ingegno a Dei fu eguale,
Dissimil solo che immortal non nacque.

Altra Versione del Medesimo.

Tristes Emilia has sedes, noctemque reliquit,
Quæ verum atque artes, & Charites coluit.
Par genio superis, animo, virtute, decore;
Impar quod mortem vincere non potuit.

bene produrre in questo luogo (*Fig.* 1. *Tav.* 18.) tutti i binarj, o siano combinazioni a due a due, che risultano da 12. numeri, cioè dai dodici cilindri, o ruote dentate predette. E prendendo in detta *Fig.* 1. per esempio il binario $\frac{1}{7}$, vuol dire, che posto nel centro di un *mobile* il cilindro, o ruota 1, e nel centro dell' altro *mobile* il cilindro, o ruota 7, la velocità dei *mobili* sarà come 1 a 7. Onde per essere le velocità in ragion inversa del diametro de' cilindri, se sarà posto (*Fig.* 5. *Tav.* 15.) nel centro C del *primo Mobile* *nm* il cilindro, o ruota 7, e nel centro dell' *Epiciclo*, il cilindro, o ruota 1, mentre il *primo Mobile* percorrerà una sola settima parte della sua periferia, cioè l'arco *nm*, l'*Epiciclo* compirà un' intiera rivoluzione, e descriverà non pertanto una sola settima parte *aed* di tutta la Curva, che sarà un *Ettafoglio*.

A dilucidare maggiormente questa materia, fa molto a proposito il ricordare un piccol problema aritmetico, di cui con molto spirito, e acume d'ingegno è stato già (1) fatto uso nella fabbrica di un anello (*Fig.* 9. *Tav.* 14.) consistente in un filo di metallo ripiegato in sedici ben compartite spire, e disposte in forma di un cerchio. Questo lavoro, che devesi concepire non già piano, come in figura appare, ma tale che co' suoi giri un solido rappresenti, riusciva invero prestigioso, e mirabile, perchè il filo pareva stare da se equilibrato, e sospeso. L'artificio tutto consisteva nel suddetto problema, qual è: unire con sole linee rette successive, o una sola linea curva, e che ritornino in se stesse al primo punto di partenza, un numero qualunque di punti dati nella periferia di un circolo.

Il che in due modi si risolve: o (*Fig.* 2. *Tav.* 18.) conducendo la linea dal primo punto *a* sempre al più prossimo *b*, poi Q ec., che chiamo *modo comune* per essere assai

(1) Cardano citato dal Weckero nel *Lib.* 27. *de Secretis*.

ſai più tritto, e volgare, e per cui detta linea non fa più di un giro d'intorno al centro C; o tirando detta linea (e chiamo queſto *modo elegante*) dal punto *a* (*Fig.* 3.) ad un altro *d* diſtante da *a* un tal numero di ſpazj, che non ſia parte aliquota del numero dato; come il 3 numero de' ſpazj trapaſſati, che non è parte aliquota del numero dato 8. Perchè chi non vede che adoperando il 2 aliquota dell' 8, cioè tralaſciando due ſpazj, in vece di un ottogono che ſi cerca, ſarebbene venuto un quadrato? Concioſſiacchè dividendo 8 per 2 il quoto ſia 4? Nel caſo dunque che ſi tralaſcino tre ſpazj, la linea gira intorno al centro, o punto C tre volte, avanti di ritornare al punto *a* d'onde ebbe principio.

Ma per lo più nella ſerie naturale de' numeri, il numero che proſſimamente ſeguita o precede il numero dato, per eſempio 8, dà nelle proprie aliquote il numero dei ſpazj, che hanſi a tralaſciare. Così nell' addotto eſempio il 9, che proſſimamente ſeguita 8, ha l'aliquota 3, che non eſſendo aliquota del numero dato 8., accenna il numero di detti ſpazj. Così pure quando per la coſtruzione dell' anello preſtigioſo (*Fig.* 9. *Tav.* 14.) furono dati 16 punti da unire, il precedente numero 15 ſomminiſtrò nelle proprie aliquote 3, 5 il numero dei ſpazj da ommetterſi; e in detta *Fig.* 9. fu ſcielto il 3, giacchè ſi vede che ciaſcuna ſpira di mano in mano tre ſpazj abbraccia. Coll' uſo dell' aliquota 5, cioè con ommettere cinque ſpazj, l'anello ſarebbe riuſcito anche più bello, ed aſſai più intrecciato; e perchè nel primo caſo il filo gira d'intorno al centro C tre volte, e cinque nel ſecondo caſo, prima di riunirſi ad un punto qualunque *a*, d'onde incomincia; così non ſolo all' occhio, ma anche all' immaginazione, ſfuggendo queſto primo punto qualunque, e non apparendo in detto filo nè principio, nè fine, pare più toſto, che da ſe ſolo in alto ſtia ſoſpeſo.

Le

Le aliquote de' numeri, vietano anche che per ſtabilire le velocità de' *mobili*, ſi poſſa far uſo di tutti i binarj, o combinazioni; perchè il numero che ha un' aliquota inchiude ſempre quattro termini proporzionali. Il primo de' quali è il numero dato (per eſempio 10), cioè il numero da dividerſi. Il ſecondo l'aliquota, o ſia diviſore (ſia 2). Il terzo il quoto (ſarà 5), perchè un numero che ha un diviſore non può mancar di quoto. Il quarto l'unità (dico 1), che è miſura di tutti i numeri. Perciò, ſe uſo ſi faccia del binario compoſto del dividendo, e diviſore (cioè $\frac{10}{2}$), inutile diventa il binario compoſto del quoto, ed unità (dico $\frac{5}{1}$; eſſendo il dividendo al diviſore, come il quoto all' unità; eſſendo dico 10. 2. :: 5. 1. Laonde nell' iſtituzione del calcolo, e tavola delle combinazioni (*Fig.* 1. *Tav.* 18.) da ciaſcun di queſti ordini $\frac{1}{2}.\frac{2}{4}.\frac{3}{6}\ \frac{4}{8}.\frac{5}{10}.\frac{6}{12}$; $\frac{1}{3}.\frac{2}{6}.\frac{3}{9}.\frac{4}{12}.$; $\frac{1}{4}.\frac{2}{8}.\frac{3}{12}$; $\frac{1}{5}.\frac{2}{10}$; $\frac{1}{6}.\frac{2}{12}$; $\frac{2}{3}.\frac{4}{6}.\frac{6}{9}.\frac{8}{12}$; $\frac{2}{5}.\frac{4}{10}$; $\frac{3}{4}.\frac{6}{8}.\frac{9}{12}$; $\frac{3}{5}.\frac{6}{10}$; $\frac{4}{5}.\frac{8}{10}$; $\frac{5}{6}.\frac{10}{12}$; conſervato un binario, ho cancellato gli altri, che ſi trovavano nella medeſima proporzione. Perchè egli è evidente, che, trattandoſi della deſcrizione di un *Trifoglio*, ſi potrebbe far uſo di due cilindri, o ruote ſegnate con li numeri 1, e 3 del primo binario $\frac{1}{3}$; 2, e 6 del ſecondo $\frac{2}{6}$; 3, e 9 del terzo $\frac{3}{9}$ ec., e nulladimeno, il reſto pari, non verrebbe mai più che un *Trifoglio*, eſſendo ſempre per eſſere eccitata nei *mobili* la medeſima ragione di velocità, come 1 a 3.

Per altro tutti i *Fiori*, eccettuato il *Trifoglio*, *Quadrifoglio*, e l'*Eſafoglio*, che con linee rette non permettono d'eſſer deſcritti, che pel ſolo modo *comune*, ſono capaci della deſcrizione *comune* ed *elegante*; ma meglio avviene a quelli, de' quali il numero denominatore è privo di parti aliquote, come l'*Endecafoglio*,

cafoglio, il di cui denominatore 11, essendo numero primo, prodigiosamente varia, potendosi in cinque modi descrivere con una linea retta, e in dieci con una curva; cioè nel primo caso adoperando ciascuna delle cinque aliquote 1, 2, 3, 4, 5 dei due prossimi numeri 12 e 10, restando soverchia l'aliquota 6 del 12, come complimento all' 11 della già usata aliquota 5; e l'aliquota 2 del 10, come comune anche al numero 12. Nel secondo caso si fa uso poi non solo delle suddette aliquote; ma ancora di tutti i complimenti all' 11, che sono il 10, 9, 8, 7, 6; facendo però, che il raggio dell' *Epiciclo* sia nel caso delle aliquote minore del raggio del *primo Mobile*; e nel caso de' complimenti, maggiore. Non altrimenti il *Decatrifoglio* per la medesima ragione può delinearsi in sei modi con linea retta, e con linea curva in dodici ec.

ARTICOLO SETTIMO.

Descrizione organica di Poligoni *quasi* rettilinei.

INtanto per alleviare il fastidio, che mi reca l'impossibilità di descrivere *Poligoni rettilinei* simili a quelli della *Fig.* 2. e 3. (*Tav.* 18.) e quali sono dagli empj Negromanti abusati nei stolti loro riti, voglio far vedere, che tre punti per lo meno *e*, G, *b* si può fare che vengano situati per dritto in una medesima linea; e che gli altri punti declinino talvolta quasi insensibilmente; essendo la via della retta così poco distante dalla via della curva, ch' egli è poco men che non coincidano, come dimostra la *Fig.* 8. *Tav.* 16.

Sia dunque dal centro C (*Fig.* 4. *e* 5. *Tav.* 18.) condotta C*a* perpendicolare ad *e*G*b*, corda di un arco qualunque *bae*, e l' assissa G*a* sia divisa per metà in *m*. E dipoi sia primo il raggio C*n* del *primo Mobile* eguale a C*m*, ed il raggio *nd* dell' *Epiciclo* eguale ad *ma*, ovvero *m*G. Secondo, la velocità

locità del raggio C*n* del *primo Mobile* sia alla velocità del raggio *nd* dell' *Epiciclo*, come l' arco *bae* a tutta una periferia. Terzo, i moti in verso contrario. Dico ora, che la Curva descritta dall' ultimo punto *d* del raggio *nd* dell' *Epiciclo* avrà per lo meno tre punti *e* G *b* situati in una medesima retta *e*G*b*.

Laonde si supponga, che, prima che i *mobili* fossero messi in moto, C*n* coincidesse con C*u*; ed *nd* con *ue*, ed *nz*. Cosicchè amendue costituissero una medesima retta C*e*. Indi partiti da questa prima posizione, ed in quella giunti, che la figura mostra, figuriamoci che il raggio C*n*, avendo percorso tutto l' angolo *u*C*n*, abbia fatta una quarta parte del suo viaggio: val a dire, una quarta parte di tutto l' angolo *ecb*; onde anche il raggio *nd* avrà fatta una quarta parte del suo, che è un quarto di circolo *znd*. Allora il punto *d*, quantunque parer possa di trovarsi nella retta *e*G*b*, pure non vi sarà; ma quando C*n* giunto a coincidere con C*m* avrà fatto la metà del suo corso, cioè la metà dell' angolo *e*C*b*, anche il raggio *nd* avrà percorso la metà di un circolo, ed il punto *d* si troverà in G, perchè per la costruzione $nd = m$G; si troverà, dico, lontano da *z*, ovvero *a*, in cui ora s'intende che *z* coincida, due angoli retti. E così quando C*n*, arrivando per fine a coincidere con C*f*, avrà compito tutto il suo viaggio, che è tutto l' angolo *e*C*b*; anche *nd* sarà venuto a fin del suo, cioè avrà compita un' intiera rivoluzione, e *d* coinciderà con *b*. E perchè finalmente questi tre punti *e*G*b* sono dati per la costruzione in una retta, in quella appunto saranno dal punto *d* descritti. Ciò che era da dimostrarsi.

ARTI-

ARTICOLO OTTAVO.

Dettaglio delle cause moderatrici di ciascuna Curva posta per esemplare delle molte spettanti a questo Istromento.

SArebbe forse stato non ingiocondo spettacolo mostrare, oltre altre Curve, una serie seguita di tutti i *Fiori*, che descrive l'Istromento, principiando dall'*Unifoglio*, fino al *Dodecafoglio*; se non fosse, che io ho giudicato, che da que' pochi messi qui per esemplare dei molti che mancano, si avesse facilmente potuto prender idea anche degli altri; e che se non altro per mezzo della *descrizione per punti* suggerita nella prima parte di questo discorso, ciascun potesse farne nascere da se quanti vuole; avvisando per altro, che nè per l'ardente Sole dell'Estate, nè per le nevi, e ghiacci dello squallido Verno siano mai per diventare riarsi, o smonti.

Mi restringerò dunque a suggerire le cause moderatrici di questi pochi *Fiori*, e Curve, e prima

Figura 1. *Tav.* 15. *Unifoglio*.

1. Raggio del I. *Mobile* sta al raggio dell' *Epiciclo*, come 10 a 5 in circa.
2. Velocità del I. *Mobile* = a quella dell' *Epiciclo*.
3. Moto del I. *Mobile* in conseguenza del moto dell'*Epiciclo*.

* La punta *m* della Curva è moltiplice; onde se il raggio dell' *Epiciclo* fosse stato più lungo, detta punta si sarebbe aperta in un ceno, o nodo simile a quelli della *Fig.* 5. Questa nota vale per le punte di altre Curve soggette a questo Istromento, come la 3, 9 ec.

Figura 2. *Unifoglio*, o *Circolo*.

1. Raggio qualunque.
2. Velocità eguali.
3. Moti l'un dell'altro in verso contrario.

Fig. 3.

Figura 3. *Bifoglio*.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 10. $3\frac{1}{2}$ in circa.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 2.
3. Moti in conseguenza.

Figura 4. *Bifoglio*, *Elisse*, o *Linea retta*.

1. Raggi qualunque, purchè non siano eguali, perchè in tal caso diventa una *retta*.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 2.
3. Moti contrarj.

Figura 5. *Ettafoglio*.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 7. 2. in circa.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 7.
3. Moti in conseguenza.

Figura 6. *Ettafoglio*.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 2. 3. in circa.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 4. 7.
3. Moti in verso contrario.

Figura 7, 8, 9, 10, 11, 12, *Trifoglio*.

1. Sono queste quelle 6. figure citate nel calcolo delle Curve, le quali variano per il solo cangiamento della proporzione de' raggi, le altre cose rimanendo le stesse. Perchè il raggio del I. *Mobile*, che era maggiore di quello dell' *Epiciclo* nella *figura* 7, a poco a poco si è diminuito sempre più nella *figura* 8, 9, 10; finchè nella *figura* 11 detto raggio del I. *Mobile* è eguale a quello dell' *Epiciclo*; anzi

Q

anzi nella *fig.* 12. il raggio dell' *Epiciclo* è diventato maggiore del raggio del I. *Mobile*; e quindi per questo solo la Curva si trasforma nelle sei figure contenute nella *Tavola* 16.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 3.
3. Moti contrarj.

Figura 13. *Ottofoglio*.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 5. 8.
3. Moti in conseguenza. Se contrarj, nasce la *figura* 14.

Figura 15. *Decafoglio*.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo*:: 3. 10.
3. Moti contrarj.

* Sino a questa *figura* 15. la velocità dell' *Epiciclo* è stata maggiore della velocità del I. *Mobile*. Le figure poi che seguono 16, 17, 18 sono tre esempj di Curve provenienti dalla velocità di quello minore di quella di questo.

Figura 16.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 2. 1.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 2.
3. Moti in conseguenza.

Figura 17.

1. Raggio del I. *Mobile* minore alquanto del diametro dell' *Epiciclo*.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 1.
3. Moti contrarj.

Figura 18.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 1.
3. Moti in conseguenza.

Sup-

Supponendo io ora che ciascuno che sia arrivato sin qui sia capace di comporre da se l' Istromento alle date cause moderatrici, mi basterà chiuder quest' Articolo coll' accennare, che per questo si divide il circolo in tante date parti, ma che non siano più di 12; primieramente usando per lo meglio binarj, che abbiano per un termine l' unità; come per esempio, volendolo dividere in sette parti, di questi binarj $\frac{1}{7}.\frac{2}{7}.\frac{3}{7}$, che si potrebbero adoperare, usando, dissi, piuttosto il binario $\frac{1}{7}$. Secondo, pongasi attenzione, che il raggio dell' *Epiciclo* sia piuttosto corto rispetto a quello del I. *Mobile*. Terzo, che i moti siano eccitati in verso contrario, onde veranno figure simili alle *Fig.* 7, 8, 9 della *Tav.* 16.; e per le punte di dette figure, e più precisamente delle simili alla 9, verrà diviso un circolo di diametro eguale al diametro del I. *Mobile*, più il diametro dell' *Epiciclo*, secondo l' addotto esempio, in parti sette. Cosicchè unendo poi dette punte con altrettante rette avrebbesi la descrizione finita di un *ettagono* rettilineo. Il che sia detto di qualunque altro *poligono*, mutando solo i binarj a tenore delle date velocità.

ARTICOLO NONO.

Descrizione organica delle Cicloidi *di base circolare*.

PEr dimostrare come appartengono a questa *Penna* le *Cicloidi* nascenti per lo volger di un cerchio su la periferia *convessa*, o *concava* di un altro cerchio, consideraremo prima attentamente in qual disposizione di circostanze si ritrovi (*Fig.* 6. *Tav.* 18.) l' *Epiciclo* *afd*, che per descrivere una *Cicloide* cammina sulla immobile periferia *convessa* *doK*.

Pri-

Primieramente oſſervo, che nel medeſimo tempo che l'*Epiciclo* percorre tutta l'immobile periferia, anche il punto di contatto d compiendo ſulla medeſima il ſuo giro ritorna al punto d d'onde era partito; e perchè tanto avviene nel medeſimo tempo, anche del centro b di detto *Epiciclo*, che al punto b, d'onde partì per la periferia bgb, ritorna (concioſſiacchè il centro b ſi ritrovi (1) mai ſempre nella direzione del raggio Cdb, che congiunge il punto di contatto d col centro C del cerchio immobile doK); perciò in tempi eguali il punto d, ed il punto b amendue formano eguali angoli al centro comune C. Onde io ne tiro queſta conſeguenza, che ſi potrebbe prendere il circolo bbg per *primo Mobile*, il di cui raggio Cb ſarà eguale al raggio Cd del cerchio immobile più il raggio bd dell'*Epiciclo*.

2. Tante rivoluzioni fa l'*Epiciclo* ſopra l'immobile *conveſſa* periferia doK, mentre il punto di contatto d al punto d d'onde partì ritorna, quante volte la periferia doK contiene la periferia dell'*Epiciclo*. Cioè a dire (giacchè le periferie ſono in ragion de' diametri), quante volte il diametro dK contiene il diametro ad. E quindi ſta il numero delle revoluzioni dell'*Epiciclo* ad una revoluzione del punto di contatto d, come il diametro dK del cerchio immobile doK al diametro ad dell'*Epiciclo*. Ma ho già detto che il punto di contatto d, ed il centro b dell'*Epiciclo* formano ſempre eguali angoli al comune centro C. Dunque io concludo che la velocità angolare dell'*Epiciclo* è alla velocità angolare del ſuo centro b (cioè del *primo Mobile* bgb), come il diametro dK del cerchio immobile al diametro ad dell'*Epiciclo*.

3. A quel medeſimo verſo, che procede il punto di contatto d, non che il centro b dell'*Epiciclo*, per eſempio a ſiniſtra verſo o, ed b, procede ancora qualunque punto a della

(1) Eucl. lib. III. prop. 14.

periferia dell'*Epiciclo* a ſiniſtra verſo f.

Poichè abbiam eſaminato coſa accada, quando l'*Epiciclo* ruota ſopra la periferia *conveſſa* di un altro cerchio immobile, vediam coſa ſucceda quando gira in una *concava*, cioè quando l'*Epiciclo* dmx ruoti nella *concava* periferia del cerchio immobile doK.

1. In primo luogo avviene, che il raggio Ce del circolo enp (che ſarà il *primo Mobile*) formato dal centro e del ruotante *Epiciclo* dmx è eguale al raggio Cd del cerchio immobilè, meno il raggio de dell'*Epiciclo*.

2. Le velocità angolari del centro e dell'*Epiciclo*, e del punto di contatto d ſono le medeſime, perchè il centro e dell'*Epiciclo interiore* ſi ritrova puntualmente in quella medeſima direzione, in cui già abbiam detto, che ſi ritrova il centro b dell'*Epiciclo eſteriore*, cioè (1) nella direzione del raggio Cd, che uniſce il centro C col punto di contatto d.

3. In vece che i moti ſeguano come ſopra in conſeguenza, qui riflettendo attentamente ſi oſſerva, che occorrono in verſo contrario.

Ora dato il raggio così dell'*Epiciclo*, come del cerchio immobile, ſu cui haſſi a volger l'*Epiciclo*; dato di più ſe le revoluzioni di detto *Epiciclo* abbiano ad eſſere in una periferia *conveſſa*, o *concava*, chiaramente riſulta, come ad una tal *Cicloide* debbaſi comporre l'Iſtromento. Supponiamo dunque che e l'uno, e l'altro ſia dato. Sia dato Cd raggio del cerchio immobile, al raggio db dell'*Epiciclo*, come 3, e 1; e s'intenda l'*Epiciclo* dover ruotare ſopra la periferia *conveſſa* doK.

1. Primieramente dovendo eſſere il raggio Cb del *primo Mobile* al raggio ba dell'*Epiciclo*, come la ſomma de' raggi del cerchio immobile, e dell'*Epiciclo*, al raggio dell'*Epiciclo*. ſarà Cb, ba :: 4. 1. Dove ſe nel determinare così nell'Iſtromento la lunghezza de' raggi s'incontraſſe la difficol-

(1) Eucl. lib. III. prop. 13.

ficoltà (1) avvertita in proposito degli *assi* dati per la descrizione di un' *Elisse*, si operarà come ivi si disse.

2. Dovendo essere la velocità del *primo Mobile* *bbg* alla velocità dell' *Epiciclo* *afd* in ragione inversa de' diametri C*d*, *db*; la velocità di quello sarà alla velocità di questo, come 1 a 3.

3. Il *primo Mobile*, ed *Epiciclo* si hanno a volgere al medesimo verso. E però ordinato l'Istromento a queste leggi, o cause moderatrici, il punto *a* della periferia dell' *Epiciclo* descriverà la *Semi-Cicloide* *a o*, ovvero l'intiera proposta *ζao*; l'istessa appunto, che verrebbe descritta nel supposto dell' *Epiciclo* *afd* ruotante sulla periferia *convessa* *do*K.

Ma se stante ancora la medesima ragione di C*d* ad *ed* diametri de' cerchj dati, come 3. 1., l' *Epiciclo* non più sopra una periferia *convessa*, ma in una *concava* *do*K si volgesse.

1. Primieramente dovendo essere il raggio *ce* del *primo Mobile* al raggio *ed* dell' *Epiciclo*, come il raggio *cd* del cerchio immobile, meno il raggio *ed* dell' *Epiciclo* al raggio dell' *Epiciclo*; sarà C*e*. *ed* :: 2. 1.

2. La velocità del *primo Mobile* a quella dell' *Epiciclo* sarà ancora la medesima: voglio dire, come 1. 3.

3. In questo caso i moti dovran seguire in verso contrario. A tenore di queste leggi regolato l'Istromento, dal punto *x* della periferia dell' *Epiciclo* *xmd* verrà descritta la *Semi-Cicloide* *xo*, ovvero l'intiera *ζxo*.

Per questi esempj si potranno richiamare all'Istromento tutte quelle *Cicloidi*, le quali siano generate da' *mobili* commensurabili, anzi de' quali le velocità siano comprese in quelle, che per la combinazione de' 12. cilindri, o ruote dentate risultano, che sono 181. per lo appunto; cioè 45. per il caso di un *Epiciclo* volgentesi sulla periferia *convessa* di

(1) Part. III. Artic. IV. Annot. 7.

di un maggior cerchio immobile. Altre 45 per il caso, che l' *Epiciclo* si volga nella periferia *concava* di un maggior cerchio; sono pure 45 dove un *Epiciclo* cammina sulla periferia *convessa* di un minor cerchio immobile; indi altre 45 per il caso nel quale una periferia *concava* *do*K può camminare sopra la periferia *convessa* di un minor cerchio supposto immobile *dmx*; e finalmente una per il caso di un *Epiciclo* rotante sulla periferia *convessa* di un egual cerchio, restando due soli casi impossibili per questo genere di *Cicloidi*; cioè che un cerchio camminar possa nella periferia *concava* di un minor cerchio, o di un cerchio eguale.

ARTICOLO DECIMO.

Descrizione organica delle Spirali.

NOi ci troviam finalmente arrivati a quel genere di Curve, che furono le ultime nominate fra gli usi di questo Istromento, ma che per l'eccellenza loro furono in considerazione degli antichi, e lo sono ancora de' moderni Filosofi; perchè da quelli furono applicate alla quadratura del cerchio, e da questi ad altri usi. Ed in quanto alla loro generazione, per essere dipendente dal moto composto di retto, e circolare, se saranno (*Fig.* 7. *Tav.* 18.) descritti molti circoli concentrici, e dal loro comune centro C condotti molti raggi equidistanti, ed intersecantesi con le periferie di detti circoli, la linea condotta dal primo punto *a* d'intersezione al prossimo *g*, indi al vicino *b*, e così via via alli restanti punti K*mnoζ*C, sarà una *Spirale*, che io chiamo *Circolare*; ma se in luogo dei circoli fossero date (*Fig.* 8.) tante *Elissi* parallele, e concentriche, sarebbero riuscite *Spirali* da me dette *Elittiche*. Tutte però nascenti da un punto *a* qualunque per la retta *a*C tendente al centro C, mentre detta *a*C si volge in giro. Il moto di questa

sta retta *a*C si suppone qui circolare; ed il moto del punto *a* per detta *a*C può essere equabile, ed inequabile; e sempre gli spazj *am*, *m*C fra una spira *agb*K*m*, e l'altra prossima *mnoz*C si trova in ragion composta della velocità del punto *a* per detta *a*C, e della velocità della medesima retta intorno al centro C. E quando la velocità della retta *a*C intorno a C sia equabile, e costante, li spazj *am*, *m*C saranno in ragione della velocità del punto *a* per detta *retta a*C. Qui pertanto si suppone che la *Fig.* 7. mostri una *Spirale* nata dal moto del punto *a* composto di di due movimenti uniformi, uno circolare d'intorno *a*C, e l'altro retto per la *retta a*C; cosicchè mentre per causa del primo la *retta a*C compie d'intorno *a*C una parte qualunque di un'intiera revoluzione, il punto *a* lungo detta *retta a*C proporzionalmente percorra una simil parte; e però questa è la *Spirale di Archimede*. La *Fig.* 8. poi è composta dal moto retto, ed elittico.

Si dovrebbero aspettare simili, e proporzionati effetti, secondo che il moto del punto *a* per la *retta a*C fosse accelerato equabilmente; o pure accelerato, o ritardato con qualunque variazione di velocità; dovendosi perciò la spira restringere, o allargare secondo la maggiore, o minore velocità, che sia in data ragione, si potranno immaginare *Spirali* innumerabili.

Ora per preparar l'Istromento (quello però de' fili) a queste Curve niente v'è di più facile. Perchè prima (*Figura* 3. *Tav.* 11.) condotta la punta S del raggio QS tra i due assi QG, RP, e fatto per modo che detto raggio soggiaccia per il lungo esattamente all'asta MN, si restringa poi validamente la vite P, onde tutto il corpo ombreggiato QRS*dm*P resti fermo, ed immobile nella sua guida *n*; ma la vite laterale *n* affatto si rallenti, acciò essa guida *n* diventi labile, e scorrente per il lungo della rotante asta MN verso M, portando seco tutto il corpo ombreg-

breggiato. Siano indi preparati quattro pezzi (*Fig.* 5. *Tav.* 11.) per la forma loro nominati il primo cilindro circolare, il secondo cilindro elittico, il terzo cono circolare, il quarto cono elittico; perchè messo nell'asse QG il primo di detti pezzi in vece del cilindro ZT (*Fig.* 3.), e facendo poi girare l'asta MN si avvolgerà su detto pezzo il filo, che perciò tira tutto l'asse PR, in un con lo stilo S, verso all'asse QG; e dallo stilo S verrà descritta sul piano della carta la *Spirale* della *Fig.* 7. *Tav.* 18.; che se fosse stato adoperato il secondo pezzo avrebbesi conseguita la *Spirale* della *Fig.* 8.; se il terzo, la *Spirale* assomigliarebbe alla settima, se il quarto all'ottava. Ma in questi due ultimi casi, li spazj fra una spira, e l'altra andarebbero decrescendo, o crescendo verso il centro, secondochè il filo cominciasse ad avvolgersi su detti pezzi terzo, e quarto dalla parte del vertice *m*, o della base *o*.

Qui poi è d'avvertire che il numero delle spire di queste curve, sarà sempre eguale al numero delle rivoluzioni dell'asta MN; secondo, che gli spazj *am*, *m*C (*Fig.* 7. *Tav.* 18.) fra una spira, e l'altra intercetti saranno eguali alle porzioni del filo, che si avvolgeranno d'intorno a detti pezzi per ciascuna rivoluzione relativa a detti spazj. E queste porzioni di filo sono eguali alle spire, che il filo avvolgendosi forma sulla superficie dei sopraddetti pezzi. Ma si è detto che gli spazj *am*, *m*C sono in ragione della velocità del punto *a* per la retta *a*C; dunque le spire sulla superficie dei pezzi formate dal filo sono in ragione di detta velocità. Onde segue, che per ottenere qualunque *Spirale* sarebbe necessario sapere la ragione di detti spazj per incidere (*Fig.* 5. *Tav.* 11.) sulla superficie dei solidi terzo, e quarto un incastro a spira in detta ragione, in cui vada il filo come ad innicchiarsi; perchè poi svilluppandosi si generasse la *Spirale* proposta. Ben è vero però, che così sarebbe lo stesso che far nascere una *Spirale* da un'altra.

R Per

Per conseguire la sopprariferita *Spirale d' Archimede* concepita da esso per (1) la quadratura del circolo, si carichino i due assi (*Fig.* 3. *Tav.* 11.) QG, RP di due cilindri eguali, e si faccia che il filo sia ben teso, e tangente detti cilindri alla medesima parte, perchè indi mosso l' Istromento verrà descritta la *Spirale* suddetta.

Suggerisco inoltre, che con il medesimo Istromento dette *Spirali*, quasi per rappresentare la forza centripeta, cominciando lungi dal centro ponno procedere verso il centro; e per contrario volendo fingere la forza centrifuga, possono esser descritte cominciando dal centro, come ha fatto il Sig. Abate (2) Nollet nelle sue sperienze.

Ma finalmente essendo esposti anche gli usi di questa *Penna Geometrica*, e spedito quant' era d' uopo nel supposto di un Istromento consistente in due mobili cerchj, parmi che dover sia passare alla seguente ultima Parte, per esaminare a quali usi sarebbe atto un Istromento simile, ma che di tre, o più di detti cerchj mobili fosse composto.

PARTE QUARTA.

Degli usi d' un Istromento simile alla suddetta Penna Geometrica. *Ma composto di un numero di* Mobili *qualunque dato.*

Avvegnacchè la maggior parte degli Uomini curi, ed ambisca quelle cose, che possono condurre a più alto stato di fortuna, o tal' altra cosa fornire, che più piaccia a questo nostro, cheche siasi, incomprensibile umano composto; pure quella parte di noi, che mente, e spirito si appella, tal-

vol-

(1) Archimede dimostra nella prop. 18. delle *Spirali*, che (*Fig.* 7. *Tav.* 18.) dal punto *m*, termine della prima rivoluzione, menata nella Prodotta C*b* una tangente alla *Spirale*; lo spazio preso su detta retta C*b* da C fino all' incontro della tangente è eguale alla circonferenza del circolo che passa per *m*.

(2) Lezion. V. esper. 6.

volta schiva, o satolla di queste comuni cupidità, sollevasi a più nobili occupazioni, e gusta anche tali cose, che non possono a vil guadagno, nè a volgar diletto tornare. Così ora a me avviene, e molto più avverrà ad alcun altro, che sia per le geometriche verità di ben disposta mente. Perchè l' animo nella considerazione delle cose, che si trattano in questa Parte, benchè fossero anche per essere inutili, si estolle, e ricrea; e intanto per un tale trattenimento si dimentica delle ingiurie de' tempi, nè bada alle pur troppo spesse noje, e fastidj che ci stanno d' intorno.

Acciocchè dunque non si tardi ad entrar meco a parte di questo vero piacere, comincìarò in questo primo Articolo a favellare della quantità delle linee provenienti dal moto di un Istromento, che a similitudine della *Penna Geometrica* fosse composto di un numero di *Mobili* qualunque dato. Negli altri Articoli poi la qualità di esse linee si dimostrarà; ma per non andare all' infinito si restringeremo alla *linea retta*, al *circolo*, alla *elisse*, ed alle *curve planetarie*.

ARTICOLO PRIMO.

Numero delle Curve provenienti da un Istromento composto di un numero de' Mobili *qualunque dato.*

Questo numero si determina assai prestamente, dopo che in altro (1) luogo fu trovato il numero conveniente nel supposto dell' Istromento composto di due mobili; perchè allora il *secondo Mobile*, o sia *Epiciclo* relativamente al *primo*, che perpetuamente descriveva un circolo, descrisse 1273 Curve. Ma poichè quelle tre cause moderatrici, che ivi valsero nel *secondo Mobile* rispetto al *primo* a produr tanta varietà, si suppone che qui vagliano le medesime nel *terzo* rispetto al *secondo*, perchè questo Istro-

R 2 men-

(1) Part. III. Artic. I.

mento deve eſſer ſimile a quello. Perciò il *terzo Mobile* per ciaſcuna Curva deſcritta dal *ſecondo* deſcriverà parimenti 1273 Curve. Dunque moltiplicato in ſe ſteſſo il numero 1273 riſulterà 1616529 numero delle Curve ſpettanti al *terzo Mobile*. Un ſimil diſcorſo prova, che per determinare il numero delle Curve per il *quarto Mobile*, non ſi ha che moltiplicar in ſe ſteſſo queſto ultimo numero, e così per il 5, 6 ec. Onde ſe il primo numero 1273 derivante dal numero dei mobili dato 2 ſi chiama a, ſecondo che i mobili dell' Iſtromento ſaranno 2, 3, 4, 5 ec. il numero delle Curve verrà a. a^2 a^4 a^8 a^{16} ec.

ARTICOLO SECONDO.

Linea retta, *ed* Eliſſe, *che naſcono dal moto compoſto di tre cerchj.*

IL primo Problema, che in queſta quarta Parte ci viene innanzi, parmi nel vero aſſai grazioſo, ed è la deſcrizione di una *retta* per il moto compoſto di tre cerchj, per riſolvere il quale, ricorrendo alle tre cauſe moderatrici, ſuppongaſi (*Fig.* 1. *Tav.* 19.)

1. Che i raggi dn del *primo Mobile*, ng del ſecondo, gb del terzo ſiano eguali.

2. Che ſiano mobili con eguali velocità: Il primo dn d'intorno all'immobile centro d fiſſo nel piano: Il ſecondo ng intorno al proprio centro n fiſſo nella periferia del *primo Mobile*: Il terzo gb mobile intorno al ſuo centro g fiſſo nella mobile periferia del 2. *Mobile*.

3. Finalmente il raggio ng del 2. *Mobile*, ed il raggio gb del 3. ſi muovano in verſo contrario del raggio dn del *primo Mobile*, che certamente il punto b deſcriverà la retta ae.

Laonde ſupponiamo che nella primiera ſituazione de' mobili, prima che foſſero al dovuto lor moto eccittati, il raggio

gio dn del *primo Mobile* coincideſſe con dc; il raggio ng del 2. *Mobile* con cb; ed il raggio gb del 3. *Mobile* con ba; coſicchè tutti coſtituiſſero una medeſima retta. Indi moſſi con le prefate leggi, dn, che coincideva con dc, da dc s'intenda receduto tutto l'arco cn; ng; che ſe anch'egli non ſi foſſe moſſo intorno al proprio centro n coinciderebbe con nf, perchè ha corſo inverſo contrario un egual ſpazio, ſi trova da nf lontano tutto l'arco fg; e così gb, che ſe non aveſſe girato intorno al proprio centro g, coinciderebbe con gm, lungi da queſto è andato tutto l'arco mb. E però queſti tre archi cn, fg, mb ſaranno eguali, perchè le velocità ſono date eguali.

Richiamando ora alla memoria ciò che ſi è detto (1) per la deſcrizione del circolo, ſi troverà che qui concorrono tutte le cauſe moderatrici ivi addotte, perchè nel caſo di due ſoli mobili, il raggio ng del *ſecondo Mobile*, mantenendoſi ſempre a ſe ſteſſo parallelo, deſcriva il circolo $bgnd$. Onde ſi potrebbe fingere, che detto circolo foſſe piuttoſto deſcritto dal raggio cg, come rotante intorno al centro c; e preſcindere per ora dai raggi dn, ng, come ſe non vi foſſero, e come ſe non ſi trattaſſe d'altro, che dei due raggi cg, gb. Nel qual caſo dico, che riſpetto a queſti due mobili ſi rincontrano qui tutte le coſe, che (2) furon d'uopo, acciò il punto b deſcriveſſe una *retta* ae; perchè per la coſtruzione i raggi cg, gb ſono eguali; i moti accadono in verſo contrario, mentre nel ſuppoſto che cg muovaſi a ſiniſtra verſo n, gb per la coſtruzione volgeſi a deſtra da m verſo b. Reſta ora da provare, che la velocità di gb, che ſta ora per un *Epiciclo* immaginario, ſia alla velocità di cg, che ſta per un ſuppoſto *primo Mobile*, come 2 a 1. Ora quando dn con dc, ng con cb, gb con ba coincidevano; cg coincideva con cb, gb con ba. Ma poichè cg ha percorſo l'arco bbg; gb

(1) Part. III. Artic. V.

(2) Part. III. Artic. III.

gb avrebbe dovuto coincidere con gz; ma per le ſtabilite velocità ſi trova ben lungi tutto l'angolo zgb, il quale eſſendo eſteriore è doppio dell'angolo interiore gcb, e però riſulta la velocità angolare del raggio gb riſpetto alla velocità del raggio cg, come 2 a 1. Dunque il punto b deſcriverà la *retta* ae. Anzi per fortificar queſta concluſione con un di più, prodotto cg in z, dico che l'angolo zgb è doppio dell'angolo mgb percorſo dal raggio gb nel ſolo ſuppoſto della figura. Imperciocchè gli angoli al vertice mgz, ngc ſono eguali; così gli angoli alterni ngc, gcb ſono parimenti eguali. Dunque $mgz = gcb$; e perciò zgb, eſſendo doppio di gcb, ſarà anche doppio di zgm. Dunque $mgz = mgb$; e però zgb doppio anche di mgb. Il che era da dimoſtrarſi. Ora ſenza frammettere alcun indugio all' altra Parte di queſto Articolo, conchiudo, che il punto b, ovvero H, preſo dentro o fuori dell'area del *terzo Mobile* gb, deſcriverà un' *Eliſſe*. Conſeguenza, che ritenendo ancora il ſuppoſto de' due mobili cg, gb chiaramente riſulta per la dimoſtrazione dell' *Eliſſe* addotta a ſuo luogo (1). Anzi quaſi tutti i corollarj colà ſpettanti alla *linea retta*, ed *Eliſſe*, qui poſſono egualmente aver luogo.

ARTICOLO TERZO.

Circolo derivante dal moto compoſto di tre, o più cerchj.

SI è detto di ſopra (*Fig.* 1.), che quando i due raggi de' mobili dn, ng muovendoſi ebbero ſortita la ſituazione, che la figura dimoſtra, il terzo raggio gb avrebbe coinciſo con gm, ſe non ſi foſſe moſſo a deſtra da m verſo b intorno al proprio centro g. Supponiamo pertanto (le altre coſe tutte rimanendo), che piuttoſto ſi ſia moſſo a ſiniſtra da m verſo z: val a dire in conſeguenza del *primo Mobile* dn,

(1) Part. III. Artic. IV.

dn, allora il punto b, cioè z (*Fig.* 2.) ſi ritroverà nella periferia di un *circolo*, il cui diametro ſarà la *retta* ae deſcritta (*Fig.* 1.) dal punto b.

Eſſendo perciò ng (prodotto pur anche in m) ſempre a ſe ſteſſo parallelo, ſarà parallelo ſempre anche a cb, con cui prima di muoverſi coincideva. Onde in grazia della dimoſtrazione ſoſtituito anche qui cg al raggio ng, gli angoli bcg, mgz ſaranno eguali per cauſa delle ſuppoſte velocità. Ma le parallele bc, mg non potrebbero coſtituire alla linea cgz detti angoli eguali, ſe non foſſe una medeſima *retta*. Dunque cgz è appunto una medeſima *retta*, che perpetuamente rotando intorno a c deſcrive il *circolo* aze. Il diametro del quale ſarà eguale al raggio di un mobile quattro volte preſo, perchè il ſemi-diametro cgz è eguale a due; ma la *retta* ae della *Fig.* 1. è parimenti eguale al raggio di un mobile quattro volte preſo, imperciocchè nel maſſimo dilungamento o ſnodamento de' raggi $dn + ng + gb = da$, e nel maſſimo accorciamento di detti eguali raggi dn, ng, gb formano un ſol raggio $= de$ reſſidua porzione di detta *linea* ae; perchè per cauſa delle velocità ſi rannicchiano di modo, che g coincide con d; b, ed n col punto e. Dunque il diametro del circolo aze ſi eguaglia alla *retta* ae; e perciò s'intende verificata l'una, e l'altra parte di queſta propoſizione.

Ma per non menare in lungo una dimoſtrazione, cui potrebbe ſupplire una ſola nuova figura, ricordarò che da' eguali mobili in numero qualunque dato, affetti di eguali velocità, rotanti l'un dell'altro alternativamente in verſo contrario, ſi deſcriveranno dei *circoli* di diametri creſcenti a due a due; coſicchè i diametri dei *circoli*, che verranno dal *Mobile* 1. 2. 3. 4. 5. 6., ec. creſceranno come 1. 1. 2. 2. 3. 3. ec. Inoltre la periferia del 1. 3. 5., e degli altri tutti che ſiano nella ſerie naturale de' numeri impari, coincideranno nel punto e; e le periferie del 2. 4. 6., e degli altri di numero pari in detta ſerie, coincideranno nel punto d.

to *d*. Si conturba queſta legge, ſe i mobili ſono dati ineguali, quantunque (ferme però che reſtino le altre coſe) ſempre riſulti la deſcrizion di un *circolo*. E viene in via di corollario un' altra verità, che tutti i punti preſi nella periferia, nell' area, e nel centro di tutti i *mobili* deſcrivono parimenti *circoli* concentrici riſpettivamente al *circolo*, di quel tal *mobile* deſcrivente.

ARTICOLO QUARTO.

Linea retta, ed Eliſſe *vegnenti da tre mobili in altra maniera*.

PRimo, ſia il raggio *dn* del *primo Mobile* (*Fig.* 3.) eguale al raggio *ng* del *ſecondo Mobile*, ed il raggio *gb* del *terzo Mobile* qualunque dato.

2. Siano le velocità del *primo*, *ſecondo*, *terzo* eſpreſſe dai numeri 1. 2. 1.

3. Il *primo Mobile*, ed il *terzo* ſi muovano in verſo oppoſto del *ſecondo*. Dico che il punto *b* del *terzo Mobile* deſcriverà la *retta aq*.

Lo che per dimoſtrare ſuppongaſi prima, come da me ſi ſuole, che *dn* con *dc*; *ng* con *cu*; *gb* con *ua* coincideſſero. Quando in un tratto meſſi i *mobili* in moto il raggio *dn* del *primo Mobile* abbia già percorſo l'arco da *c* ad *n*; *ng* l'arco da *f* a *g*; *gb* l'arco da H a *b*. Ora poichè l'angolo *fng* è doppio dell'angolo *ndg* (non ſolo per cauſa delle date velocità, ma anche perchè l'angolo *fng* al centro è doppio dell'angolo *ndg* alla periferia) ſarà anche doppio dell'angolo *ngd*, cui è eguale detto angolo *ndg*, perchè oppoſto per la coſtruzione ad un lato eguale; e doppio del pari ſarà dell'angolo *bg*H, perchè la velocità data del *ſecondo Mobile* è alla velocità del *terzo* come 2. a 1. Dunque l'angolo *bg*H deve eſſere all'angolo *ngd*

eguale.

eguale. Eſſendo ſtato pertanto altre volte detto (1), che in ſimili circoſtanze dei due mobili *dn*, *ng*, il punto *g* ſi trovi coſtantemente nella *retta ue*; il raggio *gb* del *terzo Mobile*, recedendo dalla prodotta *ng* in H, verſo *gb*, non può conſtituire l'angolo *bg*H eguale all'angolo al vertice oppoſto *ngd*, ſe non ſi mantiene ſempre nella direzione *gd* coincidente con la detta *ue*; ma pure detti angoli ſono conſtituiti eguali per cauſa delle date velocità. Dunque *gb* ſi mantiene in detta direzione *gd*, ovvero *ue*. Anzi di tal maniera in detta *linea ue* perſiſte, che egli è ſempre a ſe ſteſſo parallelo, e coincidente. Onde il punto *b* ultimo di detto raggio *gb* deſcrive tutta la *retta aq* = all'aggregato dei diametri di tutt' i mobili $aK - \overline{Kq}$ diametro del *terzo Mobile*; e così dite di tutti gli altri punti dell' area, o periferia di detto *terzo Mobile*, che deſcriveranno delle *rette* parallele fra loro, e parallele alla *retta aq* coincidente con la ſuddetta *ue*.

Ma ſe intanto (le altre coſe reſtando come ſopra) la ſola velocità del *terzo Mobile*, invece di eſſer ſuddupla di quella del *ſecondo*, foſſe a quella eguale, cioè invece di eſſer l'angolo *bg*H eguale alla metà dell'angolo *fng*, *gb* ſi trovaſſe a coincidere con *gz*, e l'angolo *zg*H foſſe eguale all'angolo *fng*; allora il punto *b* (dite *z* dove ora ſi ſuppone che ſtia il punto *b*), ſarebbe nella periferia di un' *Eliſſe*, di cui l'*aſſe* maggiore ſarebbe eguale all'aggregato de' diametri de' *mobili*; l'*aſſe* minore ſarebbe $= +2dn - 2ng + 2gb$; cioè che è lo ſteſſo, $= +2dl - 2ld + 2dm = +2dm$.

Perchè trovandoſi il punto H per le prove addotte nel luogo ſopraccitato (2) nella circonferenza di un' *Eliſſe*; ſe il raggio *gb* faccia un altro arco da *b* a *z* eguale all'arco già fatto da H a *b* nel primo ſuppoſto; coſicchè gli angoli *fng*, *zg*H ſiano fra eſſi eguali, e ciaſcuno doppio dell'angolo *ndg*, il punto *z* ſi troverà da una parte in

S quella

(1) Part. III. Artic. III.

(2) Part. III. Artic. IV.

quella precisa situazione, che si trova H dall'altra. Onde benchè si trovi in parte a quella opposta, con tutto ciò sarà nella circonferenza della medesima *Elisse*. Perchè poi i raggi de' *mobili* in due opposte parti a, eK si dilungano in una *retta* $ad + d$K, l'*asse* maggiore viene ad esser eguale alla somma dei detti raggi due volte presa, cioè alla somma dei diametri. E perchè in due altre parti opposte verso l, ed o detti raggi si rannicchiano tutti tre in uno, cosicchè n coincide con l, g con d, b con m, l'*asse* minore risulta $= + 2dn - 2ng + 2gb$, cioè eguale $+ 2dl - 2ld + 2dm$; onde distrutte per li opposti segni le due eguali quantità $+ 2dl - 2ld$, resta di positivo solo $+ 2dm$ eguale al diametro del *terzo Mobile*. Tuttavia quanto si è detto (*Fig.* 3.) in proposito della generazione di questa *Elisse*, e quanto è vero anche nel caso della *Fig.* 4. (nel caso dico, che le altre cose stanti come sopra, i raggi dn del *primo Mobile*, ed ng del *secondo* non siano eguali, ma siano tutti tre qualunque dati) è bene che si confermi con una dimostrazione generale, che è la seguente.

ARTICOLO QUINTO.

Linea retta, *ed* Elisse *generate per il moto composto di un numero di cerchj qualunque dato*.

PRimo, dunque siano dati quanti, e quali si siano raggi de' *mobili* (*Fig.* 5.) Cn, nb, bb ec., l'un all'altro insieme connessi.

2. La velocità del *primo Mobile* sia suddupla di quella di ciascun altro.

3. Tutti muovansi alternatamente l'uno dell'altro in verso contrario.

Dico che il punto b della periferia d'un qualunque ultimo dato *mobile*, si troverà nella circonferenza di un' *Elisse*, di cui l'*asse* maggiore pareggierà la somma dei diametri di tutti i *mobili* dati, e l'*asse* minore sarà = al raggio due volte preso Cn del *primo Mobile* — il due volte preso raggio nb del *secondo Mobile* + il due volte preso raggio bb del *terzo* — ec. (alternando sempre così la situazione de' segni opposti.

La linea GP eguale alla somma dei diametri dei *mobili* dati, sia tagliata per metà in C, e ad angoli retti dalla perpendicolare RC. Poi fatto centro in C si descriva il circolo PKG; indi nella perpendicolare CR sia trasportata la quantità Ce eguale al raggio Cn del *primo Mobile*; ed appresso fatto centro in e, si segni la quantità ef eguale al raggio nb del *secondo Mobile*; poi fatto centro in f sia fA eguale al raggio bb del *terzo Mobile*; e così via via sin che siano stati trasportati tutti i raggi de' *mobili* dati. Perchè per ultimo fatto di nuovo centro in C, e descritto un altro circolo ApB coll' apertura CA. AB sarà l'*asse* minore $= + 2$C$e - 2ef + 2f$A $= 2$CA. E l'*asse* maggiore sarà GP $= 2$C$n + 2nb + 2bb = 2$CP.

