PROBLEMATA GEOMETRICA SEXAGINTA.

Circà Conos, Sphæras, Superficies Conicas, Sphæricasquè præcipuè versantia.

A F. STEPHANO ANGELI VENETO,

Ordinis Jesuatorum S. Hieronymi, in Veneta Prouincia Definitore Prouinciali, elaborata.

CVM PRIVILEGIO.

VENETIIS, MDCLVIII.

Apud Iohannem La Noù.

DE CONSENSV SVPERIORVM.

Illustrissimo & Excellentissimo

D. D.

MARCO ANTONIO,

Illustrissimisque

ANTONIO, ac LAVRENTIO

Fratribus Corrarijs.

FR. STEPHANVS ANGELI,

Iesuatorum Ordinis in Veneta Prouincia Definitor Prouincialis P. P. P.

EX Geometrica arbore hos fructus selegi, primogenita sanè laborum meorum indoles, ac elucubratio, Vestræ benignitatis, Illustrissimi Proceres, Numini, ac Tutamini, dicandos fore decreui. Hæ etenim feliciter exculti, erupuerunt in germina, & vsque ad maturitatis pignora succreuere. Par in omnes obsequium attraxit animum, nàm æquè meritò præstatis eximij. Nec Paris ille qui potiora diuinitatis insignia discreuit, cuinam deberetur oblatio, maiestatis, probitatis, ac Virtutis singulum ex vobis, magisquè dignum specimen seligeret. Ergo singularis deuictissimæ meæ propensionis, vestrum stemmati, ac Nomi-

ni pariter hæc arrha sacretur. Beneficijs adstringi, an angustius, vel augustius dixerim, nequibam. Trina me humanitatis vix deuixit. Vos, qui gratiarum munus triplex, ac numerum refertis, allexistis suauiter calamum, compullistis ingenium, vt opellulæ huius verticem vestro Nomine, & titulis coronarem. Addidit ad hæc calcaria, quod semper vobis studium impendi. Vobis itaquè, qui inter cælicos Veneti Emporij Heroas auitæ Nobilitatis radijs coruscatis, & indiuiduæ præstantiæ fulgetus insignibus, hoc excelsiori omnium omine ductus, primogenitè elaborata monimenta, appendo. Profectò, Nobilissimæ vestrum progeniei Maiestatem, infulatas trabeas, purpuras præclarissimas, quibus honorem auxit ANTONIVS ille CORRARIVS, vitæ sanctimonia, magis quam cognomento Eminentissimus, morum suauitate, & innocentia, potius quam Nomine FLORIDVS: Qui Iesuati amictus candorem sua purpura decorauit, vt proindè non rectè Rosa superbiat Veneris cruoribus depicta in purpuream: summum, ac Diuinum in terris Imperium, cuius, in GREGORIO XII. Pontificatu, ac præclarissimis operibus verè Maximo, diademate semel exornastis comas, sed millies promeruistis decus, perterrita mei venerabatur seruitus, tenuisquè muneris oblatam vilitatem aspernabatur animus. Sed timorem correxit impauidus; ditauit namquè munusculi inopiam summa vouentis deuotio, quæ Bruti illius quondam alumna, siluestribus tectum inuolucris, pretiosiorem exhibuit venerabundi affectus emixum. Excipite igitur hilares hoc qualecumque Votum, vestrumque dignum; cùm nec minimum spondeat, qui totum promit quod habet. Parcant vobis Parcæ, qui æternitati viuitis.

AD

AD
LECTOREM.

LIBELLVM hunc Geometricum tibi propono, Benigne Lector. Versatur equidem circa res, ætate nostra, neglectas; at si alius, quam Geometricus extaret, nequaquam his temporibus adeo bonis artibus aduersis illum tibi exhiberem. Haud ignoro, ferreo hoc sæculo, quo Mars, & Bellona vbiq; triumphant, exigi non animi, sed corporis vires. Verùm solius Mathesis, inter alias facultates, peculiare agnoscitur, non minus paci, quam bello inseruire. Forsitan conclamabis. Quid boni in reb. tam vilibus? in meris nugis? in tuis Problematibus. Fateor equidem Problemata hoc Libello comprehensa, nugas esse, sed nugas Geometricas, proindeq. rebus etiam in alijs facultatibus eminentibus, nequaquam post habendas. Etenim Mathesi euenit, quod in nobiliori, perfectiorique specie, respectu ignobilioris agnoscitur. Ignobilius enim inuiduum speciei superioris, præstat perfe-

ctiori

ctiori speciei inferioris. Sic Geometria, adeo super cæteras humanas facultates sua extollitur certitudine, vt Geometricę nugę à Viris, qui propriè Viris, & non fues sint, margaritæ pretiosæ censeantur. Hæc conscribo putans aliquos meæ indolis Geometras forsitan adinueniri. Etenim res Geometricas sic esurio, vt libenter perlegam ea omnia, quæ Geometriam aliqualiter redolent. Sic puto, aliquos faciliter esse reperiendos, qui hæc, quæcumque sint libenter percurrent, obseruentque illud Doctoris gentium pronuntiatum. Omnia probate, quod bonum est tenete. Hæc tibi communico cupiens laborum meorum aliqualiter periculum facere. Etenim, si aliquando mihi compertum erit, hæc tibi haud displicuisse, forsitan alia in non modica quantitate, vel his pulchriora, vel his turpiora, aliquando communicabo.

Verùm antequam opus præcipuum aggrediar, de duobus velem te monitum esse. Primum est; Euclidianorum Elementorum citationes in hoc Libello nunquam afferri. Secundum est; Sectiones per axem in Conis, Sphæris, alijsque solidis, quamuis necessariæ pro solutione Problematum, frequenter, passimque omitti. Causa primi est. Quia cum Problemata hæc circa Conos, Sphæras, Superficies Conicas, Sphæricasque præcipuè versentur, ac proinde supponant Lectorem in doctrinis Apollonij Pergæi, & Archimedis versatum, ipsum multò magis requirunt Euclidis Elementa peroptimè callere. Præterquam quod, cùm ferè nullum verbum proferatur, quòd ab Elementis non dependeat, & attamen omnia loca afferre labor immensus censeatur, malui omnia prætermittere, quàm aliqua dumtaxat adducere. Secundum consimilem causam agnoscit, nimirum hæc conscripta esse pro Lectore aliqualiter perito, cui Sectiones per axem necessariæ, sunt obuiæ. His ergo præmissis, omissisque parergis, ad erga deueniamus. Vale.

FA

FACVLTAS
Reuerendissimi Patris Generalis.

LAVDETVR IESVS CHRISTVS.

OPVS *inscriptum*; Sexaginta Problemata Geometrica, *compositum ab Admodum Reu. P. Stephano de Angelis Veneto professo Nostri Ordinis Iesuatorum, ac in Prouincia Veneta Definitore, concedimus Typis demandari, dummodo habeat necessarias licentias, & approbationes, quæ de iure sunt necessariæ &c. In quorum fidem præsentes manu propria subscripsimus, ac proprio Nostri Officij sigillo muniuimus.*

Datum Brixiæ in Nostro Monasterio Corporis Christi, die quarta Nouembris 1657.

Fr. Antonius Nouellus Gen. Iesuat.

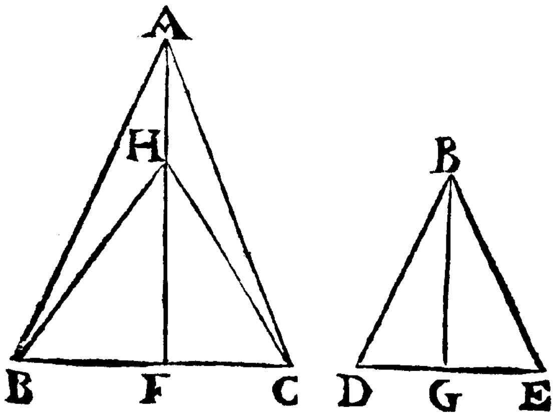
Locus Sigilli.

LEMMA PRIMVM.

PROPOSITIO PRIMA.

Coni habent inter se proportionem compositam ex proportione basium, & altitudinum.

SINT duo coni, BAC, DBE, quorum axes, seù altitudines sint AF, BG. Dico proportionem coni ABC, ad conum BDE, componi ex proportione AF, ad BG, & ex proportione basis BFC, ad basim DGE.



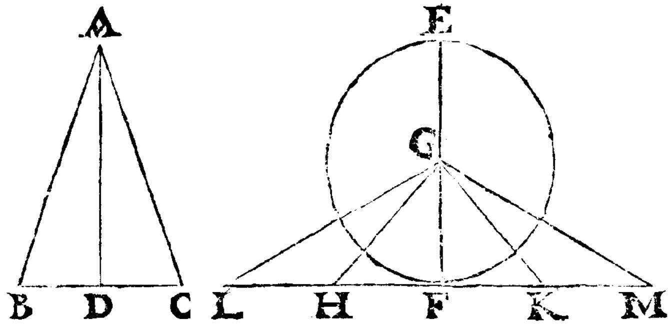
Super basim BC, fiat alius conus, cuius altitudo sit

FH, ęqualis altitudini BG. Iam conus ABC, ad conum BDE, de foris ſumpto cono BHC, habet proportionem compoſitam ex proportione coni ABC, ad conum HBC, & ex proportione coni HBC, ad conum DBE: Sed vt conus ABC, ad conum HBC, ſic (propter eandem baſim BFC,) altitudo AF, ad altitudinem HF, ſeù ad BG, ei ęqualem: & vt conus HBC, ad conum DBE, ſic (propter æquales altitudines HF, & BG,) baſis BFC, ad baſim DGE. Ergo proportio coni BAC, ad conum DBE, componitur quoque ex proportione AF, ad BG, & ex proportione baſis BFC, ad baſim DGE. Quod oſtendere oportebat.

LEMMA II. PROP. II

Conus ad Sphæram habet proportionem compoſitam ex proportione altitudinis coni ad Semidiametrum Sphæræ, & ex proportione quadrati radij baſis coni, ad quadratum Diametri Sphæræ.

SIT conus, ABC, cuius altitudo ſit, AD, & ſit ſphæra, cuius centrum, G, diameter, EF. Dico, conum ad ſphæram habere proportionem compoſitam, ex proportione, AD, ad, FG, & ex proportione quadrati, BD, (ſi, D, ſit centrum baſis coni) ad quadratum, EF.



Intelligantur duo coni, quorum altitudo ſit, GF, ſemidiameter ſphæræ, & ſint, GHK, cuius baſis diameter ſit HK, æqualis, EF, & GLM, cuius baſis diameter ſit, LM, ipſius EF, dupla. Iam probatum eſt ab Archim. 1. de Sphær. & Cylindro Prop. 32. conum, HGK, eſſe quartam partem ſphæræ, cuius diameter, EF; ſed etiam eſt quarta pars coni, LGM, quia, & baſis eſt quarta pars baſis; ergo ſphæra, & conus, LGM, ſunt æquales. Ergo conus, ABC, ad hæc duo ſolida habet eandem proportionem. Sed proportio coni ABC, ad conum, LGM, componitur ex proportione, AD, ad, GF, & ex proportione baſis, BDC, ad baſim, LFM, nempè ex proportione quadrati, BD, ad quadratum, LF, ſeù ad quadratum EF. Ergo etiam proportio coni, ABC, ad ſphæram componetur ex proportione, AD, ad, GF, & ex proportione quadrati, BD, ad quadratum, EF. Quod erat oſtendendum.

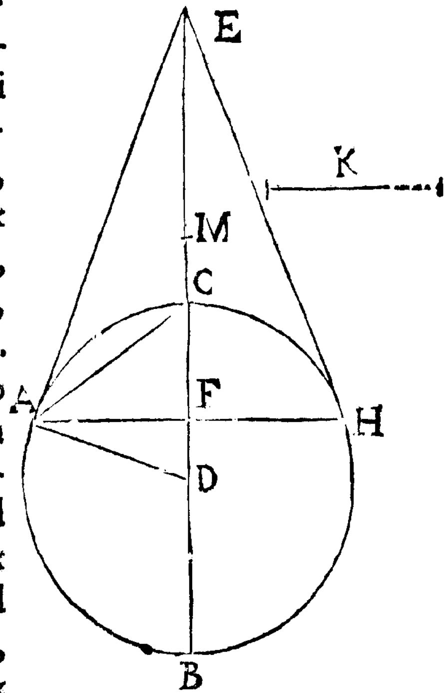
LEMMA III. PROP. III.

Conus ſua ſuperficie conica tangens Sphæram, eſt ad portionem ſphęræ ab ipſo incluſam, vt quadratum reſidui diametri ſphęræ, ad rectangulum comprehenſum ſub dicto reſiduo, & ſub ſegmento diametri intercepto inter centrum ſphæræ, & baſim coni; vna cum rectangulo ſub ſemidiametro ſphæræ, & ſub prædicta intercepta.