Per provare ora che il punto b della periferia di un qualunque dato *mobile* sia nella circonferenza di un' *Elisse*. Sempre nella prodotta del raggio Cn del *primo Mobile* si trasportino tutti i raggi, che nella serie de' *mobili* dati sono ne' luoghi impari. Qui ven' ha un solo bb raggio del *terzo Mobile*, e però si faccia nu eguale a detto bb. Poi dal punto u, che verrà qualunque per il punto b si tiri uz che occorra nella prodotta GP. Ora per causa delle date velocità, si può prescindere da tutti i *mobili* Cn, nb, bb ec., come se non vi fossero, e come se la questione versasse sul solo raggio Cu di un *primo Mobile* immaginario, e sul raggio uz pure di un supposto *Epiciclo*. I quali primo, sono eguali perchè opposti ad angoli eguali per causa delle velocità; secondo, la velocità del *primo Mobile* immaginario Cu è suddupla di quella del supposto *Epiciclo*

ciclo uz, non solo a cagione delle date velocità, ma anche perchè l'angolo interno KCz, è sudduplo dell'esterno Kuz; terzo, usando attenzione verremo fatti accorti, che i moti procedono in verso contrario. Onde per la dimostrazione veduta nel sopraccitato luogo (1) risulta, che il punto b del *terzo Mobile* bb, o sia anche S di un qualunque altro *quarto Mobile* bS a quello annesso, o qual altro punto che si trovi nell'area del supposto *Epiciclo* uz, sta certamente nella circonferenza di un' *Elisse*.

Ma se il *quarto Mobile* invece di esser eguale a bS fosse più tosto eguale a bz, il punto z come punto della periferia del supposto *Epiciclo* uz, si trovarebbe assolutamente nella *retta* zPG. Simili esempj somministra anche la *Figura 6.*, perchè dato che sia, per esempio, da dimostrare che il punto f sia nella circonferenza di un' *Elisse*, nella prodotta del raggio ab del *primo Mobile* si trasportino come sopra i raggi, che nella serie de' *mobili* dati sono in luogo impari, quali qui sono due Cd, ed ef. Si faccia dunque $bn = Cd$. $nl = ef$. Poi dal punto l che verrà si tiri per il dato f in g la *retta* lg, che sarà eguale ad la; e si fingano distrutti tutti i *mobili* dati, e non altri rimanere, che al raggio di un *primo Mobile* immaginario, ed lg raggio di un supposto *Epiciclo*. E poi si provi, come sopra, essere il punto f, come preso nell' area dell' *Epiciclo* lg, costituito nella circonferenza di un' *Elisse*. Inoltre se il punto dato fosse g, perchè questo g sta nella periferia di detto supposto *Epiciclo* lg, si troverà costantemente nella *retta* ao.

Quindi si può primieramente raccogliere, che tutte le *Elissi* descritte (*Fig. 5.*) o dal punto b, o dal punto b, o dal punto S (così *Fig. 6.* dal punto d, dal punto f ec.) siano tutte concentriche; e di più anche parallele, ovvero simili quelle che saranno descritte da' punti presi su d'un medesimo raggio di un *mobile* nella serie numero impari, come quelle che sarebbero descritte dal punto b, e punto b; perchè quantunque il punto b sia stato considerato come ultimo del raggio nb, non resta che insieme non sia anche primo del raggio bb; onde le *Elissi* descritte da questi due punti, oltre l'essere concentriche, saranno anche parallele, perchè le loro periferie saranno continuamente distanti lo spazio bb, voglio dire, che saranno simili.

(1) Part. III. Artic. IV.

2. Che se i *mobili* sono eguali, le *Elissi* non possono venir descritte che dai *mobili*, che nella data serie sono ne' luoghi impari, come dal 3. 5. *Fig. 6.* Se poi non sono eguali (*Fig. 5.*) ponno descriversi da un *mobile* qualunque nb, bb, bS ec. eccettuato il *primo Mobile* Cn, che descrive sempre un circolo. La *linea retta* poi non viene descritta, che dai *mobili* che nella data serie sono ne' luoghi pari, come dal *quarto Mobile* bz (*Fig. 5.*), e dal *secondo*, *quarto*, *sesto* (*Fig. 6.*).

3. Per sapere (*Fig. 5.*) se un *mobile* bz che nella data serie sia in luogo pari, descriverà una *retta* o no, si farà come poc' anzi si è fatto, per determinare l'*asse* minore dell' *Elisse* descritta dal punto b, e che qui giova ripetere. Tirata prima una *retta* GPz che stia per l'*asse* maggiore, e dal centro C del *primo Mobile* eretta una perpendicolare CR, si farà centro in C, e coll' apertura Cn raggio del *primo Mobile* si segnerà in detta CR la quantità Ce; poi fatto centro in e coll' apertura nb si noterà ef. Indi fatto centro in f coll' apertura bb si noterà fA; e per fine fatto centro in A coll' apertura bz, se z viene a coincidere nel centro C del *primo Mobile*, z si muoverà in una *retta*; se non coinciderà, il punto z non potrà fornire che un' *Elisse*.

ARTI-

ARTICOLO SESTO.

Cause moderatrici delle Linee messe per esemplari delle innumerabili derivanti dal moto composto di tre circoli.

NOn si può abbastanza ridire quanto nitide e leggiadre Curve nascano dal moto composto di tre circoli, e benchè n'avessi già preparate di bellissime descritte col metodo per punti; non ostante soppresse le migliori, ho ritenute queste poche più semplici; perchè dalla maggior parte di esse prendo occasione di fare a luogo qualche necessaria osservazione. Sono dunque:

Figura 1. *Tav.* 19.

1. Raggi de' *mobili* eguali.
2. Velocità eguali.
3. *Mobile* 2.°, e 3.° contro al 1.°

Figura 2.

Mobile 1.°, e 3.° contro il 2.°: Il resto come sopra.

Figura 3.

1. Raggi del 1.° *Mobile*, e 2.° eguali. Raggio del 3.° *Mobile* qualunque.

2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 2. *Siami per brevità permessa, sempre che occorra questa espressione, la quale significa che le velocità del 1.°, 2.°, 3.° *Mobile* sono in proporzione ordinata, come li tre numeri 1. 2. 2.

3. *Mobile* 1.°, 3.° contro il 2.°

Figura 4. *e* 5.

1. Raggi qualunque.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 2.
3. L'uno dell'altro alternatamente in verso contrario.

Fig. 6.

Figura 6.

1. Raggi sei eguali.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, 5.°, 6.° :: 1. 2. 2. 2. 2. 2.
3. L'un dell'altro alternatamente in contraria parte.

Figura 7. *Tav.* 20.

1. Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 9.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 4.
3. *Mobile* 2.°, e 3.° contro al primo.

Figura 8.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 5. Il resto come nella *figura* 7.

Figura 9.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 4. Il resto come nella *figura* 7.

Figura 10.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 3. Il resto come nella *figura* 7.

Figura 11.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 2. Il resto come nella *figura* 7.

Figura 12.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 1. Il resto come nella *figura* 7.

* Qui è da notare come dal solo raccorciamento del raggio del 3.° *Mobile*, risulti quasi per gradi la trasformazione della *Fig.* 7 in quella dell' 8, 9, 10, 11, 12, che sono 6; numero che però con ragione anche nel calcolo delle Curve provenienti dal moto composto di tre *mobili* si è adoperato, come pure si fece nel calcolo instituito per quelle generate per il moto composto di due soli *mobili*.

Secon-

Secondariamente è d'avvertire che il 3.° *Mobile* descrive le sei figure suddette, mentre il suo centro è portato per la circonferenza di un' *Elisse*.

Figura 13. *Tav.* 21.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 4.
3. L'un dell'altro in verso contrario.

Figura 14.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 3.
3. L'un dell'altro in verso contrario.

Figura 15.

Il 2.°, e 3.° *Mobile* contro il 1.° Il resto come nella *figura* 13.

Figura 16.

1. Raggi eguali.
2. Velocità eguali.
3. Tutti in conseguenza. Se fosse il 1°, e 2.° contro il 3.°, verrebbe la *Fig.* 1. *Tav.* 15.

Figura 17.

1. Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 1. 1. Il resto come nella *figura* 7.

Figura 18.

Mobile 2.°, e 3.° contro il 1.° Il resto come nella *fig.* 14.

Figura 19. *Tav.* 22.

1. Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 2. 2. 3.
2. Velocità 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 4. 4.
3. Il 2.°, e 3.° contro il 1.°

* Notate, che nelle *figure* 13., 14., 15., 18., mentre il 3.° *Mobile* descrive la Curva, il suo centro è portato dal 2.° *Mobile* per una *retta*. Li archi però percorsi dal raggio del 3.° *Mobile* non sono nella medesima ragione delli spazj percorsi dal suo centro per detta *linea retta*. Ma ciò che è mirabile, questa *linea retta* descritta dal 2.° *Mobile* ritiene di maniera la natura di un' *Elisse*, che il resto pari, niente differiscono le Curve descritte da detto 3.° *Mobile*, o il suo centro sia portato nella periferia di un' *Elisse*, o nella direzione di detta *linea retta*.

Notate per ultimo, cosa maravigliosa, che per il moto composto di tre, o più *mobili*, si possono conseguire anche quelle figure regolari delle quali i lati siano quasi retti, come la *Fig.* 8. *Tav.* 16. E ciò che è molto più osservabile si possono combinare le cause moderatrici in diverse maniere, e nulla di meno fare, che venghi a risultare la medesima Curva proposta.

ARTICOLO SETTIMO.

Curve Planetarie del Signor di Varignon comprese negli usi di un Istromento di tre cerchj simile alla Penna Geometrica.

LA Curva determinata dal Sig. di Varignon (1), e che s'immagina essere descritta in un piano dal centro di un Pianeta, viene dal moto composto del centro di detto Pianeta progrediente nell' elittica speciale sua orbita, mentre detta orbita è portata dalla linea degli Absidi intorno a un foco. Onde l'Istromento dovrebbe esser composto di 3. *mobili*: due destinati a generar l'orbita elittica, ed uno a far, in luogo della linea degli Absidi, girare detta orbita. Conciossiacchè (2) altrove si sia rimarcato, come (*Fig.* 4. *Tav.* 15.) agli *assi* *ab*, *ed* di un' *Elisse* si determinino i raggi C*n*, *na* dei *mobili generatori*, muovendosi i quali con le dovute velocità, si conseguisca la proposta (sia per esempio di Mercurio ☿) orbita *aebd*. Ma qui si pre-

T

(1) *Memoires de l'Academie*. An. 1703. p. 348.

(2) Part. III. Artic. IV. Annotaz. III.

pretende inoltre, che mentre detta orbita si descrive intorno al centro C, l'*asse* suo maggiore, o sia la linea degli Absidi *ab* volgasi d'intorno al foco F; cioè (che torna lo stesso) sia il centro C di detta orbita dal raggio FC di un altro *mobile* CR portato per la periferia CR d'intorno all' *immobile* centro F.

Per lo che primo, sono necessarj tre *mobili*: Il *primo* CR, di cui è raggio FC; il *secondo* *zno*, di cui è raggio C*n*; il *terzo* *aqf*, del quale è raggio *na*.

2. La velocità del *primo Mobile* sarà alla velocità del *secondo*, come il moto dell'Affalio del Pianeta dato ☿ ad una intiera rivoluzione di detto Pianeta nella sua orbita; cioè a gradi 360. Imperciocchè mentre il *mobile* *zno* compie una rivoluzione, il punto *a* del *Mobile aqf* descrive l'intiera orbita *aebd*. La velocità poi del *secondo* a quella del *terzo* sarà come detta intiera rivoluzione, cioè gradi 360. ad una rivoluzione raddoppiata, che è 720. Perchè acciocchè i *Mobili aqf*, *zno* siano disposti ad un'*Elisse*, la velocità del *terzo Mobile aqf* deve essere doppia di quella del *secondo zno*.

3. I moti del *primo*, e del *terzo Mobile* saranno ad un medesimo verso, perchè così procede ad un medesimo verso tanto il moto dell'Affelio, come la direzione del Pianeta nella sua orbita: Voglio dire, che a quella medesima parte che l'Affelio avanza da C verso R, anche il Pianeta cammina sulla sua orbita da *a* verso *e*. Il moto poi del *secondo Mobile zno* sarà in verso contrario dell'uno, e dell'altro, cioè il raggio C*n* si muoverà verso *z*. Conciossiacchè non si possa dal *terzo Mobile* descrivere un'orbita elittica, se non cammina in verso contrario del *secondo Mobile*.

Per altro si vuole qui aver detto, come alla descrizione di queste Curve planetarie un Istromento compor si dovrebbe, ma non come si possa; anzi ella è per mio giudicio

dicio impossibile. Perchè essendo, secondo Keplero, il moto annuo dell'Affelio di Mercurio $= 1'.\ 45''.$, e compiendo detto ☿ la sua rivoluzione in giorni 87., il moto angolare dell'Affelio di ☿ corrispondente a detti giorni 87. risulta in circa $= 25''$. Perchè 365. (moto annuo dell'Affelio) 87. giorni (rivoluzione di detto ☿) :: $105''.\ \frac{9135''}{365} = 25''\frac{2}{73}$.

Laonde lasciando il rotto $\frac{2}{73}$, li secondi $25''$ staranno per la velocità del *primo Mobile*, che rappresenta il circolo dell'Affelio. Li gradi 360. per la velocità del *secondo Mobile*, che sta per l'intiera rivoluzione di ☿ intorno al Sole, ed una doppia rivoluzione, cioè gradi 720. per la velocità del *terzo Mobile* ordinato a causare un'*Elisse*. Dunque le velocità del *Mobile primo*, *secondo*, *terzo* saranno in proporzione ordinata, come li tre numeri :: 1. 51840. 103680.

Ma perchè per eccitare i *mobili* alle dovute velocità, uso da noi si fa de' cilindri, o ruote dentate che siano in data ragione; se il diametro di una ruota si determini di sole tre linee del piede di Parigi, il diametro dell'altra verrebbe piedi 12960., il diametro della 3. ruota piedi 25920. E quantunque io sappia, che si potrebbero diminuire i diametri di queste ruote coll'accrescere il numero di esse; nulladimeno i moti poi ne verrebbero assai più implicati, e l'effetto di questi movimenti riuscirebbe sempre più difficile. Onde seguita che se si lusingasse taluno di comporre una Macchina precisamente ordinata al presente sistema del Mondo, andrebbe molto errato, come si accennerà anche nel seguente Articolo.

T 2 ARTI-

ARTICOLO OTTAVO.

Difficoltà annesse al progetto di una Macchina rigorosamente ordinata al presente sistema del Mondo.

BEnchè non sia per anco nota agli Astronomi la distanza, e grandezza assoluta de' Pianeti, che si spera di poter determinare l'anno 1761. per il passaggio di Venere sotto il Disco Solare; nonostante ad ordinare una Macchina che rappresentasse il presente sistema del Mondo, certo è che bastano le distanze, e grandezze relative, su le quali, conforme il sistema di Copernico (1), non lasciarono altri di proporne una ingegnosissima, ed un'altra a spiegare i fenomeni de' corpi celesti, è stata, non a molto, inventata dal Chiarissimo Sig. Gasparo Charlton (2). Ma una trovarne nel supposto delle orbite elittiche, e che regga anche al moto degli Affelj, parmi per ogni modo assai difficile. Conciossiacchè nella Macchina ordinata al sistema di Copernico, invece delle orbite elittiche erano, per quanto ho inteso dire, circoli eccentrici, nei quali apparivano i Pianeti progredire con velocità proporzionate ai tempi. Così ivi non erano i moti degli Affelj, nè di vertigine (se non quello della Terra, e del Sole); ma due soli moti: un principale che traeva la Macchina, dirò così, dalla sua immobilità, ed un altro da quello dipendente, onde ciascun Pianeta camminava nella sua orbita. Ma nel caso nostro occorrebbe un principal movente, che nella data ragione promovesse i centri di ciascun Affelio. Da questi dipendono due altri *mobili* affetti per mezzo di molte ruote delle dovute velocità per formare le orbite elittiche. Indi i globi

(1) Una ven' ha a Firenze fra le macchine di S. M. Imper.; un'altra ven'è in Padova del Sig. Dott. Masi. Intendo dire che una pur stupenda sia in Vienna, ed un'altra a Leiden.

(2) In Londra l'anno 1735.

i globi rappresentanti ciascun Pianeta, di cui sia noto il moto proprio di vertigine, dovrebbero con una certa legge volgersi d'intorno ai proprj *assi*. Facendo questi col piano delle orbite rispettive quell'angolo, che fosse altresì noto. Poichè già si sa che peranche non si è dagli Astronomi rilevato nè il moto di vertigine di Mercurio, e Saturno, nè l'angolo che probabilmente anch'essi fanno con la loro orbita; perchè o il troppo splendore del Sole vicino, o la enorme lontananza vietò fin'ora, che gli osservatori del Cielo discernessero le macchie, onde giudicarono detto angolo, e moto di vertigine degli altri Pianeti. Se poi dovessero in questa Macchina aver luogo anche i Pianeti secondarj, la Luna, i satelliti di Giove, e di Saturno, ed il suo stupendo anello, la cosa andrebbe tanto innanzi, che ingegno umano non vi potrebbe per niente. Pure quando non si badasse al moto degli Affelj, che a se soli obbligano tante ruote, il progetto prenderebbe nel resto qualche probabilità; e si potrebbe forse sperare che in Città, dove si trovassero grandi Matematici, ed insigni Artefici si potesse in alcuni anni ben condurre una tal opera; costruendola appunto Pianeta per Pianeta a similitudine della mia *Penna Geometrica*. Ma chi sa?

Forse un dì fia che la presaga Penna
Osi scriver di ciò, quel ch'or n'accenna.

ISTRO-

ISTROMENTO X.

ARTICOLO PRIMO.

Per la descrizione organica della Loxodromia, *e de' Poligoni rettilinei regolari.*

DOvendosi nel genere de' circoli non senza ragione comprendere anche le spirali, e la linea retta, quelle come periferie di un circolo, che attualmente s' incammina all' infinito, questa come periferia di un circolo già arrivato all' infinito. Ben si scorge, che il compasso comune, come mancante di dette linee, è (ciò che nissuno avrebbe mai creduto) in un certo modo imperfetto. Al quale però per tal cagione, parmi che sia preferibile il seguente, il quale, mentre da me vien ordinato alla *Loxodromia*, non può non descrivere le tre suddette linee *circolo*, *spirali*, e *linea retta*. Imperciocchè supposto che la *Fig.* 2. (*Tav.* 23.) sia parte della superficie di un Globo terraqueo, quando viaggia un Bastimento sempre cammina o sopra un dato parallelo QE, BA ec., o sopra un dato meridiano PQ, PG ec, o sopra una linea curva LE detta *Loxodromia*, di cui una semplice proprietà è, che la sua tangente forma con tutti i meridiani un dato angolo PLE, PCE, PHE ec. sempre il medesimo. Però devesi aver cura, che la fabbrica del presente Istromento abbia rapporto a tutte queste differenti direzioni per descriverle, quando che sia, sopra il suddetto Globo.

Compasso Loxodromico adunque chiamo propriamente il proposto Istromento (*Fig.* 1. *Tav.* 23.) come quello che, quantunque da me s' impieghi a descrivere anche alcuni *Poligoni regolari*, specialmente però è stato concepito per la suddetta *Loxodromia*. Egli è nel vero un *compasso*, di cui l'un piede MC sempre sta fisso in un punto C, l'altro MV termina

mina in una ruota R mobile intorno ad un piccol ganghero, che occupa il suo centro, e che indi si piega, e con una cannetta V abbraccia, e poi con una viterella sta fermo a detto piede MV. Ma girando la cannetta V intorno a detto piede, prima di stringer la vite, si può fare, che il piano della ruota rappresentato per *xz* costituisca sul piano della carta col raggio RC, ovvero *rc*, un angolo *crz*, ovvero *crx* eguale ad un qualunque dato. La noce poi, o nodo M deve esser assai più labile, e presto che negli altri compassi non è.

Da questa semplicissima costruzione seguita: Primo, che se il piano della ruota *xz* faccia col raggio RC un angolo retto, risulti la descrizione di un *circolo*, il quale è maggiore, o minore, secondo che da prima il compasso aveva maggiore, o minore apertura; la quale apertura volgendo l' Istromento non può alterarsi, perchè non essendo la ruota inclinata più da una parte, che dall' altra, non può nemmeno mordere la carta o più in fuori, o più in dentro, onde si allarghi, o si stringa il compasso. Secondo, se il piano della ruota *xz* non fa verun angolo con detto raggio RC, aprendo sempre più l' Istromento, ma non già muovendolo in giro, si descrive una *retta*, da cui per la medesima ragione addotta, non può mai declinare. Terzo, se il piano suddetto forma con detto raggio un angolo qualunque che non sia retto, e muovasi poi in giro l' Istromento o dalla parte dell' angolo ottuso *crx*, o da quella dell' acuto *crz*, perchè e nell' uno, e nell' altro caso la ruota inclinata può mordere o più in fuori, o più in dentro la carta, o nel primo caso dilungasi sempre più dal centro C, o nel secondo s' accosta, e seco trae il piede MR, e lo determina a formar con l' altro piede MC l' angolo RMC o sempre più, o sempre meno aperto; e quindi intanto dal margine dentato di essa ruota descrivesi sul piano della carta una *spirale*, la quale viene appunto ad ad essere la proposta *Loxodromia*, perchè il piano della ruota, cioè la sua tangente (giacchè il piano della ruota è sempre per la costruzione tangente alla curva) in qualunque posizione forma col raggio CR un angolo costante.

L'Istromento da me perciò messo in prova somministra gentilmente queste tre linee, che sono un'immagine in piano delle curve, che un Bastimento descrive sulla superficie sferica del Mare. Perchè il centro C (*Fig.* 1.) si può prendere (*Fig.* 2.) per il Polo P.; il raggio CR mobile intorno a C per un meridiano, che come rotante intorno a detto Polo P, serve per tutti gli altri meridiani PQ, PG ec. Il piano xz della ruota R, costituente con detto raggio rc un angolo qualunque, può tutti i rombi della rosa nautica rappresentare. Onde quando di questo compasso l'un piede MC fosse posto nel Polo P (*Fig.* 2.) di un globo terrestre artefatto, l'altro, secondo che il piano della ruota diversamente inclinasse a detto raggio CR (*Fig.* 1.); ovvero PQ, PG ec. (*Fig.* 2.) descriverebbe sulla superficie di esso globo, o qualunque parallelo QE, BA ec., o un qualunque meridiano PQ, PG ec., o la *Loxodromia* LE conveniente ad un rombo, o sia angolo *Loxodromico* qualunque dato.

Ma quantunque io stia sicuro, che la prefata costruzione non possa mancare del divisato effetto, tuttavia mi parrebbe ben fatto (ciò che però non è precisamente possibile) che la ruota R (*Fig.* 1.), invece di cangiar quell'angolo d'inclinazione verticale, che fa col piano orizzontale, cioè l'angolo MRC, stasse piuttosto del tutto verticale a detto piano, qualunque fosse l'apertura RMC. Onde volendo che, per quanto meccanicamente è permesso, l'Istromento supplisca anche a ciò, dovrà esser concepito di maniera che (sia sopra una superficie *piana*, sia sopra una *convessa*) la ruota sempre appunto si mantenga verticale a detta superficie.

Per

Per la *superficie piana* potrebbesi ideare l'Istromento come nella *Fig.* 3., facendo che un regolo RH si unisse nel sito inferiore all'estremità R di una verghetta MR mobile d'intorno al punto M dell'asta CH; e nel sito superiore ricevesse in una fessura l'estremità H di detta asta CH. Perchè per le dottrine altrove (1) esposte, quando MC, MH, MR saranno eguali, muovendo l'Istromento intorno al centro C, e qualunque apertura CMR acquistando sempre il punto H, caderà perpendicolarmente sul punto R; e però il regolo RH sarà sempre verticale al piano RC; e conseguentemente anche la ruota, che per mezzo della cannetta, e vite V devesi connettere col suo pivolo parallelo a detto regolo RH, procurando che la sola ruota, e non già il regolo RH giunga a toccare il piano della carta.

Nel caso poi della *superficie sferica* RP (*Fig.* 4.) fermisi la ruota R con la vite ad un gambo Rd, che sia parte d'un parallelogrammo, snodato, e composto di quattro regoli, delli quali li Rd, RM, dq siano eguali al semidiametro del dato globo; e il regolo Pq eguale a tutto detto diametro PA. Imperciocchè avverà, che quando con il regolo qP fatto centro in P, e la mano posta in M si faccia muover in giro l'Istromento, qualunque sito R i denti della ruota acquistaranno rispetto al Polo P, nulladimeno il piano del gambo dR parallelo al piano di essa ruota, si conserverà sempre verticale a detto globo, e prodotto passerà per mezzo del suo centro. Il che è evidente, perchè dai punti P, ed R condotti al centro C i raggi RC, PC; essendo CR, RM, MP, PC per la costruzione eguali, le rette CR, PM saranno parallele; ma PM è per la costruzione parallela anche a dR. Dunque giacchè ambidue dR, RC sono parallele ad una medesima retta MP, sono anche poste indiretto verso il centro C.

V Val

(1) Istrom. IX. Part. III. Artic. II.

Val a dire che *d*R non inclinerà verſo A, o verſo P punti preſi ſu quel medeſimo meridiano, che paſſa per i due punti P ad R. Quindi quel diametro della ruota, che paſſa per il punto di contatto R, ſarà per ogni verſo verticale alla ſuperficie del detto globo, e per conſeguenza prodotto paſſerà ſempre per il ſuo centro C.

Per altro l'Iſtromento della *Fig.* 3. può ſervire anche a quello della 4. con l'aggiunta d'un ſolo regolo *qd*. Ma ciò che manca nell'una, e nell'altra coſtruzione è, che l'eſtremità R del regolo MR, e il margine della ruota non ponno, come dovrebbeſi, e come abbiamo detto pure in principio, giungere a toccare eſattamente nel medeſimo piano.

ARTICOLO SECONDO.

Deſcrizione organica de' Poligoni rettilinei regolari.

QUantunque la *Penna Geometrica* ſuppliſca, ſiccome abbiam accennato, facilmente a queſt' uopo, non oſtante perchè queſto Iſtromento meno importa di ſpeſa, ed è sì nell'uſo, che nella coſtruzione più ſpedito, ſembrami perciò preferibile a quella. E' dunque da conſiderare in queſta organica deſcrizione de' Poligoni, che ella ſi potrebbe concepire in due differenti, ed egualmente facili maniere; cioè o ſupponendo coſtante un medeſimo circolo che debba circoſcriverſi a' detti Poligoni, e modificando la lunghezza de' lati far sì, che un medeſimo circolo veniſſe a circoſcrivere diverſi di detti Poligoni: o tenendo fermo, e coſtante un medeſimo lato, modificando il circolo circoſcrivente, far che un medeſimo lato divenghi lato di diverſi Poligoni. Un eſempio del primo caſo ſarebbe, ſe foſſe deſcritto un circolo per i punti *a*, *c*, *d* della *Fig.* 2. *Tav.* 18., perchè detto medeſimo circolo verrebbe circoſcritto ad un Pentagono di cui ſarebbe lato *ad*, ed inſieme da un decagono di cui ſarebbero *ac*, *cd* due lati. La

La medeſima figura ſomminiſtra un eſempio anche del ſecondo caſo, in cui *qd* lato di un Pentagono deſcritto nel circolo *abQ*, ſarebbe anche lato di un decagono deſcritto in un circolo, di cui foſſe *a* il centro, e raggio la retta *ad*. Queſte coſe ſono evidenti, ed è ſuperfluo il trattenerviſi di più, e laſciando per ora di produrre un Iſtromento relativo al primo caſo, applicarò ſolo al ſecondo il preſente Iſtromento della *Loxodromia*.

Laonde ſuppongaſi primieramente, che nell'area della ruota R (*Fig.* 1. *Tav.* 23.) ſia dal centro verſo alla periferia R ſcolpita una cavità, in cui, come in quella delle penne de' compaſſi, meſſovi dell'inchioſtro, poſſa detta ruota laſciare per ogni ſua rivoluzione ſegnato un punto ſul piano della carta, ſecondo ſia il compaſſo corredato di un quadrante NQ fiſſo al piede CM in Q, e labile nell'altro piede MR, ſe non ſi ſtringe con la vite, terzo ſi fermi con la vitarella V la cannetta, che porta la ruota R, qualora il piano di eſſa ruota ſia ad angoli retti del raggio CR.

Ora poichè le periferie ſono come i diametri, ſupponendo che il raggio della ruota R foſſe al raggio CR, come 1 a 3, la periferia della ruota ſarebbe alla periferia del circolo deſcritto ſul raggio CR, come 1 a 3. Sicchè (relativamente al già detto anche in propoſito (1) delle Cicloidi di baſe circolare) farebbe la ruota R tre rivoluzioni, mentre una ne faceſſe il raggio CR intorno a C; e quindi ſulla periferia generata da detto raggio CR, verrebbero marcati tre punti, i quali fornirebbero un triangolo, quando foſſero uniti con altrettante rette. Perciò quando il raggio della ruota è al raggio CR preciſamente come 1 a 3., facciaſi ſul piano laterale del quadrante NQ un ſegno, con inſieme affiſſo il numero 3., nel punto in cui la gamba MR, ſtante tale apertura, traverſa detto quadrante. Indi aprendo l'Iſtromento finchè il raggio della ruota ſia al raggio

V 2

(1) Iſtrom. IX. Part. III. Artic. IX.

raggio CR, come 1 a 4, s'incida poi su detto piano un altro segno con il numero 4 annesso ec., finchè per qualunque altra divisione si giunga a segnare su detto quadrante il segno corrispondente alla proporzione di 1 a 5, di 1 a 6, di 1 a 7, di 1 a 8, fin'a quella di 1 a 12, e più ancora se piacesse di portar l'affare anche più oltre.

Ora quando occorresse, per esempio, la descrizione organica del Ettagono, aprasi da prima l'Istromento preparato così con la maggiore esattezza, finchè la gamba MR arrivi, traversando il quadrante, a collimare, e coincidere nel segno appuntino che accompagna il 7 numero scolpito, come sopra, nel piano laterale del suddetto quadrante, ed ivi con la vite si arresti; perchè facendo indi muovere in giro l'Istromento, la ruota R farà 7. rivoluzioni intanto che il compasso n'avrà compita una intorno al centro C; e quindi resteranno sul piano della carta segnati dalla ruota 7. punti distribuiti in eguali distanze sulla periferia del circolo descritto con il raggio CR intorno a detto centro C; i quali uniti poi con altrettante rette verranno a fornire l'Ettagono proposto.

E' superfluo l'avvertire: Primo, che se dato fosse qualunque altro Poligono da descriversi, avrebbesi ad aprire l'Istromento fino al numero corrispondente a quel tal'altro Poligono dato. Secondo che volendo un dato Poligono, o più grande, o più piccolo, dopo segnati nel piano i punti del Poligono dato, e prima d'unirli con altrettante rette, basta condurre de' raggi indefiniti dal centro C a detti punti, e fatto centro nel medesimo C, tagliar detti raggi con un qual altro maggiore, o minore circolo che più piace; giacchè è evidente, che le rette congiungenti i nuovi punti d'intersezione sarebbero tuttavia lati del medesimo proposto Poligono. Terzo si potrebbe pensare, e di leggiero riuscire nella fabbrica di una tal ruota R, la quale lasciasse segno sulla carta, quando di tutta la sua periferia, e quando di un sol punto, acciò la medesima potesse agevolmente, e comodamente servire tanto per la descrizione della *Loxodromia*, quanto per quella de' Poligoni.

FINE DEGL' ISTROMENTI.

QUADRANTE LOXODROMICO

O SIA

Istromento per rilevare la quantità del viaggio di un Bastimento.

PREFAZIONE.

ACciocchè la scienza del Mare salga all' ultimo grado di perfezione, niente più restando (trattone se sempre si potesse navigare per il Rombo esattamente), che poter determinare i gradi di Latitudine, e Longitudine del Luogo in cui si è, senza dover ricorrere alle osservazioni del Cielo, che spesso ci vien tolto di vista dall' importune nubi; e perciò essendo mestieri di attenersi alla Terra, altri già tentarono in varj modi questa comodità procacciarsi. Ma o che il Sommo Autore d' ogni bene voglia riservar questo vantaggio ad altri più fortunati tempi avvenire, o che pur anche non sia mai per concederlo, certo è che qualunque argomento sinora adoperato, riuscì alla prova quasi che affatto inutile. E benchè forse tanto sia per essere anche di un Istromento proposto a tal uopo da me, pure non ho dubitato di produrlo, non per vaghezza di lode, o di premio, ma perchè parmi dovere che le nuove cose, qualunque siansi, si rendano pubbliche. Conciossiacchè spesso occorra, che per la debolezza dell' ingegno umano le invenzioni primitive non giungendo sino a quel fine cui erano indirizzate, le vi furono poi recate da altri, che calcarono quelle medesime vestigia.

Intende per tanto il mio Istromento a manifestare in un Quadrante la quantità del viaggio percorso da un Bastimento; data la quale insieme coll' Angolo Loxodromico, e la Latitudine del Luogo d' onde si sciolse, si rileva la Latitudine, e Longitudine del Luogo, in cui si è.

ARTICOLO PRIMO.

Descrizione d' una Macchina Drom-hydro-metra applicata a misurare il viaggio di un Bastimento,

PErduto il Cielo, parmi di ravvisare in Terra tre luoghi, nei quali siano per essere con commendabile industria collocati gl'Istromenti costrutti per l'effetto suddetto. Il primo nell'aria, applicandogli a misurare la forza de' venti, per quindi il viaggio dei Bastimenti rilevare; come pensarono il Chiarissimo P. Milliet, ed il Celebre Sig. Marchese Poleni, cui per ciò immortal gloria ne avvenne. Il secondo è sulla superficie del Mare, dove Vetruvio, e Mellio consigliarono che fosser poste delle ruote mobili per lo andare del Bastimento. Il terzo (stato finora, ch'io sappia, impensato da altri) è da me scelto sott'acqua. E avvegnacchè le ruote proposte da Vetruvio, e da Mellio soggiacciano ad alcuni (1) difetti; tuttavia per le difficoltà, che s'incontrano anche negli altri Istromenti, (presa l'idea da una ruota già fin dello scorso secolo inventata (2) per il moto perpetuo) ardisco richiamarle in pratica, come quelle che immerse a grande altezza d'acqua, pare (bene, o mal che mi apponga) che ci avrebbero a promettere miglior fortuna.

Si osservi dunque, che nella *Fig.* 1. *Tav.* 24. è delineato il piano di un Timpano di legno, o di metallo, vuoto nel mezzo, e che deve essere dentro, e fuori lavorato al torno perfettamente, e mobile d'intorno al proprio asse R, secondo l'ordine dei numeri 1, 2, 3, 4 ec., corredato di 8. ali di ferro distribuite in eguali distanze sulla sua periferia. Queste ali s'intendano snodate, e mobili su i rispettivi gangherini in modo, che se il centro della loro gravità cade dentro il piano di esso Timpano, rimanghino ferme, e distese sopra detta periferia; se cade fuori del piano a destra, cadano anch'esse, e per l'intoppo di un calcagnetto (lungo la 5. parte in circa della lunghezza di dette ali) rimanghino nella direzione de' raggi R 7, R 9, se per fine il centro della loro gravità cada oltre detto piano a sinistra, pendano giù liberamente, e solo restino ai piccoli gangheri sospese. Sarebbe fors'anche non inutile l'adattare, come in *Fig.* 4. di qua, e di là dall'ali un cuojo quinci affisso alle coste 9, *p*; 7, *d* dell'ali, e quindi all'orlo del Timpano 9, 7; 7, 5; in guisa che caduta l'ala si aprisse a destra una sorta di cassetta, o seno, che poi oltre 9 a sinistra tornasse a racchiudersi, servendo in tal caso il cuojo a ritener l'ali senza altro calcagnetto.

(1) Ricordati da Claudio Perralto nelle sue osservazioni sopra Vetruvio, e del Sig. March. Poleni nella sua maniera di misurare il corso di una Nave.

(2) Da Alessandro Capra nella sua Architettura civile, e militare.

Un simil Timpano alato, come in *Fig.* 1., ovvero 4. si può considerare mobile sott'acqua, quando la parte destra si opponga alla corrente di un fiume. Perchè supponendo, che tutta la massa d'acqua compresa tra le parallele *im*, *pd* vada da *m*, *o*, *n*, *d* ad avventarsi contro il Timpano R, egli è fuori di dubbio, che la massa I*m*, 9 *n* non farebbe volger il Timpano, quando si supponesse privo d'ali. Perchè la forza della porzione *o* 5, *n* 9, che tenta muoverlo secondo l'ordine dei numeri, essendo eguale alla forza contranitente della porzione *o* 5, *mi*, che urta nel medesimo Timpano dalla parte opposta; il Timpano viene costretto a rimanere in equilibrio. Ma la massa intercetta tra le parallele *n* 9, *dp*, che urta nell'ala 7, e nell'ala. 9*p*, perchè non incontra dall'altra parte un'egual resistenza, trae esso Timpano d'intorno al suo centro. Onde si può esso Timpano ragionevolmente chiamare Drom-hydro-metra, poichè si può meglio d'ogni altro usato Istro-

Istromento adattare anche alla misura dell' acque correnti, cioè per rilevare le loro velocità relative, che in un medesimo dato tempo debbono essere, come il numero delle rivoluzioni di detto Timpano.

Ma se in vece di supporre il centro del Timpano R immobile nel suo sito, e l'acqua in cui è immerso, corrente per la direzione *o*R, si supponga piuttosto che sia stagnante l'acqua (o qualunque altro liquore in cui fosse immerso l'Istromento), ed il centro R tirato per la retta R*o*; siegue nientedimeno il medesimo effetto. E di questa maniera sarebbe applicabile a rilevare la gravità specifica di diversi liquori. Sicchè ecco due singolarissimi vantaggi quali si ponno da una tal ruota riportare invece del moto perpetuo; chimera che ordinariamente innamora i soli stolti.

Il Sig. Torelli, che onora grandemente Verona sua Patria sempre stata feconda, ed ora molto più d'uomini rarissimi in ogni scienza, e arte, diede prima di me alla luce la sua Macchina Idraulica, simile alla mia inventata prima che egli avesse inventata la sua, benchè non sia stata prima d'ora pubblicata per essere annessa a tutti gli altri Istromenti contenuti in questo volume. Ma se è lecito un confronto, non già suscitato da uno spirito di odiosa contradizione, ma dalla uniformità delli studj comuni, parmi che questa tre vantaggi principali riporti sopra quella. Il primo è, che essendo la mia vuota nel mezzo, l'aria rinchiusa gli toglie nell'acqua una parte della sua specifica gravità, e quindi diventa al moto più pronta. Il secondo considerabilissimo è, che nel caso del Sig. Torelli, cioè dell'ali rette, va bene che siano segate in due parti eguali, acciò quando siano ripiegate l'una sopra l'altra, l'estremo loro punto C (lettera del Sig. Torelli) trovisi in una massimamente piccola distanza dal centro del moto. Ma per ottenere questa minima distanza, lo spediente era di costruire, come io ho fatto, l'ali non già rette, ma con una tal curvatura, che fosse quella medesima della circonferenza della ruota; seguendo quindi un di più, che l'ali presentando la loro parte concava alla corrente, men presto sfuggano alla forza di quella; e per contrario opportunamente, presentano all'acqua la parte convessa, quando bene è che meno che sia possibile resistano a detta forza. In terzo luogo, raddoppiandosi i Timpani, come appresso vedremo, e diminuendo il numero dell'ali di ciascheduno, ho avuto comodità di formar l'ali più lunghe, acciò opponessero all'azione del fluido un maggior piano, ed acciò cadendo da un più alto luogo, maggior urto risentisse la ruota, per dover girare d'intorno al suo asse.

Per altro io credo che (ciò che in alcune macchine avviene, che riportandole dal piccolo in grande, non fanno quel medesimo effetto che facevano in piccolo) in questi Timpani, benchè il diametro loro si aumentasse fino ad uno, o due piedi di Parigi, tuttavia crescerebbe la loro mobilità; perchè tanto la grossezza dell'ali, quanto della superficie di essi Timpani resta quasi la medesima (supponiamo di una linea in circa di detto piede, o di quel del Reno), e cresce solo per apportar maggior leggierezza lo spazio vuoto nel mezzo in ragion triplicata, come pure cresce in ragion triplicata la massa del fluido resistente, che si oppone al piano di più grand'ali; e per conseguenza cresce in detta ragione la forza d'inerzia di esso fluido, unica causa motrice dei sopraddetti Timpani. Ma vediamo intanto, come rilevate in un quadrante tutte le conversioni di un tal Timpano attaccato altamente sott'acqua ad una Nave, sia poi per manifestarsi la quantità del suo viaggio.

ARTI-

ARTICOLO SECONDO.

Converſioni dell' Iſtromento Drom-hydro-metra riportate in un Quadrante.

PEr ridurre in un quadrante il numero delle converſioni della predetta Macchina, ſiano (*Fig.* 2.) afferrati ad un medeſimo aſſile EF due Timpani alati A, e B; e ſi concepiſca il primo A mirato di fronte, corriſpondere al Timpano R viſto di fianco della *Fig.* 1., e l'ali ſue aver congiunte nei ſiti corriſpondenti per le linee morte ai numeri impari di detta *Fig.* 1.; e l'altro Timpano B, benchè per maggior chiarezza ſia in diſegno poſto ſenz' ali, ſi concepiſca però averle anch' eſſo conneſſe nei ſiti poſti dirimpetto ai numeri pari; acciocchè tirato dalla Nave verſo O, il telaro di legno che porta l'aſſile di eſſi Timpani, poſſa, caduta un'ala del Timpano A, caderne un' altra del Timpano B; e poi un' altra da quello, ed alternatamente un'altra da queſto ec., come ſe invece di eſſer due Timpani con otto ali per ciaſcuno, foſſe un ſol Timpano con ſedeci ali. Stia poi al medeſimo aſſile EF affiſſo un Rochello C di 10. denti, che in un coi Timpani alati, e coll'aſſile coſtituiſcano un medeſimo ſolido, mobile nel telaro ſecondo l'ordine dei numeri 3, 5, 7, 9, ovvero 2, 4, 6, 8.

Coi denti di detto Rochello C s'ingrana appreſſo una ſerpentina D, ovvero una ruota fatta a caviglie (chiamata dai Franceſi, la prima *roüe de rencontre*, l'altra *roüe de chand*) di 30. denti, il di cui aſſe per di ſotto è ſoſtenuto da un appoggio G, che è parte del Telaro. E per di ſopra per detto telaro trappaſſa, e ſi annoda con una ſorta d'anelli d'acciajo, o d'altra più leggiera materia, che comunicano ſino ad un altro telaro della *Fig.* 3., dove l'ul-

l'ultimo anello D3 porta un Rochello di 10. denti, quale inſieme con detti anelli, e ſerpentina formano un altro corpo ombreggiato a puntini, che fa una ſola rivoluzione, mentre l'altro ſolido tratteggiato compoſto dell'aſſile EF, Timpani alati B, A, e Rochello C fa tre rivoluzioni. E quindi avviene che l'anello D3 per ciaſcuna ſua rivoluzione, eſprima rivoluzioni dei Timpani numero 3. Perchè come ſta il numero dei denti del Rochello C, al numero dei denti della ſerpentina D; così ſtarà il numero delle rivoluzioni eſpreſſo da quello, al numero delle rivoluzioni eſpreſſo da queſta; cioè 10., 30. :: 1., 3.

Segue indi (*Fig.* 3.) l'aſſile E, che porta una ruota di 20. denti implicata col Rochello antecedente, e porta pure un Rochello di 10., che ingrana colla ſeguente ruota di 60.; ed una rivoluzione di queſto aſſile E eſprime per l'addotta ragione 6. rivoluzioni dei ſuddetti Timpani. E così di mano in mano andate dicendo; poichè la *Fig.* 3. dimoſtra così il numero dei denti delle ruote, e Rochelli, come il numero delle rivoluzioni eſpreſſe da tutti gli altri aſſili F, G, H ec. in una rivoluzione; finchè l'aſſile L coll' indice ſuperiore giunge ad indicare in una ſua rivoluzione 60000. rivoluzioni dei Timpani; e l'aſſile K eſprime in una rivoluzione, rivoluzioni numero 720000. Ma mi piace, che queſt' ultima converſione dell'aſſile K abbia un centro comune con la converſione antecedente, che ſi fa d'intorno all'aſſile L; onde (preparate due ruote eguali ciaſcuna di diametro alla diſtanza LK) una *d* ſi fermi nell'aſſile K, e l'altra *a* (conneſſa ad una cannetta, che paſſa di ſopra del telaro, e porta un altro indice più corto) ſia mobile d'intorno all'aſſile L; benchè detto aſſile L ſi muova del dovuto ſuo moto per l'impulſo delle ruote antecedenti. Perchè quindi avverà, che preparato un *Quadrante* detto da me *Loxodromico*, nel di cui centro occorra l'aſſile L, e la cannetta della ruota *a*, e che abbia

abbia due ordini di numeri, uno esteriore diviso in 60. parti eguali, e l'altro interiore compartito in 12., l'indice più lungo mostrerà in una conversione 60000. rivoluzioni dei Timpani, e l'altro più corto 720000.

Ora se una conversione dei Timpani fosse eguale ad un passo geometrico percorso dal Bastimento, l'indice più lungo mostrarebbe 60000. passi geometrici, cioè 60. miglia, o sia 60. minuti = Gradi uno; e l'altro più corto mostrarebbe in una rivoluzione 720. miglia = Gradi 12. Ma ciò non essendo così fortunatamente per essere, si dovrà coll'esperimento fatto in una nota distanza, rilevare nel *quadrante* della *Fig.* 3. il numero delle rivoluzioni dei Timpani, corrispondenti ad uno, o più gradi terrestri; e poi distribuire, e ordinare da bella prima le ruote, e numero dei denti in modo, che una perfetta rivoluzione dell'assile K, venga ad esprimere un numero qualunque, ma intiero di gradi terrestri; e l'assile L 60. minuti. Poichè io ho messe le ruote così, perchè serva solo di metodo, onde saper poi contenersi meglio a tenore dello sperimento che si farà; non dubitando che quindi il numero de'gradi, o minuti mostrato dagli indici, non sia per essere proporzionale al viaggio della Nave, unica causa del moto de' Timpani. Dovendosi poi, per quanto a me pare, riputar per niente l'alterazione delle frizioni, che la nuova combinazione delle ruote, e numero dei denti dovrebbe produrre, essendo questa quasi zero rispetto alla potenza de' muoventi principali, che sono i Timpani alati; e molto più perchè si potrebbe far in maniera, che restasse il medesimo numero dei denti presi insieme di tutte le ruote, benchè poi per causare le opportune velocità fosse mutato il numero di quelli di ciascuna in particolare.

ARTI-

ARTICOLO TERZO.

Macchina antecedente adattata al Bastimento.

DUe parti principali si distinguono nella descritta Macchina, che diversamente vanno adattate al Bastimento. Imperciocchè quella che per la sezione della *Fig.* 3. si rappresenta, e che comprende un telaro colle sue ruote, e *Quadrante Loxodromico* tutta insieme deve esser collocata dentro del Bastimento (detta perciò *Parte Interna*), o vicino al Piloto, se fosse possibile, acciocchè mentre governa il Timone abbia sotto gli occhj anche il *quadrante* suddetto, o in qualche altra parte che fosse, se non più comoda, almen più conferente al bisogno della presente costruzione. Quell'altra parte poi significata per la *Fig.* 1., e 2. perchè sta sempre fuori attaccata alla Nave, vien da qui innanzi assolutamente chiamata *Parte Esterna*; ed è quella, che non solo esige somma attenzione nel costruirla, ma molto più nell' adattarla al Bastimento, in modo che e per il *luogo* ove a quello si attacca, e per la *costruzione* sia ben ordinata a qualunque suo muovimento.

Circa il *luogo* ove a quello si attacca, parendo a me che fuori del Bastimento V (*Tav.* 25.) il punto più basso di esso sia quello; che per le agitazioni del Mare muovasi meno che gli altri punti; così in quello vorrei sospendere la *Parte Esterna*, facendo che ivi fosse (o confitto nel Bastimento suddetto V, o connesso comunque a quattro catene fermate a quattro parti opposte) un pezzo di ferro K, in cui fosse orizzontalmente mobile un altro palo di ferro attaccato con un nodo z a detta parte. Alla quale nei nodi M, ed N fosse pur anche annesso un semicerchio di ferro, scorrente (secondo che il Bastimento, o il telaro diversamente inclinasse) per la fessura *d* del palo suddetto; al al qual effetto nella costruzione dovranno prendersi le distanze zd, zM, zN eguali. Ma detto pezzo di ferro K sia inoltre prolongato verso la Poppa P con un becco, in cui per qualunque inclinazione della Nave trovi sempre un intoppo il semicerchio MdN; acciò detta *Parte Esterna* volgendosi d'intorno al punto dell'attacco z, non possa mai compire un giro perfetto, nè giungere ad urtar contro li anelli. Da questa qualunque situazione delle parti *Interna*, ed *Esterna*, segue che li anelli *a*, *b*, *c* che uniranno l'una all'altra parte avranno ad esser tanti, che giungano dall'uno, all'altro luogo; benchè meno che saranno, e più leggieri che sia possibile, sia meglio.

Circa poi alla *costruzione* della suddetta *Parte Esterna* avverto che per non entrare in una lunga serie di operazioni di prospettiva, o coprire le parti più essenziali, tanto il Piano verticale di essa espresso nella *Fig.* 1., e 2. *Tav.* 24., quanto l'elevazione scenografica della *Tav.* 25. indicata colle medesime lettere, declina alcun poco dalla giusta idea dell'Inventore. Imperocchè dovendo il telaro esser atto a difender l'ali da qualunque urto che possa incontrare, ed a sostenere validamente non solo l'assile D della serpentina D, ma anche un Timoncello H connesso nella parte posteriore ad angoli retti del traverso MN, ed assile EF; deve il cerchio Q stare afferrato ai cardini EM, FN vicino ai punti E, F più che la figura non dimostra. Le porzioni poi EM, FN dovrebbero esser tanto giù profonde nel Mare, che portassero l'assile EF, e li connessi Timpani fin sotto alle radici dell'onde più alte. Notate inoltre, che essendo la gravità specifica del legno minore, di quella dell'acqua marina, e la gravità specifica del metallo maggiore, io vorrei che la *Parte Esterna* composta dell'una, e dell'altra materia venisse, se è possibile, a risultare poco più grave della mole antagonista del fluido, e che il centro di gravità di detta *Parte Esterna* si trovasse nell'infima parte verso GQ.