SIT Sphæra, ABHC, & ſit conus rectus, EAH, cuius ſuperficies conica tangat ſphæram; & omnia intelligantur ſecta per axim, adeò vt, ABHC, ſit circulus maximus; D, centrum; EA, EH, latera trianguli per axim; AFH, diameter baſis coni; BFCE, diameter circuli, & axis coni. Dico conum, EAH, ad portionem ſphæræ, ACH, ab ipſo comprehenſam, eſſe vt quadratum BF, ad rectangulum, BFD, cum rectangulo, BDF.

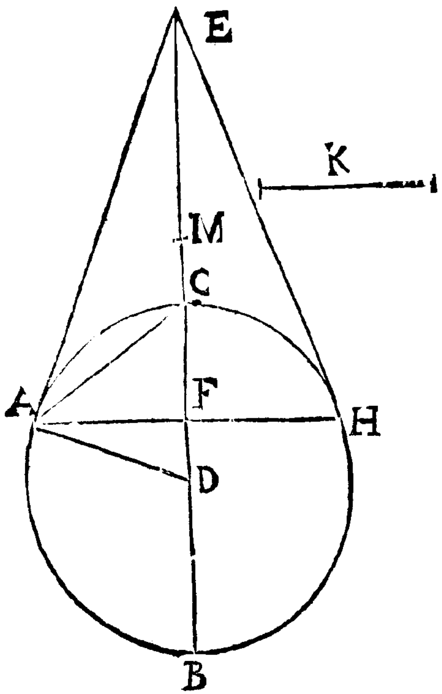
Coni

Coni ad portionem proportio componitur ex proportione coni ad ſphæram, & ſphæræ ad portionem: proportio coni ad ſphæram componitur ex proportione, EF, ad DB, & ex proportione quadrati, AF, ad quadratum, CB, ex Propoſ. antec. & pariter proportio ſphæræ ad portionem componitur ex proportione quadrati, BC, ad quadratum, CF, & ex proportione, DB, ad FB, continuatam, BD, vt deducitur ex Archi. 2. de ſphæra, & Cylin. Prop. 4. Ergo ratio quoque coni, AEH, ad portionem, ACH, componetur ex quatuor rationibus; nempè ex ratione, EF, ad DB; DB, ad, FB, continuatam, BD; ex ratione quadrati, AF, ad, ad quadratum, CB; & quadrati, CB, ad quadratum, CF. Sed duæ rationes, EF, ad DB, & DB, ad FB, continuatam, BD, faciunt rationem, EF, ad FB, continuatam, DB. Et pariter duæ rationes quadrati, AF, ad quadratum, CB, & quadrati, CB, ad quadratum, CF, faciunt rationem quadrati, AF, ad quadratum, CF. Ergo proportio coni ad portionem, componetur



netur

netur ex ratione, EF, ad, FB, continuatam, DB, & ex ratione quadrati, AF, seù rectanguli, BFC, ei æqualis, ad quadratum, FC, hoc est (propter eandem altitudinem, FC,) ex ratione, BF, ad, FC. Sed vt, EF, ad, FB, continuatam, BD, sic (sumpta, FD, communi altitudine) rectangulum, EFD, seù ei æquale, CFB, (nam ducta, AD, ob tangentem, EA, & angulum rectum, EAD, quadrato, FA, est æquale rectangulum, EFD, cui etiam quadrato, AF, est æquale rectãgulum, CFB,) ad rectangulum sub, FD, in, FB, continuatam, BD. Ergo proportio coni ad portionem componetur ex ratione, BF, ad, FC, & ex ratione rectanguli, CFB, ad rectangulum sub, FD, in FB, continuatam, BD. Rursùm proportio rectanguli, CFB, ad rectangulum sub, FD, in, FB, continuatam, BD, componitur ex ratione, CF, ad, FD, & ex ratione, FB, ad, FB, continuatam, BD. Ergo à primo ad vltimum, proportio coni ad portionem componitur ex proportione, BF, ad FC; FC, ad, FD (quæ duæ faciunt ratio-



rationem, BF, ad, FD,) & ex ratione, BF, ad, FB, continuatam, BD. Sed istæ duæ rationes componunt rationem quadrati, BF, ad rectangulum sub, FD, in FB, continuatam, BD; quod rectangulum est postea æquale duobus rectangulis, BFD, BDF. Ergo conus ad portionem est, vt quadratum, BF, ad duo rectangula, BFD, BDF. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

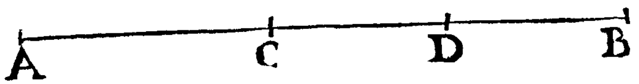
Ex dictis infertur, quod diuidendo erit excessus coni supra portionem ad portionem, vt quadratum, BD, ad duo rectangula, BFD, BDF. Nam quadratum, BD, est excessus quadrati, BF, supra duo rectangula, BFD, BDF, vt consideranti patet.

LEMMA IV. PROP. IV.

Sit recta linea, AB, secta bifariam in C, & non bifariam in, D. Dico quadratum, AD, maius esse quã sexquitertium duorum rectangulorum, ADC, ACD.

Qvoniam enim duo rectangula, ADC, ACD, sunt minora duobus rectangulis, ACB, ABC: & quadratum, AC, est tertia pars rectangulorum,

lorum, ACB, ABC; ergo erit maius quam tertia



pars rectangulorum, ACD, ADC. Ergo componendo, quadratum, AC, cum duobus rectangulis, ACD, ADC, nempè totum quadratum, AD, erit maius quam ſexquitertium rectangulorum, ACD, ADC. Quod erat oſtendendum.

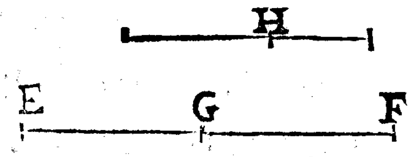
SCHOLIVM.

Ex dictis infertur in figura Propoſ. 3. conum EAH, ad portionem, ACH, habère proportionem maiorem ſexquitertia. Nam in eadem propoſitione oſtenſum eſt conum ad portionem habere rationem quadrati, BF, ad duo rectangula, BDF, BFD. Et iam patet, BC, ſecari bifariam in, D, & non bifariam in, F.

LEMMA V. PROP. V.

Datam AB, ſectam bifariam in C. rursùm ſecare in D, inter C, B, vt quadratum AD, ad duo rectangula ACD, ADC, ſit in data proportione.

Data propportio ſit, quam habet, EF, ad FG; quam patet debere eſſe exceſſus, ſed ex Lemmate anteced. minorem ſexquitertia. Inter EG, EF, ſit media proportionalis H. Cùm ergo EF, ſit maior quam ſexquitertia FG; ergo EG, erit maior ſubquadrupla EF; ergo erit etiam maior ſubdupla H. Si ergo fiat, vt EG, ad H, ſic AC, ad AD, punctum D, cadet inter

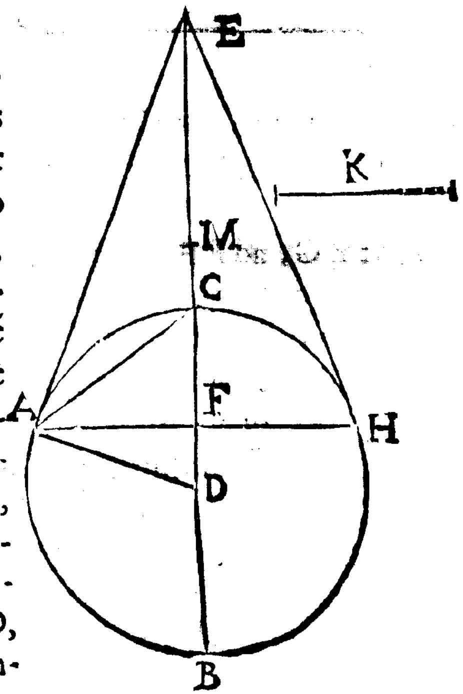


C, B. Fiat ergo; & aſſero punctum D, eſſe quæſitum. Quoniam enim factum eſt, vt EG, ad H, ſic AC, ad AD. Ergo, & vt quadratum EG, ad quadratum H, ſeù, vt EG, ad EF, ſic quadratum AC, ad quadratum AD. Ergo, & conuertendo, vt FE, ad EG, ſic quadratum AD, ad quadratum AC. Et per conuerſionem rationis, vt EF, ad FG, ſic quadratum AD, ad exceſſum ipſius ſuper quadratum AC, nempè ad duo rectangula ACD, ADC. Quod erat faciendum.

PROBLEMA I. PROP. VI.

Circa datam ſphęram deſcribere conum rectum includentem aliquam ſphæræ portionem; cuius ſuperficies conica tangat ſuperficiem ſphæricam, & quod conus ſit ad portionem ab ipſo incluſam in data proportione.

Datæ ſphæræ ſit circulus maximus A B H C, cuius centrum D, diameter B C, & data proportio ſit, quam habet D C, ad K, quàm ex ſuperioribus patet, maiorẽ eſſe ſexquitertia. Tunc datam rectam C B, diuiſam bifariã in D, diuidamus rursùm in F, inter C, D, vt quadratum B F, ſit ad duo rectangula B D F, B F D, vt B C, ad K, ex Lem-



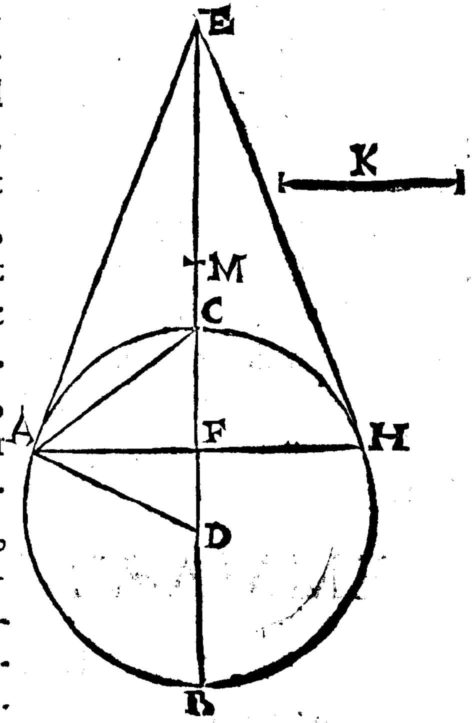
mate antecedenti; à puncto F, erigatur perpendicularis F A, vſque ad circumferentiam, & à puncto A, ducatur A E, tangens circulum, occurrens diametro productæ in E; & intelligantur omnia reuolui circa axim E B, more geometrico, donec redeant ad principium motus. Iam patet à circulo reſtitui ſphæram datam, & à triangulo rectangulo E A F, fieri conum rectum E A H, includentem portionem A C H, & ſua ſuperficie conica tangentem ſuperficiem ſphæricam. Dico talem conum eſſe quæſitum. Non immoror circa demonſtrationem, quia ex præmiſſis eſt nimis clara.

LEMMA VI. PROP. VII.

Rectangulum, quod fit ſub tangente, & ſub ſinu recto alicuius arcus, eſt maius quadrato chordæ eiuſdem arcus.

SIT circulus, cuius diameter ſit B C, centrum D, A E, ſit tangens arcus A C, occurrens diametro productæ in E; A F, ſit ſinus rectus; & A C, ſit chorda eiuſdem arcus. Dico rectangulum E A F, maius eſſe quadrato A C.

Ducatur A D; & quoniam propter angulum rectum E A D, duo triangula E A D, A D F, ſunt ſimilia. Ergo erit, vt E D, ad D A, ſeù ad D C, ei æqualem, sic D A, seù D C, ad D F. Ergo, & diuidendo, erit vt E C, ad C D, sic C F, ad F D. Et permutando, erit vt E C, ad C F, sic C D, ad D F. Sed C D, est maior D F; ergo, & E C, erit maior C F. Ergo componendo, tota E F, erit maior dupla F C. Ergo rectangulum sub D A, E F, maius erit rectangulo sub D A, in duplam C F. Sed rectangulo sub D A, in duplam C F, est æquale rectangulum sub dupla D A, nempè sub diametro B C, in C F; & huic rectangulo est æquale quadratum A C. Ergo rectangulum sub D A, in E F, erit maius quadrato A C. Sed quoniam propter similitudinem triangulorum D A F, E A F, rectangulum sub D A, in E F, est æquale rectangulo E A F; (nam est, vt A E, ad E F, sic D A, ad A F;) ergo rectangulum E A F, erit maius quadrato A C. Quod erat ostendendum.



SCHOLIVM.

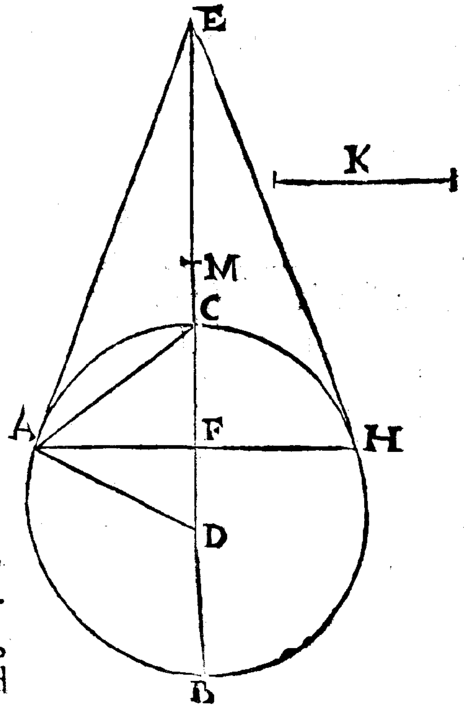
Elicitur ex dictis, & ex ostensis ab Archi., quod si tàm circulus, quàm triangulum E A F, intelligantur volui circa B E, donec redeant ad initium motus, adeò vt à circulo generetur sphæra, & à triangulo conus E A H; elicitur inquam, quod superficies conica erit maior superficie sphærica portionis ab ipso inclusa. Nam cum ostendat Archi. 1. de Sphæra, & Cylindro prop. 14. cuiuslibet coni recti superficiem esse æqualem circulo, cuius radius sit media proportionalis inter latus coni, & semidiametrum circuli basis; & pariter cum ostendat propositionibus 40. & 41. eiusdem libri, superficiem sphæricam portionis sphæræ æquale esse circulo, cuius radius sit linea ducta à polo ad circumferentiam basis; & circuli sint ad se inuicem vt quadrata semidiametrorum; sequitur, quod superficies conica erit ad superficiem sphæricam portionis, vt quadratum mediæ proportionalis inter latus, & semidiametrum suæ basis, siue erit, vt rectangulum sub latere, & semidiametro basis; hoc est in præsenti, vt rectangulum E A F, ad quadratum A C. Iam verò rectangulum E A F, ostensum est maius quadrato A C; quare, & superficies conica coni E A H, erit maior superficie sphærica portionis A C H; & insuper totus perimetro coni erit maior toto perimetro portionis.

LEMMA VII. PROP. VIII.

Dati circuli diametrum producere, vt ab aliquo puncto eiusdem diametri ductis tangente, sinu recto, & chorda alicuius arcus, rectangulum sub tangente, & sinu recto, sit ad quadratum chordæ in data ratione possibili.

SIT datus circulus, cuius diameter, BC; centrum D; oportet producere diametrum, puta in F, vt ductis tangente EA, sinu recto AF, & chorda AC; rectangulum EAF, sit ad quadratum AC, in data proportione.

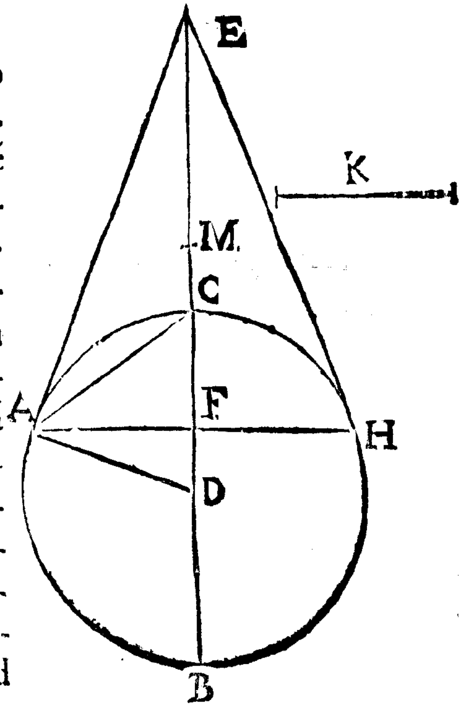
Ex dictis patet oportere proportionem datam esse maioris inęqualitatis. Sit ergo ea, quàm habet DC, ad



K; & fiat, vt excessus BC, super K, ad K, sic BD, ad DF. patet DF, minorem esse DC; nam, cum DC, sit maior K; ergo excessus duplæ DC, super K; nempè excessus BC, super K, erit multò maior K; quare, & DC, seù BD, erit maior DF. A' puncto ergo F, erigatur perpendicularis FA, & à puncto A, ducatur tangens AE, occurrens diametro in E, & iungatur AC. Dico factum esse, quod imperebatur. Eodem processu, quo factum est in Lemmate anteced. ostendetur esse, vt EC, ad CF, sic CD, ad DF; & componendo, vt EF, ad FC, sic CD, cum DF, nempè BF, ad FD. Est autem vt BF, ad FD, sic BC, ad K; (nam cum factum sit, vt excessus BC, super K, ad K, sic BD, ad DF; erit componendo vt BC, ad K, sic BF, ad FD.) Ergo erit etiam, vt EF, ad FC, sic BC, ad K; & vt antecedentium dimidia, nempe vt dimidia EF, ad FC, sic DC, ad K. Sed vt dimidia EF, seù vt FM (diuisa FE, bifariam in M,) ad FC, sic (sumpta communi altitudine CB,) rectangulum sub FM, in CB, ad rectangulum BCF; nempe ad quadratum AC, ei æquale; & cum rectangulo sub MF, BC, sit æquale rectangulum sub EF, in dimidiam BC, nempe in AD; ergo vt DC, ad K, sic erit rectangulum sub EF, in DA, ad quadratum AC. Sed rectangulo sub EF, DA, est æquale rectangulum EAF, quia (propter similitudinem triangulorum EAF, DAF, est, vt AE, ad EF, sic DA, ad AF.) ergo, & vt DC, ad K, sic rectangulum EAF, ad quadratum AC. Quod erat faciendum.

PROBLEMA II. PROP. IX.

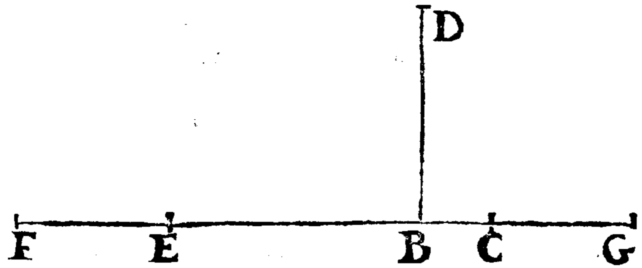
Circa datam ſphæram deſcribere conum rectum includentem aliquam ſphæræ portionem, & tangentem ſua ſuperficie conica ſuperficiem ſphæricam, adeò vt ſuperficies conica ſit ad ſuperficiem ſphæricam portionis ab eo incluſam in data proportione.



PAtet ex Scholio Propoſitionis 7. oportere proportionẽ datam eſſe maioris inæqualitatis. Sit ergo datæ ſphæræ circulus maximus, cuius centrum D, diameter B C, & data proportio ſit ea, quã habet D C, ad K. Diameter B C, producatur taliter in E, vt factis iiſdem, quæ in anteced. Lemmate, rectãgulum E A F, ſit ad quadratum A C, in data proportione D C, ad K. Et intelligantur, conſueto modo, omnia reuolui circa B E. Dico factum eſſe, quod imperebatur. Deducitur enim ex Arch. ſupra citato, ſuperficiem coni, E A H, ad ſuperficiem portionis A C H, eſſe, vt rectangulum E A F, ad quadratum A C; ſeù, ex factis, vt D C, ad K. Quod erat faciendum.

LEMMA VIII. PROP. X.

Sint E B, B D, B C, tres lineæ continue proportionales; & F B, ſit maior B E; & producatur F C, in G, taliter, vt rectangulum F G C, ſit æquale quadrato B D. Dico E B, maiorem eſſe C G.

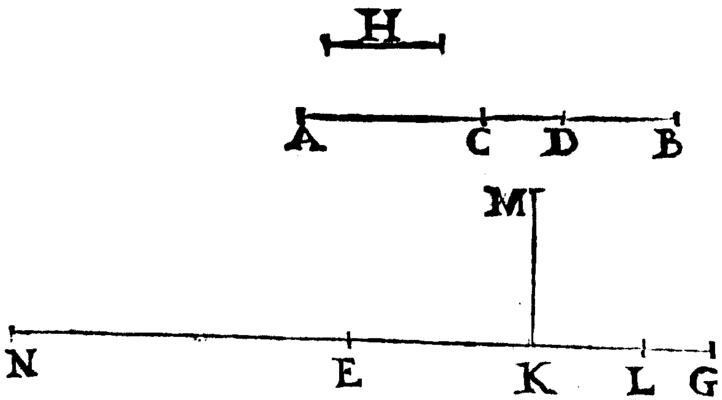


NAM rectangulum F G C, eſt æquale rectangulo E B C, quia ambo ſunt æqualia eidem quadrato D B. Ergo erit, vt F G, maior ad B C, minorem: ſic E B, maior ad C G, minorem. Ergo C G, eſt minor E B. Quod oſtendere oportebat.

LEMMA IX. PROP. XI.

Datam rectam A B, sectam in puncto C, bifariam, rursùm in D, inter C, B, taliter diuidere, vt rectangulum A B D, sit ad rectangulum A D C, cum rectangulo sub A B, in C D, in data proportione.

Data ratio sit, quam habet A B, ad H. Ob euitandam verò confusionem, exponatur E K, æqualis A C, quæ ex vna parte continuetur in N, vt N K, sit tripla E K; & ex alia parte continuetur in L, vt K L,



sit æqualis H; & inter E K, K L, sit media M K. Tunc (per ab alijs facta) data media proportionali M K, & data differentia extremarum N L, in ordine trium continue

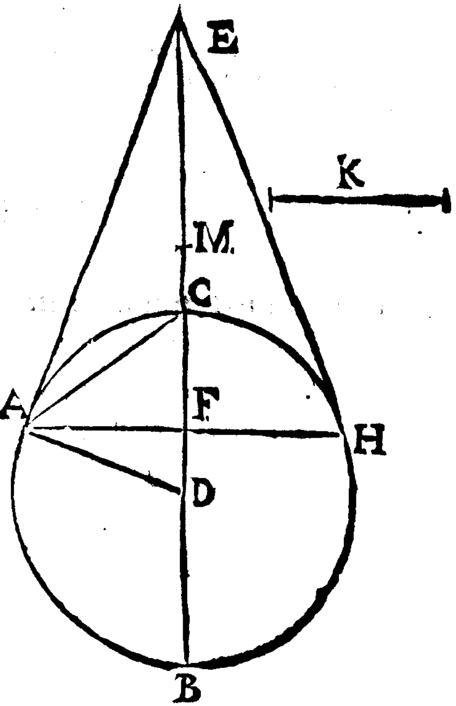
continue proportionalium, inueniantur extremæ, quæ sint N G, G L; & ipsi G L, fiat æqualis C D, quæ per Lemma, antecedens erit minor E K, seù C B. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim duo rectangula E K L, N G L, sunt æqualia, quia ambo sunt æqualia eidem quadrato M K; ergo est vt N G, ad K L, sic E K, ad L G. Sed E K, est æqualis A C; K L, est æqualis H; L G, est æqualis C D; & N G, est æqualis triplæ A C, C D, & H; ergo, & vt tripla A C, cum C D, & H, ad H, sic A C, seù ei æqualis C B, ad C D. Et diuidendo, vt tripla A C, cum C D, ad H, sic B D, ad D C. Ergo factum sub extremis, erit æquale facto sub medijs; nempe factum sub tripla A C, cum C D, in C D, erit æquale facto sub D B, in H. Ergo rectangulum sub C B, in D B, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub C B, in D B, ad rectangulum sub D B, in H, est, vt C B, ad H. Ergo etiam erit, vt C B, ad H, sic rectangulum C B D, ad rectangulum sub composita ex tripla A C, cum C D, in C D. Et vt antecedentium dupla. Ergo, vt A B, ad H, sic rectangulum A B D, ad factum sub tripla A C, cum C D, in C D. Sed factum sub tripla A C, cum C D, in C D, est æquale rectangulo sub A B, in C D, & rectangulo A D C, vt consideranti patet. Ergo, & vt A B, ad H, sic erit rectangulum A B D, ad rectangula A B, C D, & A D C. Quod erat faciendum.

LEMMA X. PROP. XII.

Sit datus circulus, cuius centrum ſit D, & diameter eius BC, ſit producta in E, & à puncto E, ducantur tangens EA, & ſinus rectus AF. Dico dimidiam EF, maiorem eſſe ſinu verſo FC.

Diuidatur EF, bifariam in M. Patet enim, quod ducta AD, propter angulum rectum EAD, & propter ſimilitudinem triangulorum rectangulorum EAD, DAF, erit, vt ED, ad AD, ſeù ad DC, ei æqualem, ſic AD, ſeù DC, ad DF. Et diuidendo, erit vt EC, ad CD, ſic CF, ad DF. Et permutando, vt EC, ad CF, ſic CD, ad DF. Sed CD, eſt maior



DF; ergo, & EC, erit maior CF. Et conſequenter, dimidia totius EF, nempe MF, erit maior CF. Quod oſtendere oportebat.