Non

Non lascio per fin di ricordare, che ai Timpani alati si potrebbero sostituire, e far nel medesimo modo muovere sott'acqua ogn'altro Istromento, che fuori d'essa fosse mobile per la sola resistenza, o impeto dell'aria; come quella ruota proposta (1) del P. Milliet, o più sicuramente due di quelle Girandole (supponiamo A, B *Fig.* 5. *Tav.* 26.) di quelle dico, che gli allegri fanciulli sogliono far muovere correndo; ordinandone un pajo in guisa, che con una *chiocciola senza fine* lavorata d'intorno ai loro assi AE, BF facessero volgere orizzontalmente una ruota D, la quale stando in vece della serpentina D della *Figura* 2. *Tav.* 24. si unisce poi col suo asse Da alli anelli, che congiungono la *Parte Interna* colla *Esterna*. Avvertendo che acciocchè la ruota D sia dall'una, e dall'altra chiocciola determinata a muoversi da una medesima parte, o le due chiocciole debbono aver le spire, o le due Girandole (come si è fatto in figura), debbono aver l'ali ordinate in verso opposto. Onde se per esempio le Girandole A, B muovansi secondo l'ordine dei numeri posti in figura (supponendo le chiocciole inclinate ad un medesimo verso) la ruota D in un con l'asse Da, girerà secondo l'ordine de' numeri suoi posti pure in figura. E perchè per ciascuna rivoluzione delle chiocciole, e Girandole passa un sol dente della ruota D, ogni conversione di essa ruota esprimerà tante rivoluzioni delle Girandole (che starebbero invece dei Timpani alati) quanti sono i proprj denti.

Y ARTI-

(1) Navig. Lib. V. Prop. 6.

ARTICOLO QUARTO.

Esame delle Obbiezioni che ponno impedire l'effetto della presente Costruzione.

OBBIEZIONE I.

EGli è in primo luogo evidente, che per rilevare la giusta quantità del viaggio percorso, la *Parte esterna* della proposta Macchina deve trovarsi sempre ad angoli retti del solco, che fa in Mare il Bastimento: cioè (*Tav.* 25.) supposto la linea Q*o* essere detto solco, l'assile EF deve esser ad angoli retti di detta linea; benchè col Bastimento o si proceda innanzi di fianco, o colla Prora, o che si prenda comunque una nuova direzione; e benchè la Prora, o la Poppa, o l'uno, o l'altro fianco inclinasse all'orizzonte più da una parte, che dall'altra.

RISPOSTA.

Ma essendo il palicello *zd* ordinato appunto alle variazioni, che sono tutte orizzontali, ed il semicerchio snodato M*d*N ordinato alle seconde che sono verticali, deve naturalmente seguire da se l'effetto proposto. Prima perchè quando il Bastimento acquista una nuova situazione qualunque, la *Parte esterna* incontra tosto nel Timoncello H, e nell'altre sue parti maggior resistenza da un lato, che dall'altro, e quindi si frange l'equilibrio delle resistenze, che non può restituirsi, se detta *Parte esterna* (che per il supposto è poco più grave della mole antagonista del fluido, e sostenuta dal palicello *dz* mobile per ogni verso) non si volge nel pezzo di ferro K, e insieme coll'assile EF non si dispone per una spezie di *trattoria* (poichè non può per salto) ad angoli retti della nuova direzione Q*y*, unico caso, dove le resistenze si trovino equilibrate. In quanto poi alle variazioni verticali, la mobilità del semicerchio nei nodi lascia la *Parte esterna* libera a poter decumbere verticalmente, benchè il pezzo di ferro K in un colla Nave, cui è afferrato, inclini o all'uno, o all'altro di due opposti versi; e la sua mobilità nella fessura *d* serve per altri due versi, a quelli, e fra di loro opposti; e però sono in tutti quattro, che a quest'uopo, se non erro, dovrebbero bastare.

OBBIEZIONE II.

Prescindendo per ora dalla diversa inclinazione, con cui una Nave si presenta a ricevere il vento, posso supporre, che o contro detto vento procede, o a seconda. Nel primo caso pare (quando l'onda andasse in conseguenza del vento) che la quantità del moto dei due Timpani alati, sia per essere maggiore di quella che dovrebbe acquistare nell'acqua stagnante per il solo andare della Nave. Perchè (1) la resistenza, che soffre un solido muoventesi in un fluido, è come il quadrato della velocità, onde il corpo si muove; e se si muova il fluido, ed il solido sia quieto, l'urto, che il solido soffre dal fluido, è come il quadrato della velocità del fluido. Quindi nel primo caso muovendosi il solido contra del fluido, ed il fluido contra del solido, la resistenza che il solido nel fluido trova, sarà come la somma de' quadrati delle velocità del solido, e del fluido. E però la velocità dei Timpani eccederebbe della dovuta quantità tutto il quadrato della velocità del fluido.

Ma nel secondo caso pare che detti Timpani si avessero a volgere meno che non dovrebbero. Perchè se poi il solido muovasi in un fluido, che pure muovasi secondo la direzione del solido, ma con minore velocità; allora il solido urta nel fluido, come se il fluido fosse quieto, ed il

(1) Gravesande. *Introd. ad Philos. Newtonianam* lib. 3. *De Motu Fluid.* cap. 15.

il solido si muovesse con il solo eccesso della sua velocità sopra la velocità del fluido; e quindi nel fluido troverà una resistenza, che sarà come il quadrato della sua velocità sopra quella del fluido.

Maggior ostacolo per fine incontrarebbesi, se la velocità del solido a seconda si supponesse eguale a quella del fluido; perchè i Timpani restarebbero affatto immobili.

RISPOSTA.

Rispondendo pertanto in generale a questa seconda Obbiezione, nel supposto che l'onda che deve alterare il vero movimento della *Parte esterna*, sia sempre per essere a seconda del vento, dico che nè dall'onde, nè dai venti può venir portato alcun turbamento, o disordine ai Timpani alati. Perchè essendo collocata la *Parte esterna* in *z* (*Fig.* 1. *Tav.* 26.), e i Timpani dovendo riuscire non solo sotto la superficie del Mar tranquillo MT, ma anche sotto le radici dell'onde massime RS, le quali al lido non essendo più alte di piedi 7 (1), (nè men forse in alto Mare, benchè pajan montagne, saranno molto maggiori), e potendosi profondare anche più, giudico certamente che fin là non possa giungere l'azione del vento, unica causa forse delle inquietudini superficiali. Perchè ivi tutte le parti fluide devono (2) trovarsi in equilibrio, non potendo essere il contrasto, e quei reciproci bilanciamenti, che tra le moli acquee, che sono al di sopra della retta RS, come quelle che

(1) Spectacle de la Nature 22.me entretien. La Mer. Mais la même main (de Dieu) qui éléve ses vagues comme des montagnes ver la haute Mer, lui a prescrit des loix, qui la reprime du coté de la terre. Dans les plus grandes agitations, elle respecte les bornes jusqu'ou Dieu lui a permis de s'avancer du coté des nos dameures. Tout l'orgueil de ses flots tombe devant la ligne que Dieu lui a trachée sur le sable, & sept pies de distance font toute la difference du point, ou elle s'eleve dans son état ordinaire avec celui, ou sa rage vien mourir sur la côte dans le fort des plus violentes tempêtes.

(2) Gravesande cap. 11. dice: *In quo motu aqua infra nullum* h 1. (cioè sotto la retta RS) *sensibiliter non agitatur*.

che sono uscite fuori dell'equilibrio, nella natura, costante.

Secondariamente supposto, che sulla superficie dell'acqua stagnante, che veramente è piana, e parallela all'orizzonte (*Fig.* 7. *Tav.* 26.), una causa qualunque produca una cavità *a*, tosto d'intorno a quella l'acqua si estolle verso *mm*, e per il proprio peso da *mm* in *pp* ricade, ma poi per l'acquistata velocità nel cadere ha forza di risalire, ed ammucchiarsi in B, e produce in *pp* cavità, che in un colla massa d'acqua sollevata; cioè *p*B*p* chiamasi *onda*. Questo moto propagandosi dunque dalla cavità *a* in fuori per ogni verso, seguita che il moto dell'onda altro non sia che: *motus circuli* (1) *se se expendentis*. Onde se la causa produttrice dell'onda si supponga agire in un sol luogo *a* (e che perciò mi giova chiamare *onda semplice*), può darsi che l'onda vada in conseguenza del vento V situato a sinistra, cioè nella direzione del raggio *a*F di detto cerchio. Perchè supponiamo che un vento da detto V giunga a far impeto nei lati dell'onde K*m*, *am*, le masse del fluido, che naturalmente sarebbero discese per le perpendicolari *mp*, *mp*, dovendo ora in parte obbedire anche ad un'altra forza straniera, che è il vento, andranno a cadere lontano da *p*,*p*, in *e*,*e* forse per una linea curva, la quale sarebbe una Parabola, quando il vento spirasse egualbilmente, e che l'onda discendesse per la perpendicolare *mp*, secondo la legge comune degli altri gravi; e quindi un galeggiante *m* a poco a poco verrebbe dall'onde sospinto verso F. Ma nel mar da tempesta agitato forse operando detta causa in diversi luoghi, e però essendo molti cerchj che l'un l'altro s'incrociano, l'onda che nella incrociatura diventa *composta* di due che si vanno ad incontrare, deve salire, e discendere per una retta verticale all'orizzonte, quando sii eguale la forza delle due *onde semplici*. Imperciocchè supponiamo, che un'*onda semplice* si propaghi dal centro *a* verso F, (pre-

(1) Gravesande cap. 11.

(prescindo per ora dall'impulso de' venti) ed un' altra *semplice* da un altro canto A si dilati in cerchio verso F, con forze eguali (che saranno come la loro velocità (1), che è come la radice quadrata delle loro latitudini *ad*, AD). Le due onde incontrandosi nel punto F vicendevolmente l'una l'altra si aumentaranno, onde unite in una sola onda, che chiamo *composta*, saliranno per una retta verticale al punto F più alto, che come *semplici* non salirebbero negli altri punti; poi perchè tutta quella congiunta massa non può star fuori dell' equilibrio, discenderanno per una medesima verticale a detto punto F, finchè separate l'una dall' altra si faccia cavità nel punto F, e si trovi chiascheduna restituita, e ordinata in cerchio al proprio centro *a*, ed A. Molto più si verifica questo preciso salire, e scendere dell' onda verticalmente, quando sia composta di più *semplici*, che da diversi centri *a*AHG nel punto F venghino ad incrociarsi. E molto più quando fossero determinate ad incontrarsi per lo soffiar gagliardo di diversi venti V, V spiranti da diverse, e molte opposte parti. Il che per mio giudizio succedendo allora più, che si dice essere il Mar tempestoso, ciascun' onda si può tener per *composta*, e perciò il moto di un galeggiante che seconda il moto dell' onde, non altro sarà, che un ascendere, e scendere per una verticale all' orizzonte; onde io concluderei, che allora il moto dell' onde non potesse alterare il vero muovimento dei Timpani, giacchè l' onde in questo caso non vanno in conseguenza del vento.

Confesso per altro che quest' obbiezione avrebbe tutta la sua forza, se fosse applicata alle correnti che s' incontrano nel Mare; e confesso che non avrebbe difesa, se non nel caso che la direzione della corrente fosse ad angoli retti della direzione del Vascello. Perchè allora l' azione del fluido

(1) Ivi dice: *Celeritates undarum sunt ut radices quadratæ Latitudinum.*

do si esercitarebbe nei fianchi dei Timpani, e nelle sottili coste dell' ali, quali restarebbero di fronte tuttavia libere a poter sofferire tutta la resistenza del fluido.

OBBIEZIONE III.

Secondo che la Nave si avvanza con diversa velocità, la *Parte esterna* z (*Fig.* 1. *Tav.* 26.) seco tirata appresso, fa con la perpendicolare zq un angolo ora maggiore, ora minore; e se la velocità fosse data infinita, l' angolo s' eguagliarebbe ad un retto, perche il peso tenta quanto può di mettersi nella direzione della forza traente. Onde seguita che si avesse a temere che nei Timpani alati ora si affrettasse, ora si ritardasse la caduta dell' ali.

RISPOSTA.

Ma si vede che quindi non è per essere alcun considerabile errore, perchè il telaro benchè farà colla perpendicolare zq un angolo ora maggiore, ora minore, non perciò può far volgere l' assile dei Timpani, onde venghino alterati i tempi delle cadute dell' ali.

OBBIEZIONE IV.

Se il moto di un galeggiante sull' onda (intendo *composta*, perchè se fosse *semplice* sarebbe (1) rigorosamente con-

(1) Posto un galeggiante *m* (*Fig.* 7. *Tav.* 26.) sulla superficie dell' acqua stagnante, e fatto impeto su detta superficie in *a*, il galeggiante a sinistra *m*, si porta lontano da *a* verso K. E la ragion parmi che sia, perchè quantunque, niun' aura spirando, l' onda in tal caso non faccia altro che salire, e scendere perpendicolarmente, tuttavia sdrucciolando il galeggiante, come la fantasia ne sforza a credere, sul pendio dell' onda avviene che invece di muoversi anch' esso, come detta onda perpendicolarmente, acquisti piuttosto nella direzione orizzontale un altro sito; il quale sia verso *a* quando il galeggiante sdruccioli sul pendio che riguarda a quella parte; e sarà verso K se sdrucciolarà sul pendio che appunto mira verso K. Ma perchè le onde più che sono lontane dalla sua origine *a* verso K, sono tanto più piccole, così i regressi del galeggiante muoventesi sul pendio che riguarda ver-

tro l'eſperienza) non altro ſia che un moto di aſcendere, e ſcendere alternatamente per una retta verticale all'orizzonte, certo è che la Nave per il moto ſolo dell'onda non farebbe altro che alzarſi, e sbaſſarſi per la retta, per eſempio *ab* della figura ſuddetta, ma perchè viene in oltre ſpinta immediatamente dal vento, che nel ſuo corpo urta, per la linea orizzontale *bc*, trovaſi ella meſſa in moto da due potenze eſpreſſe per *ba*, *bc* ſecondo la equabile, o accelerata velocità, e direzione delle quali la Nave deve ſenza alcun dubbio prendere una via media *bs*, che ſarà (qualunque ſia la proporzione delle ſuddette potenze) ſempre più lunga della *bc*, ovvero *as*. Ciò che dovendo maſſime avvenire quando per la furia dei venti il Mare è fatto tumido, e le acque meſſe in tumulto alternatamente ſi raccozzano, e ſi ſpianano, li Timpani alati quando più in alto tratti anch'eſſi, e quando più a baſſo ſoſpinti, compiranno un numero di rivoluzioni maggiore aſſai più, che non importa lo andar dritto del Baſtimento per la retta *a*S, ovvero MT parallela; e però nel *Quadrante Loxodromico* parrà che ſiaſi fatto un molto più lungo viaggio, che veramente non è.

RISPOSTA.

A queſta obbiezione riſpondo primieramente, che benchè l'altezza *ab* dell'onde maſſime abbiaſi in alto Mare, come già diſſi, a ſtimare anche più di piedi 7., il Baſtimento perciò non ſi alza, e abbaſſa altrettanto; non potendo per la ſua gravità eſſer ſoſtenuto ſulla punta d'un' onda; coſicchè avverrà, che ſe nel ſito R peſcava, per eſempio, 15. piedi di ſotto di RS, molto più peſcarà di ſot-

to

verſo *a*, ſono minori dei progreſſi che fa ſul pendio che riguarda verſo K; e quindi a poco a poco da *a* verſo K procede. Il Mare dunque benchè tranquillo, butta ſempre alla ſpiaggia i corpi natanti; perchè eſſendo determinati a ſcoſtarſi ſempre più dal luogo dove l'onda naſce, biſogna, giacchè il Mare non è infinito, che finalmente pervenghino al lido.

to di *bc*, trovandoſi in *b*; e quindi giudicarei che l'altezza, cui ſi vuole che dall'onda ſia traſportato il Baſtimento, non ſia almen tanto differente da quella in cui trovaſi nel tempo della calma, quanto ſe la rappreſentano i Poeti (*aliud eſt enim Poetarum more verba fundere, aliud, ea quæ dicas, ratione & arte diſtinguere*); perchè allora ſenza mentire, l'obbiezione ſarebbe di grandiſſimo peſo; onde anche la differenza che paſſa fra *b*S, ed *a*S non verrebbe forſe ad eſſer tanta, che baſtaſſe a poter alterare ſenſibilmente la vera quantità del viaggio.

Ma ſiano l'onde anche tali che tocchino alle nubi, o almeno almeno (ciò che non già nel noſtro Mare, ma nell'occeano forſe accade) dietro loro coprano tutto il corpo di un Baſtimento. In qualunque gran caſo; l'onda ſi potrebbe tenere per un Piano, che quaſi per gradi ſempre più s'inclinaſſe, ſinchè arrivato in *b* tornaſſe a declinare. Onde la equabile velocità, con cui la Nave da R ſarebbe percorſa nella direzione orizzontale verſo *a*, prima ſi diminuirebbe all'incontro del piano R*b*, e poi la rimanente ſi ritarderebbe ſalendo in modo, che (poſto che l'altezza *ab* dell'onda ſia, come a caſo avviene in figura, eguale alla metà di R*a*) la Nave ſu per il piano da R verſo *b*, percorrerebbe ſol tanto ſpazio, quanto è la retta *ad*, da *a* condotta normale ad R*b*; mentre (1) colla velocità che ave-

Z va

(1) A queſto propoſito mi prendo la libertà di onorare i miei ſcritti con una Dimoſtrazione del Chiariſs. P. Federico Sanvitali, ed è la ſeguente:

DIMOSTRAZIONE.

S*Upponiamo* (Fig. 2. Tav. 26.) *che partito il corpo* B *da* A *per andare con equabile velocità verſo* C, *incontri in* B *il piano inclinato* BV; *e che ſi deſideri ſapere, quanto ſpazio avrà percorſo aſcendendo da* B *verſo* V, *nel medeſimo tempo che nella direzione orizzontale avrebbe percorſo lo ſpazio* BC.

va in R prima di urtar nel piano avrebbe percorso tutto lo spazio R*a*.

Questa

BC. *Dico che menata alla retta orizzontale* BC *una perpendicolare* $bE = \frac{1}{2} BC$; *e da* E *condotta a* BV *una normale* Ed, *questa* Ed *sarebbe eguale a detto spazio.*

Onde primo, si prenda $Eb = \frac{1}{2} BC$ *che sarà l'altezza, per cui* B *ascenderebbe con moto ritardato nel tempo, che con moto equabile percorrerebbe* BC; *cominciando ad ascendere colla velocità che ha per* BC. *Il tempo dell'ascesa per* Eb *è eguale al tempo della discesa per* bE; *in fine della quale* B *acquistarebbe la velocità, che ha per* BC.

Secondo, si trovi su BC *il punto* E, *da cui possa alzarsi la* $Eb = \frac{1}{2} BC$, *dicendo nel triangolo* BEb *sta: seno dell'ang.* B. *seno dell'ang.* b :: *Lato* Eb. *Lato* BE *cercato. Ora si tiri da* E *al piano inclinato la perpendicolare* Ed; *sarà* db *lo spazio per cui* B *ascenderebbe, cominciando a salire colla velocità acquistata nella discesa per* bd, *ovvero* bo *nel tempo che ascenderebbe per* EB, *o si muoverebbe equabilmente per* BC.

Terzo, prendendo la velocità $\sqrt{db}$ *acquistata nella discesa per* bd *nel tempo della discesa per* bE, *o del moto uniforme per* BC, *e la velocità* $\sqrt{bB}$ *acquistata nella discesa per* bB, *eguale alla velocità acquistata per* bE, *cioè alla velocità per* BC, *prendendo dico, queste velocità per equabili nel dato tempo per* BC, *avremo* $\sqrt{bd}\,.\; 2bd :: \sqrt{bB}\,.\; \frac{2bd\times\sqrt{bB}}{\sqrt{bd}}$.

E quindi la metà dello spazio trovato $\frac{bd\times\sqrt{bB}}{\sqrt{bd}}$ *sarà lo*

spa-

Questa considerabilissima perdita di velocità, secondo il quadrato della quale i Timpani trovano nel fluido quella

Z 2 resi-

spazio percorso dalla data velocità $\sqrt{bB}$ *su pel piano inclinato nel tempo del moto uniforme per* BC.

Ora $\frac{bd\times\sqrt{bB}}{\sqrt{bd}} = \sqrt{bd}\times\sqrt{bB}$ *facendo attualmente la divisione, e perciò lo spazio cercato è media proporzionale tra* bd, *e* bB. *Imperciocchè* $bd\,.\;\sqrt{bd}\times\sqrt{bB} :: \sqrt{bd}\times\sqrt{bB}\,.\; bB$. *Ma* bE *è media proporzionale tra* bd, *e* bB. *Dunque lo spazio che* B *percorrerà su per lo piano inclinato nel dato tempo cominciando a salire colla data velocità sarà* $= bE = \frac{1}{2} BC$.

Quarto, ora supponendo che la data velocità r *per l'incontro del piano sia diventata* u; *oppure essendo questa a quella, come il seno* BE *del complimento della inclinazione* B *al seno totale* Bb, *e prendendo questa quantità per esprimere la velocità, e supponendo queste equabili averemo* Bb *velocità data.* $2bE = BC :: BE\,.\; \frac{BC\times BE}{Bb}$, *di cui la velocità* BE *nello stesso tempo con moto ritardato percorrerà la metà* $= \frac{1}{2}\,\frac{BC\times BE}{Bb} = \frac{bE\times BE}{bB}$ *d'onde nasce questa proporzione* $bB\,.\; bE :: BE\,.\; \frac{bE\times BE}{bB}$. *Ma per la somiglianza de' triangoli* bBE. EBd *abbiamo* $bB\,.\; bE :: BE\,.\; Ed$. *Dunque* $\frac{bE\times BE}{bB} = Ed$. *E quindi lo spazio, che* B *nel dato tempo colla velocità proporzionata all'ingresso nel piano inclinato, percorre su lo stesso piano, è eguale alla perpendicolare* Ed *tirata sul piano del punto* E *della base, da cui sorge una perpendicolare* $Eb = \frac{1}{2} BC$ *data.*

resistenza, che gli fa muovere d'intorno al loro asse, non è nè meno compensata da quella che, dappoichè il Bastimento è pervenuto in *b*, acquista indi scendendo giù dall' altra parte. Perchè in fine della discesa per *bS* la velocità in S dovrebbe essere eguale a quella, che dopo l'incontro del piano inclinato aveva in R per ascendere fino in *b* (supposto che per R*b* si fosse distrutta tutta la velocità, che aveva in R). E quando fosse maggiore, perchè tutta non si fosse prima distrutta in *b* salendo, avrebbesi a conchiudere che molto più grande essendo stata la velocità in R avanti l'urto, molto più lungo spazio avrebbe percorso nella direzione orizzontale. Ciò che egualmente torna in favore della mia sentenza. Onde sarei per dire (se non fosse follia stabilire una cosa, ad alterar la quale concorrono tante incerte cause d'onde, e di venti) che l'obbiezione proposta valesse piuttosto in senso contrario, cioè che salendo, e scendendo per R*b*S, nel *Quadrante Loxodromico* fosse per risultare la quantità del viaggio minore, che non sarebbe forse camminando nella direzione orizzontale R*a*S.

OBBIEZIONE. V.

Una sola difficoltà per ogni modo irresolubile, ed egualmente possibile resta d'accusare, cioè quando la Nave avvanzasse con tanta lentezza, che la resistenza del fluido incontrata dai Timpani non bastasse a farli muovere. Tranquilità in vero al mio progetto più fatale d'ogni maggior borasca. Perchè queti i venti niun' altra causa (salvo se alcun ajuto non fosse recato dai remi) può fornire alla Nave la velocità necessaria per far muover la macchina.

Per altro non si può negare, che i suddetti Timpani diverebbero più agili, e capaci a rimaner affetti di moto per una resistenza anche minore, se supposto il mar quieto, fossero stati messi a fior d'acqua in modo, che le circonferenze loro toccassero la superficie del mare, e volgendosi, le sole ale giungessero ad immergervisi. Conciossiacchè, oltre che si potrebbe collocare la *Parte interna* più vicino al Piloto, verrebbe diminuita anche la resistenza della massa compresa tra le parallele (*Fig.* 1. *Tav.* 14.) *im*, 9*n*, quale, d'acqua che era, verrebbe ad esser aria, rimanendo la massa intercetta fra le parallele 9*n*, *pd* tuttavia d'acqua. E però essendo la forza d'inerzia (che è come la gravità specifica) dell'acqua a quella dell'aria, come 1000 a 1; e l'acqua marina a quella di fiume prossimamente, come 6 a 5; risulta la specifica inerzia dell'acqua marina a quella dell'aria, come 1200 a 1. Onde per questo capo la resistenza da superare diminuita 1200 volte, i Timpani diventarebbero 1200 volte più atti a ricevere movimento, che non sono, quando stanno immersi affatto nell'acqua marina.

Ma poi nel mar commosso, benchè di buona voglia si recarebbe a gran vantaggio questa maggior mobilità dei Timpani, pure perchè e dall' onde, e dai venti verrebbe loro portato troppo scuotimento, e scompiglio, li ho dalla superficie altamente ritirati sott' acqua; avvisando che ivi, quasi in sicuro asilo si potessero meglio difendere, e ricoverare. Ma ciò che in qualunque modo sia per riuscire, e quali correzioni si doveriano a questa mia Macchina sapranlo quelli, che sono versati nelle cose di marina, e quelli molto più che di detta Macchina facessero prova. Perchè io (indegna cosa ad udire) non ho, che appena veduto dal Lido il Mare, e i Bastimenti nel Porto. E toltone, che per esperienza fatta tanto nell' acque stagnanti, quanto nelle correnti, io so di certo che la *Parte esterna* muovesi sott' acqua con una velocità proporzionale per quanto pare alla forza traente, non ho poi intrapreso alcun altro sperimento necessario a verificar l'effetto totale di questa costruzione.

Supponendola non per tanto conforme al gran Progetto, e che nel *Quadrante Loxodromico* apparisca la quantità del viaggio del Bastimento, applichiamo questo importantissimo mo dato alla determinazione dei gradi di Latitudine, e Longitudine del luogo, in cui si è.

ARTICOLO QUINTO.

Latitudine, e Longitudine del luogo, in cui si è determinata per mezzo del Quadrante Loxodromico.

NOn è già che io pensi d'introdurre qui tutta quella Teoria, onde data la quantità del viaggio di una Nave si perviene in cognizione della Latitudine, e Longitudine del luogo in cui si è; perchè non mancano Autori, che trattano questa parte, e ai quali mi rimetto, ma solo intendo farne un piccol cenno. Onde supponiamo primieramente, che la Navigazione sia *Circolare*, e che per esempio si sciolga (*Fig.* 3. *Tav.* 26.) dal luogo *a* per passare al luogo *d*, e che pervenuti nel sito *b*, si desideri sapere la Longitudine di detto luogo *b*, cioè l'angolo *aPb* al Polo P; e la Latitudine, cioè il complimento di P*b* ad un quadrante. Poichè nel triangolo *aPb* è noto il lato *a*P, complimento della Latitudine del luogo *a*; e l'angolo *Loxodromico Pab*; ed il lato *ab* per mezzo della Macchina suddetta. Colla sola Trigonometria si avrà il lato P*b* complimento della Latitudine ricercata; e l'angolo *aPb* differenza della Longitudine.

Se poi la Navigazione è *Loxodromia*, essendo (*Fig.* 4.) la lunghezza della *Loxodromia ab* alla mutata Latitudine *b*G dell'Equatore EGQ, come il seno totale al cosino dell'angolo *Loxodromico* P*ab*; si rileva detta Latitudine *b*G espressa in tante miglia. Quindi poi il lato mecodinamico, perchè è medio proporzioale tra la Latitudine *b*G, e l'aggregato della medesima Latitudine *b*G, più la *Loxodromia ab* data per mezzo della Macchina. E per fine la differenza di Longi-

gitudine EG, o sia l'angolo *aPb* per mezzo delle *Tavole Loxodromiche*.

Quando per fine camminasse il Bastimento da *a* verso E, o per contrario sul medesimo meridiano P*a*E, si rilevarà immediatamente la Latitudine solo col sottrarre, o aggiungere la quantità del viaggio alla già nota Latitudine del luogo d'onde si sciolse, restando la medesima Longitudine. E se procedesse sull'equatore EQ restando la medesima Latitudine, la quantità EG del viaggio sarebbe da sottrarsi, o di aggiungersi alla Longitudine del Luogo d'onde si sciolse, secondo che il Bastimento fosse diretto verso Oriente, o Occidente. Se per fine il viaggio seguisse sopra un parallelo *mdn*, si avrebbe (restando tuttavia la medesima Latitudine) la differenza di Longitudine, convertendo per mezzo delle Tavole in gradi d'Equatore i gradi di detto parallelo espressi dall'Istromento in tante miglia.

Ma resta d'avvertire, che la Nave (*Fig.* 6.) nel suo corso, per esempio da *a* in *b* fa, o può fare delle *deviazioni*, come sarebbero *ac*, *cd*, *de*, *eb*. Nel qual caso stando alle rivoluzioni solamente della Macchina apparirebbe la distanza da *a* in *b* assai maggiore della vera. Al che dovendosi aver giusto riguardo, sarà d'uopo tenere successivamente memoria del proprio viaggio, facendone un informe abbozzo sulla carta. Laonde su detta carta prima di sciogliere dal luogo *a* si tiri da un punto P, supposto essere il Polo, si tiri, dico, la retta P*a*, che si vuol pur supporre essere il complimento della già nota Latitudine del luogo *a*. E però detta retta P*a* sia segnata di detto complimento (che sia per esempio gradi 32). Tirata indi la linea *ac* qualunque, si noti il valore del noto angolo *Loxodromico* P*ac* (sia gradi 80). Partiti poi da *a*, e pervenuti in C, ove cominciando a deviare deve mutarsi l'angolo *Loxodromico* suddetto (uniti prima i punti P, e C con una retta, che sta per il complimento della Latitudine di un un altro luogo C) ſi ſegni tanto la quantità del viaggio ſin allora fatto, apparente per mezzo della Macchina (per eſempio miglia 200), quanto il valore del nuovo angolo P*cd* indicato dalla calamita (che ſupporremo gradi 73) e così di mano in mano ſi prendano dalla Macchina le quantità delle ſeguenti diſtanze *cd*, *de*, *eb*; e coll' uſo della Buſſola li altri angoli *d*, ed *e* di ciaſcun' altra deviazione. Pervenuti finalmente nel luogo *b*, di cui ſi voglia ſapere la Latitudine, e Longitudine, ſi potrà colla Geometria dai dati angoli, e note diſtanze, e data Latitudine del Luogo *a* ricavare la lunghezza vera del viaggio *ab*; per quindi ſecondo le regole determinare poi i gradi di detta Latitudine, e Longitudine, o determinar detti gradi a parte a parte come ſe in diverſi tempi foſſero ſtate fatte tante Navigazioni, quanti Rombi, o agoli *Loxodromici* adoperati (che ſono qui quattro P*ac*, P*cd*; P*de*, P*eb*) appariſſero in diſegno.

FINE DEL QUADRANTE LOXODROMICO.

BAR-

BARCA

Che va da ſe contro alla corrente di un Fiume.

ARTICOLO PRIMO.

Sua coſtruzione organica.

PArendomi, che foſſe maraviglioſa, e ſtupenda coſa a vedere una Barca, che da ſe camminaſſe contro alla corrente di un Fiume, ſenza ſcoprirſi a' riguardanti la cagione dello ſtrano (1) effetto, mi è venuto in animo di proporre a queſt' uopo un ingegno, valendomi anche qui dei Timpani alati deſcritti nella Macchina intitolata il *Quadrante Loxodromico*.

Si concepiſca adunque (*Fig.* 1. *Tav.* 27.) una Barca GH che ſia trapaſſata per fianco da un aſſe ritorto F*zonmux*E, che faccia (ciò che è ben da rifletter) un medeſimo ſolido con due Timpani A, B, e per l' impulſo della corrente muovaſi in un con eſſi d'intorno alla linea *mn* nel forame, che trapaſſa dall' uno all' altro fianco della Barca. E ſia pur detto aſſe corredato di quattro forcelle P, C, D, Q mobili d' intorno ad eſſo, e lunghe più che il Fiume non è alto, le quali calando giù al letto di detto Fiume, e poggiando contro eſſo, ſiano diſpoſte, quando che ſia, a contraſtare in verſo oppoſto alla Barca, che naturalmente andrebbe a ſeconda da H verſo G.

Ora egli è evidente nel caſo della *Fig.* che le due forcelle

A a celle

(1) Il P. Milliet fece vedere ſul Tamigi un ſimil ſpettacolo; ma era viſibile l'artifizio, nè per quel modo poteva riuſcire in un Fiume tortuoſo. *Trattato XVII. della Navigazione* Prop. 10.

celle C, D poggiando appunto ſul fondo debbono ſtar ferme, ed arreſtare anche la Barca, ſicchè non ſcenda a ſeconda della corrente da H verſo G. Ma intanto ſe la velocità del Fiume è tale, che valga a far muovere i Timpani, e in un con eſſi il ſopraddetto aſſe F*zonmux*E, che come ho detto, è un medeſimo ſolido con detti Timpani, il centro del moto dell' aſſe, e dei Timpani, che prima ſi ſuppoſe eſſere la retta *mn*, ora ſarà la linea *zoux* determinata dalle ſuperiori eſtremità *zo* della forcella D, ed *ux* della forcella C.

D' intorno a queſta linea *zoux* volgendoſi l'aſſe ſuddetto, le altre due forcelle Q, P verranno (ſtraſcinate lungo al fondo le loro eſtremità inferiori Q, P) verranno, diſſi, la prima Q traſportata avanti un doppio ſpazio di F*z* nel ſito F*q*, ed altrettanto la forcella P dell'altra parte, benchè in *Fig.* ſi ſia per minor confuſione tralaſciata; onde la Barca dalla prima ſituazione *mn* ſarà anch' eſſa, per cauſa dei ruotanti Timpani, ſoſpinta innanzi contro la direzione del Fiume il doppio di *no*, ovvero *mu*, raggi, per dir così, della rivoluzione che ſi fa d'intorno alla linea *zoux*.

Dopo ciò traſportata, come ſi è detto, la forcella Q nel ſito *fq*, ed altrettanto la forcella P dall' altra parte, amendue dette forcelle Q, P ivi ſtaranno immobili, mentre frattanto ſiano ſtraſcinate innanzi le altre due C, D, che prima ſtavano quiete. E così di nuovo alternatamente ſtaranno ferme queſte, intanto che quelle procederanno più oltre. Onde ſeguita che per ciaſcuna rivoluzione dei Timpani alati, ſarà la Barca dalla prima ſituazione *mn* paſſata innanzi nella direzione contraria alla corrente uno ſpazio quadruplo di *no*, ovvero *mu*, ſupponendo che le curvature F*z*, E*x* ſiano, come debbono appunto eſſere, eguali fra loro, e doppie di *no*, ovvero *mu* parimenti eguali.

ARTI-

ARTICOLO SECONDO.

Riſoluzione delle ſeguenti Obbiezioni.

OBBIEZIONE I.

UNa delle prime Obbiezioni, che può mettere in dubbio queſto fatto è, che ſtando ferme per eſempio le due forcelle C, D, non può girar d' intorno alla linea *zoux* l'aſſe ſopraddetto F*zon* ec. ſe e la Barca, e le altre parti moſſe dal ruotante aſſe non ſi alzano, oppure non ſi abbaſſano tanto, quanto importa *no*, ovvero *mu*, che ſono, come ſi diſſe, raggi di queſta rivoluzione. Ciò che eſigge, che la forza motrice proporzionale alla velocità della corrente, debba eſſere aſſai grande, o per ſuperare il peſo di tutta quella parte di Macchina che galeggia, nel caſo che debba alzarſi, o per vincere la reſiſtenza della mole antagoniſta del fluido, nel caſo che ſi debba abbaſſare; oltre che detta forza deve anche di tutti li sfregamenti andar vittorioſa, e vincere anche l'azione contraria, che la corrente eſercita nel corpo della Barca per farla andare a ſeconda.

Per dare un maggior giorno a queſto obbietto conſideriamolo anche nel diſegno ſcenografico della *Fig.* 2. In cui ſi concepiſca l'aſſe *mn* della *Fig.* 1. rappreſentarſi per il punto *n* della 2. che ſta nel centro del Timpano alato B; la porzione *no* dell' aſſe ritorto della *Fig.* 1. eſſere in queſta lo ſteſſo *no*; le forcelle ſono le medeſime indicate colle medeſime lettere, preſcindendo di quelle ſole parti, che la Proſpettiva fa che non poſſono eſſere in viſta. Dico dunque, che ſe il punto *n* deve paſſare a deſtra di *o* verſo H in verſo oppoſto alla corrente, o deve detto punto *n* in un colla Barca, e Timpano alato alzarſi per un arco da *n*

verſo

verso B, supposto centro il punto *o* d'appoggio, ovvero deve il punto *o* abbassarsi per un altro arco, supposto il punto fermo D, estremità della forcella D essere centro di detto arco; e quindi incontrare nell'uno, o nell'altro caso l'accennata difficoltà, cioè una troppo grande resistenza da dover superare.

RISPOSTA.

Al che rispondendo, concedo veramente, che la forza motrice debba essere non poca, e che la sola esperienza può in fatti dare a conoscere, se detta forza basterà a superare tutte le opposte resistenze. Pur tuttavia non mancarò di ricordare come si possa almeno aumentare detta forza motrice. E primo quantunque io non lodarei, che il diametro dei Timpani fosse maggiore di due piedi incirca di Parigi, e l'ali dovendo aver rapporto a tale grandezza, non si possano allungare ad arbitrio, per ricevere l'impulso d'un maggior volume d'acqua, si puonno però fare più larghi, perchè quindi riuscendo più larghe anche l'ali possano presentare un più gran piano all'azione della corrente. Secondo, perchè (*Fig.* 1.) la curvatura *no* + *ob* distanza da *o* fino all'estremità dell'ali spiegate si può (essendo i Timpani un medesimo solido col braccio *no* dell'asse F*zon* ec.) si può, dico, considerare come una lieva, dove la potenza sia applicata in *b*, la resistenza in *n*, il punto d'appoggio in *o*; la potenza, o sia la forza motrice (le altre cose pari) sarà alla resistenza *n* in ragione reciproca di *no* ad *ob*; onde più piccolo che sarà il braccio, o curvatura *no* rispetto alla distanza *ob*, tanto maggiore sarà la forza motrice. E' ben vero, che la Barca in tal caso tanto men veloce. Terzo, bisognarebbe, che i Timpani riuscissero immersi a quell'altezza incirca, dove fosse per essere maggiore la velocità della corrente. Quarto, si potrebbe applicare, quinci e quindi, non già due sole forcelle, ma quattro o cinque, o per lo meno tre; onde essendo più frequenti i punti d'appoggio la Barca venisse continuamente a trovarsi poco men che alla medesima altezza. Quinto, la prora H sia rivolta contro alla corrente, e il forame per dove passa l'asse, sia dal centro di gravità della Barca situato piuttosto verso detta prora, la quale più che sarà scarna e fendente, sarà più confacente ad evitare parte dell'impeto, che il fluido fa nel corpo della suddetta Barca.

OBBIEZIONE II. E SUA RISPOSTA.

Giacchè l'assile deve muoversi nel forame, che traversa la Barca, l'acqua che entrarebbe per detto forame farebbe affondare la Barca, se non fossero pronti molti spedienti applicabili ad un tanto inconveniente. Facendo o che l'asse entrasse per una sorta di stucchio, che giungesse dall'uno all'altro fianco; sicchè non lasciasse penetrar acqua di sorte nel ventre della Barca; o che i Timpani girassero d'intorno a detto fermo asse ec.

OBBIEZIONE III. E SUA RISPOSTA.

Pare, che solo nel caso che il letto del Fiume sia di minuta, e soda giara, ed eguale abbia luogo questo Meccanismo, non potendosi così di leggiero concepire, come in un fondo fangoso, o per grossi macigni ineguale, possano prender piede le forcelle, ed arrestare la Barca. Ma non sarebbe gran meraviglia, che siccome alcuni fiumi non sono navigabili per il modo comune, alcuni pure non lo fossero per questo modo, che è affatto straordinario.

OBBIE-

OBBIEZIONE IV. E SUA RISPOSTA.

Essendo necessario, che quelli che navigano possano, se il Fiume è tortuoso, volgere il loro Naviglio secondo che sia d'uopo, basta da quella parte, dove si vuole che la Barca inclini, alzare le forcelle legate ad una fune (*Fig.* 2.) acciocchè non mordendo più esse il fondo, la Barca o da una, o dall' altra parte si lascj trasportar dalla corrente; ma lasciarle poi ricadere, e pigliar fondo, di nuovo come prima, pare che detta Barca sia indirizzata nella nuova direzione.

FINE DELLA DESCRIZIONE DELLA BARCA.

VI-

VITE D'ARCHIMEDE

Applicata in un modo non conosciuto per anco nè dagli antichi, nè da' moderni Meccanici.

ARTICOLO PRIMO.

Avvegnachè ciascuno sappia qual sia la struttura, e l'uso della *Vite d'Archimede*, non però credo che ad alcuno antico, o moderno Meccanico cadesse mai in animo di ordinarla nel modo che dimostra la *Figura* 3. *Tav.* 27. Codesto mio semplicissimo ritrovato consiste in un cilindro mobile per lo girar di una manetta M su due perni D, B, d' intorno a cui si avvolge una fune, o catena, che qui supplisce per la spira concava della *Vite Archimedea*, e che perciò infila una carrucola R, cui sta poi sospeso ad un uncino un qualunque corpo R. Facendosi pertanto girare detta manetta M, la fune da una parte della carrucola si raccorcia, ravvolgendosi su del cilindro, e dall' altra parte s'allunga, svolgendosi giù da detto cilindro. Quindi la carrucola essendo obbligata a sdrucciolare verso la parte, nella quale la fune s'allunga, porta seco il peso annesso, e l' obbliga a progredire o verso B, o verso D, secondo che la manetta si muove o per una parte, o per l' altra. Ciò che risponde anche in pratica egregiamente.

Ora è chiaro, che quanto la *Vite d'Archimede* è ingegnosa, e opportuna principalmente per far salire l'acqua a mediocri altezze, altrettanto è atta questa mia Macchina a trasportar dei solidi di qualunque figura per una direzione o inclinata, o parallela all' orizzonte. Benchè per altro non nego, che la incurvatura che il cilindro corre rischio d'acquistare, quanto più è lunga la distanza BD, ed il corpo pe-

peſante, non ſia per produr quel medeſimo oſtacolo, che patiſce anche la *Vite d'Archimede* nelle grandi altezze. Tuttavia non dubitarei di mettere in pratica queſta mia *Vite* in moltiſſimi caſi; come ſarebbe per tranſitare dall' una all' altra ripa di un Fiume non molto largo, maſſime quando (o per la ſtraordinaria ſua rapidità, o perchè l' alveo foſſe impedito di troppi macigni ſporgenti in fuori al di ſopra del fondo, o pur anche della ſuperficie dell' acqua, come tra' monti accade) ſi rendeſſero impoſſibili i Porti, che ſi ſogliono fabbricare ſulle Barche. Potrebbe detta *Vite* ſervire ancora per far paſſare nella Città a traverſo del foſſo la caſſetta delle Lettere (che i Franceſi chiamano *la caſſette de la Couliſſe*) benchè ciò non ſarebbe per altro nè più comodo, nè più utile delli ſpedienti, che già ſi praticano. Se poi la Macchina foſſe diſpoſta in alto, e corredata di argane attaccate come ad un punto fiſſo in R, una ſtatua, o altro peſo qualunque portato prima per mezzo di dette argane ad un' altezza un poco maggiore di quella del ſuo piedeſtallo, potrebbe poi, volgendo il cilindro, eſſere orizzontalmente ſoſpinta anche fin ſopra al piedeſtallo medeſimo, per indi eſſer ivi ripoſta. Ardirei d'aſſerire (ma forſe che io queſta volta deliro) che ſi poteſſe applicare detta *Vite* anche a traſportar per molte Leghe delli enormi peſi, come Colonne, Obeliſchi, ec., facendo di maniera, che i due perni foſſero inſieme mobili in guiſa di carro ſopra le ſue ruote *m*, *m*. Onde dopo che per lo volger della manetta M il corpo R foſſe per eſempio portato da B verſo D fin che può, ſi ſollevaſſe alcun poco detto corpo con qualche opportuno ingegno, tanto che ſi poteſſe poi farlo poggiare ſopra un Letto meſſo per di ſotto, intanto che ſi cacciaſſe innanzi verſo Q il carro ſgravato di tal peſo; onde tolto indi via di nuovo il ſoſtegno, e volgendo di nuovo la manetta, ſi tornaſſe progredendo innanzi a guadagnare verſo Q un altro ſpazio; così alternatamente facendo ora

ſtar

ſtar fermo il carro, mentre ſi fa muovere il corpo peſante; ed ora fermando un poco alto il corpo, mentre il carro ſi caccia innanzi. Avvertendo che nel medeſimo tempo che il carro avanza, ſi muova ſeguitamente la manetta M in verſo contrario; perchè altrimenti ſarebbe neceſſario, per ogni volta che ſi faceſſe muovere il carro, diſtaccare il grave dalla fune. Ciò che ſarebbe lungo e tedioſo, principalmente quando, nel ſuppoſto di un corpo aſſai peſante, doveſſe eſſer ſoſpeſo con molte più carrucole, che in *Figura* non è. Avvertendo inoltre che il carro dovrebbe eſſere concepito in tutt' altra maniera, benchè per maggior chiarezza ſi ſia qui poſto rozzamente così.

In ſomma a me baſta aver prodotta queſta Macchina nella ſua ſemplicità, e di aver ſolo avventurate alcune conghietture, acciò gli eſperti Ingegneri poſſano da ſe, ſecondo che richiederanno le differenti occaſioni, recarla a quell' uſo, di cui eſſa ſia capace, e che eſſi ſapranſi avviſare meglio di me.

ARTICOLO SECONDO.

Vite ſimile a quella d'Archimede meſſa in pratica con l'aſſe verticale all' orizzonte.

UNa *Vite* non già con le ſpire eguali, e dall' aſſe di rotazione CA egualmente diſtanti, come (*Fig.* 1. *Tav.* 28.) quella d'Archimede, ma con le ſpire (*Fig.* 3.) ſempre maggiori aſcendendo, potrebbe praticarſi, e forſe in alcuni caſi eſſer utile anche con detto aſſe AC non già inclinato, ma verticale all' orizzonte. E perciò ſollevare i corpi in alto in una maniera affatto mirabile.

Il dottiſſimo Sig. Abate Nollet nella ſua *Fiſica Sperimentale* (1) moſtra come per cauſa della Forza centrifuga molti

B b

(1) Tom. II. Lez. V. Tav. 4.

ti liquori di diverſa gravità ſpecifica aſcendano (*Fig.* 4.) in un Tubo retto inclinato all' orizzonte, quando il Tubo quaſi raggio ſia rapidamente moſſo intorno ad un aſſe CA. Ora poichè non può riuſcire a tal uopo il Tubo, ſe non è di una mediocre lunghezza, e quindi i liquori non ſi poſſono far ſalire ſe non a piccole altezze, immaginiamoci che detto Tubo ſia avvolto in ſpira, come (*Fig.* 3.) *f*, *b*, *g*, B ec. d'intorno a un aſſe AC verticale all'orizzonte, e ruotante in un col Tubo velociſſimamente d'intorno a ſe ſteſſo; onde avverrà, ſe mal non erro, che il liquore per cauſa di detta Forza centrifuga ſalirà per queſto Tubo, quaſi per un piano inclinato, da *f* ſino ad X.

Io veramente in vece del Tubo, e del liquore, ho fatto prova (ed èmmene avvenuto beniſſimo) di un filo d'acciajo (*Fig.* 2. 3.) avvolto in una ſola ſpira *f*, *b*, *g* groſſo tanto, che diventi infleſſibile alla Forza cui debba reſiſtere (nel mio caſo era groſſo 2. linee incirca del piede del Reno) e ſoſtenuto almen per ogni quarto di cerchio d'intorno all'aſſe CA, con vetti ſimili a quelli, che in figura ſono ombreggiati a puntini. Nel piano orizzontale (*Fig.* 2.) la diſtanza *cf* era eguale a polici 2 $\frac{1}{2}$; *cg* = a polici 7 $\frac{1}{2}$; ſicchè *cf* era ad *fg*, come 1 a 2. Nel piano verticale (*Fig.* 3.) lo ſpazio *fg* tra il principio di una ſpira *f*, *b*, *g* al principio di un'altra proſſima *g*BP era maggiore poco più di 3 polici. Così concepita la Macchina, ed appiccativi ſucceſſivamente con un uncino (il quale ſe foſſe corredato di una carrucola rieſcirebbe più agile) due differenti gravi *z*, uno di legno, che peſava oncie 2, ed un altro di piombo peſante oncie 15. Queſti ſalivano velocemente da *f* verſo *b*, poi *g* ec. mentre volgendo la manetta M, l'aſſe AC ruotava con rapidità in ſenſo oppoſto, cioè da *g* verſo *b*, poi *f* ec.