LEMMA XI. PROP. XIII.

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori propoſitione, & diuiſa EF, bifariam in M. Dico eſſe, vt MC, ad CF, ſic dimidiam CF, ad FD.

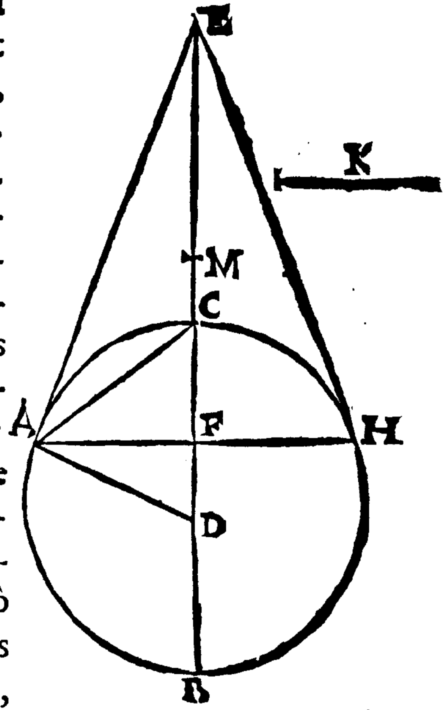
Quoniam enim duo rectangula EFD, BFC, ſunt æqualia inter ſe, quia ſunt æqualia eidem quadrato AF; ergo erit, vt EF, ad FC, ſic BF, ad FD. Et antecedentium dimidia, nempe erit, vt MF, ad FC, ſic dimidia BF, ad FD. Et diuidendo, erit, vt MC, ad CF, ſic exceſſus dimidiæ BF, ſuper FD, ad FD; hoc eſt, ita erit dimidia CF, ad FD; quia exceſſus dimidiæ BF, ſuper FD, eſt æqualis dimidiæ CF. Quod patet, quia dimidia BF, eſt dimidia CD, cum dimidia DF; exceſſus autem dimidiæ CD, cum dimidia DF, ſuper DF, eſt idem, ac exceſſus dimidiæ CD, ſuper dimidiam DF; cùm verò CF, ſit exceſſus totius CD, ſuper totam DF. Ergo, & dimidia CF, erit exceſſus dimidiæ CD, ſuper dimidiam DF. Quare patet propoſitum.

LEMMA XII. PROP. XIV.

Dati circuli diametrum taliter producere, vt ductis tangente, ſinu recto, & chorda alicuius arcus, rectangulum ſub tangente, & ſinu recto, vna cum quadrato ſinus recti, ſit ad quadrata chordæ, & ſinus recti, in data proportione.

SIT datus circulus, cuius centrum D; diameter ſit BC. Oportet ipſam diametrum taliter continuare in E, vt ductis tangente EA, ſinu recto AF, & chorda AC; rectangulum EAF, cum quadrato AF, ſit ad duo quadrata CA, AF, in data proportione.

Iam in propoſitione 7. patuit proportionem datam debere eſſe exceſſus. Quia, cum rectangulum EAF, oſtenſum ſit maius quadrato AC; etiam addito communi quadrato AF, rectangulum EAF, cum quadrato AF, erit maius duobus quadratis CA, AF. Sit ergo proportio data ea, quam habet BD, ad K; & data recta BC, ſecta bifariam in puncto D, rurſùm taliter diuidatur in pūcto F, inter C, D, vt rectangulum BCF, ſit

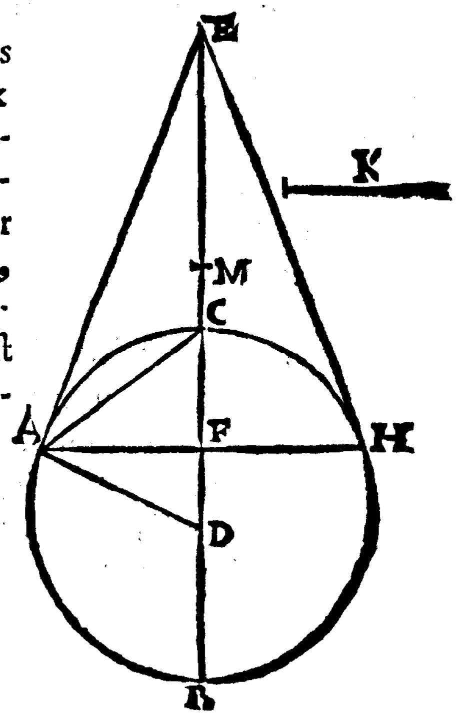


ſit ad duo rectangula BC, FD, & BFD, vt duplus exceſſus DB, ſuper K, ad K, per propoſitionem vndecimã. Tunc à puncto F, erigatur diametro perpẽdicularis FA; & à puncto A, ducatur tangens AE, occurrens diametro in E; & ducatur AC. Dico iuſſum eſſe adimpletum. Diuidatur EF, in M, bifariam. Quoniam verò factum eſt, vt duplus exceſſus BD, ſuper K, ad K, ſic rectangulum BCF, ad rectangula BC, FD, & BFD; ergo, & vt antecedentium dimidia; nempe, vt exceſſus BD, ſuper K, ad K, ſic rectangulum ſub BC, in dimidiam CF, ad rectangula BC, FD, & BFD, nempe ad rectangulum ſub compoſita ex CB, BF, in FD. Sed, vt rectangulum ſub BC, in dimidiam CF, ad rectangulum ſub compoſita ex BC, BF, in FD, ſic rectangulum BCM, ad rectangulum ſub compoſita ex BC, BF, in FC. Ratio eſt, quia proportiones horum rectangulorum componuntur ex iiſdem proportionibus. Nam ex Lemmate antecedenti, eſt, vt dimidia CF, ad FD, ſic MC, M C, ad C F; & proportio B C, ad compoſitam ex B C, & B F, eſt eadem in vtroque antecedenti ad ſuum conſequens. Ergo, & vt exceſſus B D, ſuper K, ad K, ſic rectangulum B C M, ad rectangulum ſub compoſita ex B C, B F, in F C. Ergo, & componendo, vt B D, ad K, ſic rectangulum B C M, cum rectangulo ſub cōpoſita ex B C, B F, in F C, nempe cum duobus rectangulis B C F, B F C, ad duo rectangula B C F, B F C. Sed rectangulum B C M, cum rectangulo B C F, facit vnicum rectangulum ſub B C, in M F, cui poſtea eſt æquale rectangulum ſub dimidia B C, nempe ſub D A, in E F, duplam ipſius F M. Ergo, vt B D, ad K, ſic eſt rectangulum ſub E F, D A, cum rectangulo B F C, ad duo rectangula B C F, B F C. Sed rectangulo ſub E F, D A, propter ſimilitudinem triangulorum E A F, F A D, eſt æquale rectangulum E A F (vt ſæpè dictum eſt.) Ergo, & vt B D, ad K, ſic rectangulum E A F, cum rectangulo B F C, ad duo rectangula B F C, B C F. Sed rectangulum B F C, eſt æquale quadrato A F, & rectangulum B C F, eſt æquale quadrato A C. Ergo, & vt B D, ad K, ſic rectangulum E A F, cum quadrato A F, ad duo quadrata A C, A F; hoc eſt, ex Archimede ſupra citato, ſic ſuperficies conica, & baſis, nempe totus perimeter coni, ad ſuperficiem ſphæricam portionis, & ad baſim, hoc eſt ad totum perimetrum portionis. Quod erat faciendum.

PROBLEMA III. PROP. XV.

Datis iiſdem, quæ in ſuperioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, adeò vt totus perimeter coni, ſit ad totum perimetrum portionis ab eo incluſam in data proportione.

Problema ex antecedentibus Lemmatibus, & ex Archimede ſupra citato, eſt facilis ſolutionis; quapropter in eius ſolutione non eſt amplius immorandum, ſed eſt relinquenda induſtriæ Lectoris.

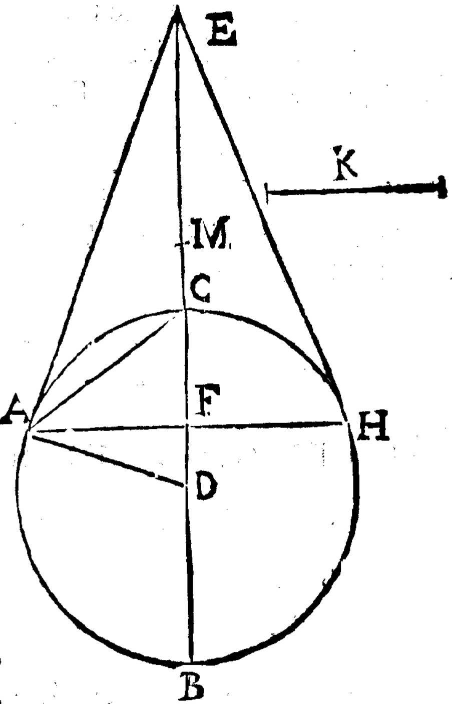


LEMMA XIII. PROP. XVI.

Sit conus EAH, cuius ſuperficies conica tangat ſphæram ACHB, modo ſupradicto; & ECFB, ſit axis coni, & diameter ſphæræ; & diametro BC, ſit normalis AF, & D, ſi ſit centrum ſphæræ. Dico perimetrum reſidui coni, dempta portione ACH, ad perimetrum portionis ACH, eſſe, vt ED, cum tripla DC, ad triplam DC, cum DF.

QVoniam enim (vt deducitur ex Archimede locis ſupra citatis,) perimeter ſolidi excauati, ſeu reſidui coni, dempta portione, eſt ad perimetrum portionis, vt rectangulum EAF, cum quadrato AC, ad quadrata AC, AF; & cum, propter ſimilitudinem triangulorum EAF, AFD, rectangulum EAF, ſit æquale rectangulo ſub AD, ſeu DC, in EF; & pariter, cum quadrato AF, ſit æquale rectangulum BFC; & quadrato AC, ſit æquale rectangulum BCF. Ergo, & vt perimeter ſolidi excauati ad perimetrum portio-

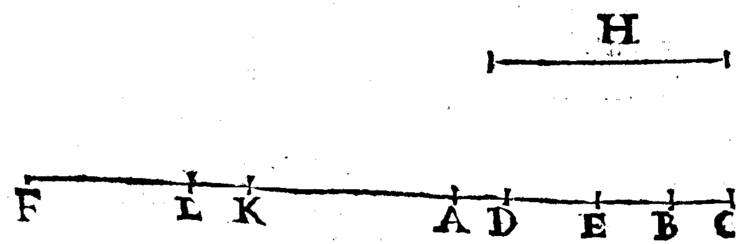
nis, ſic erit rectangulum DC, EF; cum rectangulo BCF, ad duo rectangula BCF, BFC. Sed rectangulum DC, EF, diuiditur in duo rectangula DCF, & DCE; & rectangulum DCE, eſt æquale rectangulo ſub ED, in CF, (vt poſtea oſtendetur;) ergo, & perimeter ſolidi excauati erit ad perimetrũ portionis, vt rectangulum ED, CF, vna cum rectangulo DCF, & cũ rectangulo BCF, ad rectangulum BCF, cum rectangulo BFC. Sed rectangula ED, CF; DCF, & BCF, faciunt rectangulum ſub compoſita ex ED, cum tripla DC, in CF; & pariter rectangula BCF, & BFC, faciunt rectangulum ſub compoſita ex CB, BF, in FC, nempe ſub tripla CD, cum DF, in FC. Ergo erit, vt perimeter ſolidi excauati ad perimetrum portionis, ſic rectangulum ſub ED, cum tripla DC, in CF, ad rectangulum ſub tripla CD, cum DF, in CF, nempe (propter eandem altitudinem FC,) ſic ED, cum tripla DC, ad triplam DC, cum DF. Quod erat oſtendendum.



Quòd verò supra assumptum est, nempe rectangulum D C E, esse æquale rectangulo, E D, C F, patet; quia cum, ex sæpè dictis, tres E D, D C, & D F, sint continue proportionales, facilè deducitur esse, vt E D, primam ad D C, secundam, sic E C, excessum primæ super secundam, ad C F, excessum secundæ super tertiam; quare patet rectangulum E D, C F, esse æquale rectangulo D C E.

LEMMA XIV. PROP. XVII.

Data media trium quantitatum continue proportionalium, inuenire extremas, vt maior cum tripla media, sit ad triplam mediam cum minore in data proportione.



Data media sit A B, & data ratio sit, quam habet A B, ad B E, quam patet esse excessus; & inter A B, B E, sit media proportionalis H; & producatur B A,

B A, in F, vt F B, sit tripla B A; & ab ipsa F B, auferatur F K, æqualis triplæ B E (vbicumque cadat punctum K:) deinde data media H, & differentia extremam B K, in ordiue trium continue proportionalium, inueniantur extremæ B L, L K. Patet L K, esse minorem A B, nam etiam media H, est minor ea. Fiat ergo A D, æqualis L K, & fiat, vt A D, ad A B, sic A B, ad A C. Dico tres C A, A B, A D, esse quæsitas.

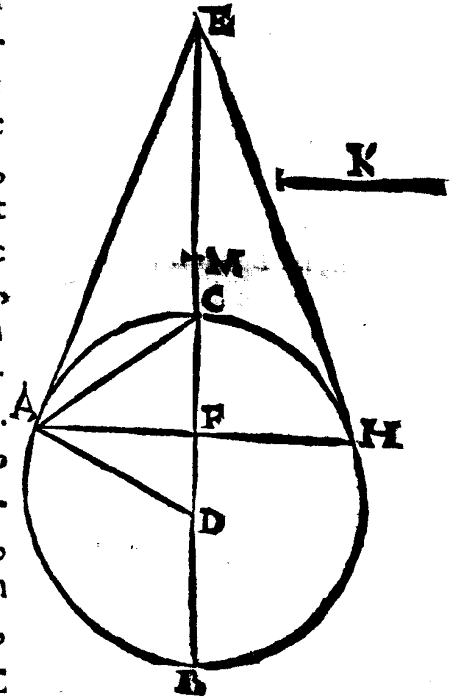
Quoniam enim quadrato H, sunt æqualia ambo rectangula B L K, & A B E; ergo ista rectangula sunt æqualia inter se; quare erit, vt B L, ad B E, sic B A, ad L K, seù ad A D, quæ L K, facta fuit æqualis. Sed B L, sunt æquales B K, cum L K, hoc est cum A D. Quare, & vt B K, cum A D, ad B E, sic B A, ad A D. Et ad consequentium tripla; ergo, vt B K, cum A D, ad triplam B E, sic B A, ad triplam A D. Sed F K, facta fuit tripla B E; ergo erit, vt K B, cum A D, ad F K, sic A B, ad triplam A D. Et componendo, erit vt B F, cum A D, ad F K, seù ad triplam B E, sic B A, cum tripla A D, ad triplam A D. Et ad consequentium subtripla. Ergo erit, vt F B, cum A D, ad B E, sic B A, cum tripla A D, ad A D. At verò, quoniam tres C A, A B, & A D, sunt continue proportionales, est vt B A, cum tripla A D, ad A D, sic C A, cum tripla A B, ad A B. Ergo erit etiam, vt C A, cum tripla A B, ad A B, sic F B, cum A D, ad B E. Ergo, & permutando, erit, vt C A, cum tripla A B, ad F B, cum A D, nempe ad triplam B A, cum A D, sic A B, ad B E. Sed C A, est maior; B A, est media data, & D A, est minor. Quare factum est, quod imperebatur.

PRO-

PROBLEMA IV. PROP. XVIII.

Datis iiſdem, quæ in ſuperioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter ſolidi excauati, nempe reſidui coni ablata portione, ſit ad totum perimetrum portionis in data proportione.

DAta ratio ſit, quàm habet BD, ad K: & data DC, media in ordine trium continue proportionalium inueniantur extremæ DF, minor, & DE, maior tali lege, vt ſit ſicut B D, ad K, ſic DE, cum tripla DC, ad triplam DC, cum DF; per propoſitionem antecedentem. A' puncto autem F, erigatur perpendicularis diametro F A, & iungatur E A, quam patet tangere circulũ, & ſphæram; quia du-



cta.

cta DA, cum ſit, vt ED, ad DC, ſeù ad DA; ſic DC, ſeù DA, ad DF; ergo triangula EAD, ADF, ſunt ſimilia. Vnde cum angulus AFD, ſit rectus, etiam angulus EAD, erit rectus, & proinde EA, erit tangens. Cùm verò EA, tangat circulum; ergo, & ſuperficies coni facti à triangulo EAF, tanget ſphærã. Reliqua ſunt nimis clara, ideò ex induſtria omittuntur.

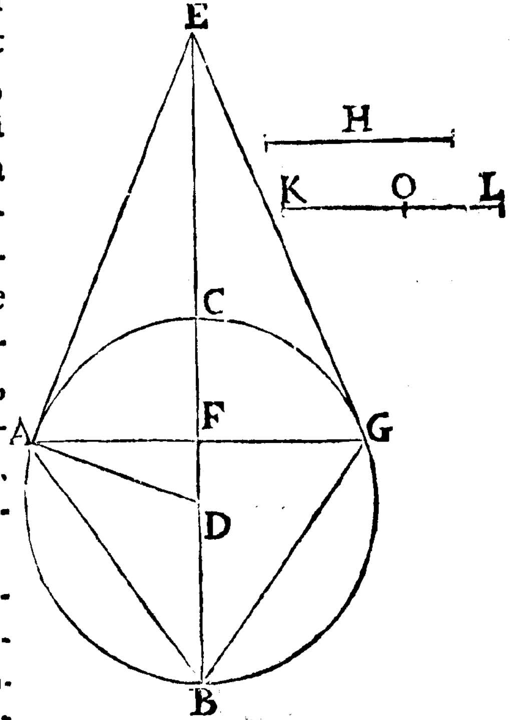
PROBLEMA V. PROP. XIX.

Diametrum ſphæræ datæ taliter continuare in puncto, vt à puncto ducta tangente, & à puncto contactus ductis perpẽdiculari ad diametrum, & alia ad polum alterius portionis, rhombi facti ex reuolutione circa diametrum, conus tangens ad reliquum conum ſit in data proportione.

DAtæ ſphæræ ſit diameter BC, centrum D; oportet autem diametrum BC, taliter continuare in E, vt ducta tangente AE, dimiſſa perpendiculari AF, & iuncta AB, & reuoluto triangulo EAB, adeò vt fiat rhombus EABG; conus EAG, ſit ad conum

ABG,

ABG, in data proportione, quæ ſit ea, quam habet BD, ad H. Secetur DC, taliter in F, vt ſit ſicut BD, ad H, ſic CF, ad FD; & à puncto F, erecta normali FA, & ductis AB, & tangente AE, occurrente diametro in E; & intellectis conis EAG, BAG, ortis ex conſueta reuolutione. Dico eſſe quæſitos.



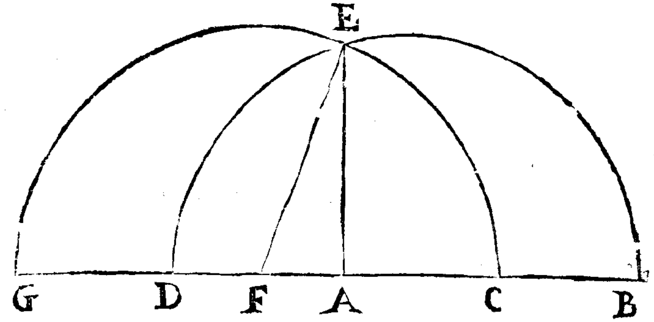
Nam, propter eādem baſim AG, conus EAG, ad conum BAG, eſt, vt axis EF, ad axim BF. Quoniam autem rectangula EFD, BFC, ſunt æqualia, quia æqualia eidem quadrato AF; eſt, vt EF, ad FB, ſic CF, ad FD; & CF, ad FD, facta eſt, ſicut BD, ad H. Ergo, & vt BD, ad H, ſic conus EAG, ad conum BAG. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XV. PROP. XX.

Datam rectam lineam taliter diuidere in puncto, vt rectangulum ſub tota, & ſub vna parte, ſit ad quadratum alterius partis in data proportione.

SIT data recta linea AB, & proportio data ſit ea, quam habet BA, ad AD, ei poſitam in directum.

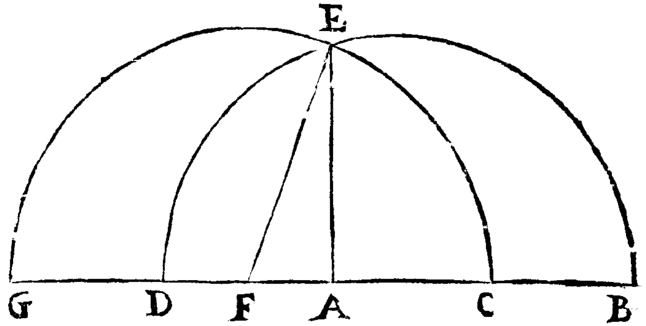


Oportet diuidere AB, in C, vt rectangulum ABC, ſit ad quadratum AC, in data proportione. Super DB, tanquam ſupra diametrum fiat ſemicirculus; & à puncto A, erigatur diametro perpendicularis AE; diuiſaque DA, bifariam in F, & iuncta FE, centro F, interuallo FE, fiat ſemicirculus GEC, ſecans AB, in C. Dico punctum C, eſſe quæſitum.

Duo enim rectangula GAC, BAD, ſunt æqualia

E inter

inter se, quia æqualia eidem quadrato AE. Ergo erit, vt BA, ad AC, sic GA, ad AD. Et diuidendo, vt

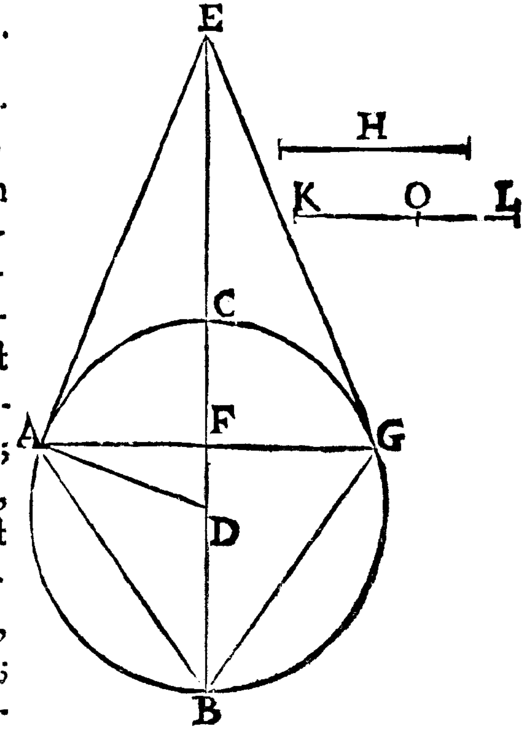


BC, ad CA, sic GD, ad DA. Sed GD, est æqualis AC, quia cum tota GF, sit æqualis totæ FC, & ablata DF, sit æqualis ablatæ FA; ergo reliqua GD, erit æqualis reliquæ AC; quare erit, & vt BC, ad CA, sic CA, ad AD. Ergo tres BC, CA, AD, erunt continue proportionales. Quare rectangulum sub BC, in DA, erit æquale quadrato AC. Ergo rectangulum ABC, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed rectangulum ABC, ad rectangulum sub BC, DA, est (propter eandem altitudinem BC,) vt BA, ad AD. Ergo, & vt BA, ad AD, sic rectangulum ABC, ad quadratum AC. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XVI. PROP. XXI.

Sit circulus, cuius centrum D, diameter BC, continuata in E; EA, sit tangens, & AF, sit sinus rectus arcus AC. Dico esse, vt rectangulum DCF, ad rectangulum sub dupla DF, in DF, sic rectangulum BEC, ad rectangulum CBF.



Patet; quia proportiones horum rectãgulorum componũtur ex iisdem proportionibus. Nam proportio DC, ad DF, est eadem cum proportione EB, ad BF; & proportio CF, ad duplam DF, est eadem cũ proportione EC, ad CB, vt statim patebit; quare patet propositum.

Pri-

Primum ergo, nempe, quod, vt D C, ad D F, sic sit E B, ad B F; patet, quia, cum, vt sæpè dictum est, sit, ob æqualitatem rectangulorum E F D, B F C, vt E F, ad F B, sic C F, ad F D, erit componendo, vt E B, ad B F, sic C D, ad D F.

Secundum, nempè, quod sit, vt C F, ad duplam F D, sic E C, ad C B, pariter est clarum; quia cum pariter, vt sæpè dictum est, sit, vt E D, ad D C, sic D C, ad D F, erit diuidendo, vt E C, ad C D, sic C F, ad F D. Et ad consequentium dupla. Ergo vt E C, ad C B, sic C F, ad duplam F D.