Per render qualche ragione di ciò biſogna conſiderare, che il grave *z* viſto di profilo (*Fig.* 3.) mentre era in quie-

te

te decombeva verticale, e coperto ſotto il punto d'attacco P; ma poi ruotando la ſpirale ſupponiamo ſecondo l'ordine EDP, acquiſtò per cauſa della Forza centrifuga un più alto luogo, tentando diſporſi quaſi ſecante detta ſpirale nella direzione PC poſto in diretto col raggio, che parte dal centro di ruotazione. Che ne avviene perciò? Avviene che ſe detto grave *z* foſſe con l'uncino attaccato alla periferia di un cerchio (*Fig.* 1. e 2.) ruotante intorno al ſuo centro C, ſecondo l'ordine per eſempio P*eab*, ſtarebbe nel punto P d'attacco immobile, perchè dovendoſi per cauſa di detta Forza concepire il grave diſpoſto nella direzione CPZ, direzione che non più da una parte inclina, che dall'altra, il grave non può ſdrucciolare nè da una parte verſo *e*, nè dall'altra verſo *b*; onde ſeguita che ſe le ſpire *fbg*, *g*BP, PEX foſſero ſtate eguali, coſicchè nel piano orizzontale (*Fig.* 1.) rappreſentaſſero un circolo, per la addotta ragione il grave non potrebbe ſalire. Ma ſe invece di un circolo P*eab* muoventeſi orizzontalmente intorno al centro C, foſſe piuttoſto una ſpirale ruotante ſecondo l'ordine XEDP ec. (*Fig.* 2.) il grave *z* non trovando in P una ſicura preſa, perchè *z*P formarebbe allora un angolo miſto acuto con PD, ſdrucciolarebbe, come in fatti avviene, in ſenſo contrario da P verſo D, poi E ec. obbedendo così quanto può a quella Forza, che tenta rimuoverlo ſempre più lontano da detto centro; giacchè D è lontano da C più di P; E più di D ec.

Queſto diſcorſo vale a dimoſtrare, che il pezzo *z* debba ſcorrere lungo una ſpirale orizzontale moſſa d'intorno al ſuo centro C, ma non già a convincere che debba ſalire ſu per una ſpirale elevata ſopra l'orizzonte, come quella della *Fig.* 3. e rotante intorno al ſuo aſſe AC. Onde pare, che perciò il grave *z* debba per mezzo della Forza centrifuga diventare affetto di un'altra inclinazione particolare, la quale io ammetto volontieri, benchè per non aggiungere nuove figure, e per non parer troppo lungo, trala-

ſcio

ſcio di ricordarla. Volendo che ciò ſia quanto piacquemi per ora dire nel propoſito della *Vite d'Archimede*.

Se poi qualcheduno dopo aver trovato vero in effetto, quanto io ſo di certo per eſperienza, quindi ſi luſingaſſe che una ſimil *Vite* foſſe applicabile al moto perpetuo (avviſando che o dell' acqua, o delle palle ſalite così a certa altezza acquiſtaſſero poi cadendo una tal quantità di moto, che ſe andaſſero ad urtar nelle penne di una ruota ordinata a far muover la *Vite*, la faceſſero di fatto muovere tanto, che riportaſſe o l' acqua, o le palle cadute alla primiera altezza) ſtia certo, che queſta opinione, oltrechè dall' Autore da me lodato è (1) altamente ſchernita, ſarebbe poi anche riprovata dallo ſperimento.

(1) Ceux (dice egli nella Lez. 3. Sez. 3. delle leggi del moto ſemplice Artic. 2.) qui s'en laiſsent impoſer par l'inſpection d'uno Machine, ou par une pretendue demonſtration geometrique, ſur la quelle on s'appuye quelque fois pour établir la decouverte de mouvement perpetuel, ſont des dupes de la mauvoiſe ſoi, ou d'un paralogiſme qui ne tiennent gueres contre de gens inſtruits. Le mouvement perpetuel eſt la pierre philoſophale de la mechanique; ordinairement ceux qui s'y heurtent, ne ſont pas fort initiés dans cette ſcience, de même qu'une recherche obſtinée de la quadrature du cercle, ou du grand oeuvre, n'annoncent a preſent, ni un Geometre ſublime, ni un habile Chymiſte.

FINE DELLA VITE SIMILE A QUELLA D' ARCHIMEDE.

OSSERVAZIONI

SOPRA

ALCUNI POLIGONI RETTILINEI REGOLARI.

PREFAZIONE.

IO *tengo fermissima opinione, che in ogni secolo valentissimi Matematici avranno trattata la materia de'* Poligoni rettilinei regolari , *e saranno in essa iti tant' oltre, che per quanto può la penetrazione degli uomini troppo angusta, e limitata avranno discoperte le loro proprietà e natura; sicchè a quelli, che sono successi dappoi, non altro più rimanga che fare in questa parte. Ma non ostante lusingandomi, che in affare geometrico queste figure non siano forse state per lo addietro costrutte così, come ora da me si fa; e che talvolta si possa se non per arte, almen per caso incontrare in qualche verità non ancora intesa, o avvertita dagli altri; quindi mi parve ben fatto di estendere queste poche* Osservazioni , *le quali abbenchè la maggior parte siano nuove per me, che non sono molto esperto in questa sorta di scienze, non intendo però di sostenere che lo siano per altri; massime ancora perchè, per chiunque siasi, l'asserir cosa nuova sarebbe troppo temeraria impresa; non potendosi ragionevolmente supporre, che un sol uomo sappia quanto siasi scritto per le innanzi, e molto meno quanto oggidì da tanti in tante parti si scriva.*

Era poi a dir vero la mia prima intenzione di cominciare dal Pentagono, *come quello, che è il primo, nel quale dopo zero principia coll' unità la serie delle differenze, che (num. 156.) passano tra l'angolo retto, e gli angoli al centro ed alla periferia di qualunque* Poligono; *ed è pure il primo, di cui mentre prodotti i lati s'incrocciano, non può non presentarsi qualche proprietà da osservare. Ma il* Triangolo, *e il* Quadrato *mi trattennero intorno a certe bagatelle, che dopo le seguenti* Definizioni *tosto espongo.*

DEFINIZIONI.

1. Chiamo primo *aſſe* di un Poligono (*Fig.* 8. *Tav.* 29.) la retta BQ, che coincide col diametro del circolo circoſcritto ad eſſo Poligono.

2. Le *ordinate* ſono le rette YZ, GM, PN, RT condotte normali all' *aſſe* ſuddetto.

Le GM, PN ſituate dentro all' area del Poligono ſi dicono *ordinate interiori*; ed *eſteriori* ſono le YZ, RT, perchè poſte al di fuori di detta area.

3. Le porzioni del ſuddetto *aſſe* intercette tra un' *ordinata* e l'altra, e determinate comunque, le chiamo *aſſiſſe*, quali ſono Qc, *cn*, *nm*, ed anche *n*B &c. Delle due *aſſiſſe* appartenenti ad un' *ordinata* P*n*, chiamo Q*n* *aſſiſſa maggiore*, ed *n*B *minore*.

4. Io appello *ſuttenſa* una retta condotta da angolo ad angolo per l'area di un Poligono, quando la conſidero come oppoſta ad un qualche numero di lati di eſſo Poligono. Perciò PN ſarà una *ſuttenſa* a due lati; NG *ſuttenſa* a 3; GM a 4 &c. anzi qualche volta chiamo il medeſimo lato *ſuttenſa* ad un lato, come impropriamente, ma con ragione mi ſono eſpreſſo al n. 158. nel titolo di quella Propoſizione.

5. *Poſte in ſimili ſiti* chiamo alcune linee, o angoli, o piani, che ſono nel medeſimo modo ordinate, e diſpoſte intorno al centro della Figura. Avvertendo, che ciò che in qualunque Poligono ſi aſſeriſce riſpetto ad una linea, angolo, o piano, tanto ſi deve intendere di qualunque altra linea, o angolo, o piano *poſto in ſimili ſiti* della Figura. Tuttociò per eſempio che (*Fig.* 4. *Tav.* 29.) ſi dirà della retta ZB, s'intende che ſia vero dell' altre tutte BE, EH &c. *poſte in ſimili ſiti*. Ciò che ivi ſi aſſeriſce per eſempio dell' angolo GZA ſarà pur vero dell' angolo AEM, MFQ &c.

ARTI-

ARTICOLO PRIMO.

Del Triangolo.

PROPOSIZIONE I.

Alla terza parte di ciaſcun lato del Triangolo equilatero nop (*Fig.* 1. *Tav.* 29.) *guidati i lati di un Eſagono* bqe *&c.*, *e di un altro Triangolo* eGb, *ſaranno i due Triangoli preſi inſieme eguali a due Eſagoni. Dico* eGb + nop = 2 bqe *&c.*

2. E' dovere, che preceda il valore degli angoli di queſto Poligono, non ſolo perchè ſerve alla propoſta dimoſtrazione; ma anche per non interrompere l'ordine già prefiſſo negli altri. E però

$$\text{Ang. } bce = \text{Gr. } 120 = \frac{360}{3}$$

$$beG = \text{Gr. } 60 = \frac{360}{6}$$

$$\text{Onde } beG = \frac{bce}{2}.$$

Nei quali valori v'è d'oſſervabile, che l'angolo al centro di un Eſagono è eguale all' angolo alla periferia di un Triangolo; e reciprocamente l'angolo al centro di un Triangolo è eguale all' angolo alla periferia di un Eſagono. Quindi (coſtrutta la Figura come abbiamo propoſto) naſce, che eſſendo il Triangolo *bqe* = *bce*, l'area di un Triangolo ſta all' area di un Eſagono inſcritto nel medeſimo circolo, come 1 a 2. L'area poi di un eſagono ſta all' aria di un triangolo circoſcritto al medeſimo circolo, come 2 a 3; ciò che ſpicca da ſe nella Figura, e ſi deduce anche

che dal primo Teorema pubblicato (1) dal Chiarissimo Francesco Maria Zanotti. Onde essendo l'Esagono bqe &c. inscritto nel medesimo circolo rispetto al Triangolo eGb, ed essendo anche circoscritto al medesimo circolo rispetto al triangolo nop, succede che il Triangolo eGb, l'Esagono bqe &c. il triangolo nop si ritrovano ordinati in progressione aritmetica, come li tre numeri 1. 2. 3; onde siccome $1 + 3 = 2 + 2$; così il Triangolo eGb + trian. nop = 2 Esagoni bqe &c. Come era da dimostrare.

PROPOSIZIONE II.

Il quadrato eretto sul diametro di un Circolo circoscritto ad un Triangolo è al quadrato eretto sul lato di esso Triangolo, come 4 a 3. Dico $\overline{qG}^2 . \overline{Ge}^2 :: 4 . 3$.

3. Benchè questa Proposizione sia già dimostrata dal P. Tacquet (2), non ostante in grazia delle conseguenze che ne deduco, sia lecito anche a me di dimostrarla così. Poichè dall' estremità del diametro Gq guidate qb, qe, che saranno lati di un Esagono, risultano bc, bq eguali tra di loro, ed alle due ec, eq, avviene che la be taglia in d per metà il raggio cq; e quindi $Gd = 3dq$; $Gq = 4dq$; $cq = 2dq$.

Onde $\overline{bd}^2 = \overline{bq}^2 - \overline{dq}^2 = \overline{cq}^2 - \overline{dq}^2 = 4\overline{dq}^2 - \overline{dq}^2 = 3\overline{dq}^2$ e però essendo be doppia di bd, sarà

$\overline{be}^2 = 4\overline{bd}^2 = 12\overline{dq}^2$. Ma $\overline{Gq}^2 = 16\overline{dq}^2$. Sarà dunque

$\overline{Gq}^2 . \overline{be}^2 :: 16\overline{dq}^2 . 12\overline{dq}^2 :: 4 . 3$. Ciò che era &c.

CON-

(1) Lettera del suddetto stampata in Firenze l'anno 1749.
(2) *Elem. Geom.* Lib. IV. Prop. 15. nello Scoglio.

CONSEGUENZA I.

4. Poichè $\overline{Gq}^2 = 16\overline{dq}^2$, $\overline{be}^2 = 12\overline{dq}^2$, ed $\overline{eq}^2 = 4\overline{dq}^2$, li tre quadrati $\overline{Gq}^2$, $\overline{be}^2$, ovvero $\overline{Ge}^2$, $\overline{eq}^2$ saranno come i tre numeri 16, 12, 4, o sia 12, 9, 3.

E perchè $\overline{me}^2 = \frac{1}{4}\overline{Ge}^2 = \frac{1}{4}\overline{be}^2 = 3\overline{dq}^2$. e perciò $\overline{bm}^2 = \overline{be}^2 - \overline{me}^2 = 12\overline{dq}^2 - 3\overline{dq}^2 = 9\overline{dq}^2$; li tre quadrati $\overline{be}^2 = 12\overline{dq}^2$; $\overline{bm}^2 = 9\overline{dq}^2$; $\overline{me}^2 = 3\overline{dq}^2$ saranno essi pure, come i tre numeri 12. 9. 3.

CONSEGUENZA II.

5. Poichè la somma de' quadrati formati sopra ciascun lato dell' Esagono $= 2dq$ è $= 6 \times 4\overline{dq}^2 = 24\overline{dq}^2$; ed i tre quadrati $\overline{be}^2 = 12\overline{dq}^2$; $\overline{bm}^2 = 9\overline{dq}^2$; $\overline{me}^2 = 3\overline{dq}^2$ presi insieme fanno $24\overline{dq}^2$, ne siegue che la somma de' quadrati formati sopra ciascun lato di un Esagono è eguale alla somma di detti tre quadrati $\overline{be}^2$, $\overline{bm}^2$, $\overline{me}^2$.

CONSEGUENZA III.

6. Perchè primieramente la superficie della sfera sta alla superficie curva del cilindro quadrato inscritto nella medesi-
ma

ma sfera (1) come 2 a 1, o come 24 a 12 e la ſuddetta ſomma de' quadrati $24\overline{dq}^2$ ſta a $\overline{be}^2 = 12\overline{dq}^2$ pure come 24 a 12, ne ſiegue che la ſuperficie della sfera ſta alla ſuperficie curva di detto cilindro, come la ſomma de' quadrati formati ſu i lati di un Eſagono al quadrato del lato be del Triangolo regolare inſcritto.

7. Secondo. Che ſe alla ſuperficie curva di eſſo cilindro inſcritto aggiungeremo la ſuperficie delle due baſi, allora la ſuperficie della sfera ſtà a tutta la ſuperficie del cilindro (2) come 4 a 3; ma $\overline{be}^2$ a $\overline{bm}^2$ ſta come 4 a 3. Dunque la ſuperficie della sfera ſta a tutta la ſuperficie del cilindro inſcritto, come $\overline{be}^2$ a $\overline{bm}^2$.

8. Terzo. Inoltre $\overline{Gq}^2 = 16\overline{dq}^2$ ſta ad $\overline{mb}^2 = 9\overline{dq}^2$ come 16 a 9; ma la ſuperficie o ſolidità della Sfera ſta alla ſuperficie o ſolidità di un Cono Equilatero inſcritto nella medeſima (3) come 16. a 9. Dunque la ſuperficie o ſolidità della Sfera ſta alla ſuperficie o ſolidità di un Cono Equilatero inſcritto nella medeſima, come $\overline{Gq}^2$ ad $\overline{mb}^2$.

9. Quarto. Abbiamo ancora $\overline{Gc}^2 = 4\overline{dq}^2$, che ſta a $\overline{Gd}^2 = 9\overline{dq}^2$, come 4 a 9. Ma la ſuperficie o ſolidità di un Cono Equilatero ſta alla ſuperficie o ſolidità della Sfera (4) inſcritta nel medeſimo Cono, come 4 a 9. Dunque

que

(1) Tacquet prop. 33. nell' aggiunta al *Trattato della Sfera, e Cilindro d'Archimede*.
(2) Tacquet prop. 34. nel luogo ſopracitato.
(3) Tacquet prop. 39. nel luogo ſopracitato.
(4) Tacquet prop. 40. nel luogo ſopracitato.

que la ſuperficie o ſolidità di detto Cono ſta alla ſuperficie o ſolidità di detta Sfera, come $\overline{Gc}^2$ a $\overline{Gd}^2$.

10. Quinto. Finalmente $\overline{cq}^2$ ſta a $\overline{dq}^2$, come 4 a 1; e la ſuperficie di un Cono equilatero circoſcritto ad una Sfera è alla ſuperficie di un Cono equilatero inſcritto (1) come 4 a 1. Dunque la ſuperficie &c. ſta come $\overline{cq}^2$ a $\overline{dq}^2$. Lo ſteſſo ſi deve dire riſpetto alla proporzione che è tra il Triangolo equilatero circoſcritto, ed inſcritto nel medeſimo Circolo; e riguardo pure ad un Tetraedro circoſcritto, ed inſcritto nella medeſima Sfera.

ARTICOLO SECONDO.

Del Quadrato.

PROPOSIZIONE I.

Tirate dagli angoli a, d *di un quadrato* (*Fig.* 2.) *le* aQ, dp *ſuttenſe a tre lati di un ottagono inſcritto nel medeſimo Circolo. Poi dal punto d'interſezione* f *alla periferia condotta la* fe *normale al diametro* bK, *dico* 1. *Che* $\overline{fe}^2$ *è eguale all'eccesso dell'ottogono ſopra il quadrato.* 2. *Che* $\overline{Ke}^2$ *è eguale all'area di detto ottogono.*

11. Eſſendo aQ parallela a bd, e dp parallela ad ab, riſulta l'angolo afd = ang. abd, e li triangoli afd, abd, che hanno comune la baſe ad, parimenti eguali. Guidata

D d poi

(1) Tacquet prop. 41. nel luogo ſopracitato.

poi nm ai punti, dove le rette aQ, dp fegano i lati ab, dg, fono eguali anche i triangoli afd, dfm, mfn, nfa, perchè infiftono fopra bafi eguali af, fm, ed hanno la medefima altezza. Onde tutto il rettangolo $nadm$ eguale a detti quattro triangoli farà pure eguale ai quattro triangoli bpa, abd &c. che fono tutti infieme la differenza, o l'eccesso dell'ottogono fopra il quadrato $adgb$.

12. Ora poichè (effendo i triangoli fopraddetti afd, abd fimili, ed eguali) rifulta $bo = of = fc$, e che $bo = uK$, farà $bo + uK = bf = oc = an$; e farà $bK - bf = fK = ba = ad$. Perciò il quadrato eretto fopra la media proporzionale tra bf, ed fK, cioè tra an, ed ad, farà eguale al fuddetto rettangolo $nadm$, eguale, diffi, all' eccesso dell' ottogono fopra il quadrato $adgb$. Il che era in primo luogo da dimoftrare.

13. Finalmente per effere $\overline{Ke}^2 = \overline{fK}^2 + \overline{fe}^2$, ed effendo $\overline{fK}^2$ eguale al quadrato $adgb$, ed $\overline{fe}^2$ eguale al fuddetto eccesso, viene detto $\overline{Ke}^2$ eguale al quadrato $adgb$ più il rettangolo $nadm$ eccesso predetto, e per confeguenza eguale a tutta l'area dell'ottogono $pabd$ &c. Ciò che reftava da &c.

PROPOSIZIONE II.

Le diagonali ab, gK; cb, Kf; af, cg *dividono il quadrato* (*Fig.* 3.) agbK *in tre parti eguali; una marcata a puntini, tratteggiata l'altra, e bianca l'ultima.*

14. Si guidi Qn per i punti d'interfezione Q ed m, onde effendo le rette cQ, Kn parallele ed eguali, rifultano i trian-

triangoli cQm, KQm eguali, perchè hanno la medefima altezza, e la medefima bafe Qm; dai quali perciò fe fi leva la parte comune Qdm, refta la parte bianca Qcd eguale alla bianca dKm; ma il triangolo QcK è pure eguale al triangolo QnK, dai quali togliendo via parti eguali: cioè Qcd dal triangolo QcK, e dKm dal triangolo QnK, il refiduo cdK marcato a puntini rifulta eguale al refiduo tratteggiato $mKn + mdQ$.

15. Secondariamente perchè Qm, cK fono parallele comprefe nel medefimo angolo cfK, e che per effer cf divifo per metà in Q, viene $fQ . fc :: 1 . 2$; perciò abbiamo ancora $Qm . cK :: 1 . 2$. Ora effendo, come diffi, Qm, cK parallele, rifultano fimili i triangoli Qdm, Kdc; e quindi nafce ancora che $dm . mQ :: dc . cK$; ed invertendo $mQ . dm :: cK . dc$, ed alternando $mQ . cK :: dm . dc$. Ma $mQ . cK :: 1 . 2$. Dunque $dm . dc :: 1 . 2$. Pertanto i triangoli cdK, dKm, poichè hanno la medefima altezza, faranno fra effi come le bafi dm, dc: cioè faranno come $1 . 2$. Onde il triangolo cdK farà doppio del triangolo dKm. Sarà dunque eguale alli due triangoli bianchi $Qcd + dKm$, che fono ftati moftrati eguali. E perchè detto cdK è anche eguale ad $mKn + mdQ$ viene anche $Qcd + dKm = mKn + mdQ$. Dunque finalmente concludo, che cdK; $Qcd + dKm$; $mKn + mdQ$ fono tre piani tra effi eguali, e tutti infieme eguali a $QcKn$ quarta parte del propofto quadrato $agbK$. Quindi moltiplicando per 4 ciafcuna di dette parti tre, verrà il quadrato $agbK$ dalle fopraddette diagonali divifo in tre eguali parti. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA I.

16. E' rimarcabile che fe foffe per d tirata una retta parallela ed eguale a cQ quefta moftrarebbe le altezze dei triangoli mdQ, cdK, le quali farebbero come $1 . 2$; giacchè

chè $md \cdot cd :: 1 \cdot 2$. E perchè i triangoli tra essi sono in ragion composta delle altezze e delle basi; essendo pure le basi $mQ \cdot cK :: 1 \cdot 2$; verrebbe il triangolo mdQ al triangolo cdK, come 1 a 4. Ma cdK è $\frac{1}{3}$ del quadrato $QcKn$. Dunque mdQ verrebbe ad essere $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{3}$, cioè $\frac{1}{12}$ parte di detto quadrato $QcKn$.

CONSEGUENZA II.

17. Per la medesima ragione addotta il triangolo mdQ sta al triangolo Qcd, come 1 a 2; al triangolo mKn, come 1 a 3; ed abbiamo osservato che sta al triangolo cdK come 1 a 4. Dunque li triangoli $mdQ \cdot Qcd \cdot mKn \cdot cdK$ sono ordinati in progressione aritmetica, come li quattro numeri 1 . 2 . 3 . 4. Da quali ben si scorge, quali eguaglianze de' piani l'addizione produrrebbe. Che se dalla progressione aritmetica si levi via il terzo termine, cioè il triangolo mKn, che corrisponde al num. 3, in tal caso restano gli altri tre triangoli ordinati in progressione geometrica crescente in ragion dupla, come li tre numeri 1 . 2 . 4. E quindi risultano altre eguaglianze de' piani per la moltiplicazione.

Annotazione I.

18. Ciò che si è asserito in queste due Conseguenze relativamente alle parti del quadrato $QcKn$ è vero anche rispetto a tutto il quadrato $agbK$, quando si moltiplichino per 4 quelle di dette parti, che entrano in questione.

Annotazione II.

19. Questa Proposizione non è particolarmente vera nel solo Quadrato, ma generalmente si estende a qualunque parallelogrammo, o rettangolo dato.

ARTI-

ARTICOLO TERZO.

Del Pentagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di detto Poligono.

20. Si prolunghino da prima i lati del proposto, o di qualunque altro Poligono (*Fig.* 4.) finchè arrivino a quell' ultimo punto d'intersezione, oltre al quale procedendo anche all' infinito, mai più indi s'incrocciano. Ora essendo la somma di tutti gli angoli AGP, GPQ &c. alla periferia di qualunque figura rettilinea eguale a due volte tanti angoli retti, meno quattro (i quali pareggiano la somma di tutti gli angoli esterni HGP, BPQ &c.) quanti sono i lati della Figura, ed essendo pure gli angoli di un triangolo presi insieme eguali a Gr. 180, perciò quando aggiungendo, e quando sottraendo angoli gli uni dagli altri, quelli di questa Figura vengono a risultare, come siegue:

Ang. GPQ = Gr. 108

$$QPB = \text{Gr. } 72 = \frac{360}{5} = MCQ \text{ ang. al centro del 5gono.}$$

$$QBP = \text{Gr. } 36 = \frac{360}{10} = MGQ \text{ ang. al centro del 10gono.}$$

$$\text{Onde } QBP = \frac{QPB}{2} = \frac{GPQ}{3}.$$

Essendo vero pertanto, che sottraendo 36 da 60 angolo al centro di un esagono, il residuo 24 è eguale ad $\frac{1}{3}$ dell' angolo al centro di un 5gono, eguale dico a $\frac{72}{3}$. Perciò se fatto centro in B con qualunque apertura BQ descrivasi (il (il che geometricamente si può fare) un arco $QY = $ gr. 60, l'angolo QBY sarà $= \frac{McQ}{3}$, cioè $= \frac{72}{3} = 24$ angolo al centro di un 15gono.

Annotazione.

21. Se mai fosse utile anche la trisezione dell'angolo AGP alla periferia del proposto 5gono, è facile il conseguirla. Imperciocchè tirate le MG, QG, l'angolo per esempio AGM viene ad essere $\frac{1}{3}$ dell'angolo AGP. Perchè sottratto l'angolo MAG da due retti, cioè gr. 108 da gr. 180, la metà 36 del residuo 72 è appunto il valore dell'angolo $AGM = AMG = QBP$; sicchè dalle due rette MG, QG detto angolo AGP viene diviso in tre eguali parti.

PROPOSIZIONE II.

Il lato di un 5gono sta alla maggior ordinata, come essa maggior ordinata a tutti due. Voglio dire che $\div$ PQ. GM. PQ + GM.

22. Opportuna a questo fatto trovasi nella Figura questa proporzione BQ . QP :: BQ + QM . MG; ovvero QP . BQ :: MG . BQ + QM; ma essendo stato provato (n. 21.) l'angolo AGM, ovvero $AMG = QBP = AZG$, sarà anche il lato GZ, ovvero BQ eguale al lato GM. Il lato poi MQ è eguale a PQ. Sostituendo dunque PQ a QM, ed MG a BQ avremo QP . MG :: MG . MG + QP. Cioè $\div$ PQ . GM . PQ + GM, che è lo stesso, ed è ciò che era da dimostrarsi.

CONSEGUENZA I.

23. Perchè PQ . GM :: GM . PQ + GM, ne siegue che se si prenda una linea PQ + GM composta del lato PQ del 5gono, e GM ordinata maggiore, PQ sarà il segmento minore, GM il segmento maggiore; e che nel punto dove queste linee unisconsi a formarne una sola, la retta resta divisa *media & extrema ratione*.

CONSEGUENZA II.

24. Essendo ZE, PQ parallele, saranno gli angoli alla medesima parte QPB, EZG eguali; ma AGZ è per la costruzione eguale a QPB; dunque eguale anche ad EZG; e però $EZ = EG$. Ora $EG = GB$ posta in simile sito $= PQ + GM$. Dunque $EZ = PQ + GM$. Sicchè $\div$ PQ . GM . EZ; ovvero anche le sole metà $\div$ nQ . mM . xE.

CONSEGUENZA III.

25. Per la similitudine de' triangoli PGQ, PZF succede, che PG . GQ :: PZ . ZF; ed essendo i primi tre termini continui proporzionali, il quarto termine ZF sarà pure continuo proporzionale a quelli. Onde $\div$ PG . GQ . PZ . ZF; ma $GQ = BP$; $ZF = ZB$. Dunque facendo la sostituzione risulta anche $\div$ PG . PB . PZ . ZB.

Annotazione.

26. E' superfluo il ricordare, che $PQ \times EZ = \overline{GM}^2$; e così che $PG \times ZB = PB \times PZ$. Sono cose che vengono da se, e perciò saranno tralasciate anche in progresso.

PROPOSIZIONE III.

La qual ſerve d'apparecchio alla ſeguente.

Dato un primo termine, trovarne un ſecondo, al quale così ſtia il primo, come il ſecondo a tutti due.

27. Si divida (*Fig. 5.*) *media & extrema ratione* la retta GP primo termine dato, ſu la quale prodotta ſi ſegni P*e* eguale al ſegmento maggiore, ed *e*B poſta in dirittura eguale a tutta la data GP. Dico che ∺ GP. PB. GB.

Però con una medeſima apertura PG deſcrivanſi due archi, uno col centro in P, l'altro col centro in *e*; ed al punto d'interſezione Q ſi guidino le rette PQ, *e*Q, che ſaranno ambedue eguali alla data GP, e ſi uniſcano i punti Q, B con una retta. La *e*Q = GP ſia come GP ſimilmente diviſa in *r*, coſicchè *r*Q ſia il ſegmento maggiore; onde condotta P*r*, riſultino *r*Q, *r*P, P*e* eguali. Ora per la decima d'Eucl. Lib. 4. li tre triangoli *re*P, *e*PQ, PQB verranno iſoſceli ſimili, e co' gli angoli alla baſe doppj ciaſcuno degli angoli al vertice; onde ſiccome per la coſtruzione ∺ *er*. *r*Q. Q*e*, così pure ſaranno le baſi di detti tre triangoli ∺ *re*. *e*P. PQ.

28. Si produca ora QP per la quantità PH = PB, e ſi congiungono i punti B, H, dai quali ſiano condotte per G, e Q ſino al punto di concorſo E le rette BE, HE. Dico primieramente, che li triangoli PQB, QBH, HEB ſono ſimili. Imperocchè l'angolo *e*PQ alla baſe del triangolo iſoſcele *e*PQ eſſendo doppio dell'angolo al vertice *e*PQ, viene = gr. 72, il qual valore ſottratto da gr. 180, reſta l'angolo BPH = gr. 108. Queſto ſottratto dal valor totale degli angoli del triangolo BPH, reſta ancora per tutti due inſieme gli angoli alla baſe gr. 72; metà de' quali, cioè gr. 36, ſono il valore dell'angolo PBH, il qual'aggiunto all'angolo QBP pure

pure = gr. 36, riſulta tutto l'angolo QBH = gr. 72. Nel medeſimo modo provaſi che è = gr. 72 anche l'angolo BQH, e non altrimenti l'angolo BHG. Onde li tre triangoli PQB, QBH, HEB ſono ſimili.

29. Secondariamente dico, che detti tre ſimili triangoli ſono ordinati nella medeſima progreſſione; perchè ſiccome il lato *e*P del triangolo *re*P fu baſe del triangolo *e*PQ, ed il lato PQ di detto triangolo *e*PQ fu baſe del triangolo PQB; così ora il lato QB del triangolo PQB diventa baſe del triangolo QBH; il lato BH di detto triangolo QBH diventa baſe del triangolo HEB; onde per la ragione addotta di ſopra (notando ſpecialmente che il triangolo PQB è ſtato replicato, ed è ſtato l'ultimo delli tre triangoli *re*P, *e*PQ, PQB, e quì è il primo delli tre PQB, QBH, HEB) verranno le baſi ∺ PQ. QB. BH. Ma PQ = GP; QB = PB; BH = GB. Soſtituendo dunque queſti valori avremo ∺ GP. PB. GB. Ciò che era da dimoſtrarſi.

PROPOSIZIONE IV.

Deſcrizione geometrica del Pentagono.

30. Pongaſi mente, che in qualunque Poligono, di cui il denominatore ſia numero diſparo, havvi ſempre (*Fig. 4.*) un punto M, che perpendicolarmente ſovraſta alla metà D di un lato oppoſto PG; e che continuando due lati fra eſſi maſſimamente diſtanti MQ, GP dalla parte a cui convengono, havvi un punto d'interſezione B, in cui le linee concorrenti MB, GB ſono eguali; delle quali due linee, le parti QM, PG ſono appunto due lati del propoſto Poligono maſſimamente convergenti verſo B, ſe ſi paragonino a due altri lati QP, GP convergenti verſo P.

31. Ciò poſto, volendo deſcrivere un Pentagono arbitrario, cioè di cui non ſia determinato il lato, ſia primieramente

mente una data BG divisa *media & extrema ratione* in P; e se non fosse arbitrario, ma che fosse dato e determinato il lato per esempio PG, si cerchi per mezzo della terza Proposizione il secondo termine PB, a cui stia il primo dato PG, come il secondo PB a tutti due GP + PB. Indi da G verso Z si produca la BG per una quantità GZ = PB parte maggiore; poi dalla metà PG parte minore sia eretta una perpendicolare DM. Finalmente col centro in B, e con l'apertura BG descritto un arco GM, dal punto B per M, dove l'arco s'interseca con la perpendicolare, si meni un'altra BE = BZ, e similmente divisa. Imperocchè replicando così la medesima operazione su detta retta BE, si menarà poi da E un' altra EH &c. fino al fine della proposta descrizione.

32. Nel supposto della retta BZ divisa in P, e G, come si disse, si potrebbe operare anche in altra maniera, cioè tirando da B al punto E d'intersezione di due archi descritti uno col centro in Z, l'altro col centro in G, e con una medesima apertura eguale a PZ, tirando, dissi, la retta BE; indi coi centri in Q, e B, e con l'apertura suddetta, menando EH al punto d'intersezione H &c. fino al fine. Perchè risultando così li triangoli EZG, HBQ, ovvero EZB, BHE sempre con gli angoli alla base doppj dell' angolo al vertice, la descrizione si dimostra cavata da quella affezione, che è propria ed essenziale di questo Poligono. Ma o nell' una o nell' altra maniera, che questa descrizione si pratichi, benchè tragga l'origine da quella proprietà che è comune anche alla descrizione d'Euclide, o di Tolomeo, cioè dalla suddetta divisione di una linea *media & extrema ratione*, non però si può dire che sia d'essa. Ella è bensì egualmente geometrica, perchè precisamente conforme a quanto si è dimostrato nelle due Proposizioni antecedenti.

PRO-

PROPOSIZIONE V.

La più piccola ordinata sta alla maggior assissa posta a lati della ordinata maggiore, come l'assissa minore di detta ordinata maggiore, sta all' aggregato di tutte due le ordinate. Cioè voglio dimostrare, che nQ. mr :: Am. mM + nQ.

33. Laonde si rifletta, che dal numero 22. seguita che ∺ nQ. mM. mM + nQ. Ma per la ottava d'Eucl. Lib. 6. si ha pure ∺ Am. mM. mr. Dunque nQ × mM + nQ = Am × mr. E però ricaviamo nQ. Am :: mr. mM + nQ; ed alternando nQ. mr :: Am. mM + nQ. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE VI.

Il rettangolo formato su le due assisse spettanti alla minore ordinata sta al rettangolo formato su le due spettanti alla maggiore, come la minore ordinata a tutte due. Voglio dire, che Anr. Amr :: nQ. nQ + mM.

34. Poichè per la ottava d'Eucl. Lib. 6. ∺ An. nQ. nr; ed anche che ∺ Am. mM. mr; ed inoltre essendo i quadrati in ragion duplicata de' loro lati sarà $\overline{nQ}^2$ ad $\overline{mM}^2$ in ragion duplicata di nQ ad mM. Ma nella seconda Proposizione abbiam visto, che nQ sta ad nQ + mM in ragion duplicata di nQ ad mM. Dunque $\overline{nQ}^2$. $\overline{mM}^2$ :: nQ. nQ + mM. Ora perchè $\overline{nQ}^2$ = rettang. Anr; ed $\overline{mM}^2$ = rettang. Amr; perciò saranno parimenti li rettangoli Anr. Amr :: nQ. nQ + mM. Ciò che era &c.

CON-

CONSEGUENZA.

35. L'angolo QrP alla periferia di un 10gono essendo $=$ gr. 144, la metà 72 sarà il valore dell'angolo QrA; ma questo è pur valore dell'angolo McA al centro di un pentagono. Dunque le rette Qr, Mc, perchè egualmente inclinate alla medesima retta rA, saranno parallele. Le rette poi Mm, Qn sono parallele per la costruzione; onde risultano simili i triangoli mMc, nQr. Sicchè $nQ.mM :: rQ.cM$; e perciò $Anr.Amr :: rQ.rQ + cm$. Val' a dire, che il primo rettangolo sta al secondo, come il lato di un 10gono sta all'aggregato di esso lato più il raggio del circolo circoscritto al 10gono e 5gono ora proposto.

PROPOSIZIONE VII.

Il rettangolo di tutto il diametro nella minor assissa appartenente alla maggior ordinata mM sta al rettangolo fatto su tutte due le assisse laterali a detta ordinata, come il lato del 5gono sta alla somma di $\frac{1}{4}$ di esso lato, più $\frac{1}{2}$ dell'ordinata medesima.

In una parola $rAm.rmA :: AM \, \frac{nQ + mM}{2}$.

36. Abbiamo esposto (n. 33.) che $\div\, nQ.mM.nQ + mM$. Ma per l'undecima del Tacquet in Archimede si ha ancora $\div\, nQ \times 2.mM.\frac{nQ + mM}{2}$. Ora perchè il lato AM essendo doppio dell'ordinata nQ, risulta lo stesso, che se fosse detto nQ moltiplicato per 2; perciò sostituendo AM ad $nQ \times 2$ verrà $\div\, AM.mM.\frac{nQ + mM}{2}$. E perchè li quadrati sono in

ragion

ragion duplicata de' loro lati sarà $\overline{AM}^2.\overline{mM}^2 :: AM.\frac{nQ + mM}{2}$.

Ma il rettangolo $rAm = \overline{AM}^2$; ed il rettangolo $rmA = \overline{mM}^2$. Dunque $rAm.rmA :: AM.\frac{nQ + mM}{2}$. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE VIII.

Il rettangolo fatto dalle assisse spettanti alla minore ordinata sta al rettangolo fatto di tutto il diametro nella minore assissa spettante alla maggiore ordinata, come 1 a 4. Stanno, dissi, così: $Anr.rAm :: 1.4$.

37. Essendo, come tante volte si è detto, i quadrati in ragion duplicata de' loro lati, $\overline{nQ}^2$ sarà ad $\overline{AM}^2$ in ragion duplicata di nQ ad AM; ma nQ ad $AM = PQ$ sta per la costruzione, come 1 a 2. Dunque saranno $\overline{nQ}^2.\overline{AM}^2 :: 1.4$; ma $\overline{nQ}^2 = Anr$; ed $\overline{AM}^2 = rAm$. Dunque $Anr.rAm :: 1.4$. Ciò che era &c.

Annotazione.

38. Queste tre ultime Proposizioni sono state appostatamente esposte, perchè contengono certe eguaglianze superficiali, delle quali dobbiamo aver motivo di favellare (n.146.) in altro luogo.

PRO-

PROPOSIZIONE IX.

Il rettangolo della minor aſſiſſa, ſpettante alla minor ordinata, nell' intiero diametro ſta al rettangolo fatto delle due metà di eſſo diametro (cioè al quadrato del raggio) come la minore ordinata ſta all' aggregato della maggiore, e minore. In breve. Arn . Acr :: nQ . nQ + mM.

39. Poichè dal n. 22. abbiamo ∺ PQ . GM . PQ + GM, ſaranno anche le metà ∺ nQ . mM . $nQ + mM$. Indi dal n. 35 rilevaſi nQ . mM :: rQ . cM; e però ſiccome ∺ nQ . mM . $nQ + mM$; così è ∺ rQ . cM . rQ + cM; d' onde ſeguita, che $\overline{rQ}^2$. $\overline{cM}^2$ :: rQ . rQ + cM. Ma $\overline{rQ}^2 = Arn$; $\overline{cM}^2 = Acr$; e giacchè rQ . rQ + cM :: nQ . $nQ + mM$. Dunque pure avviene che Arn . Acr :: nQ . $nQ + mM$. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA I.

40. Eſſendo $\overline{rQ}^2$. $\overline{cM}^2$ :: rQ . rQ + cM. Dunque il quadrato del lato rQ di un 10gono ſta al quadrato del raggio cM del circolo, in cui è inſcritto, come eſſo lato alla ſomma del lato, e raggio ſuddetto.

CONSEGUENZA II.

41. Giacchè (num. 33.) nQ . mM :: mM . $mM + nQ$, perciò il ſeno nQ dell' angolo Qcr al centro di un 10gono ſta al ſeno mM dell' angolo AcM al centro di un 5gono, come detto ſeno mM alla ſomma di detti due ſeni, cioè come mM ad $mM + nQ$.

PRO-

PROPOSIZIONE X.

Due raggi cQ, cG *condotti dal centro* c *a due angoli* Q, G *maſſimamente diſtanti di un Poligono, comprendono l' angolo* QcG, *angolo alla periferia di un Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono dato.*

42. Eſſendo il Poligono dato per eſempio un 5gono, ſarà dico, QcG l' angolo alla periferia di un 10gono. Imperocchè l' angolo McQ al centro del 5gono è doppio dell' angolo del 10gono al medeſimo centro; ma l' angolo McQ è doppio dell' angolo MGQ, perchè l' angolo al centro è doppio dell' angolo alla periferia. Dunque facendo centro in G, l' angolo MGQ metà dell' angolo McQ al centro di un 5gono ſarà l' angolo di un 10gono al centro G di eſſo 10gono.

43. Ora quando dall' eſtremità del lato MQ al centro G di un Poligono ſi conducono due raggi MG, QG, la ſomma degli angoli eguali MQG, QMG è eguale all' angolo intiero alla periferia di detto Poligono; onde ſe di tutto il triangolo MQG, cioè da gr. 180 ſi ſottrae l' angolo al centro MGQ, il reſiduo è il valore della ſuddetta ſomma. Ma gli angoli cGQ, cQG eſſendo eguali fra eſſi, e ciaſcuno eguale alla metà di MGQ, inſieme uniti ſono eguali all' angolo al centro MGQ. Dunque ſottratti queſti dal triangolo intiero GQc, cioè da gr. 180, rimane QcG = ang. GMQ + ang. MQG. Eguale, dico, all' angolo alla periferia di un 10gono, il di cui denominatore è doppio del denominat. del Poligono propoſto.

Annotazione.

44. La dimoſtrazione è la ſteſſa, e la propoſizione è vera in qualunque Poligono, e perciò avrebbeſi dovuto rimetterla ad altro luogo. Ma è ſtato neceſſario riporla quì in ſervigio della ſeguente

PRO-

PROPOSIZIONE XI.

Primo. Le rette FM, MG, GH *sono tre lati di un* 10*gono ordinati in un circolo, che ha il centro in* B, *cioè nella periferia di un circolo circoscritto ad un* 5*gono* Z, H, B *&c.*
Secondo. Le rette poi BQ. QG. GH *sono tre lati di un* 5*gono.*
Terzo. di un 5*gono inscritto entro di un circolo, che passa pel centro* c *del* 5*gono dato* A, G, P *&c.*, *e di cui il raggio sta al raggio del circolo circoscritto al* 10*gono suddetto* F, M, G, H, *come* cM *ad* MG.

45. Primo. Le rette FM, MG, GH sono primieramente eguali, perchè (n. 22.) GZ, ovvero BQ = MG. Ma FM, GH ciascuna = GZ ovvero BQ, giacchè sono poste in simili siti, dunque FM, MG, GH sono eguali. Secondo, gli angoli da esse rette compresi valgono gr. 144 angolo alla periferia di un 10gono; perchè essendo il triangolo FMQ simile al triangolo BMG, l'angolo FMQ = QPB è eguale all'angolo BMG, e ciascuno (num. 20) = gr. 72; gli angoli dunque FMQ + BMG = gr. 144. In terzo luogo i raggi HB, GB, MB, FB sono pure eguali; perchè (n. 24) EZ = EG (= BG = BM); ed EZ = BH = BF poste in simile sito. De' quali raggi poi perchè il punto di concorso B cade nella periferia di un circolo circoscritto al Poligono Z, H, B &c. perciò il loro centro trovasi nella suddetta periferia. Dunque le rette FM, MG, GH sono tre lati &c. Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

46. Secondo. Le rette poi BQ, QG, GH sono primieramente eguali, per la ragion medesima addotta di sopra. Secondariamente gli angoli da esse formati valgono gr. 108 angolo alla periferia di un 5gono; imperocchè l'angolo BQP = QPB è (n. 20) = gr. 72. L'angolo PQG = gr. 36; tutto l'angolo dunque BQG, che comprende detti angoli BQP, PQG sarà = 72 + 36 = 108. Le rette dunque BQ, QG, GH sono

no tre lati di un 5gono. Ciò che era l'altra parte.

47. Terzo. Giacchè abbiamo trovato che QcG (n. 42) è l'angolo alla periferia di un 10gono, quel circolo, che circoscrive il 5gono, di cui è un lato QG, deve circoscrivere anche il 10gono, di cui sono due lati Qc, cG. Onde passando per gli angoli di esso 10gono, passa anche per un angolo c, che è centro del 5gono A, G, P &c.

48. Da ciò poi che si è detto (n. 42) nel principio della medesima antecedente Proposizione seguita, che i raggi di due circoli circoscritti a due Poligoni di un medesimo lato, e l'uno di denominatore doppio del denominatore dell' altro, siano, come cM ad MG. Imperocchè essendo McQ angolo al centro di un 5gono, risulta cM raggio di un circolo circoscritto a detto 5gono, di cui è lato MQ. E perchè MGQ è poi l'angolo al centro di un 10gono, la retta MG viene ad esser raggio di un circolo circoscritto a detto 10gono, e di cui è lato il medesimo lato MQ. Ora non altrimenti questi due altri Poligoni BQ, QG, GH &c. ed FM, MG, GH &c. sono eretti su i lati eguali, e sono l'uno di denominatore doppio del denominatore dell' altro, dunque i raggi de' circoli ad essi circoscritti saranno parimenti come cM ad MG. Ciò che in ultimo luogo restava &c.

Annotazione.

49. Questa Proposizione ha luogo in tutti i Poligoni di denominatore disparo, e se non fosse, che si cangiano certe circostanze che hanno bisogno di nuova prova, sarebbe soverchio il ripeterla, e molto più soverchio, perchè circa all' essenziale se ne darà altrove (n. 150) una dimostrazione generale.

ARTICOLO QUARTO.

Dell' Esagono.

PROPOSIZIONE.

Un Esagono inscritto entro un circolo sta all' Esagono circoscritto il medesimo circolo, come 3 a 4.

50. Dalla costruzione della Figura 6. ben si vede, che dhc è $\frac{1}{6}$ parte dell' Esagono inscritto dhn, &c.; e che il trapezio $dmhc$ è $\frac{1}{6}$ parte dell' Esag. circoscritto fmg &c. e rileviamo ancora, che il triangolo dmh è la loro differenza; sicchè devesi provare, che dhc stia a $dmhc$, come 3 a 4.

Perciò essendo dh, fg parallele, avviene che $md . mf :: mq . me$; ma $md . mf :: 1 . 2$ per la costruzione; dunque $mq . me :: 1 . 2$. Dunque $mq = qe$. Ora già (n. 2) si disse, che l'angolo dmh alla periferia di un Esagono è eguale all'angolo deh al centro di un triangolo equilatero dhc; onde i triangoli dmh, deh saranno eguali, perchè hanno la base dh comune, ed opposta ad un medesimo angolo. Ma il triangolo dhc è eguale a tre triangoli deh, e perciò eguale a tre triangoli dmh. Il trapezio poi $dmhc$ quindi risulta eguale a $3 + 1 = 4dmh$. Dunque il triangolo dhc sta al trapezio $dmhc$, cioè la sesta parte dell' Esagono inscritto sta alla sesta parte dell' Esagono circoscritto, come 3 a 4. E perchè in tutti stanno come le loro parti simili; dunque anche un Esagono inscritto &c. Ciò che era da dimostrare.

CONSEGUENZA I.

51. Quindi poichè $dhc = 3dmh$, sarà tutta l'area dell' Esagono inscritto, cioè $6dhc = 18dmh$. Così essendo $dmhc = 4dmh$, sarà tutta l'area dell' Esagono circoscritto, cioè $6dmhc = 24dmh$. Possiamo inoltre considerare, che il triangolo fmg è eguale a 4 triangoli dmh; ed il triangolo fgP è eguale a 3 triangoli fmg. Dunque il triangolo fgP è eguale a 12 triangoli dmh; e per una simil ragione è il triang. $cdh = dnh$, ed il triang. $dan = 3$ triang. dnh. Dunque il triangolo $dan = 3$ triangoli cdh; ma il triangolo cdh è $= 3$ triangoli dmh. Dunque il triangolo $dan = 9dmh$. Sicchè il triangolo dan sta all' Esagono dhn &c. come il triangolo fgP all' Esagono fmg &c. cioè stanno in questa proporzione geomet. $9 . 18 :: 12 . 24$.

CONSEGUENZA II.

52. Li due triangoli presi insieme sono ai due esagoni presi insieme nella medesima ragione, che un triangolo sta all' esagono inscritto nel medesimo circolo, cioè come 1 a 2. In fatti $\overline{9 + 12} = 21$. $\overline{18 + 24} = 42 :: 1 . 2$. Perchè poi tanto l'esagono, quanto il triangolo inscritto sta all'esagono ed al triangolo circoscritto, come 3 a 4. Starà anche l'esagono più il triangolo inscritto, all'esagono più il triangolo circoscritto, come 3 a 4; onde

$$\overline{9 + 18} = 27 . \ \overline{12 + 24} = 36 :: 3 . 4 .$$

ARTICOLO QUINTO.

Dell' Ettagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di detto Poligono.

53. Prolungati i lati dell' Ettagono (*Fig.* 7.) come si fece quelli del 5gono, il valore degli angoli di questa Figura risulta.

Ang. $qpo =$ Gr. $128\frac{4}{7}$

$opD =$ Gr. $51\frac{3}{7} = \frac{360}{7}$

$oDp =$ Gr. $77\frac{1}{7}$

$oDE =$ Gr. $102\frac{6}{7}$

$DEZ =$ Gr. $25\frac{5}{7}$

Onde $DEZ = \frac{opD}{2} = \frac{oDp}{3} = \frac{oDE}{4} = \frac{qpo}{5}$

E però volendo tripartire l'angolo al centro dell' Ettagono si osservi, che l'angolo $oDp =$ gr. $77\frac{1}{7}$. Col centro dunque in D, e con qualunque apertura Dp fatto un arco di gr. 60 (che geometricamente può farsi) e questo levato dall' angolo oDp, cioè da gr. $77\frac{1}{7}$, restano gr. $17\frac{1}{7} = \frac{51\frac{3}{7}}{3}$, che viene ad essere l'angolo al centro di un 21gono.

Anno-

Annotazione.

54. Se per avventura fosse mestieri di dividere in tre parti eguali l'angolo alla periferia di questo Poligono, si noti che l'angolo DEZ è $= 25\frac{5}{7}$, e la sua metà $cEZ = 12\frac{6}{7}$, a cui se si aggiunge un angolo di gr. 30, che è pure geometricamente possibile, sarà $30 + 12\frac{6}{7} = 42\frac{6}{7}$ valore ricercato nella proposta trisezione.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore ZD (*che unisce i punti di concorso dei due lati* bh, po; *e delli due* qp, ho *prodotti*) *e due interiori* hp.bq *sono cont. geom. propor. Dico* $\div$ ZD.hp.bq.