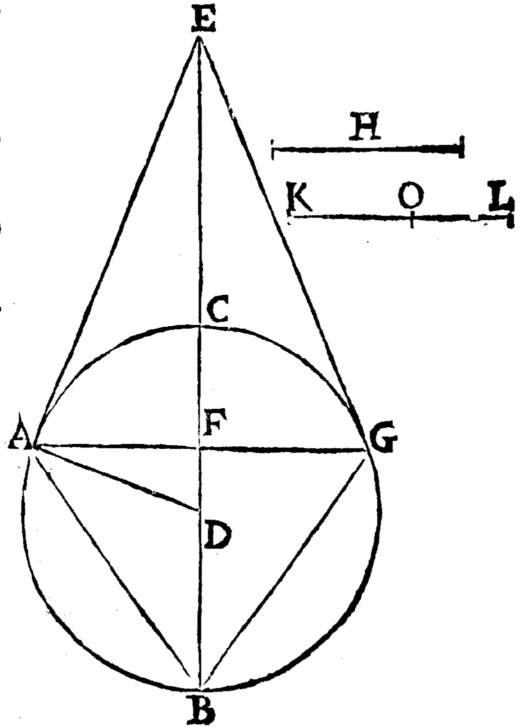
PROBLEMA VI. PROP. XXII.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies conicæ conorum, sint in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet B D, ad H, & oporteat facere, quod imperatum est. Data proportio B D, ad H, continuetur ad tertium terminum K L, adeò vt sit, vt B D, ad H, sic H, ad K L; diuisaque K L, bifariam in O; diuidatur etiam, per Lemma antecedens, D C, in F, adeò vt sit, sicut B D, ad K O, sic rectangulum D C F, ad quadratum D F; & à puncto F, erecta normali A F, ducta tangente

EA,

E A, & factis conis E A G, B A G. Dico esse quæsitos nimirùm esse, vt B D, ad H, sic superficiem coni E A G, ad superficiem coni B A G.



Nam, cùm sit, vt B D, ad K O, sic rectangulum D C F, ad quadratum D F. Ergo, & vt B D, ad K L, duplam K O, sic rectangulum D C F, ad duo quadrata D F, seù ad rectâgulum sub dupla D F, in D F. Sed, vt rectâgulum D C F, ad rectangulum sub dupla D F, in D F, sic rectangulum B E C, ad rectangulum C B F; ex Lemmate antecedenti. Ergo, & vt B D, ad K L, sic rectangulum B E C, ad rectangulum C B F. Sed rectangulo B E C, est æquale quadratum tangentis E A, & rectangulo C B F, est æquale quadratum B A. Ergo, & vt B D, ad K L, sic quadratum E A, ad quadratum A B. Sed, vt B D, ad K L, sic est quadratum B D, ad quadratum H. Ergo, & vt B D, quadratum, ad quadratum H, sic est quadratum E A, ad quadratum A B. Quare,

&

& vt linea B D, ad H, sic E A, ad A B. Sed (sumpta communi altitudine A F,) vt E A, ad A B, sic est rectangulum E A F, ad rectangulum B A F; vt autem rectangulum E A F, ad rectangulum B A F, sic superficies conica coni E A G, ad superficiem conicam coni B A G, vt deducitur ex Archimede primo de Sphæra. & Cylindro proposit. 14. Ergo, & vt B D, ad H, sic erit superficies coni E A G, ad superficiem coni B A G. Quod erat faciendum.

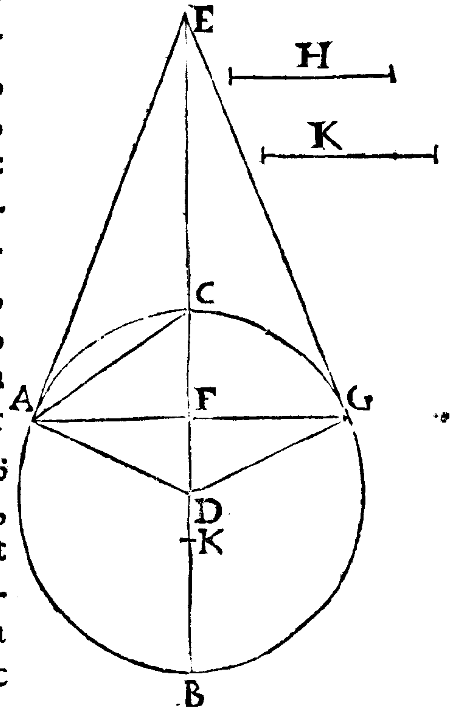
PROBLEMA VII. PROP. XXIII.

Producere diametrum datæ sphæræ in puncto, vt ab illo ducta tangente, & à puncto contactus ductis sinu recto, & linea ad centrum; & ex reuolutione triangulorum, orto rhombo; coni rhombi sint in data proportione.

SI data sphæra, cuius centrum D, & data ratio sit, quàm habet B D, ad H. Oportet producere B C, diametrum datæ sphæræ in E, vt ductis tangente E A, sinu recto A F, & semidiametro A D, & facto rhombo E A D G, conus E A G, sit ad conum A D G, vt B D, ad H.

Fiat,

Fiat, vt B D, simul cum H, ad H, sic B D, ad D K; & inter B D, D K, inueniatur media, cui sit æqualis D F; & per F, excitetur A F G, normalis B C; & à puncto A, agatur tangens A E, occurrens diametro in E; & iuncta A D, intelligatur rhombus, E A D G. Dico hunc esse quæsitum. Quoniam enim, vt sæpè dictum est, tres E D, D C, D F, sunt continue proportionales; & quia F D, est media inter B D, seù C D, & D K; ergo, quatuor E D, D C, D F, & D K, sunt continue proportionales. Ergo erit, vt prima E D, ad tertiam D F, sic secunda C D, ad quartam D K. Sed, vt C D, seù B D, ad D K, sic est B D, simul cum H, ad H. Ergo, & vt E D, ad D F, sic B D, cum H, ad H. Et diuidendo, vt B D, ad H, sic E F, ad F D; nempè conus E A G, ad conum A D G, propter eandem basim A F G. Factum est ergo, quod erat faciendum.

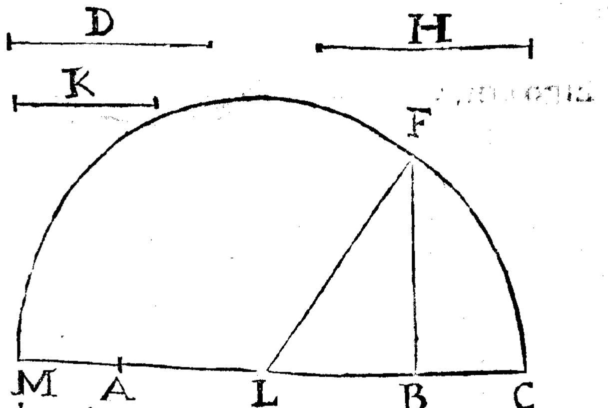


LEM-

LEMMA XVII. PROP. XXIV.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt rectangulum contentum ſub compoſita ex data, & ex producta, & ſub producta, ad quadratum alterius lineæ datæ, ſit in data proportione.

DAtæ duæ lineæ ſint A B, & D. Oportet taliter producere A B, in C, vt rectangulum A C B, ſit ad quadratum D, in data proportione, quæ ſit ea,



quam habet A B, ad H. Fiat ergo, vt H, ad A B, ſic D, ad K; & inter D, K, inueniatur media B F, quæ excitetur normaliter ſuper B A, à puncto B; & diuiſa A B, bifa-

bifariam L; & ducta L F, centro L, interuallo L F, deſcribatur ſemicirculus; & A B, protrahatur hinc inde, donec occurrat ſemicirculo in punctis M C. Dico punctum C, vel punctum M, eſſe quæſitum. Duo enim rectangula D, K, & M B C, ſunt æqualia, quia ſunt æqualia eidem quadrato B F. Sed rectangulũ M B C, eſt æquale rectangulo A C B, quia M A, eſt æqualis B C, & M B, eſt æqualis A C. Ergo etiam rectangulum D, K, erit æquale rectangulo A C B. Sed rectangulum D, K, eſt ad quadratum D, vt K, ad D. Ergo, & rectangulum A C B, eſt ad quadratum D, vt K, ad D; nempè, vt A B, ad H, (factum eſt enim ſupra conuertendo, vt A B, ad H, ſic K, ad D.) Quod erat faciendum.

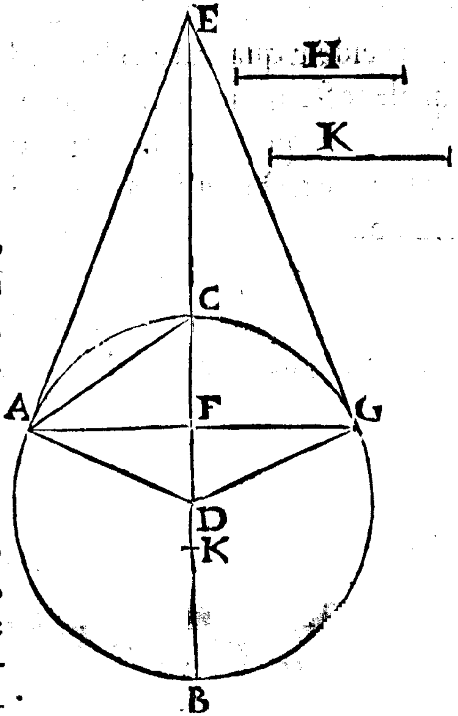
PROBL. VIII. PROP. XXV.

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ſupra, vt ſuperficies coni E A G, ſit ad ſuperficiem coni A D G, in data proportione.

DAta proportio ſit, quam habet B D, ad H, quæ continuetur ad K, adeò vt ſit, vt B D, ad H, ſic H, ad K. Per Lemma autem antecedens, data B C, taliter continuetur in E, vt rectangulum B E C, ſit ad quadratum ſemidiametri A D, vt B D, ad K; & à puncto

F

cto E, ducatur tangens E A, & à puncto contactus A, ducatur A F G, normalis C B; & intelligantur coni E A G, A D G, vt in ſchemate. Aio iſtos eſſe quæſitos.



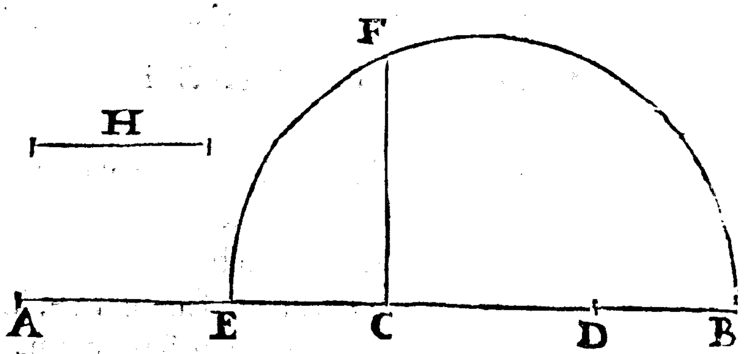
Quoniam enim, vt B D, ad K, ſic rectangulum B E C, nempè, quadratum E A, ei æquale, ad quadratum A D; & vt B D, ad K, ſic quadratum B D, ad quadratum H; quare, & vt B D, quadratum, ad quadratum H, ſic quadratum E A, ad quadratum A D. Vnde, & vt B D, ad H, ſic erit E A, ad A D. Sed vt E A, ad A D, ſic (ſumpta communi altitudine A F,) rectangulum E A F, ad rectangulum D A F; & vt rectangulum E A F, ad rectangulum D A F, ſic, ex Archimede ſupra citato, ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiem coni D A G; quare, & vt B D, ad H, ſic ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiem coni D A G. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XVIII. PROP. XXVI.

Datam rectam lineam ſectam in duas partes æquales, rurſùm ipſam ſecare in partes inæquales, vt rectangulum ſub inæqualibus totius partibus contentum, ad quadratum ſegmenti intermedij, ſit in data proportione.

Data recta linea ſit A B, ſecta bifariam in puncto C, & data proportio ſit, quam habet A C, ad H.



Oportet ipſam taliter diuidere in puncto D, vt rectangulum A D B, ſit ad quadratum D C, vt A C, ad H. Fiat vt A C, cum H, ad H, ſic A C, ad C E; & ſuper diametro E B, facto ſemicirculo, à puncto C, erigatur perpendicularis C F, quæ erit minor C B. Fiat ergo C F, æqualis C D. Dico punctum D, eſſe quæſitum.

 Quo-

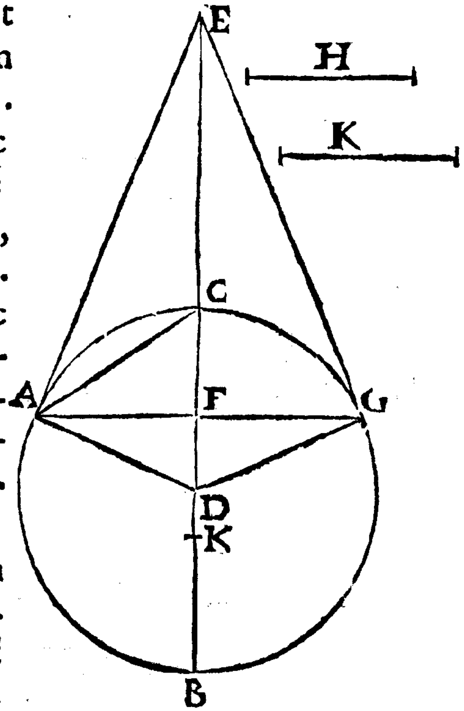
Quoniam enim factum est, vt A C, cum H, ad H, sic A C, seù ei æqualis B C, ad C E; & vt B C, ad C E, sic quadratum B C, ad quadratum C F, seù ad quadratum C D, ei æquale. Ergo, & vt A C, cum H, ad H, sic quadratum B C, ad quadratum C D. Et diuidendo, vt A C, ad H, sic excessus quadrati B C, super quadratum C D, ad quadratum C D. Sed talis excessus est æqualis quadrato D B, & duobus rectangulis C D B, quæ omnia faciunt rectangulum A D B. Ergo, & vt A C, ad H, sic rectangulum A D B, ad quadratum D C. Quod erat faciendum.