55. Esaminata la disposizione della figura troviamo, che
$Eb.bp :: Eh.hD$ ovvero $Eb.Eh :: bp.hD$
$Qb.bp :: QT.To$ ovvero $Qb.QT :: bp.To$
Ma $To = hD$ posta in simile sito.

E però $\left.\begin{matrix} Eb.Eh \\ Qb.QT \end{matrix}\right\} :: bp.hD$. Dunque (giacchè passa una medesima ragione, tra quelle quantità, che hanno con un' altra un medesimo rapporto) saranno $Eb.Eh :: Qb.QT$; ma $Qb = Eh$; $QT = EZ$, perchè poste in simili siti. Dunque $Eb.Eh :: Eh.EZ$. E però $\div Eb.Eh.EZ$. Ovvero giovandomi piuttosto di disponere i termini. Così $\div EZ.Eh.Eb$. Dunque saranno anche $\div ZD.hp.bq$, perchè sono parallele, e comprese nel medesimo angolo KEH. Ciò che era da dimostrarsi.

Con-

CONSEGUENZA I.

56. Le rette Dh, pb, qY condotta per d saranno pure tre contin. geom. propor. perchè e sono fra esse parallele, e comprese nel medesimo angolo KEH, e cominciano dai punti D, p, q estremi delle suddette cont. geom. propor. ZD, hp, bq.

CONSEGUENZA II.

57. Si potrebbero conseguire infinite altre proporzionali continue alle suddette guidando delle altre rette intercette nel medesimo angolo KEH, e alternatamente parallele quando alla bp, e quando alla bq.

PROPOSIZIONE III.

Tirata bx *parallela ad* ho, *sino all' incontro della retta* GE, *le rette* oZ, oh (*ovvero* xh), xb *saranno contin. geom. propor.*, *dico* ∺ oZ.oh (= xh).xb.

58. Per preambolo a questa Proposizione bisogna prima crederne un' altra, qual' è, che dati tre termini continui proporzionali, per esempio, EZ, Eh, Eb, il primo sta al secondo (ovvero il secondo al terzo), come la prima differenza tra il primo e secondo, sta alla seconda differenza tra il secondo e il terzo. Sta, dissi, EZ. Eh (ovvero Eh. Eb) :: Zh. hb. Il che parmi non solo per se stessa cosa vera, ma risulta anche dalla Figura; perchè essendo li triangoli hop, ZoD simili abbiamo ZD. hp :: oZ. oh; dunque perchè poi EZ. Eh :: ZD. hp. Seguita pure che EZ. Eh :: oZ. oh; ma oZ = Zh posta in simile sito; e per la medesima ragione oh = hb. Dunque EZ. Eh (ovvero Eh. Eb) :: Zh. hb.

59. Sic-

59. Siccome però ZD. hp :: oZ. oh; così pure hp. bq :: xh (parallela ad oZ). xb (parallela ad oh). E perchè poi ZD. hp :: hp. bq, saranno altresì oZ. oh :: xh. xb; onde essendo oh, xh per la costruzione eguali, perchè parallele alle px, po rispettivamente, saranno ∺ oZ. oh (ovvero xh). xb. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA I.

60. Per la similitudine de' triangoli eZo, oh$m$ (ovvero $m$hx), xbn, de' quali i lati omologhi oz, oh (ovvero xh), xb, ed anche eZ, mh, nb si ritrovano contin. geom. proporzionali, risultano tali anche le assisse, o sia le basi ∺ co. om (ovvero mx). xn.

CONSEGUENZA II.

61. Dati tre termini continui proporzionali per esempio ∺ 1. 3. 9. (2 6 18) se si trova una quantità 18, che sia terza proporzionale alle due differenze 2, 6 di detti termini, l'aggregato di questa quantità 18 col terzo termine 9 sarà un quarto termine proporzionale alli tre dati 1. 3. 9; perchè le differenze di una serie qualunque di termini contin. proporzionali sono pure continue proporzionali; e però siccome determinate le due prime differenze sappiamo qual debba risultare la terza, così determinati i primi tre termini conseguiamo il quarto, coll' aggiungere la terza differenza al terzo termine. Quindi nella Figura essendo delli tre termini ∺ EZ. Eh. Eb le differenze Zh, hb, ovvero Zo, oh; ed essendo pure per questa Proposizione ∺ Zo. oh. xb; perciò sarà ∺ EZ. Eh. Eb. Eb + xb. Ma la retta condotta da q per d in Y essendo terza proporzionale delle due hD, bp, fissa pure nella retta HE una terza proporzionale EY alle due ante-

antecedenti Eh, Eb; onde ∻ EZ. Eh. Eb. EY; e quindi determina nel medesimo tempo la bY eguale ad xb.

CONSEGUENZA III.

62. Perchè poi hD, hp sono eguali, perchè opposte ad angoli eguali del triangolo isoscele Dhp, perciò Zh + hb, cioè Zb, che per esser in simile sito è eguale ad hD, sarà anche eguale ad hp; come non altrimenti sarà hb + bY = bq, cioè che di due ordinate condotte nell' area di un 7gono da angolo ad angolo, la minore è eguale all' aggregato della prima più la seconda differenza. La maggiore è eguale all' aggregato della seconda più la terza differenza delle quattro proporzionali suddette.

PROPOSIZIONE IV.

Delle tre proporzionali EZ, Eh, Eb, *la prima differenza sta alla seconda, come tutte due le differenze alla maggior ordinata. Stanno* Zh. hb :: Zb. bq.

63. Essendo le ho, bp parall. sarà zh. ho = hb :: Zb. bp = bq.

Annotazione.

64. E perchè hb + bY (num. 62) = bq seguita che la prima differenza sta alla seconda, come la somma della prima e seconda sta alla somma della seconda e terza, la qual somma è hb + bY.

PROPOSIZIONE V.

Le tre proporzionali EZ, Eh, Eb *sono tali, che il primo termine è a tutte due le differenze, come tutte due dette differenze alla seconda differenza. Dico che* ∻ EZ. Zb. hb. *Secondo. Il primo termine è a tutte due le differenze, come la somma del secondo e terzo termine a detto terzo termine. Cioè* EZ. Zb :: $\overline{\text{Eb} + \text{Eh}}$ (= EH). Eb.

65. Per disporsi a ricevere la presente Proposizione, bisogna prima provare, che una retta menata da T ad M sia eguale a TQ. Il che è certissimo; perchè sottratto l'angolo ToM (= gr. 128 $\frac{4}{7}$) da gr. 180, valore totale degli angoli del triangolo ToM, restano gr. 51 $\frac{3}{7}$, metà de' quali, cioè gr. 25 $\frac{5}{7}$ è il valore dell' angolo TMo. Ma questo per la prima Proposizione è pur valore dell' angolo TQo, ovvero DEZ, che è lo stesso; dunque i lati MT, TQ del triangolo MTQ, perchè opposti ad angoli eguali, saranno parimenti eguali.

66. Ciò premesso ecco una nuova analogia oh. hp :: oT. TM; ma oh = hb; ed hp (n. 62) = Zb = oT, perchè poste in simili siti; come anche TM = EZ. Dunque sostituendo questi valori a quelli, risulta ∻ hb. Zb. EZ; ovvero ∻ EZ. Zb. hb. Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

Inoltre oT. TM :: oF. FV; e perchè oT = bZ; TM = ZE; Eb = oF; FV = EH, avviene che bZ. ZE :: Eb. EH. Ovvero EZ. Zb :: EH. Eb. E per essere EH = Eb + Eh risulta per fine EZ. Zb :: Eb + Eh. Eb. Ciò che era l'altra parte.

Annotazione.

67. Ben si scorge, che quando fosse possibile la precisa divisione geometrica di una data retta EH in *b*, ed h, come esige la figura, sarebbe risolto il problema della descrizione geometrica dell' 7gono; giacchè avressimo poi due differenti maniere di stabilire la giusta posizione della retta KE rispetto ad EH, per formare un triangolo isoscele *q*E*b*, ovvero KEH, del quale gli angoli alla base fossero ciascuno tripli dell' angolo al vertice, in che consiste appunto tutta la difficoltà di questa descrizione. Imperocchè data che fosse la EH divisa in *b* ed h, come si è detto, e (relativamente alle due differenti maniere, che si tennero (n. 31, 32) per la descrizione del 5gono) fosse dalla metà di *b*h tirata verso *q* una perpendicolare indeterminata; la retta poi condotta da E per il punto *q*, dove la perpendicolare s'intersecasse con un arco fatto col centro in E, ed apertura E*b*, definirebbe il triangolo *b*E*q*, che sarebbe il proposto. O pure data la medesima retta EH divisa, come si disse, in *b* ed h, bastarebbe (per essere $bH = HK$, ed $Eb = bK$) tirare una retta da E al punto K d'intersezione di due archi: uno col centro in H, ed apertura H*b*; l'altro col centro in *b*, ed apertura *b*E; perchè KEH sarebbe pur anche il proposto triangolo. Dunque se si potessero trovare geometricamente tre termini proporzionali tali ∺ EZ. Eh. E*b*, che parimenti risultasse ∺ EZ. Z*b*. h*b*; ed anche $EZ . Zb :: \overline{Eb + Eh}$ ($=$ EH). E*b*. E che perciò il problema ristretto da queste condizioni diventasse determinato, cioè che li tre termini proporzionali non potessero accadere in niun' altra ragione differente di quella che concerne alla figura, sarebbe data la divisione della retta EH in *b* ed h, come si richiede, e la descrizione dell' Ettagono risolta.

Ma

Ma questo è un affare, che non dobbiamo forse aspettarsi, che sia così presto spedito, e che lusinga tuttavia alcuni, perchè non è ancora stato dimostrato impossibile. Ragione per vero dire, che prova abbastanza quanto a torto si biasimino anche quelli, che procurano la quadratura del circolo, o la trisezione dell' angolo, pur che lo facciano in modo, che non perdano troppo di vista le altre più accessibili speculazioni. In fatti avrebbesi mai in Geometria fatta la scoperta di due Teoremi così importanti, come quelli che in un tratto di penna ha dimostrato il Chiarissimo Francesco Zanotti (1) circa alle figure circoscritte al Circolo, ed alla Sfera, se sgomentato dalle difficoltà, onde parevano circonvallati, non ci avesse pensato? Da Archimede fino a noi un sol Geometra entrato in questo campo aveva messo la falce ad una spica, ma era al Zanotti riservato di mieterlo. Così sogliono andare le cose, e le belle si ritrovano di raro, non perchè siano rare, ma perchè per lo più si cercano per le vie difficili, quando di raro furono trovate belle, che non fossero anche facili. Un celebre Francese (2) egualmente dotto e faceto non dubita, che non s'abbiano un dì a veder gli uomini a volare per l'aria, come gli uccelli. Ciò che io siccome non ardirei di affermarlo, così non farei tanto avverso a questo fatto, che condannassi colui, che tentasse di rendere alla società un così importante servigio; massime quando con felicissimo successo furono già visti come Cigni (3) a nuotare ne' siti più difficili del Danubio. Ma torniamo a proposito.

PRO-

(1) Lettera stampata in Firenze l'anno 1729.

(2) M.r de Fontanelle. *Entr. sur la pluralité des Mondes. Second. soire. On commence deja a voler un peu; plusieurs personnes differentes ont trouvé le secret de s'ajuster des aîles, qui les soutiennent en l'air, de leur donner du mouvement, & de passer par dessus des rivieres, ou de voler d'un clocher a un autre. A la verité ce n'a pas été un vol d'aigle, & il en a quelque fois coûté a ces nouveaux oyseaux un bras, ou une jambe; mais enfin cela ne represente encore, que les premieres planches, que l'on a mises sur l'eau, & qui ont été le commencement de la navigation.... L'art de voler ne fait encore, que de naître, il se perfectionnera, & quelque jour on ira jusque a la Lune.*

(3) Atti di Lipsia 1691. pag. 37.

PROPOSIZIONE VI.

Il rettangolo del lato del 7gono nella ſuttenſa a due lati è eguale al rettang. della ſuttenſa a tre moltiplicata in Zh, *ovvero* bS *differenza del primo termine* EZ *al ſecondo* Eh. *Diciam breve* bhp = Sbq.

68. Abbiamo già (n. 63) dimoſtrato, che Zh.hb::Zb.bq. Ma Zh = Sb; Zb = hp; onde Sb. hb :: hp. bq. Dunque bhp = Sbq. Ciò che &c.

CONSEGUENZA.

69. Dunque anche le ſole metà bhm = Sbn. Ora eſſendo Gd. dt :: Gb. bn, ſegue che $dt \times Gb = Gd \times bn$; ma $dt \times Gb = b$hm, perchè ſiccome nel rettangolo bhm tutto il lato bh è ſtato moltiplicato per la metà di hp; così per contrario nel rettangolo $dt \times Gb$ è moltiplicato tutto hp = hD = Gb per la metà del lato bh = dt. Una ſimil coſa dite del rettangolo G$d \times bn$ riſpetto al rettangolo Sbn. Sono dunque $dt \times$ Gb, ovvero G$d \times bn = b$hm, ovvero Sbn. Dunque tutto il rettangolo bhp, ovvero Sbq a quello eguale ſta al rettangolo $dt \times$ Gb, ovvero G$d \times bn$ ad eſſo eguale, come 2 a 1.

PROPOSIZIONE VII.

Il rettang. delle aſſiſſe ſpettanti alla minima ordinata td *ſta al rettang. della terza differenza nella prima differenza delle quattro proporzionali* EZ, Eh, Eb, EY, *come* 1 *a* 4. *Dirò più chiaro così*: rto. YbS :: 1 . 4.

70. Eſſendo ∺ Yb.bh.hZ; come pure ∺ ro.oh (= bh).om. ſaranno ro.Yb :: hZ.om; e però il rettangolo rom = YbS, perchè bS = hZ. Ma il rettang. rto ſta al rettang. rom, come $\overline{td}^2$ ad $\overline{oh}^2$; e $\overline{td}^2$ ſta ad $\overline{oh}^2$ in ragion duplicata delle radici td ad oh; ed inoltre td.oh :: 1 . 2. Dunque $\overline{td}^2$. $\overline{oh}^2$ :: 1 . 4. Sicchè rto.rom :: 1 . 4; e ſoſtituendo YbS ad rom riſulta finalmente rto. YbS :: 1 . 4. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA.

71. Perchè (n. 61) bx = bY; oZ = bS; ſarà il rettangolo $bx \times o$Z = YbS. Dunque rto.$bx \times o$Z :: 1 . 4. Per la medeſima ragione eſſendo anche Y$b \times$ hZ = YbS ſarà ancora rto.Y$b \times$hZ :: 1 . 4.

PROPOSIZIONE VIII.

Primo. Le rette QT, TN, NV *ſono tre lati di un* 14*gono.*
Secondo. Le rette QT, TM, MA *ſono tre lati di un* 7*gono.*
Terzo. Ma di un 7*gono inſcritto entro un circolo, che paſſa &c. come ſi propoſe anche nel* 5*gono.*

72. Le rette QT, TN, NV ſono eguali, perchè ſi è già (n. 65) dimoſtrato, che TM = TQ. Onde anche TN poſta in ſimile ſito è eguale a TQ, ad NV &c. In ſecondo luogo eſſendo gli angoli di qualunque trapezio QTNV preſi inſieme eguali a quattro retti; ed eſſendo pure gli angoli TQV, NVQ eguali, come anche QTN eguale TNV; l'angolo QTN ſarà complimento dell' angolo TQV ad un ſemicircolo. Ma l'angolo TQV (= DEZ) è (n. 53) = gr. $25\frac{5}{7}$, quali però ſottratti da gr. 180, reſtano gr. $154\frac{2}{7}$ valore dell'

dell' angolo QTN. Ma gr. $154 \frac{2}{7}$ è appunto il valore dell' angolo alla periferia di un 14gono. Dunque QTN, ovvero TNV sono angoli alla periferia di un 14gono; e quindi le rette QT, TN, NV sono tre lati di esso Poligono. Ciò che era la prima parte &c.

73. II. Le rette poi QT, TM, MA primieramente sono, come già dissi, (n. 65) eguali. Secondariamente essendo il triangolo QTM, ovvero TMA isoscele coi lati QT, TM, ovvero TM, MA eguali, gli angoli a detti lati opposti saranno parimenti eguali. Sottratti dunque TQM + QMT dalla somma di tutti gli angoli del triangolo QTM; cioè sottratto gr. $\overline{25 \frac{5}{7} + 25 \frac{5}{7}} = $ gr. $51 \frac{3}{7}$ da gr. 180, il residuo gr. $128 \frac{4}{7}$ sarà il valore dell' angolo QTM, ovvero TMA. Ma per la prima di questo Articolo questo è appunto il valore dell' angolo alla periferia di un 7gono. Dunque gli angoli QTM, TMA sono angoli alla periferia di un 7gono; e perciò le rette QT, TM, MA sono &c. Ciò che era la seconda parte da dimostrare.

74. III. La prova poi dell' ultima parte, siccome è la medesima, che fu addotta (n. 47.) per il 5gono, così a quella mi rimetto.

ARTICOLO SESTO.

Dell' Ottogono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di detto Poligono.

75. Prodotti i lati dell' 8gono (*Fig.* 8.) fino all' interse-zione ultima possibile, gli angoli della Figura risultano, come siegue:

$$\text{Ang. } MNB = \text{Gr. } 135$$
$$\left.\begin{matrix} BNT \\ PEN \end{matrix}\right\} = \text{Gr. } 45 = \frac{360}{8}$$
$$\left.\begin{matrix} BTN \\ BTE \end{matrix}\right\} = \text{Gr. } 90$$

$$\text{Onde } PEN = \frac{BNT}{1} = \frac{BTN;\ BTE}{2} = \frac{MNB}{3}$$

Volendo perciò tripartire il 45 angolo al centro di detto Poligono si sottragga dell' angolo PEN = gr. 45 un angolo di gr. 30, possibile geometricamente, che il residuo gr. 15 sarà l' angolo ricercato, angolo, che si otterrebbe anche per altra maniera, cioè dividendo detti gr. 30 per metà.

Annotazione I.

76. Brilla in un tratto la trisezione dell' angolo MNB, ovvero FGP alla periferia dell' 8gono; perchè guidate le rette GN, GD, queste dividerebbero l' angolo FGP in tre parti ciascuna eguale a gr. $45 = \frac{135}{3}$. Cioè gli angoli PGN, NGD, DGF sarebbero eguali ciascuno a gr. 45. Il che è manifesto, perchè sono tutti angoli, che avendo il vertice nel punto G della circonferenza, insistono su archi eguali PBN, NMD, DQF; ed essendo ciascuno di questi archi sotteso da due lati dell' 8gono, ciascun arco è di gr. $\overline{45 + 45} = 90$; e quindi, poichè gli angoli al centro sono doppj degli angoli alla periferia, detti angoli alla periferia PGN, NGD, DGF sono ciascuno di gr. 45.

Anno-

Annotazione II.

77. E' quì degno d'osservazione, che l'angolo al centro di questo Poligono è una terza parte dell' angolo alla sua periferia; e però l'angolo al centro di un 8gono è medio proporzionale tra un terzo di detto angolo al centro, e l'angolo intiero alla periferia. Cosicchè 15.45 :: 45.135; ovvero ∸ 15.45.135.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore RT (*che unisce i punti di concorso dei due lati* GP, NB; *e delli due* MN, PB *prodotti*), *e due interiori* PN, GM *sono cont. geom. propor. Dico* ∸ RT.PN.GM.

78. Menata la retta GN abbiamo EG.EP :: GN.PT; ma perchè (n. 76) si fece vedere, che l'angolo PGN = gr. 45, e però (n. 75) eguale all' angolo PEN, quindi anche i lati NE, GN a quelli opposti saranno eguali. Inoltre è NE = PE posta in simile sito. Dunque anche GN = PE. Ora sostituendo questo PE ad NG risulta EG.EP :: EP.PT. Ma per quella medesima ragione che è PE = NG, è anche PT = RE. E perciò sostituendo RE a PT, viene poi EG.EP :: EP.ER, cioè ∸ EG.EP.ER. Ovvero convertendo ∸ ER.EP.EG.

79. Ma le ordinate RT, PN, GM, perchè cadono dai punti medesimi R, P, G delle proporzionali medesime; e sono chiuse nel medesimo angolo HEK saranno nella medesima propor. che sono anche quelle. Onde ∸ RT.PN.GM. Ciò che era da dimostrarsi; e che fatta la costruzione d'intorno a quattro lati, abbiamo similmente dimostrato nel 7gono.

CON-

CONSEGUENZA I.

80. Hanno quì luogo le conseguenze appartenenti alla seconda Proposizione dell' 7gono. Imperocchè le parallele TP, NG, ed MY, che passa per F, sono pure contin. geom. proporzionali; e siccome ivi la qY, così quì la MY definisce nella EH un punto Y tale, che saranno ∸ ER.EP.EG.EY.

CONSEGUENZA II.

81. Menata Gx parallela a PB fino all' incontro dell' asse EQ, che passa per il centro C, accade che ∸ BR.BP.xG; verificandosi in appresso in questa figura, quanto si espose nella terza Proposizione del suddetto 7gono, con tutte tre le Conseguenze ivi dedotte.

CONSEGUENZA III.

82. Restringendomi solo a ricordare. 1. Che nel caso dell' 8gono, RG in vece di esser eguale all' ordinata PN, come succede nell'7gono, si ritrova solo eguale a PT; e così PY, in vece di esser eguale alla maggior ordinata GM, come ivi accade, quì si ritrova eguale ad NG. Secondo, è da osservare, che una retta YZ menata da Y parallela a GM passarà per il punto Q, e sarà quarta proporzionale alle altre tre. Mentre benchè passi YZ per Q, nonostante resta parallela ad MG, cioè l'angolo GYZ si mantiene tuttavia eguale all' angolo EGM = gr. $67\frac{1}{2}$; perchè essendo YM parallela ad NG, l'angolo GYF sarà = EGN = gr. 45; ma nel triangolo YGF anche l'angolo FGY è = gr. 45. Dunque anche i lati FG, FY opposti ad angoli eguali saranno eguali, ed il triangolo isoscele. Ora perchè FY = FG, perciò sarà

sarà anche $=$ FQ; ed il triangolo YFQ sarà pure isoscele; di cui l'angolo YFQ sarà per la costruzione composto di un retto YFA ($=$ gr. 90) $+$ AFQ ($=$ LFG al vertice opposto $=$ gr. 45) sarà, dissi, $=$ gr. $90 + 45 =$ gr. 135; quali detratti da gr. 180, che è l'importare di tutti gli angoli del triangolo suddetto YFQ, sarà gr. $22\frac{1}{2}$ metà del residuo 45, valore dell'angolo FYQ; quale aggiunto all'angolo GYF eguale, come si è detto, e gr. 45, risulterà l'angolo intiero GYQ $= 22\frac{1}{2} + 45 = 67\frac{1}{2}$ valore dell'angolo EGM. Siccome poi la YZ è menata dal punto Y, e che TP, NG, MY sono tre contin. geom. proporzionali; così essa YZ sarà pure terza proporz. alle NP, MG; e sarà quarta a tutte tre TR, NP, MG, giacchè sono anche comprese tutte nel medesimo angolo HEK. Onde $\div$ TR.NP.MG.ZY.

CONSEGUENZA IV.

83. Una retta ga menata per A parallela alla suddetta MG, e compresa nel medesimo angolo HEK sarà un'altra contin. proporzionale alle suddette. Perchè essendo (n. 78) PT $=$ ER, indi perchè PT $=$ RG posta in simile sito, sarà ER $=$ RG, e però ER. EG :: 1.2; ed essendo pure ER. EG :: RT. GM; quindi RT. GM :: 1.2. E però così sarà anche EG. Ea :: 1.2; imperocchè essendo per il supposto aA parallela ad MG, ed MA parallela a Ga per la costruzione, viene Ga $=$ MA $=$ GA; ma GA $=$ EG posta in simile sito. Onde siccome EG. EG $+$ GA :: 1.2; così del pari sarà EG. EG $+$ Ga :: 1.2. Dunque anche GM. ag :: 1.2; dunque $\div$ RT. GM. ag. Laonde essendo PN media proporzionale tra RT, ed MG, ed essendo poi YZ quarta proporzionale alle tre TR, NP, MG, anche detta YZ sarà media proporzionale tra GM, ed ag; e però $\div$ TR. NP. MG. ZY. ga.

Anno-

Annotazione.

84. Benchè nella prova di questa seconda Proposizione non mi sia servito del metodo praticato nella dimostrazione della seconda Proposizione dell'Articolo antecedente, che è precisamente l'istessa, avrei nonostante potuto farlo rettamente, senza nè meno introdurre nella costruzione una linea di più. Di che ciascuno, come vuole, può farne da se l'esperimento.

PROPOSIZIONE III.

La differenza, che passa tra il quadrato di una suttensa a due lati, e quello della suttensa a quattro (che è diametro del circolo circoscritto all' 8gono) è eguale a due quadrati del lato GP *più due rettangoli* GPR.

Dico $\overline{PN}^2 = \overline{GM}^2 - 2\overline{GP}^2 - 2GPR$. *Secondariamente dico, che* $\overline{PN}^2 . \overline{GM}^2 :: 1.2$.

85. Essendo l'angolo PRN retto, troviamo per la 47. d'Euclide Lib. I., che $\overline{PN}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{NR}^2$. Ed essendo, per la quarta Lib. II., $\overline{NR}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{BR}^2 + 2NBR$; quindi $\overline{PN}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{NB}^2 + \overline{BR}^2 + 2NBR$. E perchè $\overline{PR}^2 + \overline{BR}^2 = \overline{PB}^2 = \overline{GP}^2$; ed NB $=$ GP; ed NBR $=$ GPR, perciò risulta * $\overline{PN}^2 = 2\overline{GP}^2 + 2GPR$.

86. Andiamo adesso in cerca del valore di $\overline{GM}^2$. Laonde

de essendo l'angolo GNM retto per la costruzione, sarà $\overline{GM}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NG}^2$; ma perchè è parimenti retto l'angolo GNE, e che (n. 78) GN = NE, il prodotto di tutta la GE nella sua metà definita dalla perpendicolare NR, cioè, per la 2. lib. II. Eucl., il rettangolo GER risulta eguale ad $\overline{NG}^2$. E perciò $\overline{GM}^2 = \overline{MN}^2 + GER$. Secondariamente avviene che $GER = \overline{GR}^2 + \overline{RE}^2$, cioè (perchè GR = RE) $GER = 2\overline{GR}^2$. E per questo $\overline{GM}^2 = \overline{MN}^2 + 2\overline{GR}^2$. Ora, per la 4. lib. II. Eucl., $\overline{GR}^2 = \overline{GP}^2 + \overline{PR}^2 + 2GPR$. Dunque $\overline{GM}^2 = \overline{MN}^2 + 2\overline{GP}^2 + 2\overline{PR}^2 + 4GPR$. Ed essendo poi $\overline{MN}^2 = \overline{GP}^2$; ed anche $2\overline{PR}^2 = \overline{GP}^2$ finalmente risulta * $\overline{GM}^2 = 4\overline{GP}^2 + 4\,GPR$; dal qual valore sottraendo ora * $\overline{PN}^2 = 2\overline{GP}^2 + 2GPR$ resta la differ. tra detti due quadrati . . . $+ 2\overline{GP}^2 + 2GPR$. Onde concludo per ultimo, che $\overline{PN}^2 = \overline{GM}^2 - 2\overline{GP}^2 - 2GPR$. Ciò che era da dimostrarsi nella prima parte, e che sarebbe risultato in un tratto per altra via più spedita, se avessi aggiunto alla figura due rette, tralasciate per non confonderla.

87. Come che poi la seconda parte di questa Proposizione risulti dal solo valore de' quadrati suddetti, tuttavia la si può prestamente dimostrare anche così. Poichè (n. 83) ER . EG :: 1 . 2, abbiamo anche RT . GM :: 1 . 2; ma $\overline{PN}^2 . \overline{GM}^2$ :: RT . GM. Dunque $\overline{PN}^2 . \overline{GM}^2$ :: 1 . 2. Che era l'altra parte.

CON-

CONSEGUENZA.

88. Quindi seguita, che RT × GM . PN × YZ :: 1 . 2. Come parimenti QnB (= $\overline{Pn}^2$). QcB (= $\overline{Gc}^2$) :: 1 . 2 . &c.

PROPOSIZIONE IV.

Il rettangolo della differenza YG *nella suttensa a quattro lati* GM *è doppio del rettang. della differenza* GP (*lato del poligono*) *nella suttensa* PN *a due lati. Dico* YGM = 2GPN.

89. Poichè (num. 80) ER . EP :: EG . EY sono anche le differenze RP . PG :: PG . GY; e componendo abbiamo RP . RP + PG :: PG . PG + GY; cioè RP . RG :: PG . PY; ed essendo pure per il luogo citato RP = LG. RG = PT; PY = GN; viene quest' altra analogia LG . PT :: PG . GN. E però il rettang. GPT = rettang. LGN. Perchè poi PN, GM sono nella medesima ragione di PT ad NG; sostituendo perciò da una parte dell' equazione PN in vece di PT, e dall' altra parte GM in vece di NG, sarà pure GPN = LGM.

Essendo ora siccome ∺ ER . EP . EG; così le differenze ∺ RP . PG . GY. E perchè il terzo termine EG è per la costruzione doppio del primo termine ER, così la terza differenza GY è doppia della prima differenza RP, ovvero LG, cui è eguale. Sarà perciò rettang. YGM = 2LGM; e perchè GPN = LGM, sarà per fine YGM = 2GPN. Ciò che era da dimostrarsi.

CONSEGUENZA I.

90, Perchè sono ∺ ER . EP . EG . EY . E*a*. ordinate nella me-

medesima proporzione, che $\div$ RT.PN.GM.YZ.ag; perciò siccome il rettang. YGM accade che sia eguale a due rettangoli GPN. Così sarà GPN $=$ 2PRT; aYZ $=$ 2YGM. Onde in somma supposto il primo rettangolo PRT $=$ 1, sarà GPN $=$ 2; YGM $=$ 4; aYZ $=$ 8 &c.

CONSEGUENZA II.

91. Essendo per la costruzione divisa la HP per metà in L, siccome mostrammo (n. 83) che la EG posta in simile sito è divisa per metà in R, e risultando dal n. 75 che LY $=$ LG, quindi anche HY $=$ GP; e perciò tutta la retta EH $=$ 3GP $+$ 4PR. Onde $\overline{HE}^2 = 17\overline{GP}^2 + 24$GPR. Questa espressione somministra il mezzo di comparare degli altri piani spettanti alla Figura.

PROPOSIZIONE V.

Le rette HG, GN, NV sono tre lati di un 8gono ordinato in un circolo, di cui il raggio è $= \frac{cGH}{GP}$.

92. Le rette HG, GN, NV sono in primo luogo eguali per la costruzione, e per il n. 78. L'angolo poi HGN, ovvero GNV è eguale all'angolo HGF $+$ FGN, cioè all'angolo PEN ($=$ gr. 45) $+$ BTN ($=$ 90) in tutto $=$ gr. 135 valore appunto dell'angolo alla periferia di un 8gono. Secondariamente siccome sta il lato GP al raggio cG, così sta il lato HG ad una quarta proporzionale, raggio del circolo circoscritto a detto 8gono HGNV &c. Onde detto raggio risulta, quale si propose $= \frac{cGH}{GP}$. Ciò che era il tutto, che dovevasi dimostrare.

ARTI-

ARTICOLO SETTIMO.

Dell' Enneagono.

PROPOSIZIONE I.

Valore degli angoli dell' Enneagono.

93. Il valore degli angoli (*Fig.* 10. *Tav.* 30.) formati dai lati di un 9gono, che prodotti s'intersecano reciprocamente risulta così:

Ang. Deo $=$ gr. 140

qeo $=$ gr. 40 $= \frac{360}{9}$

eqo $=$ gr. 100

eqN $=$ gr. 80

qNQ $=$ gr. 60

qNE $=$ gr. 120

NEA $=$ gr. 20

Onde NEA $= \frac{qeo}{2} = \frac{q\text{NQ}}{3} = \frac{eq\text{N}}{4} = \frac{eqo}{5} = \frac{q\text{NE}}{6} = \frac{\text{D}eo}{7}$.

E quindi troviamo, che nei suddetti valori questo Poligono non ammette la trisezione geometrica dell'angolo, nè al centro, nè alla periferia.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate una esteriore mQ (*che unisce i punti di concorso di un lato* nD, *e di una suttensa a due lati* Be; *poi di un altro lato* GB, *ed un' altra suttensa a due lati* Do), *e due interiori* BD, Gn *sono contin. geom. proporzionali. Dico* $\div$ mQ. BD. Gn.

94. Costrutta la Figura come le antecedenti, rilevasi che GE.

EG . GD :: EB . BQ ovvero EG . EB :: GD . BQ.
RG . GD :: Rd . de ovvero RG . Rd :: GD . de
Ma essendo BQ = de posta in simile sito, quindi
EG . EB } :: GD . BQ; e però EG . EB :: RG . Rd
RG . Rd
Ma EB = RG per la costruzione; ed Rd = Em, supposto il punto m determinato da una retta menata per Do, siccome il punto d è determinato da una retta menata per eB posta in simile sito. Dunque sostituendo queste a quelle nasce ∺ EG. EB. Em. Dunque senz' altro ∺ Gn . BD . mQ. Ovvero ∺ mQ . BD . GN. perchè sono parallele, e comprese nel medesimo angolo. Ciò che era da dimostrarsi.

CONSEGUENZA I.

95. Quindi sono continue geom. proporzionali anche le ∺ QB . DG . ny, ed anche le ∺ mQ. BD . Gn . yt. Come altrove si è notato in simili circostanze.

CONSEGUENZA II.

96. Se fosse condotta una retta da N ad I, in simil modo provarebbesi, che questa taglia la EV in un tal punto per esempio x, che EA . Ex :: Em . EB. ovvero EB . EG. Onde calando da detto punto x una parallela alle sopraddette ordinate Gn . BD &c. la qual fosse compresa nel medesimo angolo VEK, verrebbe parimenti Gn . BD :: detta parallela condotta per x. AN.

PROPOSIZIONE III.

GB *sta ad* AB, *come* GA *ad* AE, *come* EG *ad* EV, *cioè* GB . AB :: GA . AE :: EG . EV.

97. Anche questa Proposizione si deduce facilmente dalla costru-

costruzione della Figura, perchè primo EG . Gn :: EV . VK; ma Gn = GD posta in simile sito, e questa GD = GA, perchè l'angolo GAD essendo eguale all'angolo qnQ = gr. 60, è esso pure = gr. 60, angolo alla periferia di un triangolo equilatero. Onde essendo poi anche AG, AD eguali, viene GD = GA, e però anche Gn eguale al medesimo GA. Così VK essendo eguale ad RE posta in simile sito, ed essendo l'angolo RAE = gr. 60, sono i lati AR, RE, EA eguali, onde è VK = AE; e perciò la suddetta proporzione si trasmuta in questa EG . GA :: EV . EA; ovvero
* GA . AE :: EG . EV.

98. Secondariamente abbiamo oB . Be :: oF . FZ; ma oB = GB; Be = BA, perchè BA = Ae, e l'ang. BAe = gr. 60. Così oF = GA posta in simile sito; ed FZ = AE, imperocchè da gr. 180 somma di tutti gli angoli del triangolo FoZ tolto via l'angolo FoZ = gr. 140 angolo alla periferia di un 9gono, resta gr. 40, metà de' quali gr. 20 viene ad essere il valore dell' angolo FZo; ma questo è pur valore dell' angolo FTZ, ovvero AEN posto in simile sito, e per la prima Proposizione = gr. 20. Essendo perciò in quest' altro triangolo FTZ gli angoli FTZ, TZF eguali, anche i lati TF, FZ ad essi opposti saranno eguali. E perchè AE è posto in simile sito di FT sarà anche ad esso eguale, sarà dunque eguale anche ad FZ. Sostituendo dunque nella proporzione questi valori risulta * GB . BA :: GA . AE. Onde poichè avemmo poco fa * GA . AE :: EG . EV. Ora finalmente troviamo GB . BA :: GA . AE :: EG . EV. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE IV.

Così sta aG *a* GB, *come* aB *a* BD, *come* aA *ad* AE.
Cioè aG . GB : : aB . BD : : aA . AE.

99. A prima vista la Figura ci dà *qo.oe*::*q*B.BD::*q*F.FH. Ma incontriamo queste eguaglianze *qo* = *a*G; *oe* = GB; *q*B = *a*B; *q*F = *a*A; perchè poste ciascuna in simili siti della Figura; ed è pure FH = AE, perchè FH = FZ posta in simile sito, e che per la ragione addotta nell' antecedente è eguale ad AE. Dunque presi in iscambio questi valori *a*G . GB :: *a*B . BD:: *a*A . AE. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA.

100. Menata una retta da A ad F, potrebbesi questa sostituire in vece del termine *a*A, perchè sono eguali. Sono poi eguali, perchè dal triangolo ABF sottratto l'angolo ABF = D*eo* = (n. 93) gr. 140, la metà 20 del residuo 40 (giacchè FB, BA sono eguali) sarà il valore dell'angolo AFB, a cui se si aggiunge l'angolo BF*a* = QN*q* posto in simile sito, e per il num. suddetto = gr. 60, sarà la somma di detti angoli AFB + BF*a*, cioè AF*a* = 20 + 60 = 80; ma F*a*A = *eq*N posto in simile sito, e per il luogo sopracitato = gr. 80. Dunque giacchè AF*a*, A*a*F sono eguali, anche i lati A*a*, AF a detti angoli opposti saranno eguali, com'era proposto.

PROPOSIZIONE V.

Così sta SB *ad* SA, *come* BG *ad* AB.

101. Dalla costruzione della Figura si ricava, che guidata AN siano *qo* . *oe* :: *q*A . AN; ovvero *qo* . *q*A :: *oe* . AN. Ma *qo* = SB; *q*A = SA; *oe* = BG, per essere poste ciascuna in siti simili; ed AN = BA, perchè essendo AN parallela ad S*o*, ed opposta al medesimo angolo ABN, siccome S*o* è per la costruzione eguale ad SB, così AN è eguale ad AB. Fatta dunque la sostituzione di queste quantità a quelle, la suddetta proporz. si trasmuta così SB . SA :: BG . BA. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE VI.

Primo. Le rette TF, FH, HM *sono tre lati di un* 18*gono*.
Secondo. Le rette TF, FZ, ZY *sono tre lati di un* 9*gono*. *inscritto entro un circolo, che passa pel centro* c *del* 9*gono interiore* oBG *&c.*
Terzo. e tiene il proprio nella periferia dell'ester. T, R, E *&c.*

102. La prova della prima e seconda parte di questa Proposizione è la medesima che si usò negli Articoli antecedenti. Circa poi alla terza parte basta osservare, che i lati di quel 9gono TR, RE, EY &c. sono eguali ai lati TF. FZ, ZY di questo. Onde dobbiamo pure asserire, che risultino eguali anche i raggi de' circoli circoscritti a detti 9goni; e quindi siccome questo passa con la sua circonferenza pel centro di quello, così quello reciprocamente deve con la sua passare pel centro di questo. E tanto basti per la intiera prova di quanto era proposto.

ARTICOLO OTTAVO.

Del Decagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di esso Poligono.

103. Prodotti i lati di questo Poligono farebbero ancora un' intersezione, come (*Fig.* 12. *Tav.* 30.) la fanno i due lati AF, MB in S, e li due TA, BD in V, ma ne verrebbe poi un 10gono interrotto, e solo risultante da due differenti 5goni intrecciati insieme ad eguali distanze. Inoltre non sarebbero nè men nuovi nella Figura gli angoli, che ne verrebbero di più; perchè uno LSX, ovvero LVI è = gr. 36 = DBQ, che già abbiamo anche lasciando la Figura così; l' altro *a*XS, ovvero *m*LV = gr. 108. è pure eguale all' angolo BQD, come or ora osserviamo.

$$\text{Ang. } MBD = \text{gr. } 144$$

$$\left.\begin{matrix} DBQ \\ XSL \end{matrix}\right\} = \text{gr. } 36 = \frac{360}{10}$$

$$\left.\begin{matrix} aXS \\ BQD \end{matrix}\right\} = \text{gr. } 108$$

$$\left.\begin{matrix} EQX \\ QXE \end{matrix}\right\} = \text{gr. } 72$$

$$\text{Onde } XSL = \frac{DBQ}{1} = \frac{EQX\,;\,QXE}{2} = \frac{BQD\,;\,aXS}{3} = \frac{MBD}{4}.$$

E perchè abbiamo già (n. 20) veduto, come si conseguisca geometricamente l'angolo = gr. 24, la sua metà 12 sarà = $\frac{36}{3}$ eguale ad un terzo dell' angolo al centro del 10gono, cioè eguale all' angolo al centro di un 30gono.

Anno-

Annotazione.

104. E' da notare che 48. il doppio del suddetto n. 24. sarà eguale a $\frac{144}{3}$, eguale perciò ad un terzo dell' angolo alla periferia del proposto Poligono.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore xf (*che unisce i punti di concorso di un lato* AF, *e di una suttensa a due lati* BE; *poi di un altro lato* MB, *ed un' altra suttensa a due lati* FD), *e due interiori* FB, AM *sono contin. geom. propor. Dico* ∺ xf. FB. AM.

105. Prodotta quinci e quindi in Y ed *f* la DF suttensa a due lati, e prodotta anche in *x* la BE pur suttensa a due lati; e menata poi la *xf*, FB, AB, AM abbiamo

SA . AB :: SF . F*f* ovvero SA . SF :: AB . F*f*
VA . AB :: VY . YD ovvero VA . VY :: AB . YD.

ma YD = F*f* perchè posta in simile sito. Onde

$$\left.\begin{matrix} SA\ .\ SF \\ VA\ .\ VY \end{matrix}\right\} :: AB\ .\ Ff;\ \text{e però } SA\ .\ SF :: VA\ .\ VY.$$

Ma VA = SF posta in simile sito; ed VY = S*x*, supposto il punto *x* determinato da una retta guidata per BE, siccome il punto Y è determinato da una retta menata per DF posta in simile sito. Dunque sostituendo questi termini a quelli risulta SA . SF :: SF . S*x*; ovvero ∺ SA . SF . S*x*. E quindi ∺ AM . FB . *xf*, ovvero ∺ *xf*. FB. AM, perchè sono parallele, e comprese nel medesimo angolo MSA. Ciò che era da dimostrarsi, e che (supposta la costruzione d'intorno a cinque lati) è quanto si è pur dimostrato nella seconda del Poligono antecedente.

PRO-

PROPOSIZIONE III.

Primo. Le tre ordinate LX, FB, KN *sono contin. geom. propor. sono* ∺ LX. FB. KN.
Secondo. LX + FB = KN; onde ∺ LX. FB. LX + FB.

106. Le ragioni che principalmente abbondano in questo Poligono sono le medesime che regnano nel 5gono. La maggior parte sono linee rette divise *media & extrema ratione*. Pertanto dobbiamo osservare anticipatamente che i lati LB, SL del triangolo SLB sono eguali, perchè opposti agli angoli DBQ XSL (n. 103) eguali; ed anche FB essendo per la medesima ragione eguale ad LB viene ad esser eguale a detto lato SL, che è eguale ad LA = FK, perchè per la simetrìa della figura LA, LB, FK sono eguali. Non altrimenti FN è eguale ad SF; ed NK (perchè per l'eguaglianza degli angoli opposti è eguale ad FN) risulta pure eguale ad SF; siccome per tale eguaglianza è anche LX = LF = FC &c.

107. Essendo pertanto SF. FB :: SK. KN; ovvero FB. SF :: KN. SK; ed essendosi trovato di sopra (n. 106.) FB = SL; KN = SF; perciò SL. SF :: SF. SK; cioè ∺ SL. SF. SK. Quindi anche le ordinate cadenti dai punti L, F, K comprese nel medesimo angolo KSN saranno contin. geom. propor. cioè saranno ∺ LX. FB. KN. Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

108. Ma LX = LF, come sopra si disse; KN = SF. Dunque avremo ∺ LF. SL. SF; e la retta SF divisa *media & extrema ratione* in L, ed eguale ad LF + SL. Perciò non altrimenti sarà LX + FB = KN. In fatti si dimostrarebbe anche per altra via, che essa retta è così divisa in P; che KP = LX; PN = FB. Dunque per fine ∺ LX. FB. LX + FB. Ciò che era l'altra parte.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

L'ordinata FB *taglia l'asse* eq (*cioè la* EP *suttensa a quattro lati del* 10*gono*) *così, che* ∺ en. nc. $\overline{\text{en} + \text{nc}}$ = cq.

109. Essendo primieramente gli angoli EQX, EXQ alla base del triangolo XEQ (n. 103) = gr. 72., e l'angolo al vertice QEX = gr. 36 risultano gli angoli alla base di detto triangolo XEQ doppj ciascuno dell'angolo al vertice. Ma perchè si scorge dalla Figura, che a questo è simile anche l'altro triangolo XGM, perchè hanno due lati XE, XG, ed anche XQ, XM coincidenti, ed i lati EQ, GM paralleli, quindi del pari ambidue avranno gli angoli alla base doppj dell'angolo al vertice.

110. Ora quando si meni una retta da X per D al centro C, perchè questa forma l'angolo XcM eguale agli angoli di detti due triangoli, cioè eguale a gr. 72. (giacchè XcM doppio dell'angolo DcB al centro di un 10gono è a gr. 72. eguale) perciò taglia (n. 27) il lato GM del triang. XGM *media & extrema ratione* in c. Taglierà dunque così anche il lato EQ in D del triang. XEQ. E quindi avremo ordinati in progression continua geometrica li triangoli XDQ, EQX, MXE, ovvero BLF; e non altrimenti le basi ∺ DQ. QX. LF; ma DQ = *m*F posto in simile sito; QX = XD = DE per l'eguaglianza degli angoli opposti, ed anche eguale ad FA posto in simile sito. E per questa medesima ragione LF = *m*A = AK. Dunque ∺ *m*F. FA. *m*A, ovvero AK. Onde le ordinate tirate da detti punti nell'asse *eq* lo divideranno nella medesima proporzione, ed avremo ∺ *en. nc.* $\overline{en + nc}$ = *cq*. Ciò che era &c.

CON-

CONSEGUENZA I.

111. Eſſendo *m*K, DP per la coſtruzione parallele e chiuſe tra le *m*D, KP parallele parimenti per la coſtruzione, le *m*K, DP riſultano eguali. Onde calata giù un' ordinata da F, il diametro DP del circolo circoſcritto al 10gono ſarà da eſſa ſegato così ∺ D*o*. *o*c. $\overline{Do + oc} = cP$.

CONSEGUENZA II.

112. Concioſſiacchè abbiamo avuto di ſopra (n. 107) ∺ SL (= LA). SF (= LK). SK. e quivi (n. 110) abbiamo ∺ *m*F. FA. AK; ed anche ∺ DQ. QX. LF. alla qual progreſſione ſi potrebbe aggiungere il quarto termine LA, ſiccome nella progreſſione de' triangoli XDQ, EQX, MXE ſi potrebbe aggiungere il triangolo MXG, ovvero LAZ, che ha per baſe LA, onde verrebbero ∺ DQ. QX. LF. LA; quindi poi ſarebbero tutti li termini contin. propor. ſchierati ſu d'una medeſima retta così ∺ *m*F. FA (= QX). LF. LA. LK. SK.

CONSEGUENZA III.

113. Eſſendo ſimili i triangoli *a*E*e*, *a*F*n*, *a*G*c*, ed inoltre (n. 110) ∺ *m*F. FA. AK, cioè ∺ *a*E. EF. FG. poſte in ſimili ſiti, ſaranno ancora ∺ *ae*. *en*. $\overline{nc} = an$.

PROPOSIZIONE V.

Il quadrato del raggio del circolo circoſcritto ad un 10gono è eguale al rettang. del ſuo lato nella ſuttenſa a tre di eſſi lati. Dico $\overline{Ac}^2 = AFB$.

114. Abbiamo trovato (n. 112) ∺ AF. FL (= LX). LA; ma FL, ovvero LX = Ac, prima perchè LX, AC ſono per

per la coſtruzione parallele, e poi ſono anche intercette fra due altre LA, Xc parallele pure per la coſtruzione; onde debbono eſſere anche eguali. La retta poi LA è (n. 106) = FB. Soſtituendo pertanto Ac ad FL, ovvero LX, ed FB ad LA, la proporzione ſi traſforma così ∺ AF. AC. FB. Onde viene $\overline{Ac}^2 = AFB$. Ciò che &c.

CONSEGUENZA.

115. Poichè A*m*, *m*D, Dc ſono ciaſcuna eguale al raggio Ac, e che l'angolo A*m*D è eguale all'angolo AFB, potrebbeſi al quadrato $\overline{Ac}^2$ ſoſtituire il rombo A*m*Dc, ed al ſuppoſto rettangolo AFB il romboide AFB; onde verrebbe il rombo A*m*Dc = AFB romboide; e levando a tutti due la parte comune AF*o*c reſtarebbe c*o*B = F*m*D*o*.

116. Ora deriva dal n. 110, che FB è diviſa *media & extrema ratione* in *o*; ſarà dunque per la 30. Lib. 6. Euclide c*o* = *o*B; onde ſia cD × *o*B = B*o*D + c*o*B. Ma cD × *o*B = AF*o*c; indi c*o*B = F*m*D*o*; fatta dunque la ſoſtituzione riſulta AF*o*c = $\overline{BoD + FmDo}$ = *m*FB = FB × *o*D. Quindi perchè *o*c. *o*D :: *n*c. *ne* ſeguita gentilmente che Ac × c*n* = FB × *ne*; onde tutta AM × c*n*. FB × *ne* :: 2. 1.

PROPOSIZIONE VI.

Il rettangolo di una retta guidata dal centro c *della Figura fino all' ultima interſezione* S *moltiplicata per* BH *ſuttenſa a due lati del 10gono interiore è eguale al rettang. di una* NG *ſuttenſa a 4. lati del 10gono eſteriore moltiplicata per la retta condotta da detto* c *alla ſeconda interſezione* a. *Dico* CS × BH = NG × ca.