PROBLEMA IX. PROP. XXVII.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem.

SIT pariter, vt in superiori Problemate, data ratio, quàm habet B D, ad H; & pariter sit continuata ad tertium terminum K, vt suprà factum est; & data recta B C, secta bifariam in D, rursùm secetur in F, inter C, D, (per Lemma antecedens) vt rectangulum B F C, sit ad quadratum F D, vt D B, ad K; & à puncto F, acta, more solito, normali A F G, & à puncto A, tangente A E, & intellectis conis E A G, A D G. Dico istos esse quæsitos. Nam cùm factum sit, vt B D, ad K, sic rectangulum B F C, seù quadratum A F, ei æquale, ad quadratum F D; & cum sit, vt B D, ad K, sic qua-

quadratum B D, ad quadratum H. Ergo, & vt quadratum B D, ad quadratum H, sic quadratum A F, ad quadratum F D; & vt linea B D, ad lineam H, sic A F, ad F D. Sed vt A F, ad F D, sic (propter similitudinē triangulorum E A F, A F D,) E A, ad A D. Et vt E A, ad A D, sic (sumpta communi altitudine A F,) rectangulum E A F, ad rectāgulum D A F. Vt autem rectangulum E A F, ad rectangulum D A F, ità est superficies coni E A G, ad superficiē coni D A G. Ergo, à primo ad vltimum, erit vt B D, ad H, sic superficies coni E A G, ad superficiem coni D A G. Quod erat faciendum.

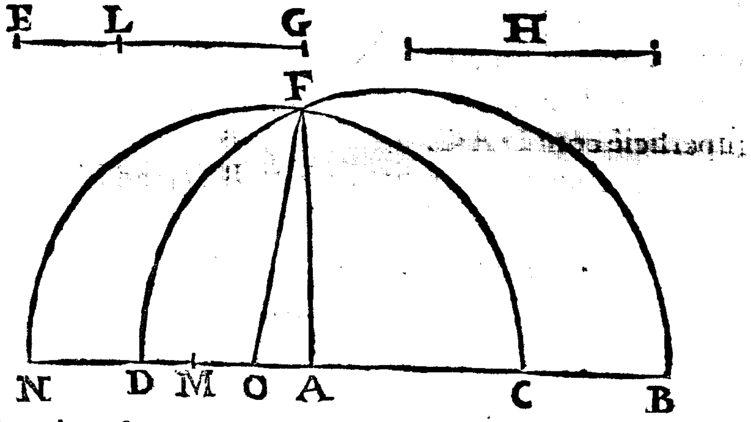


(.·.)

LEM-

LEMMA XIX. PROP. XXVIII.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter diuidere in puncto, vt rectangulum sub tota, & sub vno segmento; vna cum rectangulo sub segmentis, ad quadratum alterius segmenti, vna cum rectangulo sub hoc eodem segmento, & sub indiuisa, sit in data proportione.

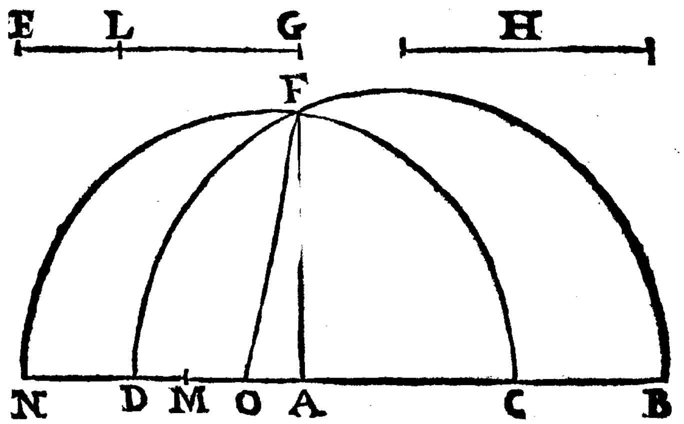


Datæ duæ rectæ lineæ sint A B, & E G. Oportet A B, taliter diuidere in C, vt rectangulum A B C, cum rectangulo A C B, sit ad quadratum A C, vna cum rectangulo contento sub A C, & sub E G, sit

sit in data proportione, quæ sit ea, quàm habet A B, ad H. Fiat ergo, vt A B, cum H, ad H, sic B A, ad A D, ei positam in directum; & super diametrum D B, fiat semicirculus; & à puncto A, erigatur A F, occurrens periphæriæ in puncto F. Pariter fiat, vt B A, cum H, ad H, sic E G, ad G L; & E L, fiat æqualis A M, quæ diuisa bifariam in O, & iuncta O F; centro O, interuallo O F, describatur semicirculus N F C, secans A B, in C, (secabit enim, quia cum D A, sit minor A B, etiam F A, erit minor A B. Cùm verò O F, sit minor duabus O A, A F, erit multò minor duabus O A, A B, nempè O B.) Dico punctum C, esse quæsitum. Quoniam enim rectangula N A C, B A D, sunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato A F; & rectangulo N A C, est æquale rectangulum M C A, quia N M, A C, sunt æquales; & rectangulum M C A, est æquale rectangulo M A C, & quadrato A C; ergo rectangulum B A D, erit æquale rectangulo M A C, & quadrato A C. Sed, cum M A, facta sit æqualis E L; ergo rectangulum M A C, erit æquale rectangulo contento sub E L, & A C. Ergo rectangulum B A D, erit æquale rectangulo sub E L, in A C, & quadrato A C. Quare communi addito rectangulo sub L G, in A C; rectangulum B A D, cum rectangulo sub L G, in A C, erit æquale rectangulo sub E G, in A C, vna cum quadrato A C. Quod seruetur.

Verùm, quoniam factum est, vt B A, cum H, ad H, sic B A, ad A D; & cum sit, vt B A, ad A D, sic qua-

quadratum BA, ad rectangulum BAD, (sumpta eadem altitudinem AB.) Ergo, & vt BA, cum H, ad H, sic quadratum BA, ad rectangulum BAD.



Pariter cum factum sit, vt BA, cum H, ad H, sic EG, ad GL; & vt EG, ad GL, cum ita sit (sumpta communi altitudine AC,) rectangulum EG, AC, ad rectangulum GL, AC; ergo, & vt BA, cum H, ad H, sic rectangulum EG, AC, ad rectangulum LG, AC. Ergo in eadem proportione BA, cum H, ad H, habemus, tàm quadratum AB, ad rectangulum BAD, quàm rectangulum EG, AC, ad rectangulum LG, AC. Quare, & vt BA, cum H, ad H, sic erunt ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe quadratum AB, cum rectangulo EG, AC, ad rectangulum BAD, cum rectangulo LG, AC Sed cum rectangulis BAD, & LG, & AC, ostensa sint æqualia rectangulum EG, AC, & quadratum AC. Ergo quadratum BA, cum rectangulo EG, AC, ad hæc habe-

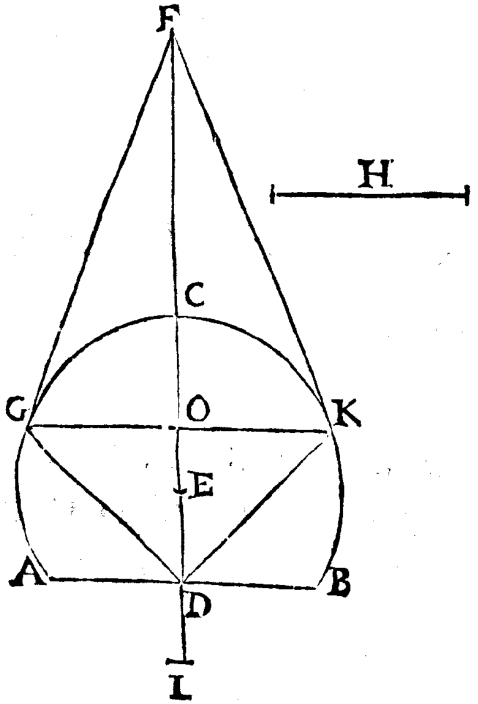
habebit eandem proportionem. Quare, & vt BA, cum H, ad H, sic quadratum BA, cum rectangulo EG, AC, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Quare, & diuidendo, erit vt AB, ad H, sic excessus quadrati BA, & rectanguli EG, AC, super quadratum AC, & super rectangulum EG, AC, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Sed talis excessus est æqualis rectangulis ABC, & ACB, vt consideranti patet. Ergo, & vt AB, ad H, sic rectangula ABC, ACB, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Quod erat faciendum.

PROBLEMA X. PROP. XXIX.

Data portione sphæræ maiori hemisphærio, producere eius axim in puncto ad partem verticis portionis, vt ab ipso puncto ducta tangente, & à puncto contactus ductis perpendiculari ad axem, & linea ad centrum basis portionis, & ex istis triangulis reuolutis circa axim, facto rhombo, coni rhombi sint ad inuicem in data proportione.

 Data

DAta portio ſit A C B, maior hemiſphærio, cuius axis ſit C D, centrũ ſphæræ E; data verò proportio ſit, quàm habet C D, ad H. Oportet producere D C, in F, vt à puncto F, ducta tangente F G, & à puncto G, ductis perpendiculari G O, & G D, ad centrum baſis portionis, & ex reuolutione, facto rhombo F G D K; conus F G K, ſit ad conum G D K, vt C D, ad H. Sit



C L, diameter ſphæræ, & datis C E, ſemidiametro, & E D, diuidatur taliter C E, in O, per Lemma antecedens, vt rectangula E C O, E O C, ſint ad rectangulum D E O, cum quadrato O E, nempè ad rectangulum D O E, vt D C, ad H; & per punctum O, erecta perpen-

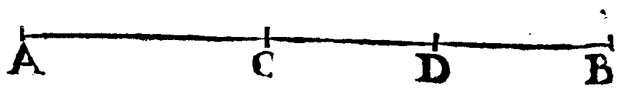
diculari G O K, & à puncto G, ducta tangente G F, intelligantur coni facti conſueto modo, F G K, G D K. Dico iſtos eſſe quæſitos.

Conus F G K, ad conum G D K, ob eandem baſim G O K, eſt, vt F O, ad O D. Sed ratio F O, ad O D, de foris ſumpta O E, componitur ex ratione F O, ad O E, & ex ratione O E, ad O D. Ergo ratio coni F G K, ad conum G D K, componetur quoque ex ratione F O, ad O E, & ex ratione O E, ad O D. Sed vt F O, ad O E, ſic quadratum G O, ad quadratum O E, ſeù rectangulum L O C, æquale quadrato G O, ad idem quadratum O E. Ergo ratio quoque coni F G K, ad conum G D K, componetur ex ratione rectanguli L O C, ad quadratum O E, & ex ratione O E, ad O D. Sed ratio rectanguli L O C, ad quadratum O E, componitur ex rationibus C O, ad O E, & L O, ad O E. Ergo ratio coni F G K, ad conum G D K, componetur quoque ex rationibus C O, ad O E, L O, ad O E, & O E, ad O D. Sed duæ rationes L O, ad O E, & O E, ad O D, faciunt rationem L O, ad O D. Ergo ratio coni F G K, ad conum G D K, componetur ex ratione C O, ad O E, & L O, ad O D. Sed iſtæ duæ rationes faciunt rationem rectanguli L O C, ad rectangulum D O E; & rectangulo L O C, ſunt æqualia rectangula E C O, E O C, (vt conſideranti patet.) Ergo, vt rectangulum E C O, cum rectangulo E O C, ad rectangulum D O E, nempè, vt D C, ad H, ſic conus F G K, ad conum D G K. Quod erat faciendum.

LEMMA XX. PROP. XXX.

Sit recta linea A B, secta in duobus punctis C, D. Dico rectangulum A B C, cum rectangulo A C, B D, excedere rectãgulum A D C; rectangulis A B D, A D B.