117. Avvegnachè queſta Propoſizione porti in fronte una cert'

cert' aria recondita, non lascia di non essere semplicissima, per non dire ridicola. Bastava dire che $ca = BH$; e che $cS = NG$; d'onde veniva tosto $ca . cS :: BH . NG$, e quindi $cS \times BH = NG \times ca$.

Le rette ca, BH sono eguali, perchè sono due parallele intercette fra due altre parallele LZ, FN, come chiaro apparisce dalla sola simetrìa della Figura; dalla quale pure, e da quanto altrove (num. 106.) si disse risultando $SF = FN$; $FB = FK$; $SB = KN$; e non altrimenti $Fc = cB$; $FG = GK$; e tutte le Fc, cB, FG, GK eguali, siegue che cS; GN siano pure eguali per essere diagonali di due trapezj $SFcB$, $NKGF$ simili ed eguali, perchè formati dalle suddette linee rispettivamente eguali.

PROPOSIZIONE VII.

Primo. Le rette KF, FB, BN *sono tre lati ordinati nella periferia di un 5gono.*

Secondo. Le rette LF, Fc, cB, BX, XL *sono cinque lati di un 5gono perfetto.*

Terzo. Il di cui centro è situato nel punto d' intersezione delle due suttense BE, DF.

118. I. Primieramente le rette KF, FB, BN sono (n. 106.) eguali. Secondariamente da gr. 360, somma di tutti gl'angoli del trapezio FEDB sottratti li due alla periferia di un 10gono FED, EDB, cioè gr. $\overline{144 + 144} = 288$, e diviso per metà il residuo 72, sarà gr. 36 valore dell'angolo EFB, il quale sottratto da tutto l'angolo $EFK =$ gr. 144, resta gr. 108. per l'angolo BFK. Ma questo è valore dell' angolo alla periferia (n. 20) di un 5gono. Dunque per essere anche gli angoli KFB, FBN eguali, le rette KF, FB, BN sono tre lati &c. Ciò che era la prima parte.

119. II. Le rette poi LF, Fc, cB, BX, XL sono (n. 106.) eguali, e facilmente si rileva, che gli angoli da esse compresi sono ciascuno eguali a gr. 108 valore dell' ang. alla periferia di un 5gono. Dunque le rette LF, Fc &c. che era l'altra parte da dimostrarsi.

120. III. Facilmente trovasi anche che il centro di questo pentagono sia collocato nel punto d' intersezione delle due rette BE, DF senza trattenersi con disaggio in una positiva dimostrazione; onde suppongasi già soddisfatto anche a quest' ultima parte.

ARTICOLO NONO.

Del Endecagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geom. dell' angolo al centro dell' Endecagono.

121. Ecco preventivamente (*Fig.* 13., *Tav.* 31.) esposti i valori di questo Poligono.

$$\text{Ang. } hba = \text{gr. } 147\tfrac{3}{11}$$

$$abQ = \text{gr. } 32\tfrac{8}{11} = \tfrac{360}{11}$$

$$bQa = \text{gr. } 114\tfrac{6}{11}$$

$$aQA = \text{gr. } 65\tfrac{5}{11}$$

$$QAD = \text{gr. } 81\tfrac{9}{11}$$

$$QAR = \text{gr. } 98\tfrac{2}{11}$$

$$SRA = \text{gr. } 49\tfrac{1}{11} = \frac{147\frac{3}{11}}{3}$$

SRX

$$SRX = \text{gr. } 130\,\frac{10}{11}$$

$$RXE = \text{gr. } 16\,\frac{4}{11}$$

Onde $RXE = \frac{abQ}{2} = \frac{SRA}{3} = \frac{aQA}{4} = \frac{QAD}{5} = \frac{QAR}{6} = \frac{bQa}{7} = \frac{SRX}{8} = \frac{hba}{9}$.

Quindi basta sottrarre un angolo, come geometricamente si può, di gr. 120 dell'angolo $SRX = \text{gr. } 130\,\frac{10}{11}$, che il residuo gr. $32\,\frac{8}{11}$ sarà la terza parte dell'angolo al centro del 11gono, e sarà l'angolo al centro di un 33gono.

Annotazione I.

122. La trisezione geometrica dell'angolo alla periferia di questo Poligono non può essere più felice, perchè l'angolo $SRA = \text{gr. } 49\,\frac{1}{11}$ è appunto $= \frac{147\frac{3}{11}}{3}$ cioè eguale ad un terzo dell'angolo hba alla periferia del 11gono.

Annotazione II.

123. Notate che il valore degli angoli RXE, SRA, hba è come 1 . 3 . 9. cioè in tripla proporzione geometrica. Così ancora gli angoli abQ, aQA, SRX sono come li tre numeri ordinati in proporzione dupla geometrica 2 . 4 . 8.

PRO-

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore rq (*che unisce i punti di concorso di un lato* ab, *e di una suttensa a tre lati* nh; *poi di un altro lato* mn, *e di un' altra suttensa a* 3 *lati* be), *e due interiori* nb, ma *sono contin. geom. propor. Sono dico* ∺ rq . nb . ma.

124. Costrutta pertanto la figura, come già si suole, rileviamo che $\begin{matrix} Fm . mb :: Fn . nq \\ Bm . mb :: Bd . dh \end{matrix}$ ovvero $\begin{matrix} Fm . Fn :: mb . nq \\ Bm . Bd :: mb . dh \end{matrix}$

Ma $dh = nq$. posta in simile sito della figura. Dunque $\left.\begin{matrix} Fm . Fn \\ Bm . Bd \end{matrix}\right\} : mb . nq$; e però $Fm . Fn :: Bm . Bd$. Ma abbiamo $Bm = Fn$; $Bd = Fr$, supposto il punto r determinato da una retta condotta per be; siccome il punto d fu determinato dalla retta hn prodotta e posta in simile sito. Sostituendo dunque questi termini a quelli, viene $Fm . Fn :: Fn . Fr$; ovvero ∺ $Fm . Fn . Fr$. D'onde per conseguenza risulta ∺ $ma . nb . rq$ perchè sono parallele, calate giù dai punti m, n, r comprese nel medesimo angolo mFa. Dunque poichè è lo stesso ∺ $rq . nb . ma$ ciò che era da dimostrarsi.

CONSEGUENZA.

125. Per la medesima ragione ∺ $nq . mb . ya$; e calata da y la yt abbiamo pure ∺ $rq . nb . ma . yt$.

Annotazione I.

126. Non d'altra maniera provarei, che Fc; FV ed un' altra compresa tra F ed un punto su la FV determinato per una

una retta condotta per fN, sarebbero tre contin. geometriche proporz. siccome anche di leggiero si scorge che $Fm . Fn :: Fc . FV :: Fx$ (supposto il punto x determinato da una retta, che fosse guidata per gG). FT.

Annotazione II.

127. Le eguaglianze lineari che occorrono in questo Poligono sono $Tn = nb = nq$; $TK = KH$; $TB = TL$; $fc = pc$ condotta che fosse; $oP = PZ$; $NV = Vn$; e forse ve ne saranno dell' altre da me non avvertite, tutte risultanti dall' eguaglianza degli angoli ai quali rispettivamente sono opposte. Perciò può chi vuole sostituire queste ad altri termini, che sono nelle proporzioni regnanti in questo Poligono, il numero delle quali proferiremo a suo (n. 144) luogo, non avendo voglia presentemente d'inoltrarmi di più.

PROPOSIZIONE III.

Le rette ZM, MH, H& sono tre lati di un 22gono. Le rette ZM, MR, RX sono tre lati di un 11gono descritto in un circolo &c. come fu enunziato altrove.

128. Abbiamo detto poco fa (n 127.) che $TB = TL$; ed è $TB = ZM = H\&$ poste in simile sito; così pure $TL = MH = MR$ poste in simile sito. Dunque le rette ZM, MH, H&, ed anche ZM, MR, RX sono eguali. Che poi gli angoli ZMH, MH& siano eguali, ed angoli alla periferia di un 22gono; e che gli angoli ZMR, MRX siano alla periferia di un 11gono, si rileva nella medesima maniera che si tenne ne' Poligoni antecedenti. E così nel medesimo modo si dimostra che questo Endecagono è inscritto entro un circolo, che passa &c.

AR-

ARTICOLO DECIMO.

Del Dodecagono.

PROPOSIZIONE I.

Valore degli angoli di questo Poligono.

139. Esaminato il valore degli angoli di questo Poligono (*Fig.* 14., *Tav.* 32.) lo troviamo quale segue

$$\text{Ang. } abd = \text{gr. } 150$$

$$\left.\begin{matrix} bdq \\ HFD \end{matrix}\right\} = \text{gr. } 30 = \frac{360}{12}$$

$$\left.\begin{matrix} bqd \\ BHF \end{matrix}\right\} = \text{gr. } 120$$

$$\left.\begin{matrix} drB \\ BDG \end{matrix}\right\} = \text{gr. } 60$$

$$\left.\begin{matrix} rGD \\ rBq \end{matrix}\right\} = \text{gr. } 90$$

$$\text{Onde } HFD = \frac{bdq}{1} = \frac{drB;\, BDG}{2} = \frac{rGD;\, rBq}{3} = \frac{bqd;\, BHF}{4} = \frac{abd}{5}$$

Se per questi valori fosse possibile la trisezione geometrica dell'angolo di gr. 30 al centro di questo Poligono; ovvero di gr. 150 alla periferia, sarebbe data anche la descrizione geometrica del 9gono. Perchè aggiungendo gr. $\frac{30}{3}$ cioè gr. 10 al medesimo 30, verrebbero gr. 40 valore dell' angolo al centro di detto 9gono. Così pure sottratto da gr. 90 un terzo di gr. 150, cioè gr. 50, restarebbero pur anche gr. 40 per il suddetto angolo al centro di detto 9gono. Ma non abbiamo nè l'uno nè l'altro, perchè veramente queste

queste tali descrizioni dipendono da un' arte tuttavia incognita di dividere la periferia di un circolo in parti date.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore Xp *(che unisce i punti di concorso di un lato* la*, e di una suttensa a tre lati* ob*; poi di un altro lato* go*, e di un' altra suttensa a tre lati* ae*), e due interiori* oa, gl *sono cont. geom. propor. dico* ∺ Xp . oa . gl.

130. Guidate le linee necessarie alla costruzione quali sono in figura abbiamo

Fg . ga :: Fo . op ovvero Fg . Fo :: ga . op.
Kg . ga :: KN . Nb ovvero Kg . KN :: ga . Nb.

Ma Nb = op posta in simile sito; onde

$\left.\begin{array}{l}\text{Fg . Fo}\\ \text{Kg . KN}\end{array}\right\}$ :: ga . op; e però viene Fg . Fo :: Kg . KN.

Ma Kg = Fo posta in simile sito della Figura. Siccome KN = FX, supposto il punto X determinato da una retta condotta per ae; come il punto N è definito da una retta menata per bo posta in simile sito. Onde fatta la sostituzione risulta Fg . Fo :: Fo . FX; ovvero ∺ Fg . Fo . FX; e quindi anche le parallele comprese nel medesimo angolo ∺ Xp . oa . gl. Ciò che era da dimostrarsi, e che (supposta la costruzione applicata d'intorno a sei lati) abbiamo precisamente dimostrato anche nella seconda del 11gono.

PRO-

PROPOSIZIONE III.

Sta Fg *ad* Fo, *come* Fm *ad* FG. *Cioè* Fg . Fo :: Fm . FG.

131. La Figura ci presenta tosto da osservare, che

Fg . ga :: Fm . mQ ovvero Fg . Fm :: ga . mQ.
Kg . ga :: Kn . nq ovvero Kg . Kn :: ga . nq.

Ma mQ = nq posta in simile sito; onde

$\left.\begin{array}{l}\text{Fg . Fm}\\ \text{Kg . Kn}\end{array}\right\}$ :: ga . mQ; e però Fg . Fm :: Kg . Kn;

ma Kg = Fo posta in simile sito; Kn = FG per la stessa ragione. Dunque abbiamo Fg . Fm :: Fo . FG; ed alternando Fg . Fo :: Fm . FG. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA.

132. Sicchè qualunque parallele cadenti dai punti g, o, m, G comprese nel medesimo angolo aFg, saranno pure proporzionali, come per esempio le gl, oa, una retta condotta da m a quelle parallela, GQ.

PROPOSIZIONE IV.

Determinato su la Fg *il punto* y *per una retta condotta da* Q *per* B. *Dico che* ∺ Fm . FG . Fy.

133. Determinato su la Kg il punto x da una retta guidata per BG, abbiamo

Fm . mQ :: FG . Gf ovvero Fm . FG :: mQ . Gf.
Kn . nq :: Kx . xB ovvero Kn . Kx :: nq . xB.

Ma nq = mQ; xB = Gf perchè poste in simili siti. Dunque

L l Fm

$\left.\begin{matrix} Fm.FG \\ Kn.Kx \end{matrix}\right\}$ $mQ.Gf$; e però $Fm.FG :: Kn.Kx$.
Ma $Kn = FG$ posta in simile sito; e $Kx = Fy$, determinato il punto y da una retta guidata per QB, siccome il punto x fu determinato da una retta guidata per BG, posta in simile sito. Dunque fatta la sostituzione $Fm.FG :: FG.Fy$. Ovvero $\div Fm.FG.Fy$. Ciò che era da dimostrarsi.

CONSEGUENZA.

134. Qualunque parallele comprese nel medesimo angolo gFl cadenti dai punti m, G, y saranno pure &c.

Annotazione I.

135. Essendo (n. 129.) l'angolo $gDa = BDG =$ gr. 60; ed i lati Dg, Da eguali, il triangolo Dga è equilatero; onde $ga = gD$. Ma $gD = DF$, perchè gli angoli DaF, DFa essendo per il num. suddetto eguali, anche i lati Da, DF a quelli opposti sono eguali. E quindi risulta Fg doppia di ga; Fo doppia di op; Fm doppia di mQ &c.

Anotazione II.

136. Le eguaglianze poi lineari, che s'incontrano in questa figura sono molte. Imperocchè essendo, come ho pur ora detto, il triangolo Dga equilatero, quindi ciascuna retta parallela ad uno de' suoi lati ga, e compresa nel medesimo angolo gDa, ha le sue eguali. Onde $ob = bD$; $mq = qD$; GB = BD &c. Inoltre perchè gli angoli (n. 129) rGD, ovvero rBD; ed rBq sono retti, e la metà dell'angolo GrB ($= bqd =$ gr. 120); cioè l'angolo $DrB =$ gr. 60, è eguale all'angolo drB pure = gr. 60, seguita che DB, Bb lati opposti ad angoli eguali siano eguali; siccome pure per la medesima

sima ragione seguita, che sia $Dr = rb$; $De = eb$; $Do = ob$; $Dh = hb$; $DS = Sb$; $DT = Tb$; supponendo già descritte le linee che mancano in figura.

Si rileva pure, che il raggio ce del circolo circoscritto ad un 12gono sia eguale ad eb suttensa a due lati di detto 12gono, perchè essa diventa lato di un Esagono.

Si ritrova ancora nell'antecedente modo, che $Dt = tc$; $De = ec$; $Dm = mc$; $Dn = nc$ &c., così non altrimenti KV = VD = DP. Non deve parer nè men strano, che sia $BD = \frac{Do}{2}$; giacchè il triangolo oBD è simile al triangolo Fag; onde siccome il lato di questo Fg l'abbiamo trovato doppio del lato ga, così il lato simile Do di quello viene ad esser doppio del simile lato BD.

137. Tutte queste eguaglianze diverse si sono annoverate, acciò, volendo, si possano sostituire in luogo d'altri termini compresi nelle proporzioni spettanti a questo Poligono, e delle quali si produrrà il numero (n. 145.) suo luogo.

PROPOSIZIONE V.

Primo. Le rette FQ, QZ, ZR *sono tre lati di un* 12*gono.*
Secondo. Le rette FQ, QM, MV *sono tre lati di un Esagono.*
Terzo. Inscritto entro un circolo che passa &c.

138. La dimostrazione di questa Proposizione è a un di presso la medesima, che le altre cose pari, fu proposta negli Articoli antecedenti. Perchè dette rette sono eguali; e perciò che riguarda gli angoli fra esse intercetti, le prime comprendono un angolo di gr. 150 alla periferia di un 12gono; le altre di un angolo di gr. 120., angolo alla periferia di un 6gono &c.

ARTICOLO UNDECIMO.

Osservazioni sopra li Poligoni in generale.

Tratteniamoci ora alquanto d'intorno a certi rapporti, o convenienze, che occorrono ne' Poligoni in generale, e che occuparono già la mia attenzione, e non dovrebbero niente meno soddisfare la curiosità de' Filosofi. Come sarebbe o rispetto al valore degli angoli, o al numero delle interfezioni, che si generano producendo i loro lati, o pure rispetto al numero delle ordinate conducibili da angolo ad angolo; così al numero delle contin. geom. propor. e ad altre particolarità, che proporrò d'esaminare nelle seguenti Proposizioni. Onde

PROPOSIZIONE I.

Gli angoli formati dai lati prodotti di un Poligono tanto più sono acuti, quanto più sono distanti dal centro della Figura.

139. La ragion di ciò spicca da se, nè può avvenirne altrimenti, perchè nel 12gono per esempio immaginando che il lato *oe*, rispetto al lato *og* supposto immobile, muti luogo, e passi in *de*, poi in *bd*, indi in *ab* &c. gli angoli compresi tra questi due lati prodotti *eog*, *dmg*, *bGg*, *aDg* &c. si devono fare più acuti, perchè secondo che detti lati occupano su la periferia un punto più l'uno dall'altro distante, il loro punto d'interfezione s'allontana, finchè pervenuti detti lati a due situazioni diametralmente opposte, e massimamente distanti, quali sono le due *go*, *ul*, svanisce il punto d'interfezione, e detti lati prodotti sono arrivati nell' infinito, e perciò diventati paralleli; dal qual stato progredendo innanzi ritornano, e diventano anche convergenti dalla parte opposta, come *u3*, *og*, che s'intersecano nel punto R.

CONSEGUENZA.

140. Non v'ha dubbio perciò, che un lato, il quale come tangente muovasi per tutti i punti della periferia di un circolo, non formi, rispetto ad un altro lato prodotto ed immobile, tutti gli angoli appartenenti ad infiniti Poligoni.

Annotazione.

141. Per sapere poi con qual legge detti angoli scemino più che dal centro sono rimoti, notaremo principalmente che (trasportata per esempio parte della *Fig.* 10. del 9gono nella 11. *Tav.* 30.) ne' Poligoni di denominatore disparo l'angolo al centro (che è eguale all'angolo esterno Q D *e*) sta all' angolo alla periferia *e* D *n* sempre come 2 al numero denominatore meno 2: nell' addotto esempio come 2 a 7 = 9 − 2. Ne' Poligoni di denominatore pari detto angolo al centro sempre sta all' angolo alla periferia, come 1 alla parte minore di due parti ineguali massime possibili del numero denominatore: nel 8gono per esempio come 1 a 3 (= 8 − 5) parte minore delle due parti ineguali massime possibili 3, e 5. Ciò che si rileva anche dalla prima Proposizione spettante a ciascun Poligono, e da una Tavola, che or ora (n. 156.) produrremo, che comprende la ragione appunto di detto angolo al centro, all'angolo, alla periferia.

142. In secondo luogo osservate ciò che è costante in tutti i Poligoni, cioè che li due angoli alla base di ciascun triangolo descritto in Figura BEN, *o*NQ, *e*QD presi

si insieme, sono eguali all'angolo eDn alla periferia; onde BEN + BNE = eDn : cioè (segnati i numeri, che sono i minimi esponenti del valore rispettivo di ciascun differente angolo, che occorre in figura) 1 + 6 = 7. Così ancora ONQ + OQN = eDn : cioè 3 + 4 = 7. Resta eQD + eDQ = eDn: cioè 5 + 2 = 7. Gli angoli poi di ciascun triangolo presi insieme sono eguali al numero denominatore, perchè essendo l'angolo esterno sempre eguale a 2, risulta 1 + 6 + 2 = 7 + 2 = 9; e gli altri 3 + 4 + 2 = 7 + 2 = 9; e 5 + 2 + 2 = 7 + 2 = 9.

143. Finalmente per venire a quanto appartiene in particolare a questa Annotazione, si deve riflettere, che ne' Poligoni di denominatore disparo, gli angoli più che sono distanti dal centro della Figura decrescono dalla medesima parte a destra de' lati prodotti, e dalla medesima parte a sinistra crescono per il binario; cosicchè decrescono come 7. 5. 3. 1 a destra; ovvero crescono a sinistra come 2. 4. 6. Nei Poligoni poi di denominatore pari decrescono per la medesima parte a destra, e crescono a sinistra per unità.

PROPOSIZIONE II.

Le diverse serie de' termini proporzionali, che troviamo nella figura di un Poligono costrutta come si è fatto, sono tante, quante sono le intersezioni diverse, che in essa occorrono sopra una medesima linea.

144. Questa Proposizione è evidentissima, perchè se per determinare il principio ad una serie di termini proporzionali si siamo in fatti prefissi di voler prendere un punto di stazione in ogni diversa intersezione che occorra su la medesima retta, il numero delle dette serie non può non essere

essere eguale al numero delle intersezioni. Quindi (*Fig.* 7. *Tav.* 29.) nell'Ettagono per esempio 3 essendo detti diversi punti d'intersezione E, Z, h, sono 3 anche le serie. La prima rispetto al punto E, cioè

EZ. ZD :: Eh. hp :: Eb. bq :: ES. SN :: EH. HK.

La seconda rispetto al punto Z, perchè

Zh. ho :: Zb. bp :: ZS. SM :: ZH. HV :: ZQ. QE.

La terza rispetto al punto h. Onde

hb. bo :: hS. SD :: hH. HA :: hT. TZ :: hF. FE.

145. Ma ciò che molto più importa d'osservare, è che vi ha un certo numero di termini (sono 10 nell'addotto esempio) per ciascuna serie, dai quali risultano diverse eguaglianze de' pieni prodotti da detti termini proporzionali moltiplicati insieme. Supponiamo che detti termini siano

2. 1 :: 4. 2 :: 6 * 3 :: 8. 4 :: 10. 5.

Onde avremo prima queste eguaglianze

$1 \times 4 = 2 \times 2$; $2 \times 6 = 4 \times 3$; $3 \times 8 = 6 \times 4$; $4 \times 10 = 8 \times 5$.

E poi quest'altre $2 \times 5 = 1 \times 10$; $4 \times 4 = 2 \times 8$. E perciò nell'7gono sono 6 eguaglianze per ciascuna serie, e sono 18 per tutte insieme. La Tavola annessa presenta in un tratto il numero delle intersezioni, e serie di ciascun Poligono; il numero de' termini di ciascuna serie; ed il numero delle eguaglianze prodotte dai predetti termini moltiplicati insieme.

TA-

TAVOLA

Del numero delle Interſezioni, e Serie, Termini, ed Eguaglianze de' piani compreſi in queſti Poligoni.

Nel	Interſ.ni e Serie ſono	Termini	Egual.
3gono	1		
4gono	1		
5gono	2	6	$3 \times 2 = 6$
6gono	2	6	$3 \times 2 = 6$
7gono	3	10	$6 \times 3 = 18$
8gono	3	10	$6 \times 3 = 18$
9gono	4	14	$9 \times 4 = 36$
10gono	4	14	$9 \times 4 = 36$
11gono	5	18	$12 \times 5 = 60$
12gono	5	18	$12 \times 5 = 60$
			240

Si vede dunque che il 10gono per eſempio ha 4 interſezioni, e per conſeguenza 4 ſerie di differenti proporzioni; ciaſcuna delle quali ſerie è compoſta di 14 termini; da quali ſi creano 9 eguaglianze diverſe di differenti piani. Queſte eguaglianze eſſendo 9. per ciaſcuna ſerie, moltiplicate perciò per il numero delle ſerie 4, riſultano 36. La ſomma poi di tutte le eguaglianze di tutti i Poligoni compreſi nella Tavola preſe inſieme aſcende a 240. Delle quali negli Articoli antecedenti io non ne ho moſtrate che pochiſſime, o perchè non mi parve che aveſſero una certa aria d'eleganza, o ancora perchè io era perſuaſo, che altri poteſſe di leggiero ripaſſarle ſotto a' ſuoi occhj da ſe, ſoſtituendo anche in eſſe que' termini, i quali foſſero (come abbiamo avvertito alcuna volta) trovati in figura ad altri termini eguali.

PRO-

PROPOSIZIONE III.

Le ordinate condotte dai angoli di un Poligono al diametro del circolo, in cui è inſcritto, producono un numero di piani comparabili eguale alla ſomma di una progreſſione creſcente per unità, meno l'ultimo termine, che ſempre è eguale al numero delle ordinate moltiplicato per 3.

146. E' da oſſervare in primo luogo, che a qualunque ordinata, perchè fa nel diametro due aſſiſſe, hanno relazione tre quadrati, o 3 rettangoli, de' quali comparandoli inſieme, ſi potrebbe indagarne il rapporto. Nel 5gono per eſempio (*Fig.* 4. *Tav.* 29) all' ordinata M*m* appartengono 3 quadrati $\overline{AM}^2$, $\overline{mM}^2$, $\overline{Mr}^2$ ovvero li 3 rettangoli equivalenti *r*A*m*, *rm*A, A*rm*; all' ordinata Q*n* ſi aſpettano li 3 quadrati $\overline{rQ}^2$, $\overline{nQ}^2$, $\overline{AQ}^2$, oppure li 3 equivalenti rettangoli A*rn*, A*nr*, *r*A*n*. Ora nel pentagono, come ben ſi vede, le ordinate ſono due M*m*, Q*n*; biſogna dunque moltiplicare queſto numero 2. dell' ordinate per il 3 numero de' piani, che appartengono a ciaſcuna ordinata, e verrà 6, cioè 6 piani, o quantità ſuperficiali, o termini che ſi vogliono comparare a due a due.

Supponiamo dunque che queſti ſei termini ſiano per eſempio ed eſaminiamo quanti binarj ne riſultino. Ben ſi vede, che ſono $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 =$ alla ſomma di una progreſſione creſcente per unità meno 6 ultimo ter-

a . b . c . d . e . f
ab . bc . cd . de . ef .
ac . bd . ce . df .
ad . be . cf .
ae . bf .
af .

M m

termine eguale, come si è mostrato, al numero dell' ordinate moltiplicato per 3. Ciò che era quanto dovevasi dimostrare.

Annotazione I.

147. Lo scopo dunque di questa Proposizione è di mostrare primieramente quanti piani appartenghino per questo solo riguardo ad un Poligono dato. Secondo quanti casi di comparazione di essi piani contenga: cioè quanti binarj, giacchè non si potrebbe sapere il rapporto di essi piani, se non si paragonassero insieme a due a due.

Per altro non è bisogno di andare in cerca del sopraddetto numero 15 col formare tutta la piramide; ma basta operare secondo la regola per rilevare la somma di una progressione, di cui fosse l'ultimo termine per esempio il 5 numero dispari, e fosse pure 5 il numero de' termini, come nelle progressioni crescenti per unità accade. Onde supponendo l'ultimo termine $= a$; il numero de' termini $= b$; la somma de' termini $= M$; verrebbe M (nel nostro caso $= 15) = \overline{a+1} \times \frac{b-1}{2} + \frac{a+1}{2}$. E se il numero de' piani invece di essere 6, fosse per esempio 9, cosicchè l'ultimo termine della progressione risultasse 8 numero pari, in tal caso sarebbe M ($= 36$ numero cercato) $= \overline{a+1} \times \frac{a}{2}$.

Anotazione II.

148. Non mi pare cosa superflua di produrre una Tavola, che contenga il numero delle Ordinate di ciascun Poligono; il numero delli Piani, che si devono comparare a due a due; ed il numero de' Binarj, che risulta da esso numero de' piani.

TAVOLA,

Che contiene il numero delle Ordinate; il numero de' Piani spettanti ad esse Ordinate; il numero de' Binarj, o sia de' casi di comparazione a due a due.

Nel	3gono	Ordinate	1	Piani	3	Binarj	3
	4gono		2		6		15
	5gono		2		6		15
	6gono		3		9		36
	7gono		3		9		36
	8gono		4		12		66
	9gono		4		12		66
	10gono		5		15		105
	11gono		5		15		105
	12gono		6		18		153
							584

Di tutti questi 584 Piani non ne ho esposti altri che nel 5gono ivi già (n. 38.) rimarcati, per non caricarmi di un esame senza fine, e perchè fors' anche sarebbe stato difficile o impossibile l'additare nella figura li esposti del loro rapporto. Laonde basti per ora di aver conosciuto, quanto per questo riguardo, e per quanto si è mostrato nella Proposizione antecedente, quanto dissi, avrebbesi a fare in un solo Poligono qualunque, di cui venisse a taluno in animo di darne un minuto ragguaglio.

PROPOSIZIONE IV.

Descrivendosi i Poligoni nella maniera da me insegnata, intorno allo stesso centro, intorno a cui si descrive un Poligono di dato denominatore d, *se ne descrive tante volte un altro di dato denominatore* a, *quante volte* d *contiene* a; *talmente che se* d = na, *il Poligono di denominatore* a *si descrive intorno al centro dell' altro Poligono di denominatore* d *numero di volte* n.

149. Supponiamo $n = 2$; $a = 4$; quindi sarà il numero denominatore $d = n \times a = 2 \times 4 = 8$, e la Figura sarà un 8gono, il quale (*Fig.* 8. *Tav.* 29.) nell' esser descritto fa nascere appunto 2 quadrati $eTdh$, $LRbI$. Ma non potevamo già aspettarsi altrimenti, imperocchè trovandosi di 4 lati PB, NM, DQ, FG, due PB, DQ, e poi due altri NM, FG alternatamente disposti l'uno dirimpetto all'altro e paralleli, prodotti poi anche che sono stati, perchè perciò non si guastò la loro situazione, non poterono che formare un quadrato $eTdh$. Così degli altri quattro lati ancora GP, BN, MD, QF, perchè due GP, MD, indi due altri BN, QF sono pure paralleli e ordinati faccia a faccia, prodotti che siano, formano un altro quadrato $LRbI$.

Nel 10gono (per addurre un altro esempio) si trovano i lati ED, BM, HR, PT, AF vicendevolmente inclinati con un angolo eguale all' angolo DQB di gr. 108 angolo alla periferia di un 5gono; e perciò prodotti che siano formano un 5gono mQg &c. Per la medesima ragione prodotti poi che siano i lati DB, MH, RP, TA, FE formano un altro 5gono apb &c. perchè appunto nel produrre essi lati non però si guasta la loro reciproca convergenza: discorso che, le altre cose pari, milita per qualunque altro Poligono.

PROPOSIZIONE V.

Descrivendo alla mia maniera un Poligono di denominatore disparo, si descrivono anche 3 *lati di un altro di doppio denominatore, e* 3 *di un altro di denominatore eguale.*

150. Nell' ultima Proposizione di tutti li antecedenti Poligoni di denominatore disparo abbiamo dimostrato, che la cosa si passa in fatti così, come abbiamo proposto. Ma non abbiamo addotto più precisamente il perchè così debba veramente succedere, e ciò è appunto quanto, producendo una dimostrazione non già particolare, ma generale, intendo ora di fare.

Trasportata dunque per maggior chiarezza parte della Figura 7.ª per esempio nella 9.ª torno a ridire (*Fig.* 7. *e* 9., *Tav.* 29.)

Primo. Che le rette QT, TN, NV, indi QT, TM, MA sono eguali.

Secondo. Che l'angolo QTN ovvero TNV compreso dalle prime è angolo alla periferia di un Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono $b\,d\,a$ &c.

Terzo. Che l'angolo QTM, ovvero TMA compreso dalle seconde è angolo alla periferia di un Poligono simile al Poligono dato bd,a &c.

151. Però circa al primo capo essendo la linea TM parallela al lato da prodotto in V, le due TM, dV fanno alla medesima retta QV gli angoli TMQ, dVQ sempre eguali; ma l'angolo dVQ è eguale all' angolo MQT posto

ſto in ſimile ſito della Figura. Dunque ſarà l'angolo TMQ eguale all'ang. TQM. Dunque ſaranno pure eguali i lati TM, TQ, e per conſeguenza tutte le altre rette poſte in ſimile ſito MA, TN, NV.

152. Circa al ſecondo capo è da ſapere, che meſſa una retta TN oppoſta all'angolo T*d*N angolo alla periferia di un Poligono dato *bda* &c. in modo che il triangolo TN*d* ſia iſoſcele, l'angolo eſterno QTN ſarà ſempre angolo alla periferia di un Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono dato *bda* &c. E ciò perchè (n.20.) eſſendo l'angolo T*d*N alla periferia più l'angolo al centro di un Poligono eguale alla ſomma di tutti gli angoli del triangolo TN*d*, ed eſſendo poi l'angolo T*d*N eguale per il ſuppoſto all'angolo alla periferia, li due angoli *d*TN, TN*d* preſi inſieme ſaranno eguali all'angolo al centro, ed un ſolo *d*TN (cioè la metà di detto angolo al centro) ſarà l'intiero angolo al centro di un Poligono di denominatore doppio del denominatore di queſt' altro Poligono *bda* &c. Ora eſſendo l'angolo al centro più l'angolo alla periferia eguale a due retti, ſarà l'angolo QTN complimento a due retti dell'angolo *d*TN; e però ſarà angolo alla periferia del ſuddetto Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono dato *bda* &c.

153. Per il terzo capo baſta avvertire, che per eſſere TM parallela ad *ad*, e però facendo ad una medeſima retta Q*d* gli angoli QTM, Q*da* eguali, deve riſultare il Poligono eretto ſu il lato QT, ovvero TM, ſimile al dato poligono *bda* &c. Dunque deſcrivendo un Poligono &c. Ciò che era in tutto da dimoſtrare.

PRO-

PROPOSIZIONE VI.

Primo. L'angolo retto ſta all'angolo al centro di qualunque Poligono, come il ſuo denominatore ſta al 4 *numero coſtante.*

Secondo. L'angolo retto ſta all'angolo alla periferia di qualunque Poligono, come il ſuo denominatore ſta al denominatore, più la differenza di eſſo denominatore al 4 *numero coſtante.*

154. Queſta Propoſizione è comunemente ricevuta, ma non ſo che ſia dimoſtrata. Quando perciò io ho detto, che l'angolo retto ſta all'angolo al centro di un Poligono (ſia per eſempio un pentagono), come ſta il ſuo denominatore al 4 numero coſtante, era lo ſteſſo che dire, che $\frac{1}{4}$ di un circolo ſta ad $\frac{1}{5}$, come 5 a 4. Ma ciò è evidente perchè $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} :: \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{20} :: 5 \cdot 4$. E perchè poi qualunque ſia il Poligono dato abbiamo ſempre da una parte dell'analogia per primo termine di comparazione $\frac{1}{4}$, cioè un angolo retto, così dall'altra parte avremo ſempre per ultimo termine un 4.

155. Per prova poi della ſeconda parte di queſta Propoſizione è da riflettere che (*Fig.* 4., *Tav.* 29.) l'angolo alla periferia GPQ più l'angolo eſterno QPB (ovvero McQ al centro, cui è eguale) di qualunque Poligono eſſendo eguale a due retti, ed eſſendo pure un retto aggiunto a ſe ſteſſo eguale a due retti, l'angolo retto ſi ritrova medio aritmetico tra l'angolo al centro, e l'angolo alla periferia; e quindi per la natura delle progreſſioni aritmetiche la diffe-

renza

renza tra l'angolo al centro, e l'angolo retto risulta la medesima che passa tra detto angolo retto, e l'angolo alla periferia.

Ciò premesso l'angolo retto, più la differenza di detto angolo all'angolo al centro, sarà eguale all'angolo alla periferia, cioè sarà = 5 + 1; giacchè nel medesimo esempio del 5gono abbiamo osservato, che l'angolo retto sta all'angolo al centro, come 5 a 4, onde la differenza risulta = 1. Ma il numero denominatore è 5. Dunque l'angolo retto (= 5) sta all'angolo alla periferia (= 5 + 1), come il denominatore 5 sta al medesimo denominatore 5 + la differenza 1 di esso denominatore 5 al 4 numero costante. Un tal discorso sussiste, le altre cose pari per qualunque altro Poligono; onde s'intende dimostrato, quanto era proposto.

Annotazione. I.

156. Una Tavola esibita (1) dal P. Andrea Tacquet mostra la ragione, che nei Poligoni passa tra l'angolo retto, e l'angolo alla periferia, acciò per essa si possa sopra un dato lato ergere un qualunque dato Poligono. Io qui inerendo a quanto contiene la presente Proposizione ne produrrò un'altra, la quale non solo rappresenti la suddetta ragione, ma anche quella del medesimo angolo retto all'angolo al centro. Perchè quindi in un circolo dato si possa descrivere un qualunque Poligono, non già tentando la divisione sopra tutta la periferia del dato circolo, ma sopra un solo quadrante. Avvertendo che i comuni divisori adoperati nel costruerla non sono sempre i massimi, acciò più chiaro apparisca quant' ho proposto.

TA-

(1) *Elem. Geom.* Lib. 4.; Prop. 16.; Prob. 2.

TAVOLA.

	Ang. al centro	Ang. retto	Ang. alla perif.ª					Diff.ª
4gono	90	90	90	::	4	4	4	0
5gono	72	90	108	::	4	5	6	1
6gono	60	90	120	::	4	6	8	2
7gono	$51\frac{3}{7}$	90	$128\frac{4}{7}$	::	4	7	10	3
Nel 8gono	45	90	135	::	4	8	12	4
9gono	40	90	140	::	4	9	14	5
10gono	36	90	144	::	4	10	16	6
11gono	$32\frac{8}{11}$	90	$147\frac{3}{11}$	::	4	11	18	7
12gono	30	90	150	::	4	12	20	8

Notate che questo segno :: significa, che li tre numeri anteposti al segno sono in proporzione ordinata, come li tre numeri posteriori. Onde trovando nel 7gono per esempio $90 \cdot 128\frac{4}{7} :: 7 \cdot 10 = 7 + 3$, vuol dire, che l'angolo retto 90 sta a $128\frac{4}{7}$ angolo alla periferia di un ettagono, come il denominatore 7 sta al medesimo denominatore 7 + il 3 differenza di detto 7 al 4 numero costante: sta, dissi, come 7 a 10. Onde divisa la periferia di un quadrante in parti 7, ed aggiunto un arco di 3 altre di dette parti, sarà tutto detto arco misura dell'angolo alla periferia del proposto 7gono. Se per il medesimo esempio si consideri, che nella Tavola v'è $51\frac{3}{7} \cdot 90 :: 4 \cdot 7$. significa che diviso un quadrante di un circolo dato in parti sette, l'arco eguale a 4 di esse parti sarà misura dell'angolo al centro del medesimo 7gono.

Annotazione II.

157. Nella medesima Tavola si vede ancora, che l'angolo retto è medio aritmetico tra l'angolo al centro, e l'angolo alla periferia, siccome abbiamo asserito di sopra; perchè nell' 11gono per esempio stando i numeri 4. 11. 18, come $32\frac{8}{11}$. 90. $147\frac{3}{11}$, dall' addizione de' piccoli esponenti $4 + 18 = 11 + 11$ si rileva molto più presto che anche $32\frac{8}{11} + 147\frac{3}{11} = 90 + 90$. Da questa Annotazione seguita poi, che noto l'angolo al centro si viene in cognizione dell'angolo alla periferia, e reciprocamente. Così nel 9gono per esempio noto l'angolo al centro 40, avremo $90 + 90 - 40 = 140$ angolo alla periferia. Siccome $90 + 90 - 140 = 40$ angolo al centro di detto 9gono.

PROPOSIZIONE VII.

Qualunque numero (maggior del 3) di lati eguali ordinati nella periferia di un circolo dato (Tav. 33.) può fornire tre contin. geom. propor. mp, bq, dg *; delle quali la prima* mp *unisce i punti di concorso di due lati prodotti* db, gq, *e di due* qa, bn *prodotte pure, e suttense ad 1 lato, se nella Figura i lati sono 4 (Fig. 15); a 2 lati, se i lati sono 5 (Fig. 16); a 3 lati, se i lati sono 6 (Fig. 17), &c. le altre due* bq, dg *uniscono le estremità di due lati nella Figura massimamente distanti.*

158. Ora non vogliate già aspettare la prova di questa elegantissima Proposizione, perchè è la medesima generalissima adoperata nelle seconde degli Articoli antecedenti. Sappiate piuttosto, che essa contiene in somma non solo quanto si enunziò nelle seconde Proposizioni suddette. Ma propone inoltre che dette seconde Proposizioni siano vere in qualunque altro Poligono superiore. Cioè che la seconda per esempio del 7gono sia vera non solo nell' 8gono, come si dimostrò n. 78; ma in qualunque altro Poligono superiore 9gono, 10gono &c. quando si restringa la costruzione d'intorno a tanti soli lati, quanti si adoperarono in detto Ettagono, che furono 4, cioè *bh*, h*o*, *op*, *pq* compresi nel triangolo *b*E*q*. Onde qualunque Poligono sia, per esempio la Fig. 15, basta che in essa si restringa la costruzione d'intorno a 4 soli lati per ottenere 3. contin. geom. propor. *mp*, *bq*, *dg* nel medesimo modo, che si ottennero per mezzo dell' 7gono. Così se tutte le Figure della Tavola 33 fossero sempre un 17gono, secondo che la costruzione versasse d'intorno a' lati 4, 5, 6 &c. di esso 17gono, le proporzionali *mp*, *bq*, *dg* risultarebbero bensì di ordine differente, ma sempre come nelle Figure 15, 16, 17 &c. contin. geometriche.

159. Di più se i lati della data Fig. 15 ovvero 16 &c. non fossero nè meno parti aliquote di un qualche Poligono, e qualunque fosse grande o piccola la periferia, su la quale sono ordinate (purchè non si dilatassero oltre la metà di essa se non di un mezzo lato, come occorse in tutte le seconde proposizioni de' Poligoni di denominatore disparo) la Proposizione mai perciò sarebbe meno sicura. Laonde trovandola io sì bella e sì estesa mi duole a dir vero assai, che non sorgendo essa che pur ora da una sola arida speculazione, le sovraggiunte mie occupazioni presenti non m'abbiano permesso di recarla a qualche solida utilità, o almeno di spingerla un poco più innanzi e dilatarla insieme con l'altre poche osservazioni, che sono anzi un aborto, che un parto dello scarso mio ingegno.

ARTICOLO DUODECIMO.

Descrizione organica di detti Poligoni.

160. Avvenga che io abbia già applicato a questa descrizione due altri Istromenti, uno chiamato PENNA GEOMETRICA, l'altro COMPASSO LOXODROMICO, e benchè pure altri si usino, e che potrei proporne anche degli altri forse in pratica migliori, nonostante m'induco a produrne uno, il quale, se non altro per una tal quale sua vaghezza, merita qualche considerazione. Egli è (*Fig.* 21. *Tav.* 34.) composto di 6 volte tanti regoli, e 3 volte tanti pivoli, quanti sono i lati della Figura. Cinque di essi regoli *ad*, *de*, *en*, *ag*, *gm* debbono essere eguali, e mobili d'intorno a pivoli, coi quali stanno insieme connessi, ed un altro regolo *am* deve concepirsi mobile d'intorno ad un pivoletto *e* comune a 4 di detti eguali regoli; e nelle due fessure una da *e* verso *m* si faccia, che riceva il pivolo *m*, che può dentro per il lungo sdrucciolare da *m* sino ad *e*, e che connette due regoli; e nell'altra fessura da *e* verso *a* riceva il pivolo *a*, che ne congiunge quattro, e che può scorrere liberamente da *e* sino ad *a*. I pivoli poi *a*, *m*, *n*, *d*, e tutti gli altri posti in simil luogo della Figura si dilatino un poco in cerchio dalla parte inferiore, e per di sopra siano costrutti a spira con la sua vite, acciò possano tenere i regoli insieme uniti. I pivoli *e*, *g*, *b*, e tutti quelli che stanno alla medesima distanza dal centro della Figura siano non solo fabbricati a quest'oggetto come quelli, ma per di sotto lunghetti più di quelli terminino in una punta, acciò toccando essi soli al piano, possano marcare un punto su la carta.

161. Da una tale costruzione parmi di dover aspettare un effetto, che è grande ardimento l'asserirlo senza averne anticipatamente fatta prova. Cioè che levando via i pivoli *m*, *e*, *a*, ed aprendo l'ordigno in fuori, restino tuttavia i lati *dh*, *hK*, *KL* &c. sempre ordinati nella periferia di un maggior circolo, di cui i regoli *dn*, *uh* &c. ne rappresentino i raggi. Come per contrario tolta via una parte *am*, *dn*, ovvero due *am*, *hu*, e restringendolo, i lati che restano rimanghino disposti nella periferia di un circolo minore.

162. Ciò mi par vero, perchè non posso concepire mosso per esempio un regolo *am*, che nel medesimo istante anche tutti gli altri regoli non si muovano altrettanto per causa della vicendevole loro connessione; cosicchè parmi che non possa muoversi un regolo *am*, che gli angoli *mad*, *nda* alla periferia non rimanghino tuttavia eguali. Dunque dovendosi anche gli altri regoli muovere altrettanto, anche gli angoli circa essi alla periferia rimarranno parimenti eguali; e quindi i lati *ad*, *dh* &c. sempre costituiti nella circonferenza di un circolo unica curva che, come notammo anche altrove, sempre inclini, e sempre egualmente alla medesima parte.

163. Volendo pertanto descrivere un Poligono maggiore del 12gono rappresentato in figura, bisognerebbe aggiugnere all'istromento tante parti, quante per il nuovo Poligono occorressero. E volendo descriverne un minore avrebbesi a tagliar via le superflue; perchè poi e nell'uno, e nell'altro caso premendo alquanto i pivoli *e*, *g*, *b* &c. lasciassero sul piano della carta impressi tanti punti, quanti fossero i lati del proposto Poligono. Ma si avverte che detto istromento non potrebbe essere diminuito, se non di due sole parti, e però fornire un 10gono. Perchè i punti di connessione *m*, *n*, *u* e tutti gli altri simili si trovarebbero in tal caso pervenuti fino al centro c, dove gli regoli pur ivi concorsi facendo a se stessi intoppo, non potrebbero passar più oltre. Tuttavia l'istromento ordinato al 12gono somministra anche la descrizione del triangolo,

golo, del 4to, dell' 6gono, lasciando andar vani dei segnati punti, 4 nel primo caso, 3 nel secondo, 2 nel terzo alternatamente. Ed occorrendo il pentagono si ordini l'istromento al 10, o al 15gono, o ad altro Poligono di denominatore multiplo del denominatore del proposto Poligono, lasciando poi alternatamente andar vano un punto sì e l'altro no nel primo caso; due sì ed uno no nel secondo &c. E così si proceda anche per l'7gono, ed il 9gono, aggiungendo all'istromento tante parti, quante abbisognarebbero per un Poligono di denominatore multiplo del denominatore del Poligono dato.

Annotazione.

164. Da quanto si espose in proposito del 10gono facilmente si deduce, che, ordinato l'istromento a detto Poligono, *madn* diventarebbe un triangolo, di cui i lati *am*, *dn* risultarebbero divisi *media & extrema ratione* in *g* ed *e* pivoli connettenti li regoli rispettivi.

IL FINE.

NOI RIFORMATORI
DELLO STUDIO DI PADOVA.

Avendo veduto per la fede di revisione, ed approvazione del P. F. Giacinto Maria Marini Inquisitor Generale del S. Offizio di Venezia, nel Libro intitolato: *Nuovi Istromenti per la descrizione di diverse Curve antiche e moderne &c. del Conte Giambatista Soardi Bresciano*. Ms. non v' esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per attestato del Segretario Nostro, niente contro Principi, e buoni costumi, concedemo licenza a Gian-Maria Rizzardi Stampatore in Brescia, che possi esser stampato, osservando gli ordini in materia di Stampe, e presentando le solite copie alle Pubbliche Librarìe di Venezia, e di Padova.

Dat. li 11. Maggio 1752.

[*Z. Alvise Mocenigo 2°. Cav. Rif.*
[
[*Daniel Bragadin Cav. e Proc. Rif.*

Registrato in Libro a carte 4. al num. 48.

Michiel Angelo Marini Segr.

Fig. 1

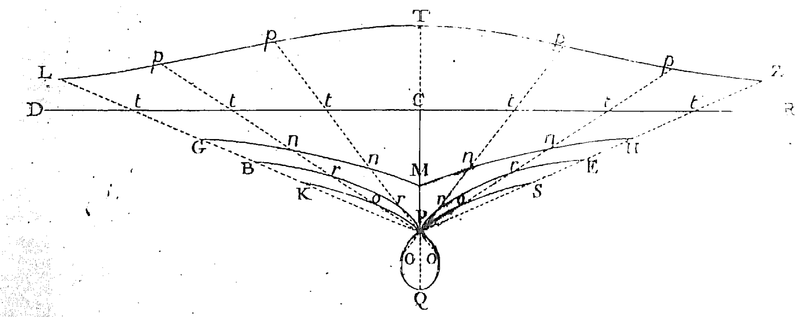


Fig. 2

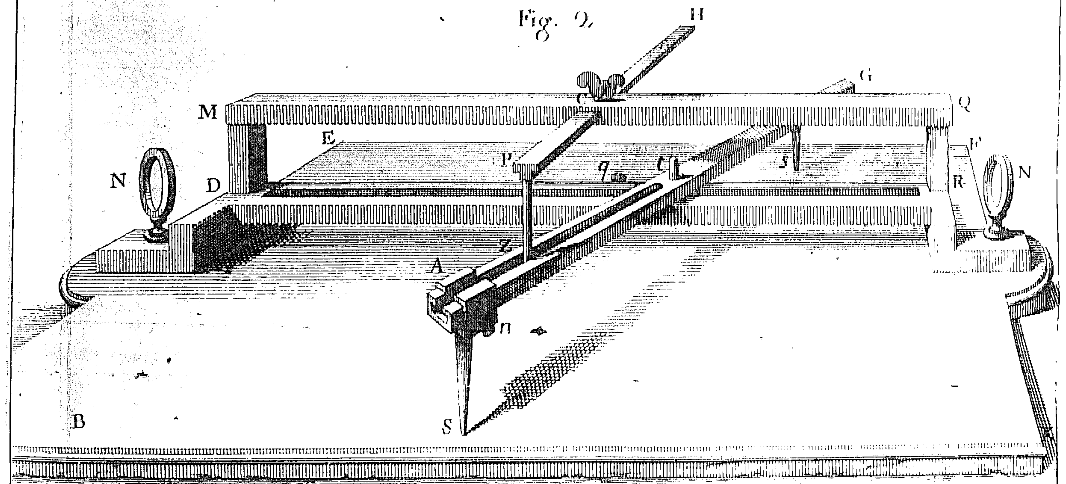


Fig. 3

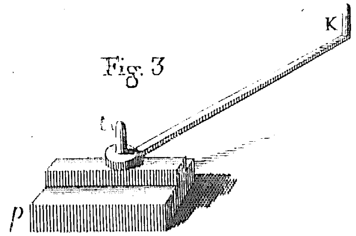


Fig. 5

Fig. 4

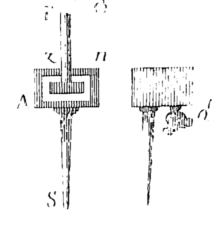


Fig. 2

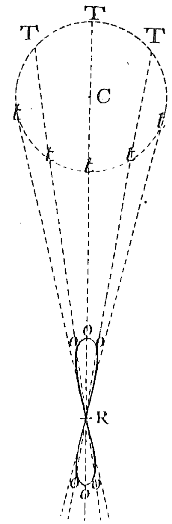


Fig. 1

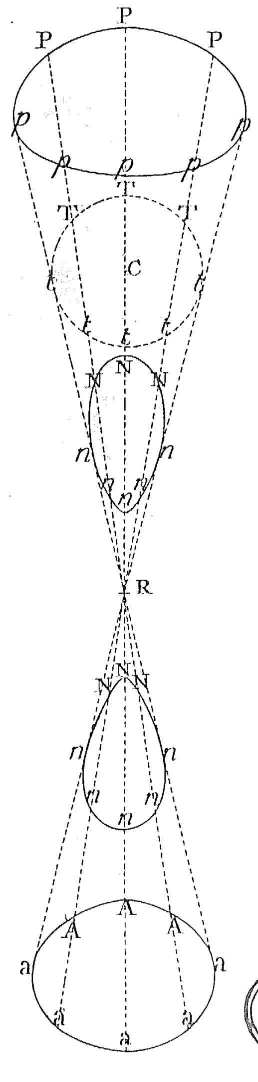


Fig. 3

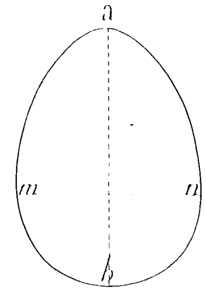


Fig. 5

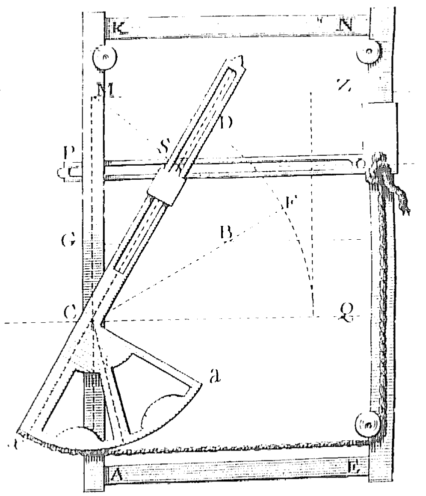


Fig. 4

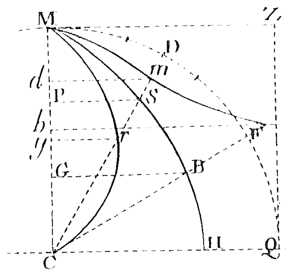


Fig. 3

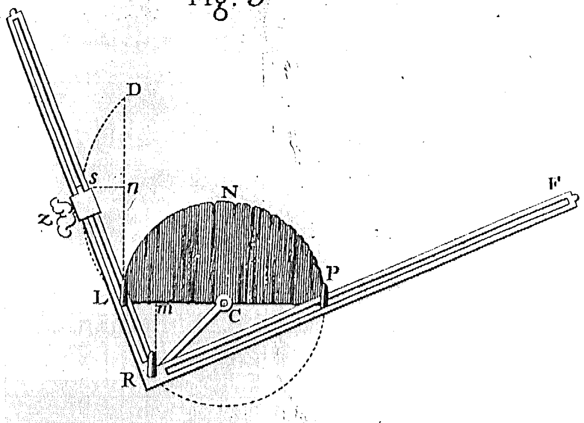


Fig. 1

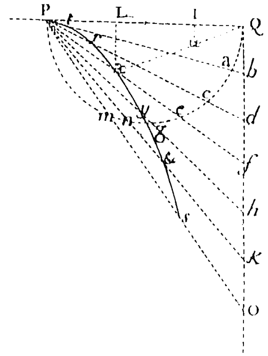
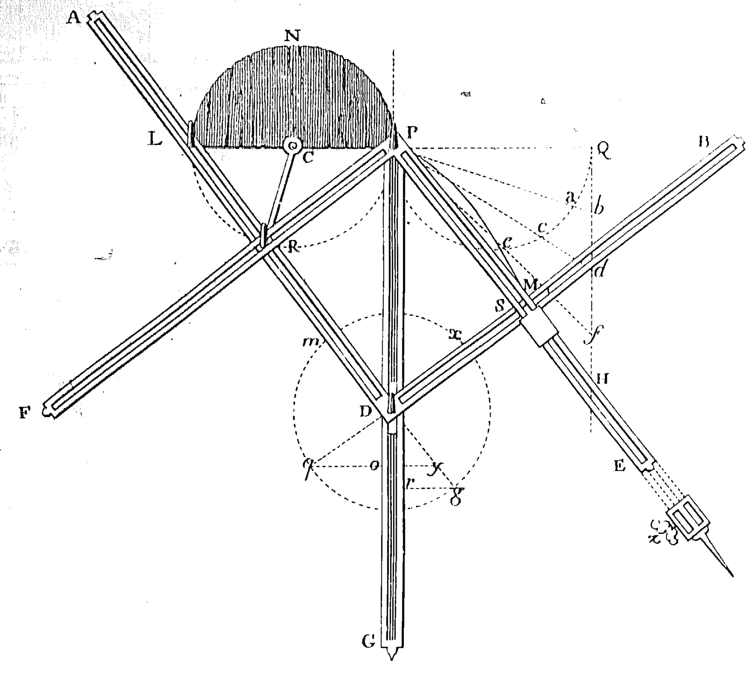


Fig. 2



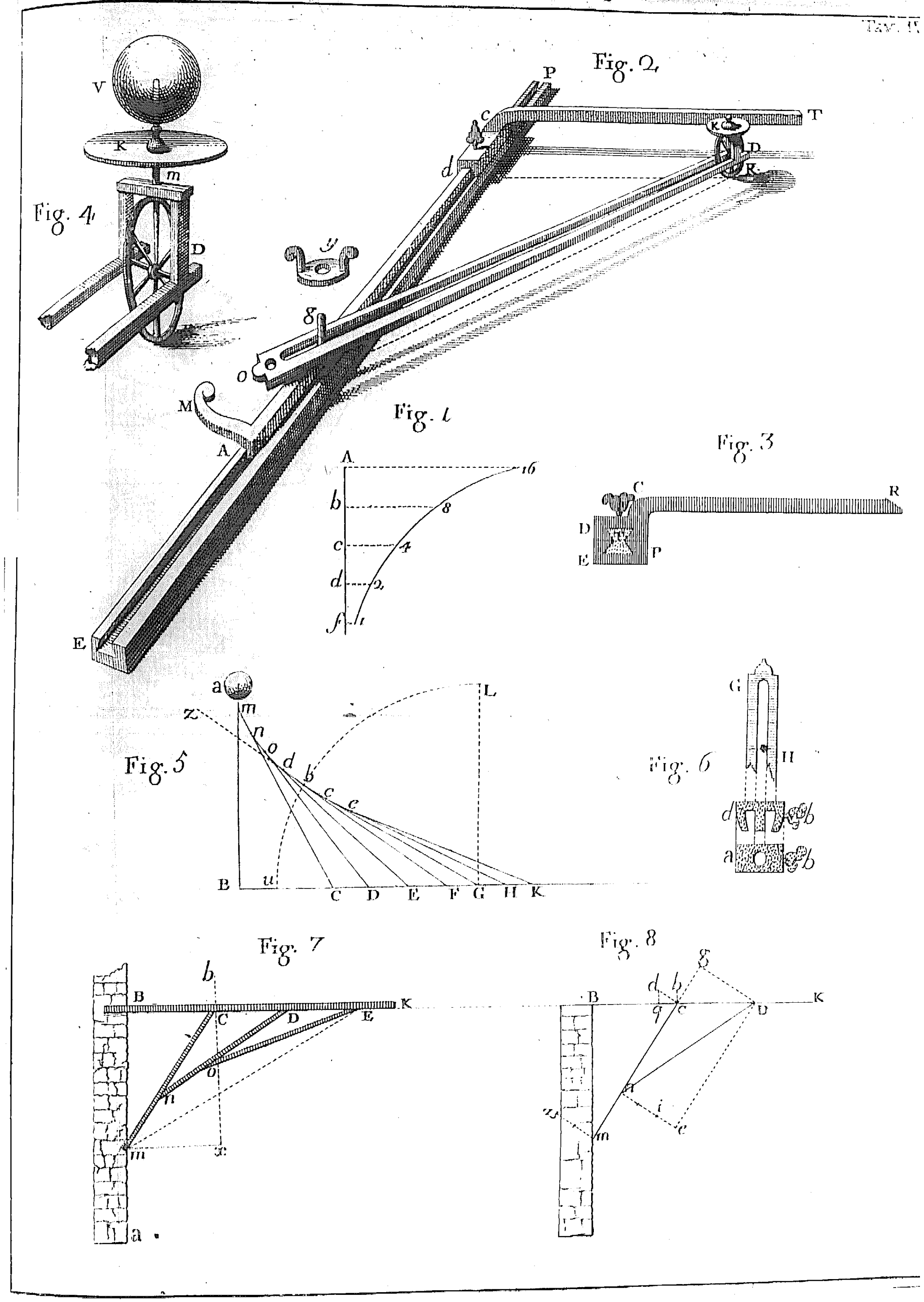

Tav. II
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8

Fig. 2

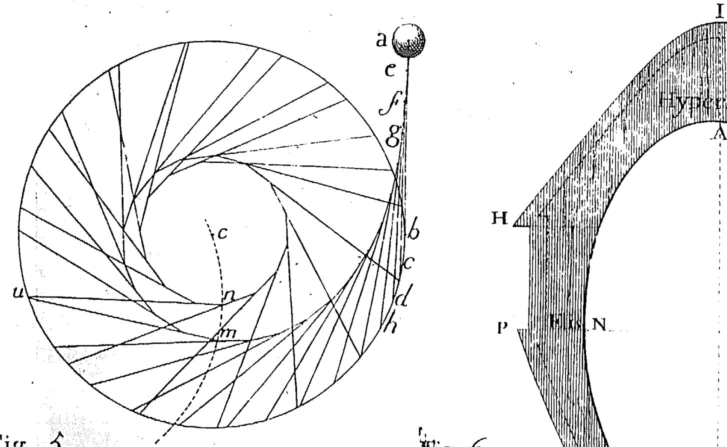


Fig. 1

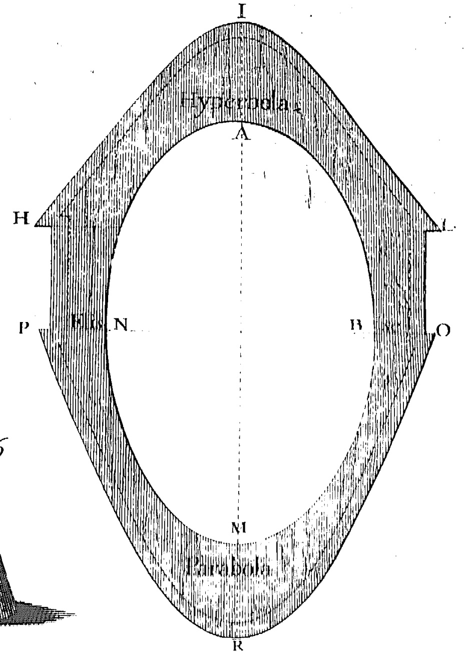


Fig. 5

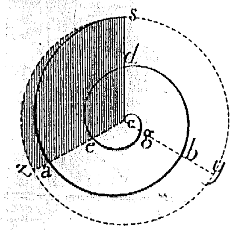


Fig. 6

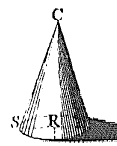


Fig. 4

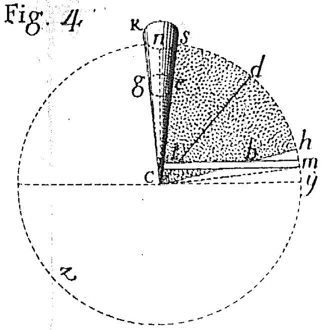


Fig. 3

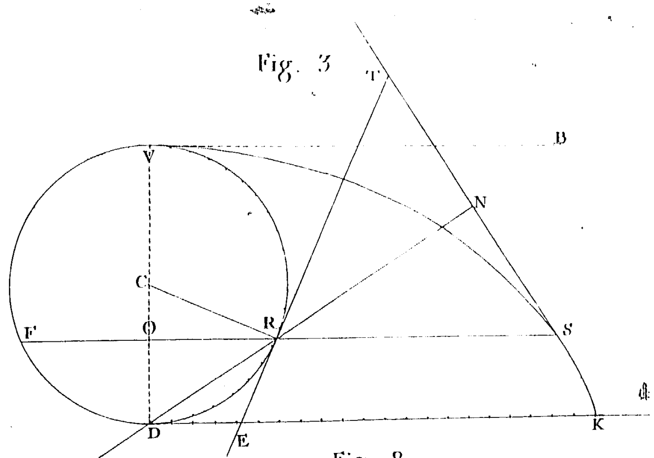


Fig. 7

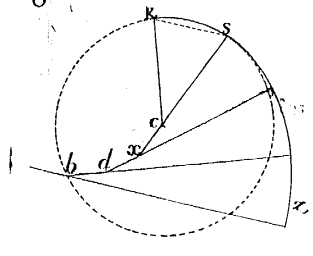
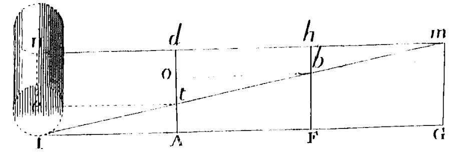


Fig. 8



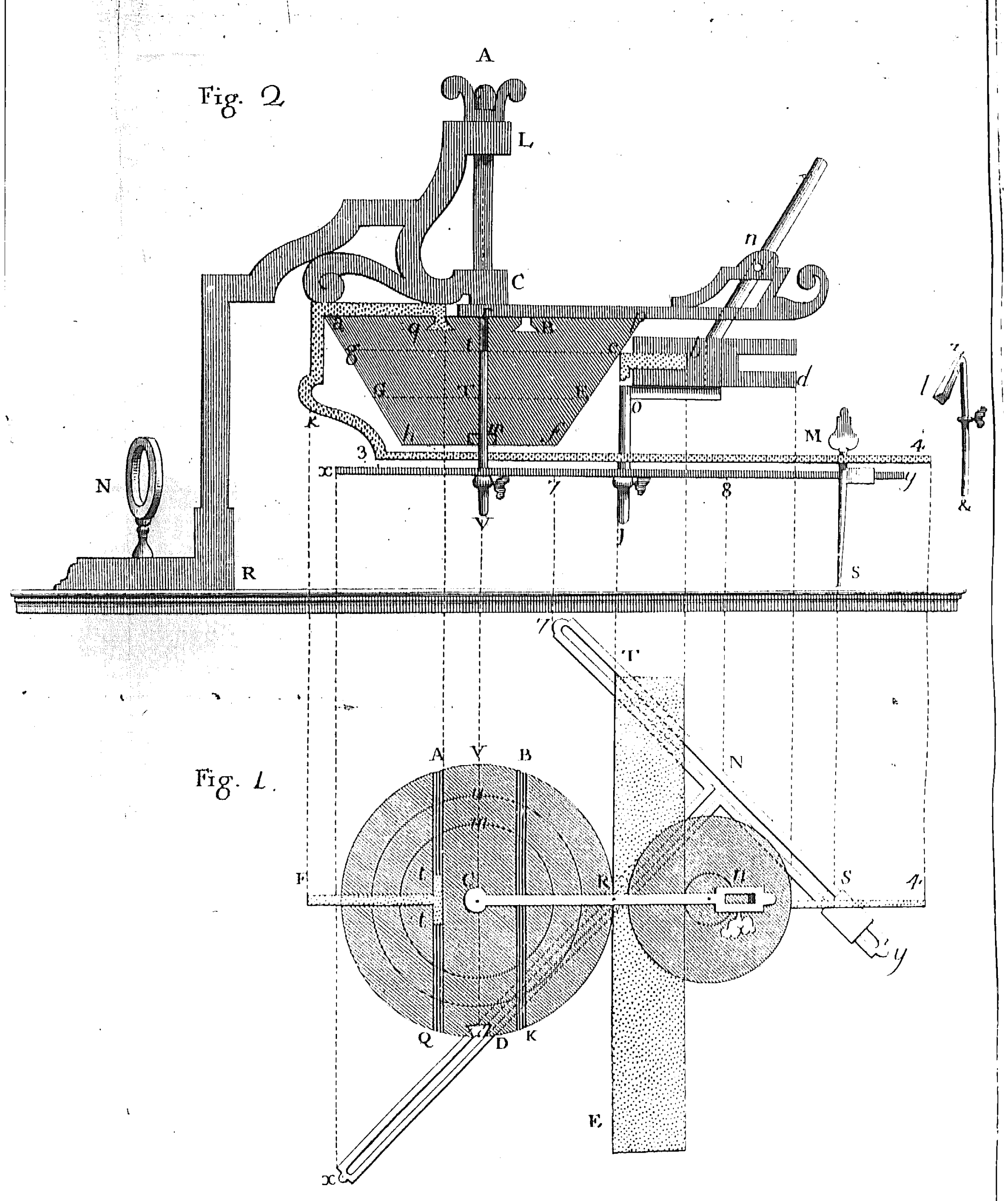


Fig. 2
Fig. 1.

Fig. 1

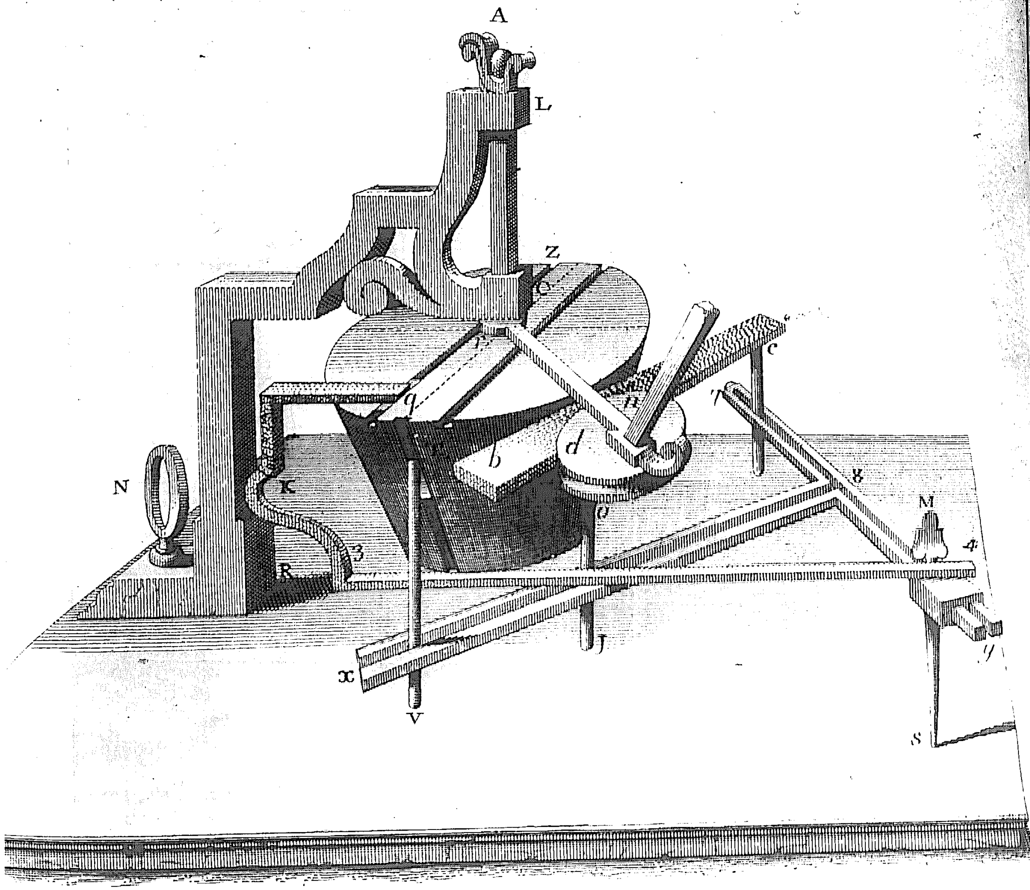


Fig. 3

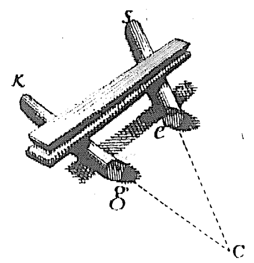


Fig. 2

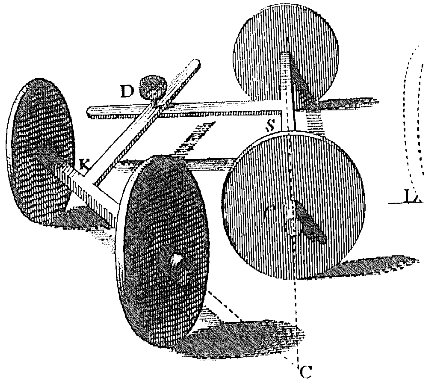
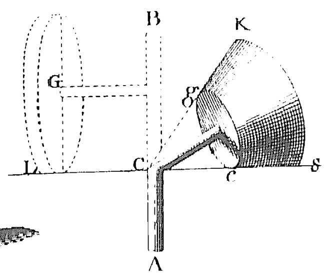


Fig. 4



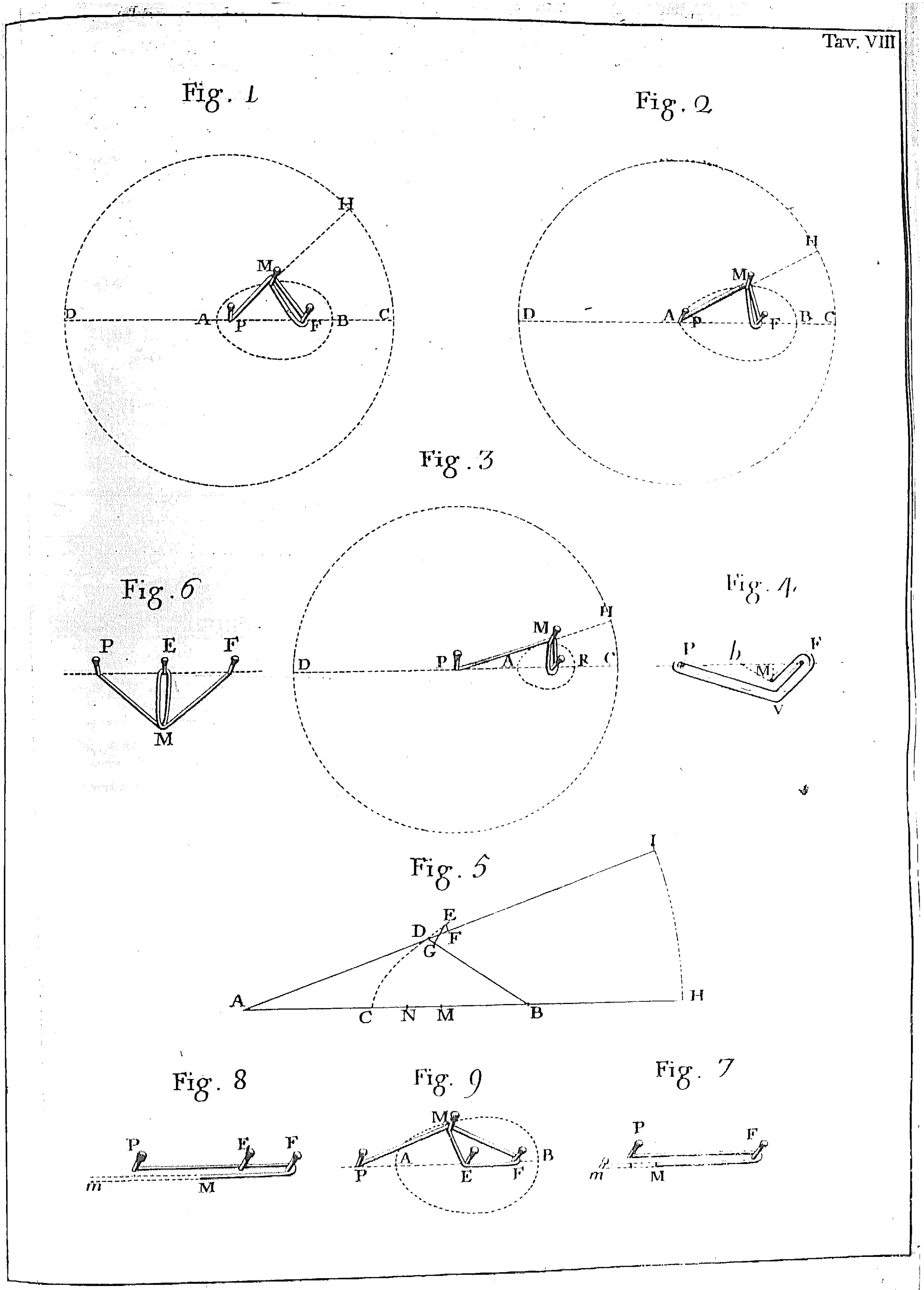

Tav. VIII
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9

Fig. 1

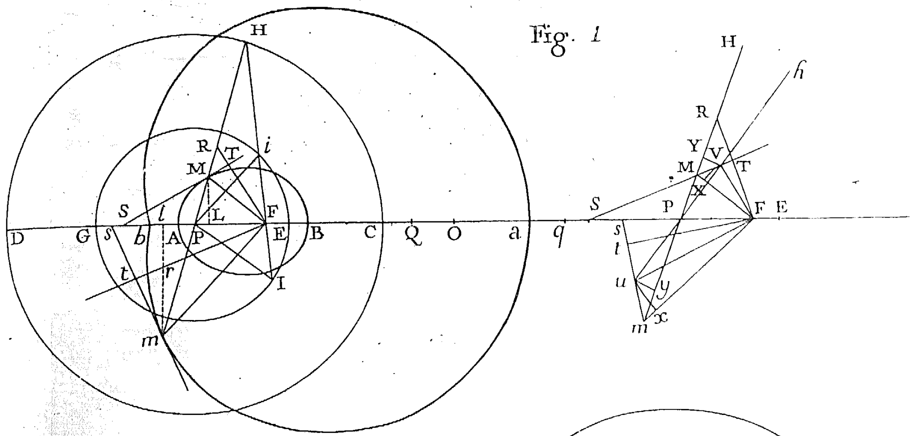


Fig. 2

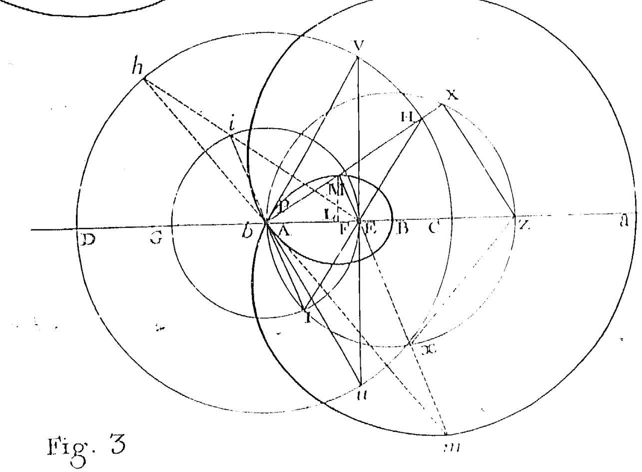


Fig. 3

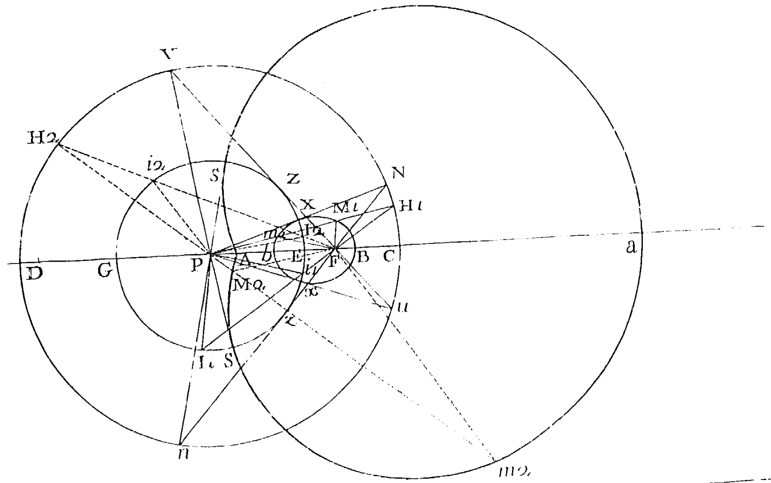


Fig. 1

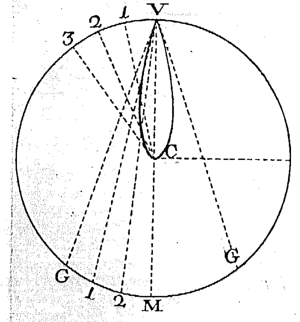


Fig. 2

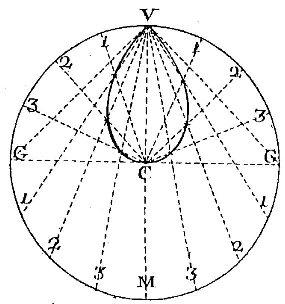


Fig. 3

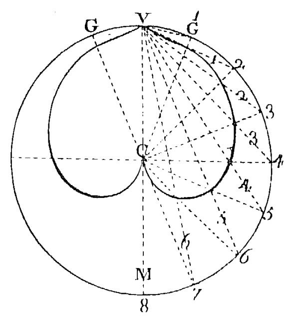


Fig. 4

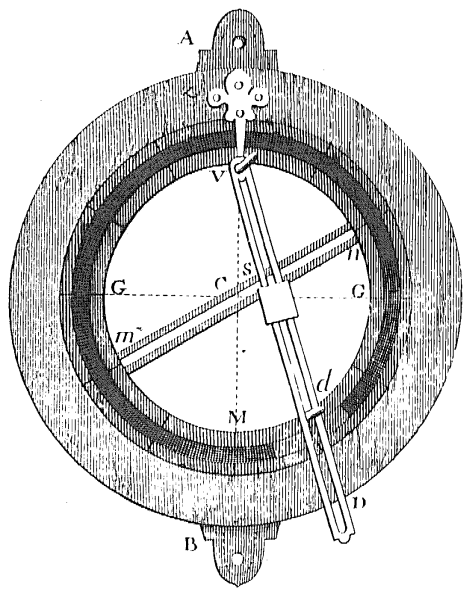


Fig. 5

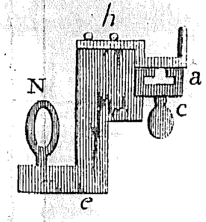


Fig. 6

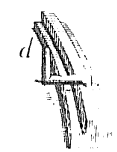


Fig. 7

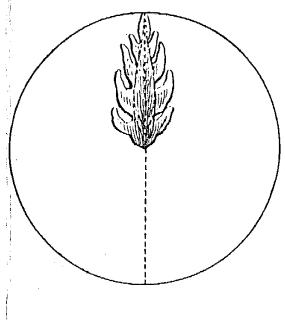


Fig. 8

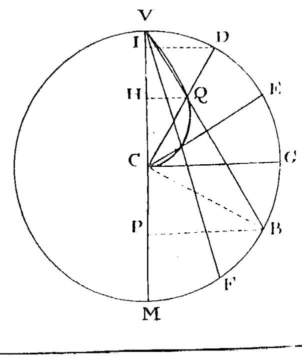
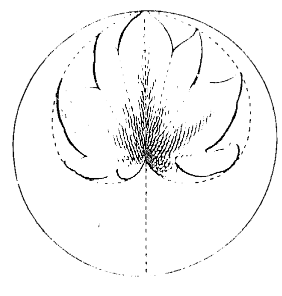


Fig. 9



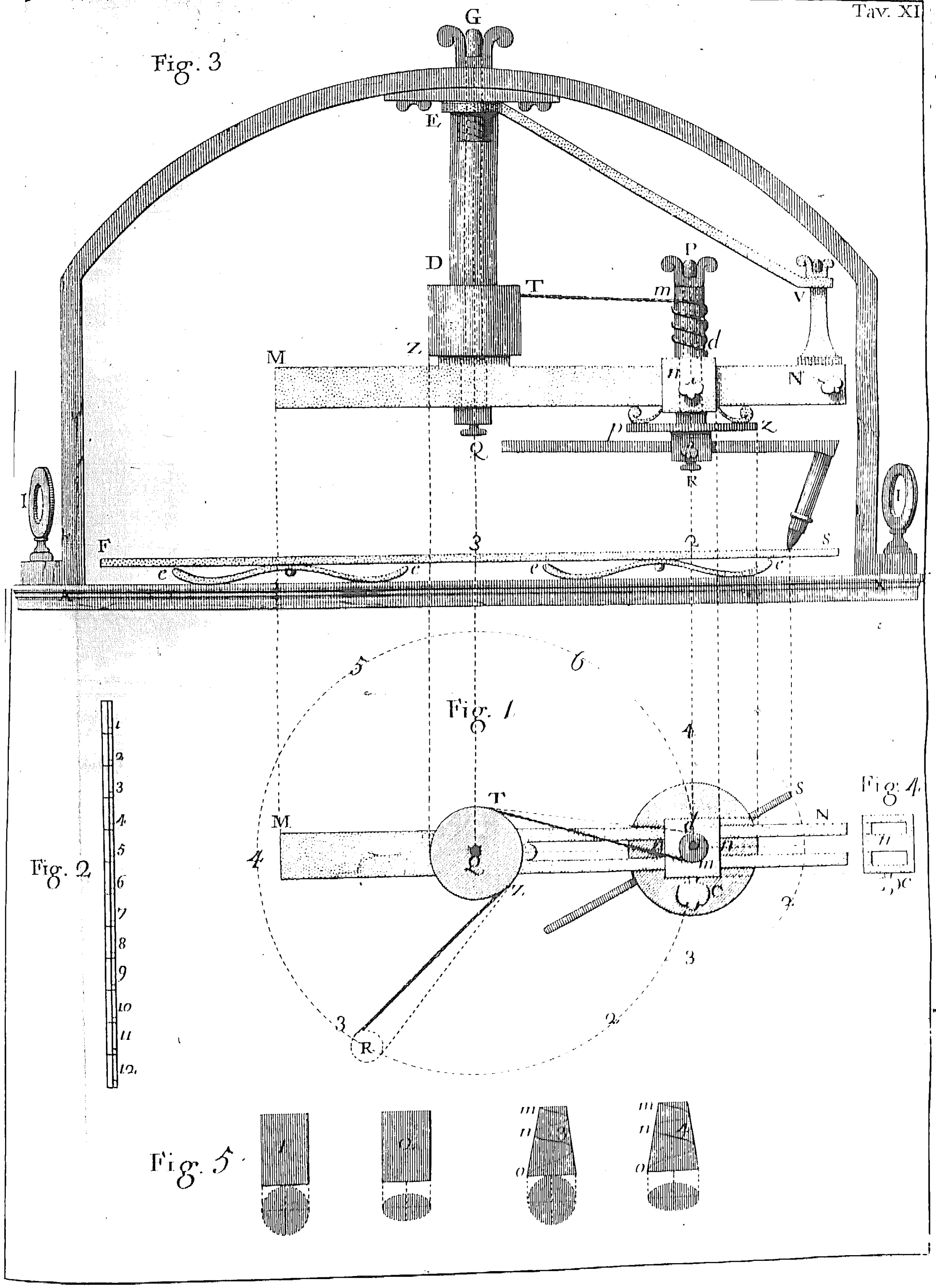
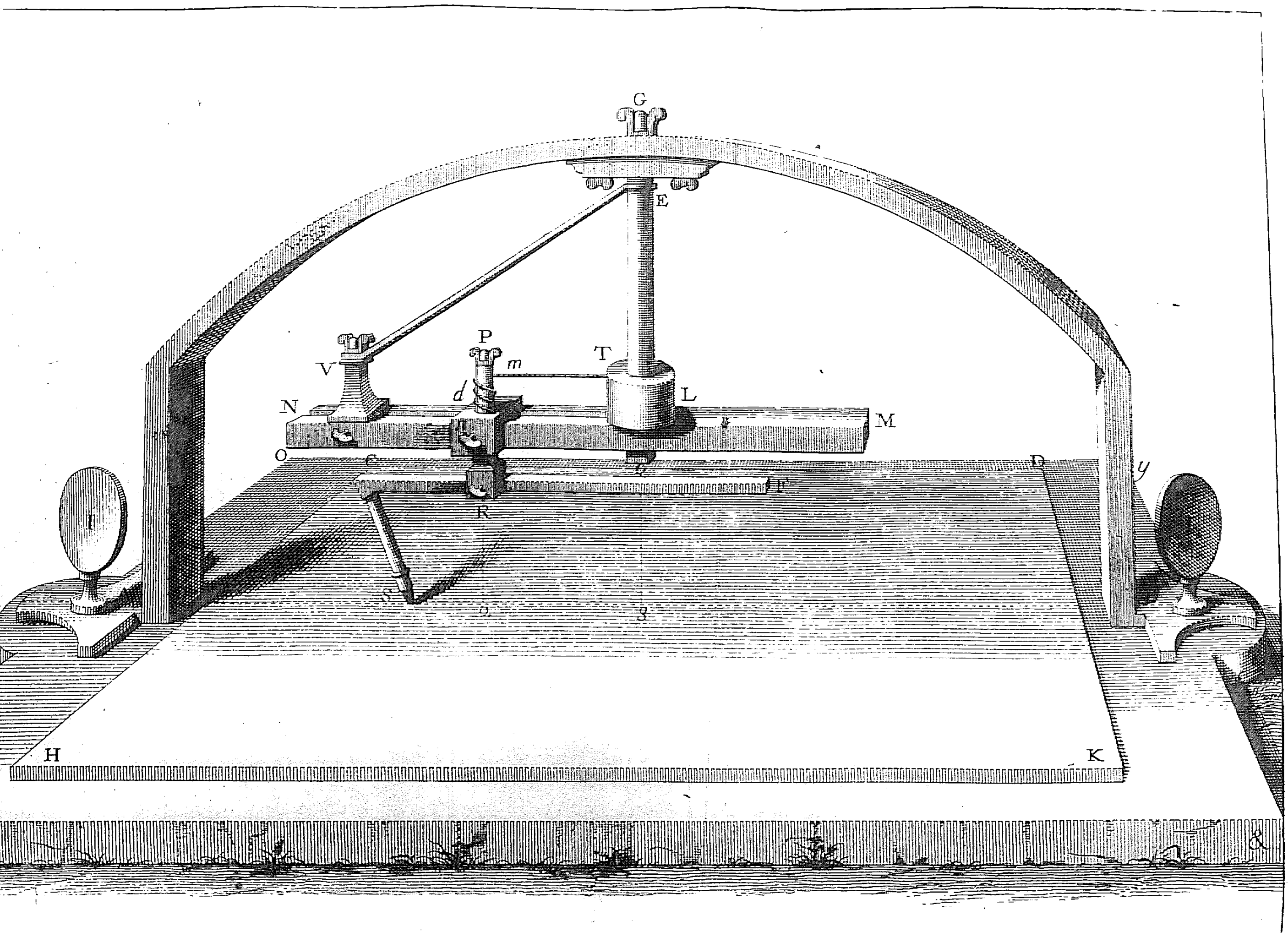


Fig. 3
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 5

Tav. XII



Tav. XIII

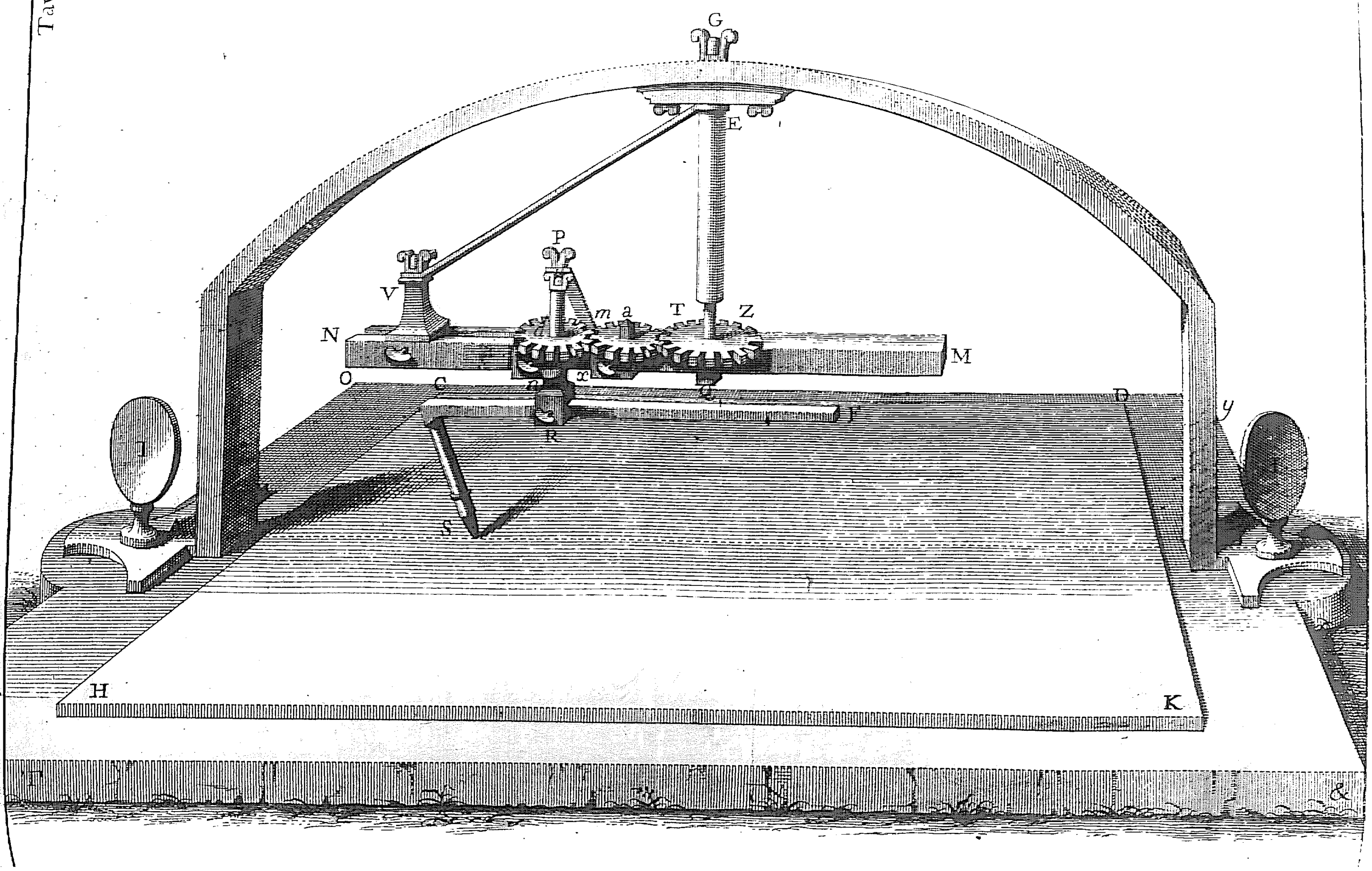


Fig. 1

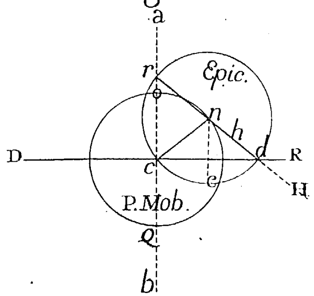


Fig. 2

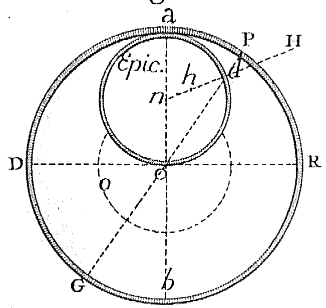


Fig. 3

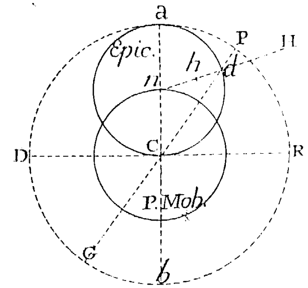


Fig. 4

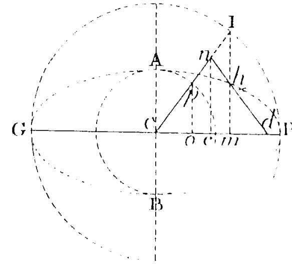


Fig. 5

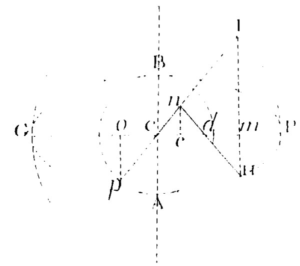


Fig. 6

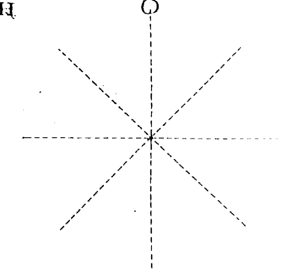


Fig. 7

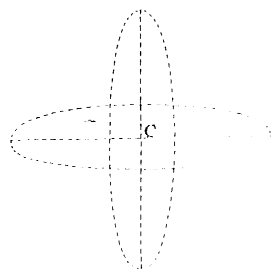


Fig. 8

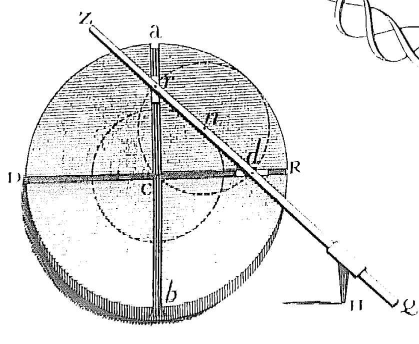


Fig. 9

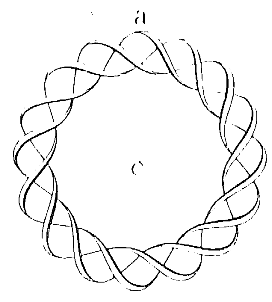


Fig. 1

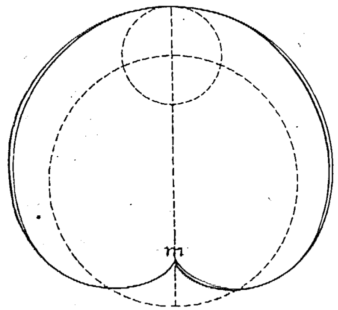


Fig. 2

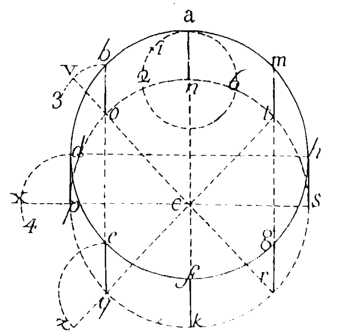


Fig. 3

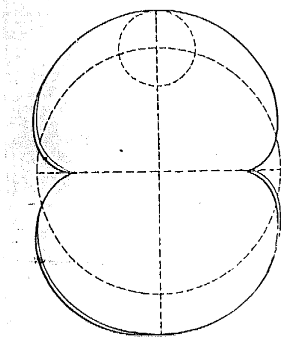


Fig. 4

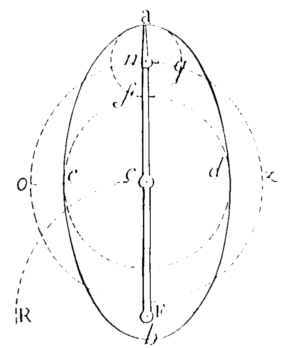


Fig. 5

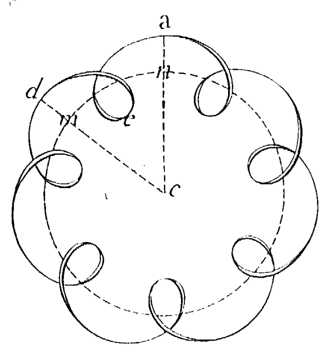
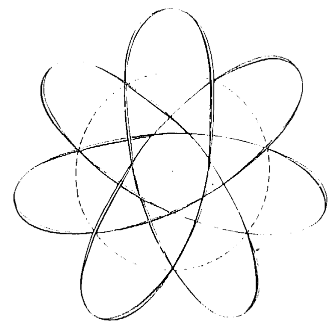


Fig. 6



Tav. XVI

Fig. 7

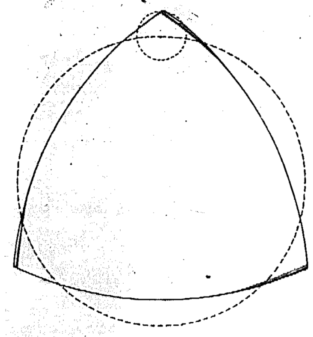


Fig. 8

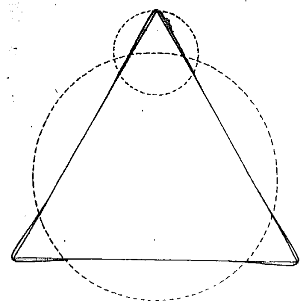


Fig. 9

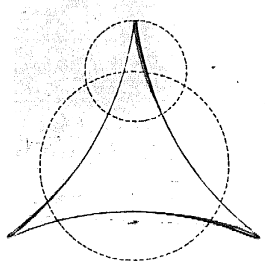


Fig. 10

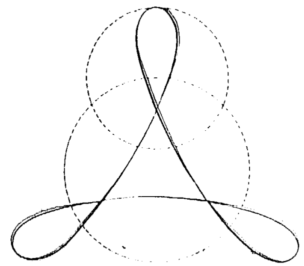


Fig. 11

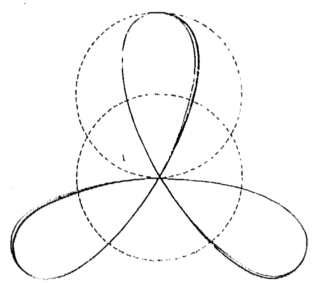
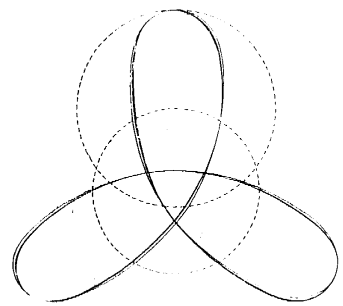


Fig. 12



Tav. XVII

Fig. 13

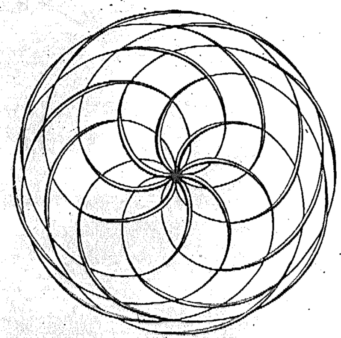


Fig. 14

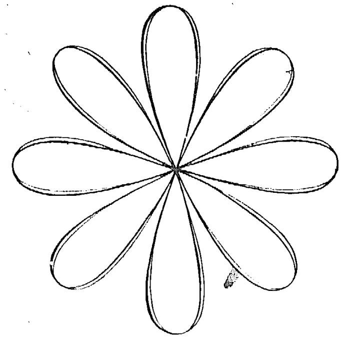


Fig. 15

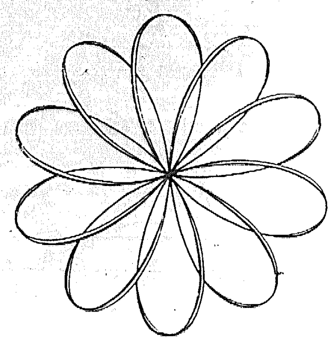


Fig. 16

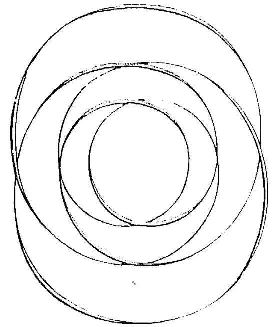


Fig. 17

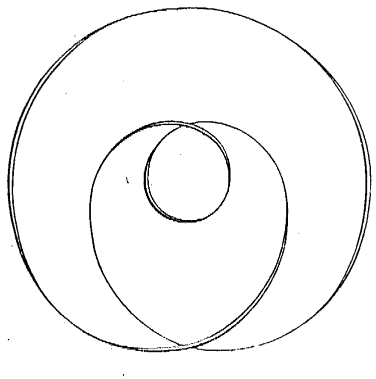


Fig. 18

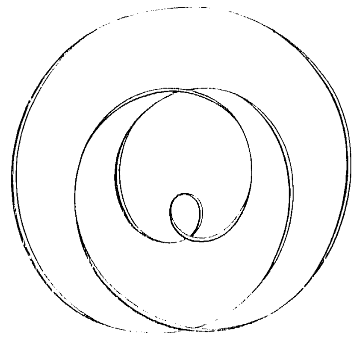


Fig. 2 Fig. 1 Fig. 3

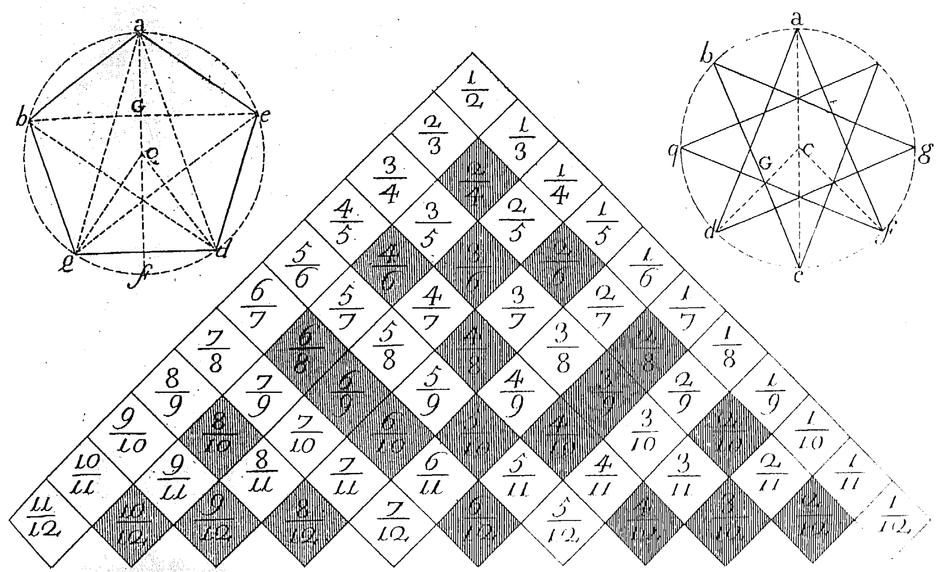


Fig. 4

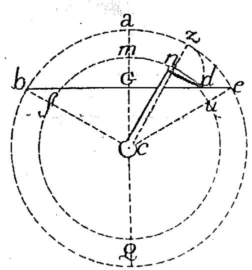


Fig. 5

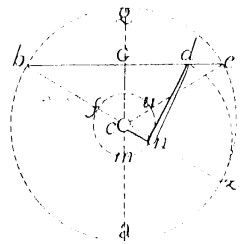


Fig. 6

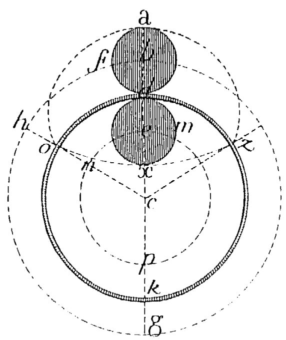


Fig. 7

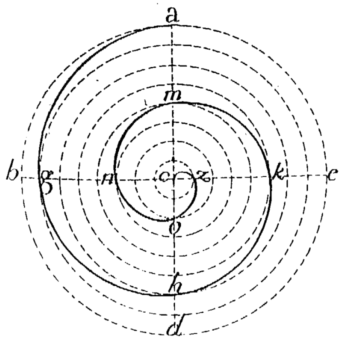


Fig. 8

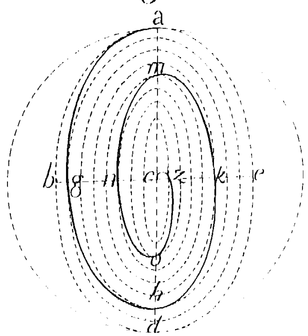


Fig. 1

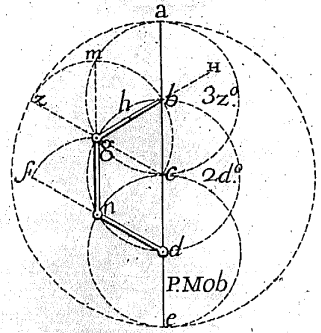


Fig. 2

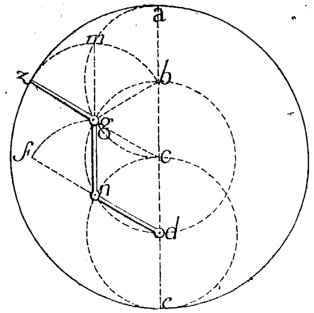


Fig. 3

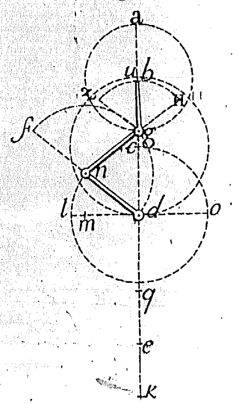


Fig. 4

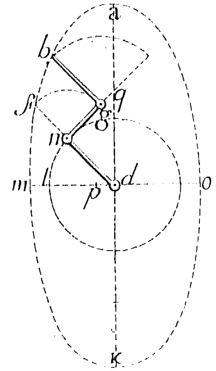


Fig. 5

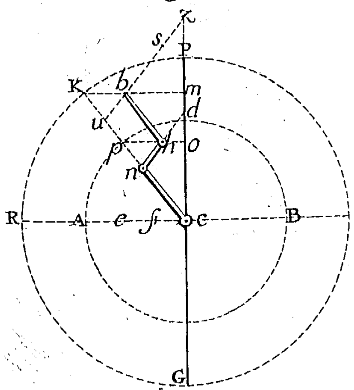


Fig. 6

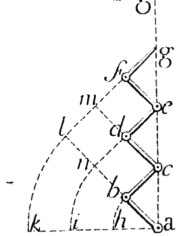


Fig. 7

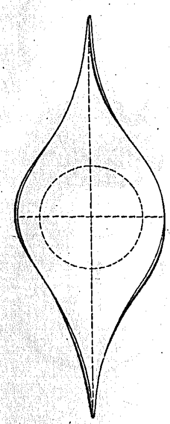


Fig. 8

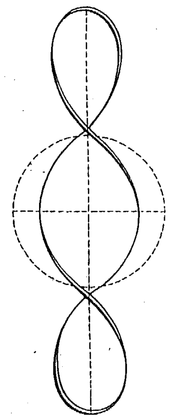


Fig. 9

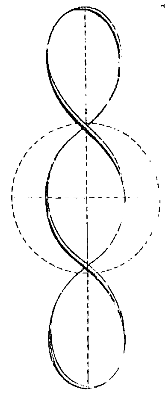


Fig. 10

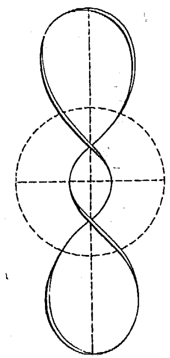


Fig. 11

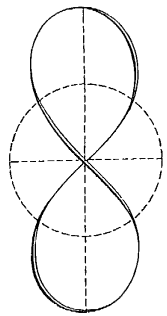


Fig. 12

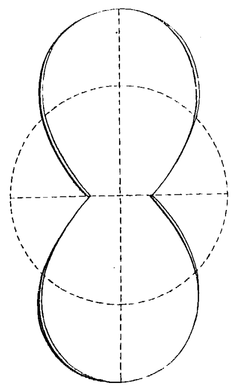


Fig. 13

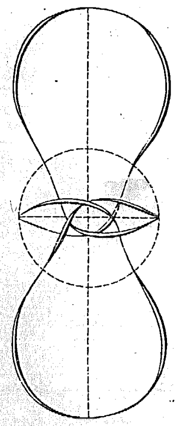


Fig. 14

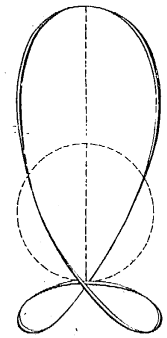


Fig. 15

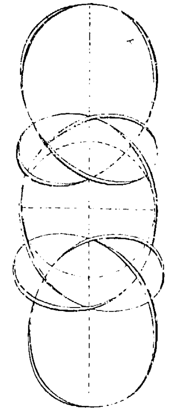


Fig. 16

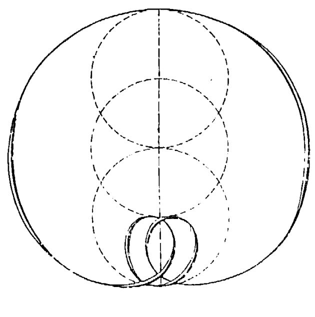


Fig. 17

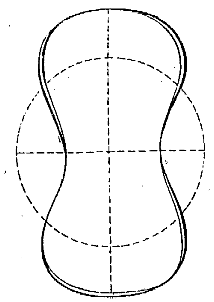


Fig. 18

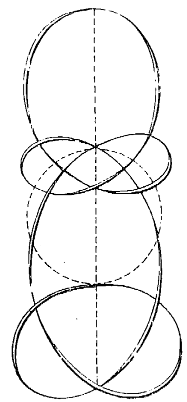


Fig. 19

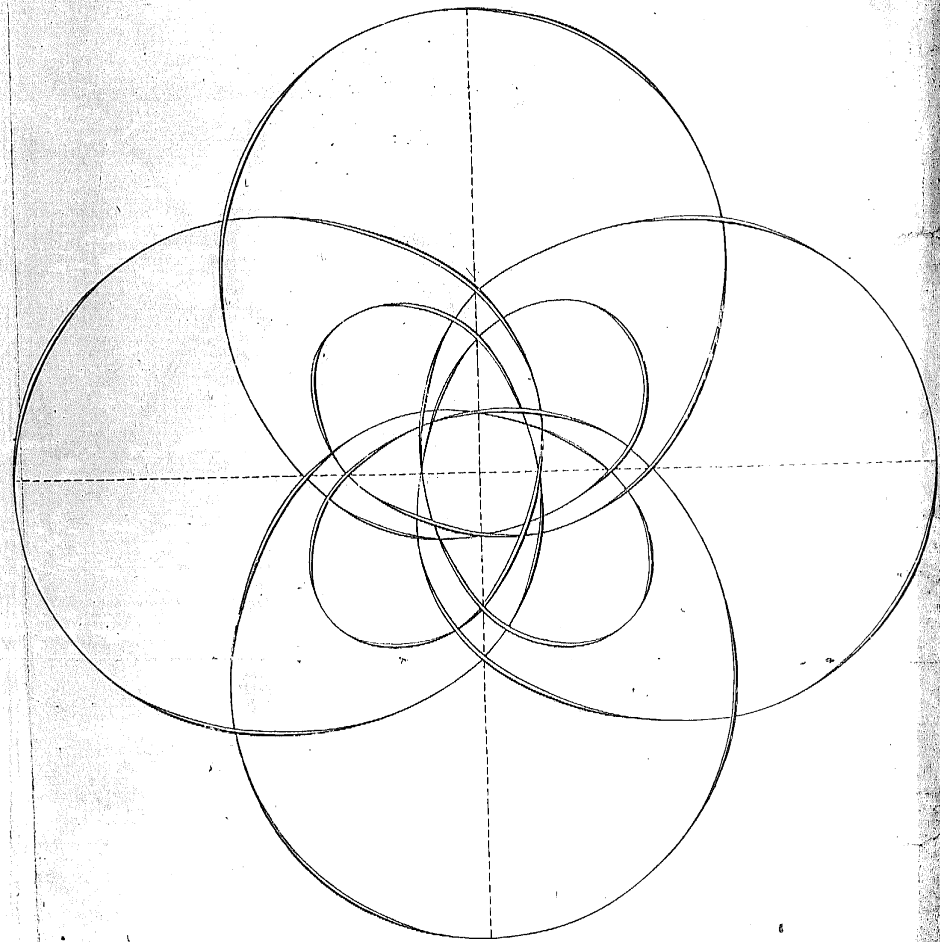


Fig. 3

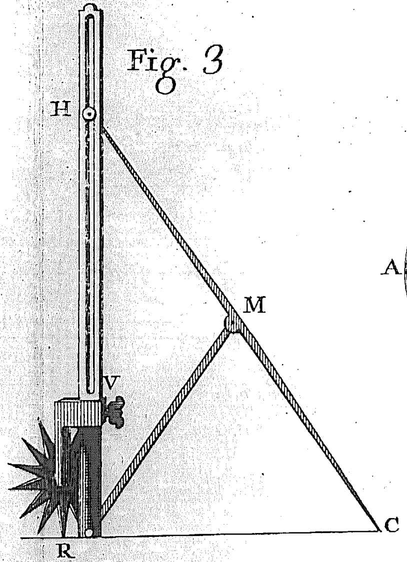


Fig. 4

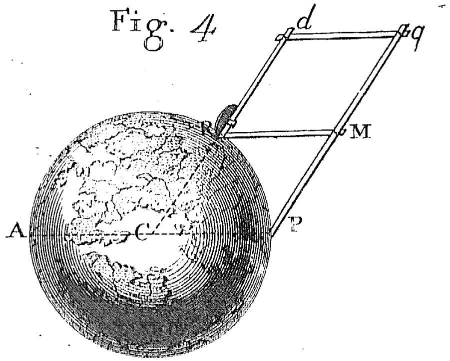


Fig. 1

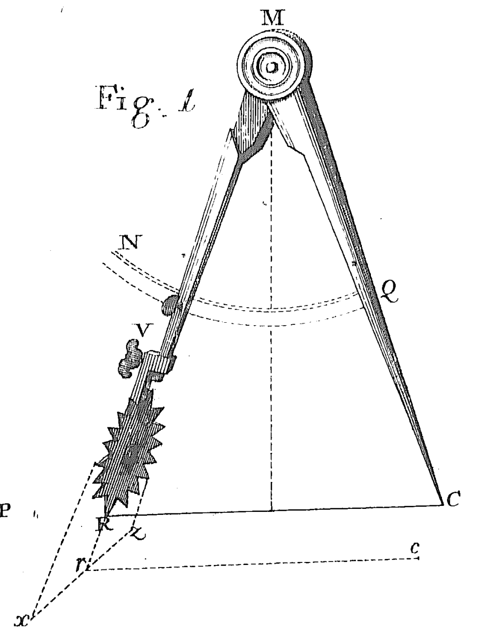
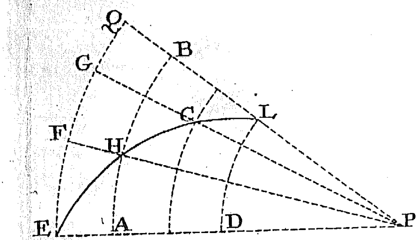
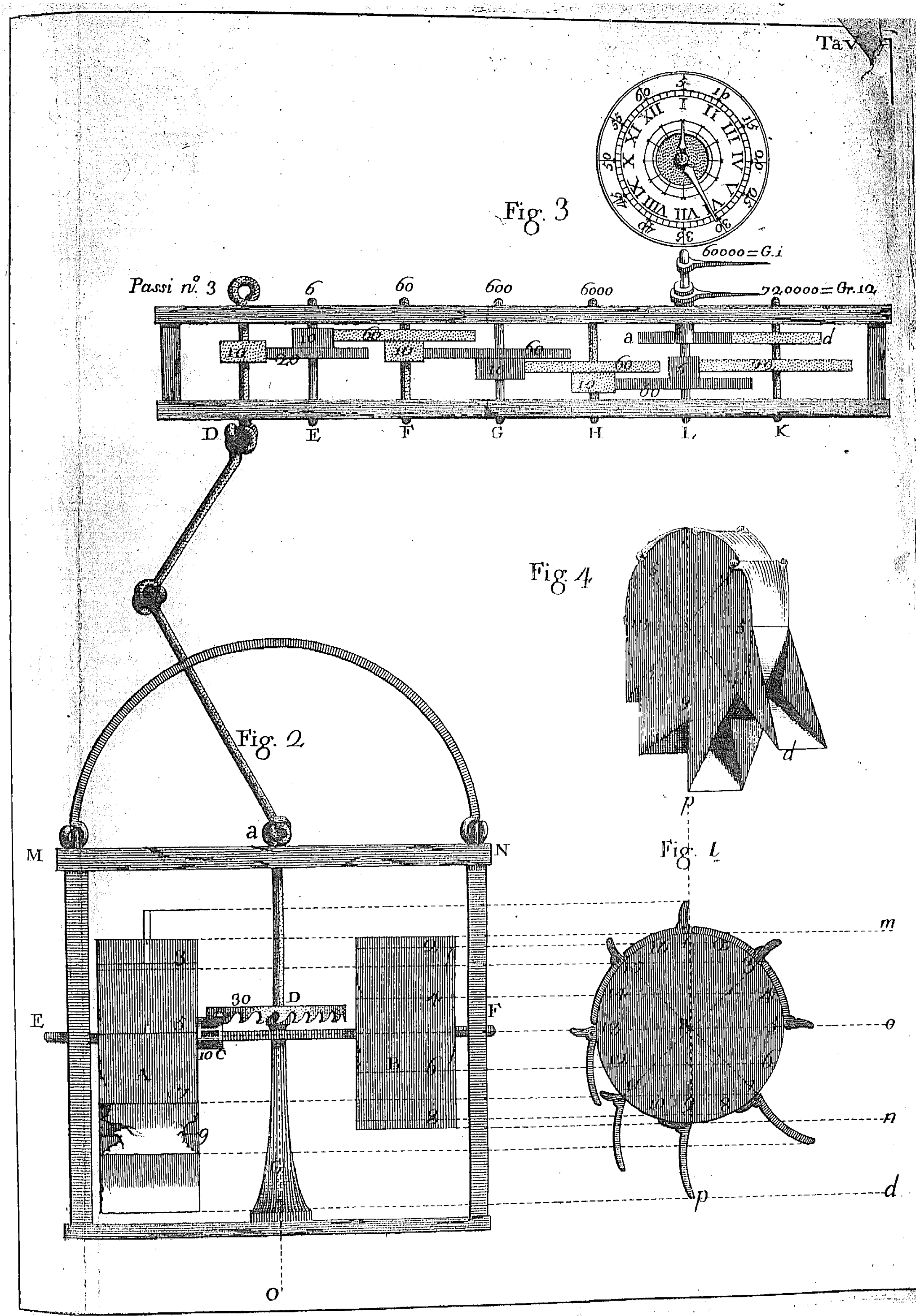
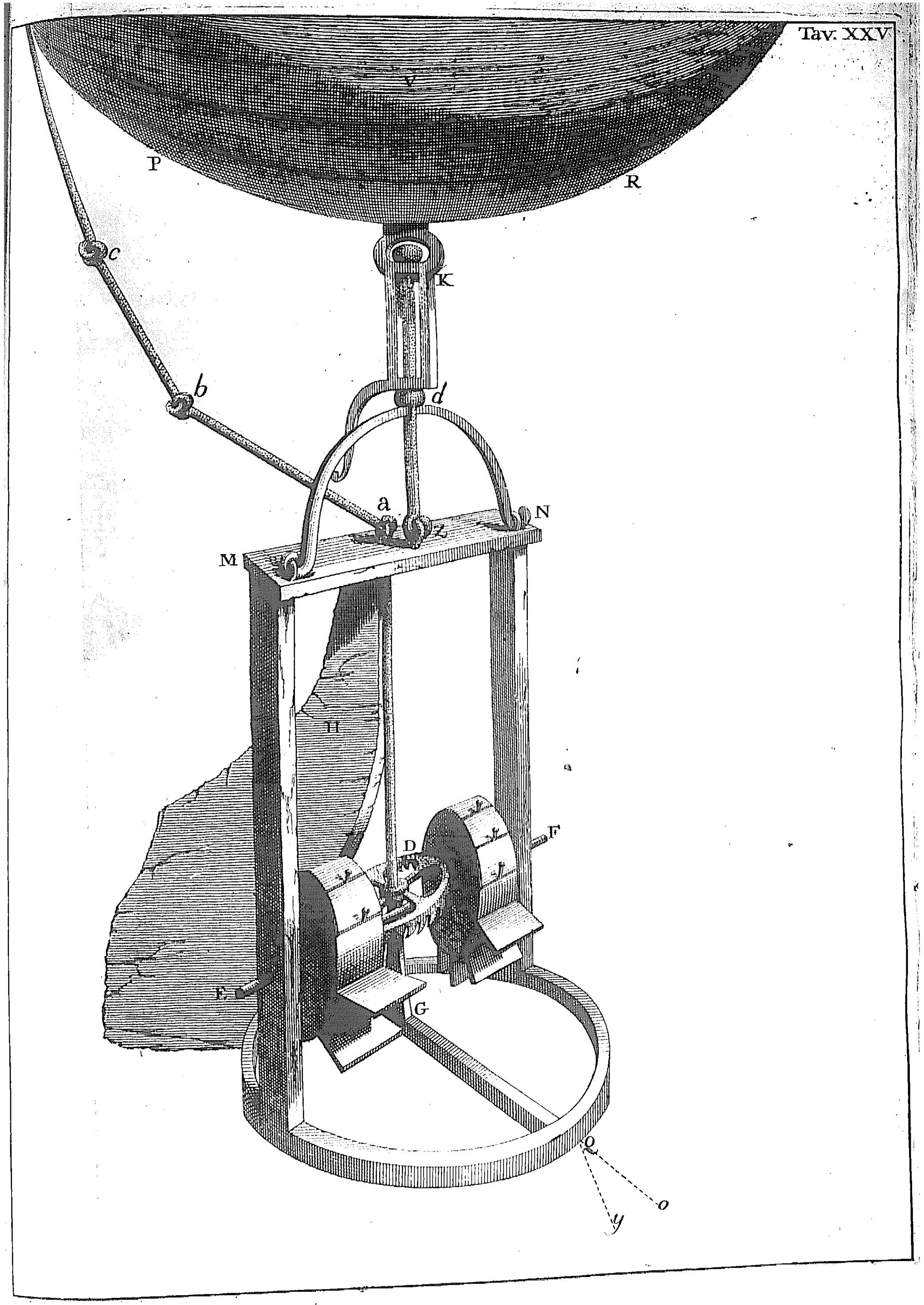


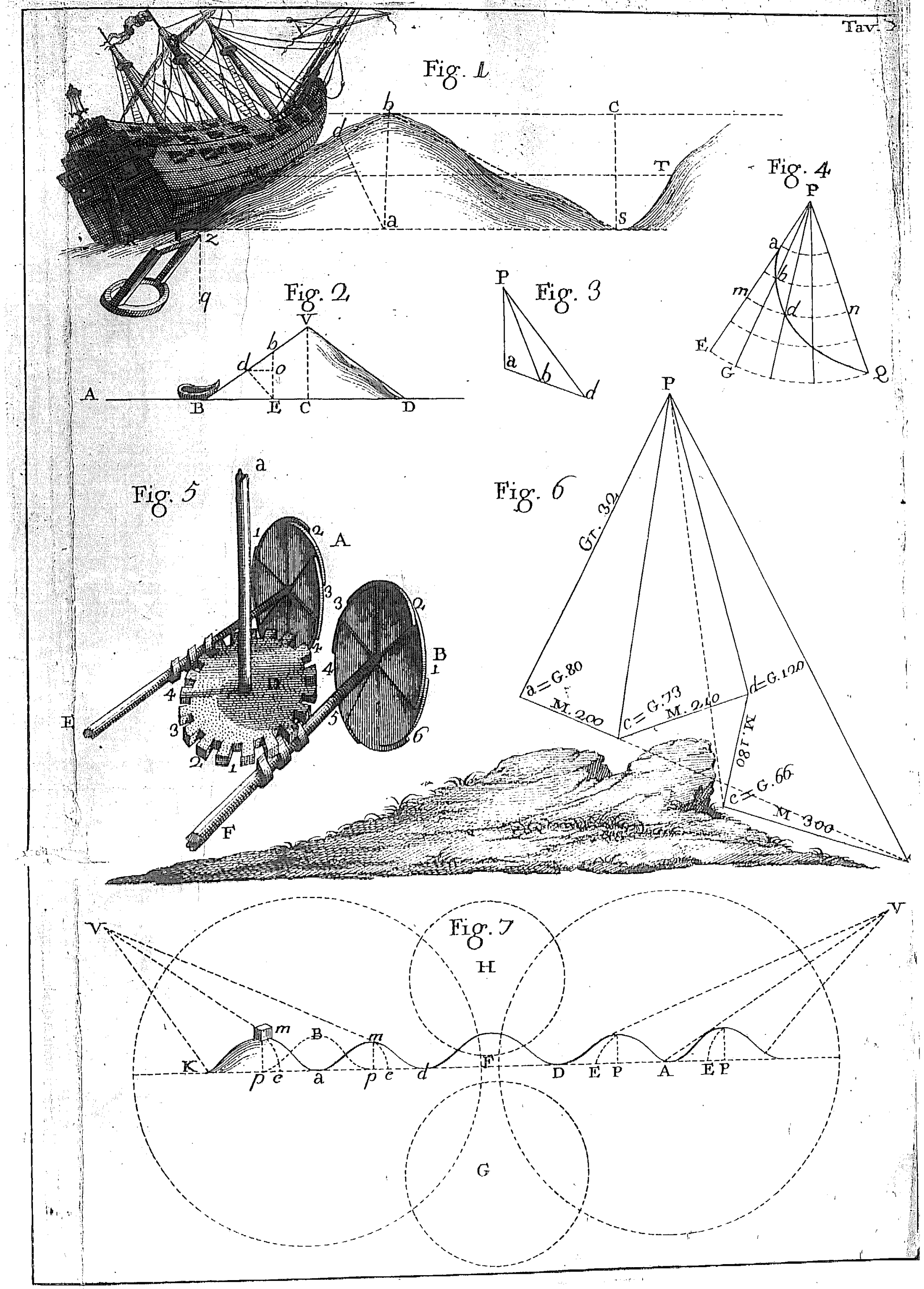
Fig. 2




Tav.
Fig. 3
60000=G.1
720000=Gr.10
Passi nº 3
6
60
600
6000
D
E
F
G
H
L
K
Fig. 4
Fig. 2
a
M
N
E
F
30
D
10 C
A
B
Fig. 1
m
o
n
d
p
O

Tav. XXV





Tav.
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Gr. 32
a=G.80
M. 200
C=G.73
M. 240
d=G.100
M. 180
c=G.66
M. 300
Fig. 7

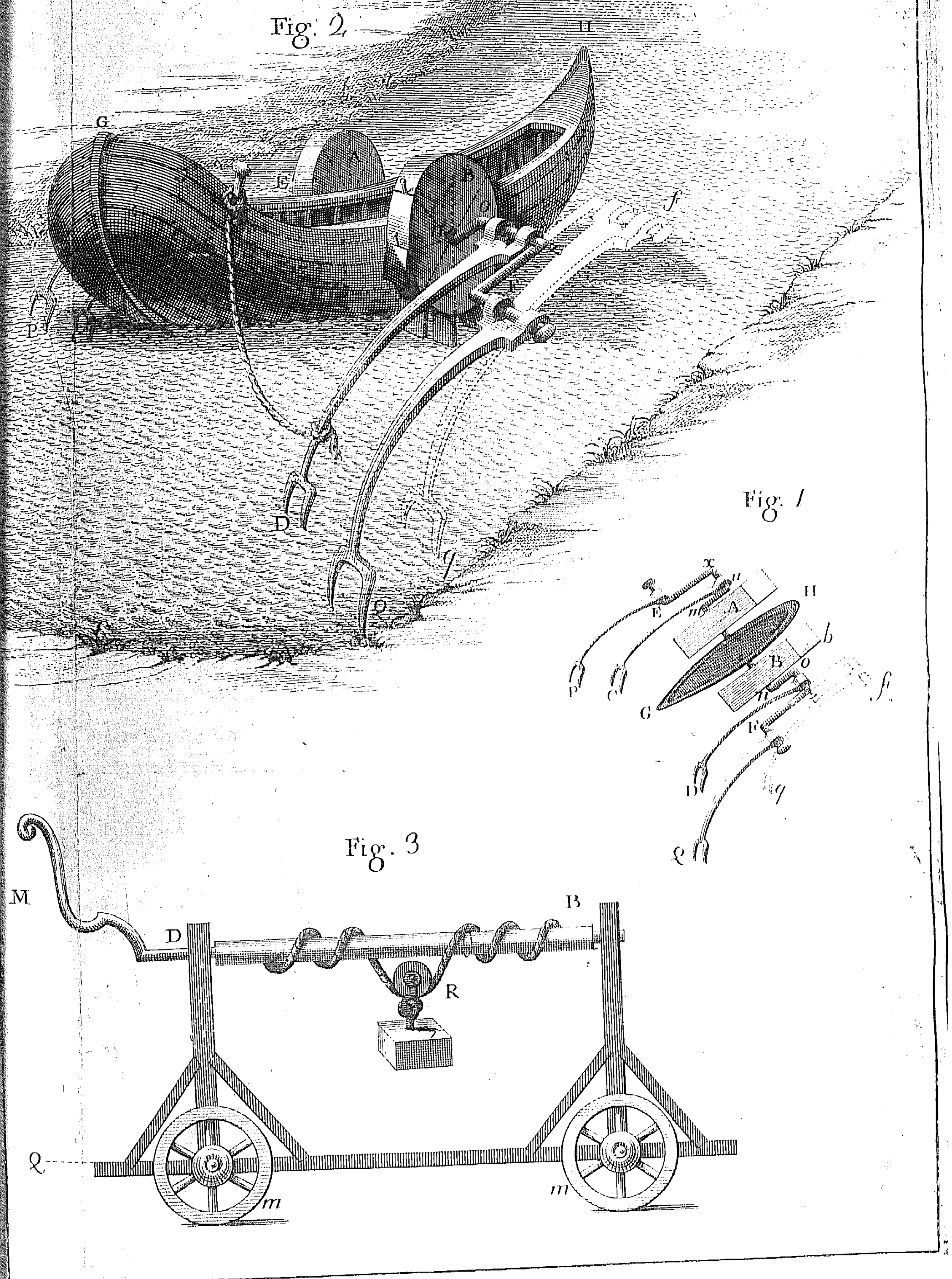


Fig. 2
Fig. 1
Fig. 3
M
D
B
R
Q
m
m

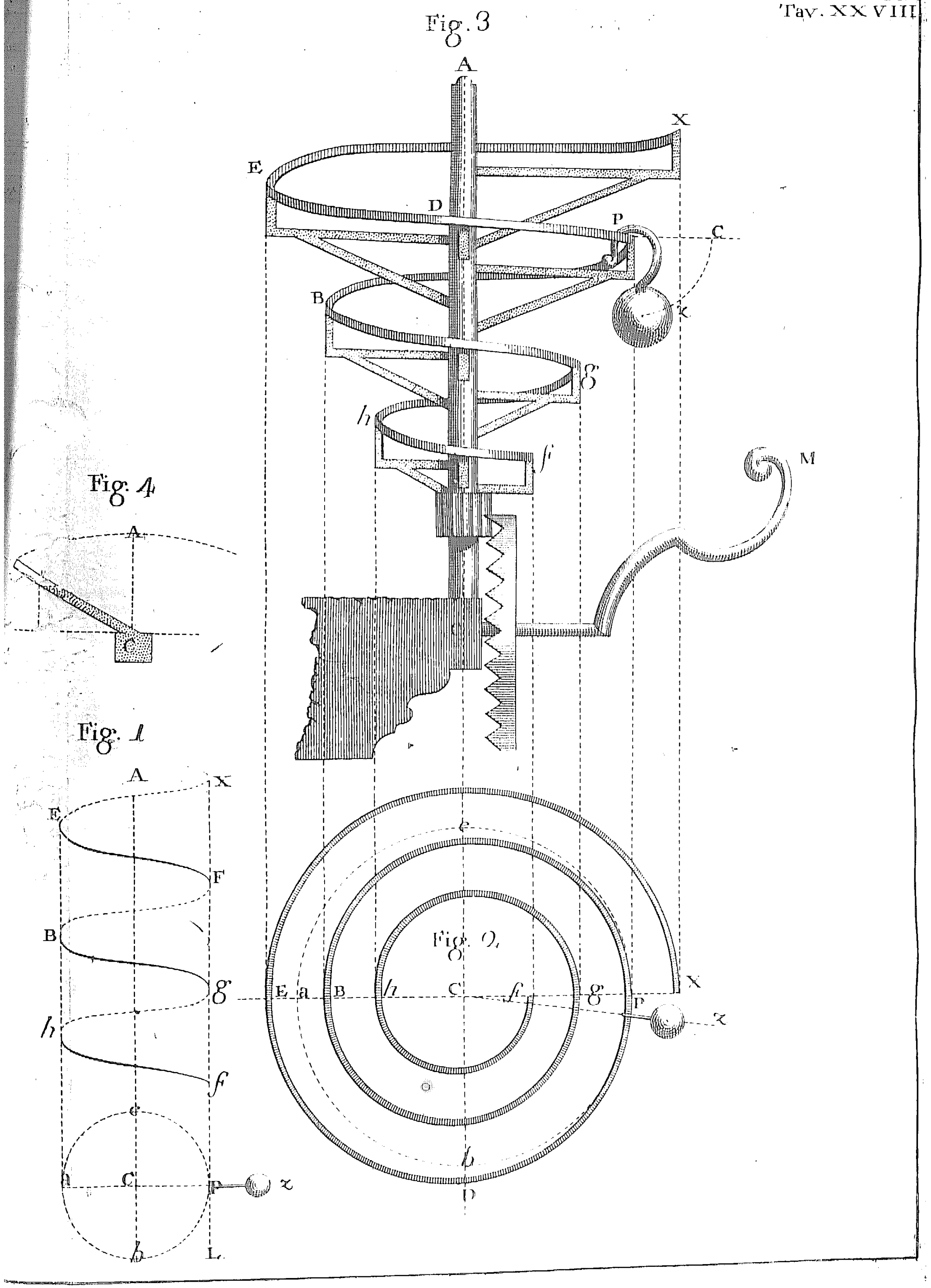


Fig. 3
Fig. 4
Fig. 1
Fig. 2

Fig. 4

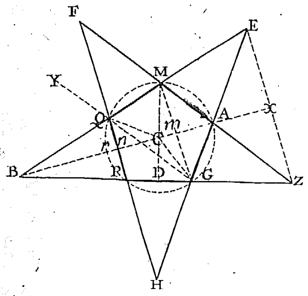


Fig. 5

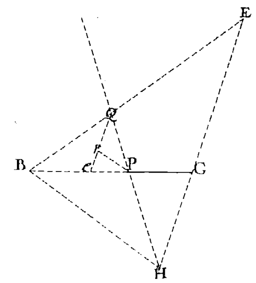


Fig. 3

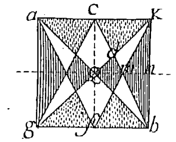


Fig. 6

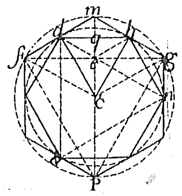


Fig. 1

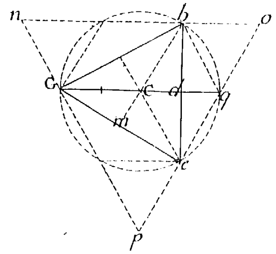


Fig. 2

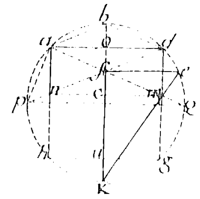


Fig. 7

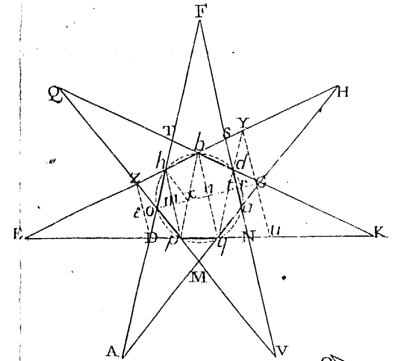


Fig. 8

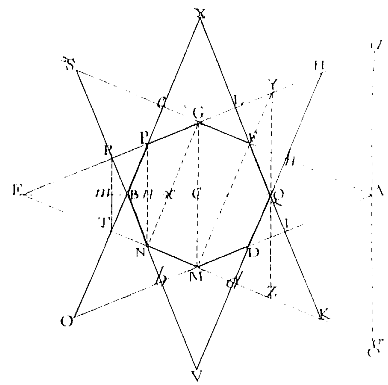


Fig. 9

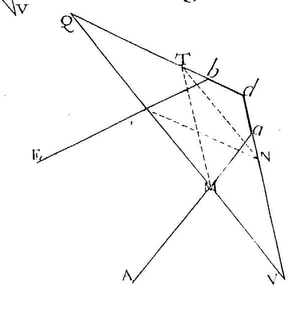


Fig. 10

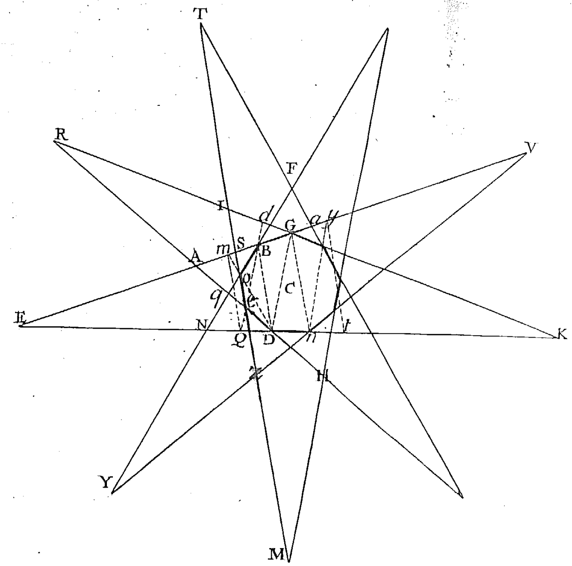


Fig. 11

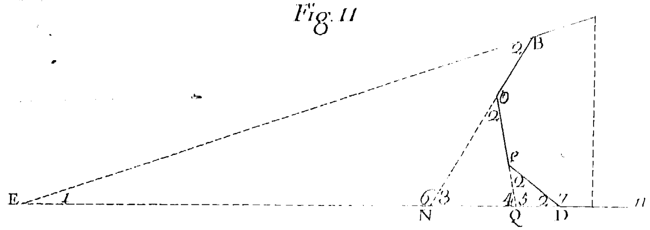


Fig. 12

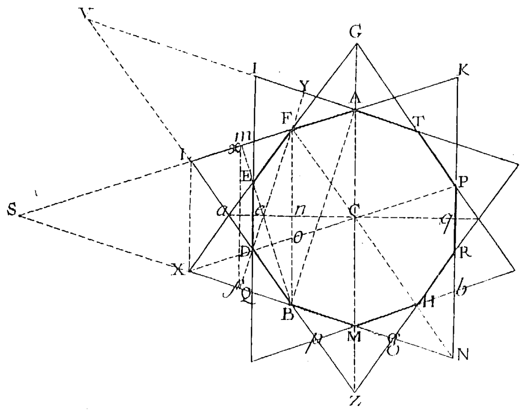


Fig. 13

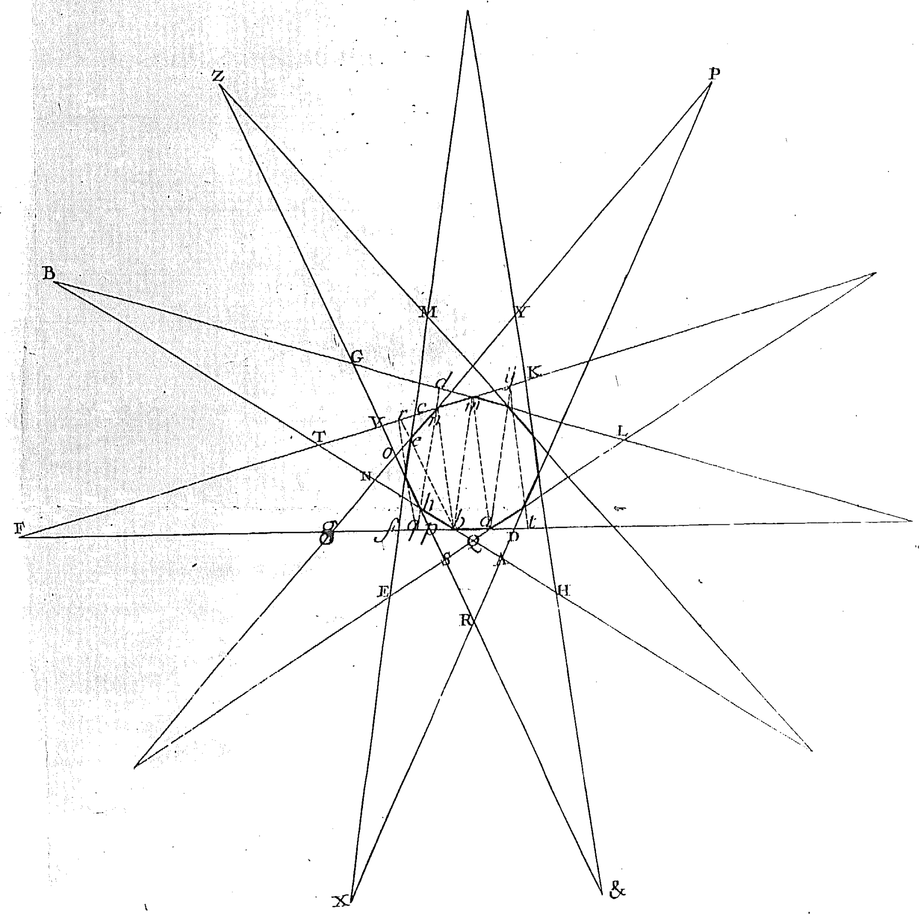


Fig. 14

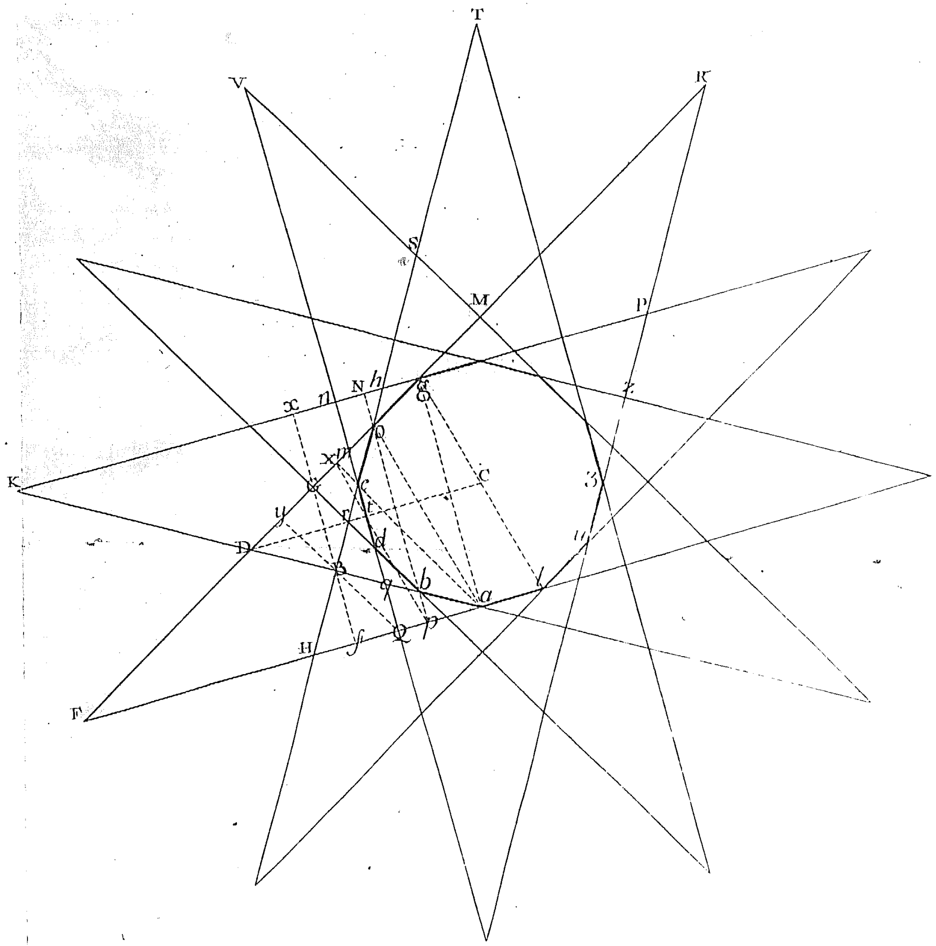


Fig. 15

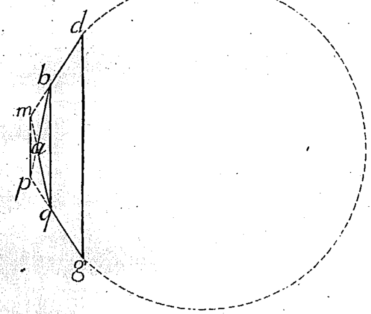


Fig. 16

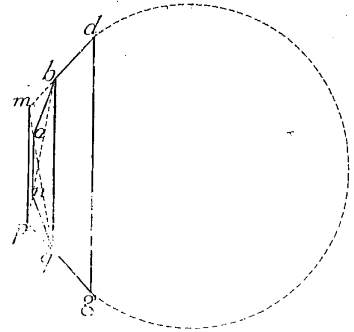


Fig. 17

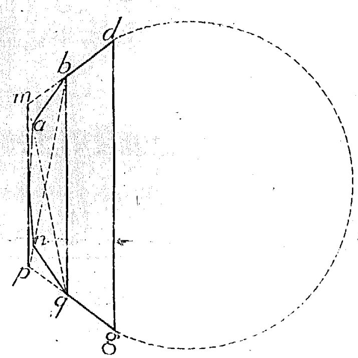


Fig. 18

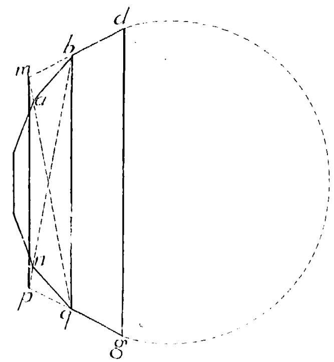


Fig. 19

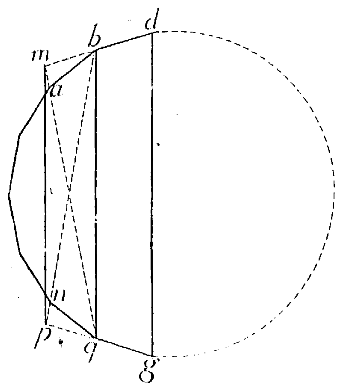


Fig. 20

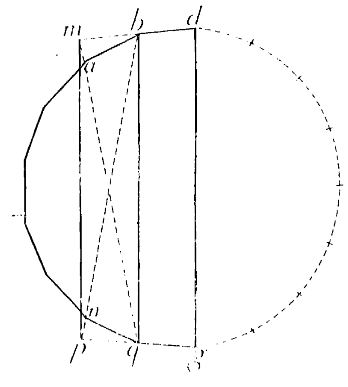


Fig. 21