NAM rectangulum A B C, est æquale duobus rectangulis A B D, & A B, C D; rectangulum verò A B, C D, est æquale duobus rectangulis A D C, & B D C. Ergo rectangulum A B C, excedit rectangu-

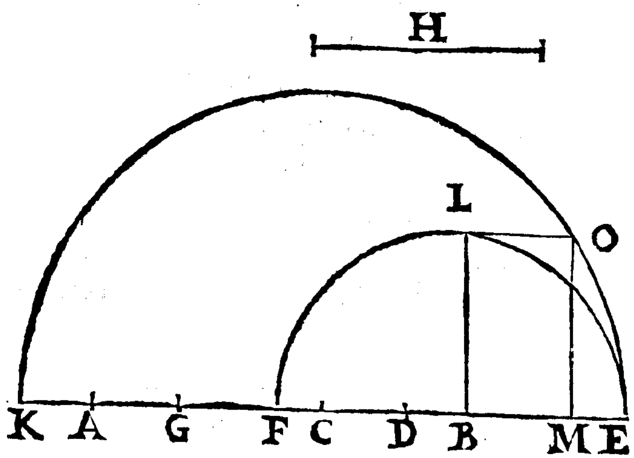


lum A D C, rectangulo A B D, & rectangulo B D C. Sed rectangulum C D B, cum rectangulum A C, D B, facit rectangulum A D B. Ergo rectangulum A B C, cum rectangulo A C, D B, excedit rectangulum A D C, duobus rectangulis A B D, & A D B. Quod erat ostendendum.

LEM-

LEMMA XXI. PROP. XXXI.

Datam rectam lineam A B, sectam in puncto C, rursùm ipsam secare in puncto D, inter C, B; vt rectangulum A B D, cum rectangulo A D B, sit ad rectangulum A D C, in data proportione.

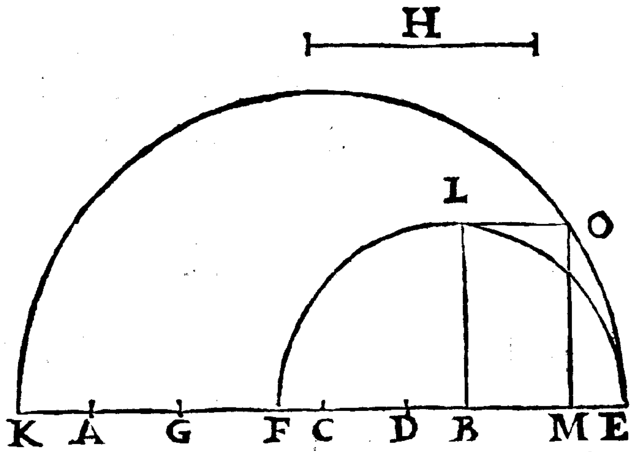


DAta proportio sit, quàm habet A B, ad H; & producatur A B, in E, vt B E, sit æqualis B C; & fiat vt A B, cum H, ad H, sic A B, ad A F; & pariter sic B C, ad A G. Rursùm producatur B A, in K, vt K A, sit æqualis G F. Tunc super diametros F E, & K E, fiant semicirculi ad eamdem partem, & à puncto B, erecta B L, perpendiculari occurrente periphæriæ circuli mino-

minoris in L; per punctum L, ducatur L O, parallela KE, occurrens periphæriæ circuli maioris in O; à quo puncto O, dimittatur diametro KE, perpendicularis OM, & ipsi ME, fiat æqualis BD. Dico punctum D. esse quæsitum.

Nam, quoniam quadrata LB, & OM, sunt æqualia, etiam rectangula KME, & FBE, istis quadratis æqualia, erunt æqualia. Sed rectangulo FBE, est æquale rectangulum FBC, quia BE, facta est æqualis BC; & rectangulo KME, est æquale rectangulum KM, BD, quia ME, facta est æqualis BD; ergo, rectangulum FBC, erit æquale rectangulo KM, BD, nempè duobus rectãgulis KBD, & MBD, in quæ diuiditur rectangulum KM, DB. At rectangulum MBD, est æquale rectangulo CDB; quia, cum BE, sit facta æqualis CB; & pariter ME, facta sit æqualis DB; ergo reliqua BM, erit æqualis reliquæ CD; & rectangulum MBD, erit æquale rectangulo CDB. Ergo, & rectangulum FBC, erit æquale rectangulis KBD, & CDB; & addito communi rectangulo AF, BC; ergo rectangulum FBC, cum rectangulo AF, BC, nempè totum rectangulum ABC, erit æquale rectangulis KBD; CDB, & AF, CB. Sed rectangulum ABC, diuiditur in duo rectangula, nempè ABD, & AB, CD; & pariter rectangulum KBD, diuiditur in rectangula KA, DB, & ABD. Ergo communi hinc inde ablato rectangulo ABD, remanet ex vna parte rectangulum AB, CD, æquale rectangulis KA, DB, CDB, & AF, CB. Sed quia KA, facta est æqualis GF, rectangulum KA, DB, erit

erit æquale rectanguto GF, DB; quare rectangulum AB, CD, erit æquale rectangulis GF, DB; CDB, & AF, CB. Rursùm rectangulum AB, CD, diuiditur in rectangula BDC, & ADC; ergo rursùm, communi ablato rectangulo BDC, rectangulum ADC, erit æquale rectangulis GF, DB, & AF, CB. Quod seruetur.



Quoniam verò factum est, vt AB cum H, ad H, tàm tota BA, ad totam AF, quàm ablata BC, ad ablatam AG; ergo, & reliqua CA, erit ad reliquam FG, vt tota ad totam, seù vt BA, cum H, ad H: at verò, vt BA, ad AF, sic (sumpta communi altitudine BC,) rectangulum ABC, ad rectangulum AF, BC; & vt CA, ad FG, sic (sumpta communi altitudine DB,) rectangulum AC, DB, ad rectangulum GF, DB; ergo, & vt BA, cum H, ad H, sic est tàm rectangulum ABC, ad rectangulum AF, CB, quàm rectangulum AC, DB, ad rectangulum GF, DB. Ergo, & vt BA, cum H, ad H, sic

H, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe duo rectangula ABC, & AC, DB, ad duo rectangula AF, CB, & GF, DB, nempe ad rectangulum ADC, quod supra, istis duobus rectangulis probatum est æquale. Ergo, & diuidendo, vt AB, ad H, sic excessus duorum rectangulorum ABC, & AC, DB, super rectangulum ADC, ad rectangulum ADC. Sed iste excessus, in superiori Lemmate probatum est æquale duobus rectangulis ABD, & ADB. Ergo, & vt AB, ad H, sic duo rectangula ABD, & ADB, ad rectangulum ADC. Quod erat faciendum.

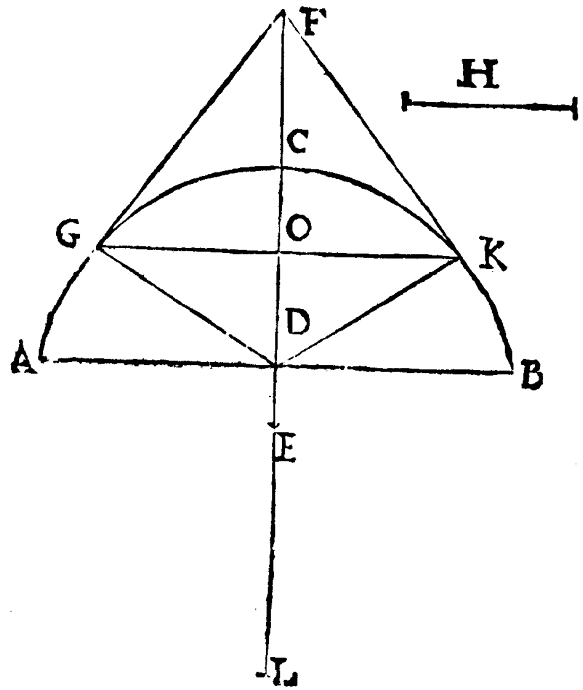
PROBLEMA XI. PROP. XXXII.

Data portione minori hemisphærio, facere eadem, quæ in superiori Problemate.

SINT data omnia, quæ in superiori Problemate, sed portio ACB, sit minor hemisphærio. Data EC, secta in puncto D, rursùm diuidatur in O, inter C, D, vt rectangula ECO, EOC, sint ad rectangulum EOD, vt EC, ad H; & à puncto O, erecta normali GOK, & à puncto G, tangente GF, intelligantur, (prius ducta GD,) coni FGK, DGK. Quos dico esse quæsitos.

Nam eodem discursu, quo factum est in superiori Pro-

Problemate, de foris sumpta OE, probabitur conum FGK, ad conum GDK, habere rationem compositam



ex ratione rectanguli LOC, ad quadratum OE, & ex ratione OE, ad OD. Et eodem modo probabitur, ex istis rationibus componi rationem rectanguli LOC, ad rectangulum EOD. Sed rectangulum LOC, est æquale rectangulis ECO, EOC. Ergo &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVatuor antecedentia Problemata potuissent proponi sub vno tanto Problemate: sed quia in quolibet horum quatuor casuum requiruntur diuersa Lemmata, ideò, claritatis gratia, Problema distinctum est in quatuor Problemata.

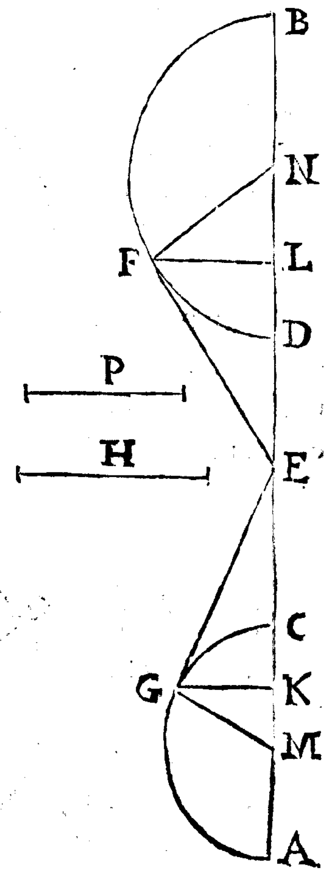
Pariter hic essent tradendæ constructiones horum duorum posteriorum Problematum in superficiebus conicis; sed quoniam non habemus solutionem nisi per locum solidum; & in hoc Opere non intelligimus tradere solutiones, nisi per locum planũ; ideò ex industria omittũtur; reseruando earũ traditionẽ ad aliud tempus, quo, Deo fauente, alia circa hanc materiã conscribemus.

LEMMA XXII. PROP. XXXIII.

Datis duobus semicirculis extra se positis, nec se contingentibus, quorum diametri sint sibi in directum, reperire in linea intermedia inter duos semicirculos punctum, à quo ductis tangentibus semicirculos, & à punctis cõtactus ductis sinibus rectis, abscindant isti sinus versos, seù sagittas, in data proportione.

Sint

SINT dati duo semicirculi B F D, C G A, extra se positi, nec se contingentes, quorum diametri B D, C A, sint vna linea cõtinuata. Oportet in segmẽto intermedio C D, reperire punctum E, à quo ductis tangentibus E G, E F, & pariter ductis sinibus rectis G K, F L, abscindant isti sinus versos K C, D L, in data proportione.

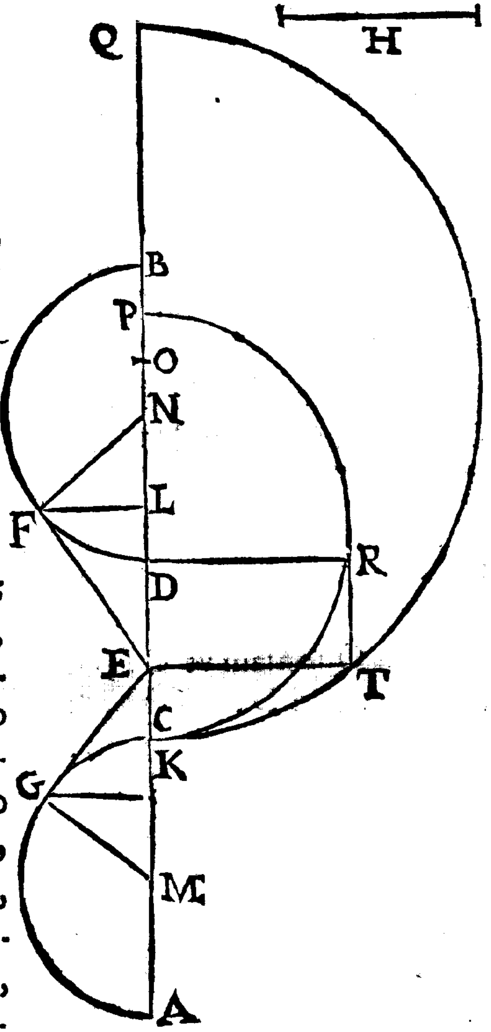


Centra semicirculorum sint M, & N, & data proportio sit, quàm habet M C, ad H; quæ, vel est æqualis ei, quam habet M C, ad D N, vel maior, vel minor. Si sit æqualis. Diuidatur C D, in E, vt sit, sicut M C, ad D N, vel ad H, sic C E, ad E D. Dico punctum D, esse quæsitũ. Ducantur tangentes, & perpendiculares, & F N, G M, vt in schemate. Quoniam vt C E, ad E D, sic C M, ad D N; ergo, & permutando, & componendo, vt E M, ad M C, sic E N, ad N D; vt autem E M, ad M C, sic (vt sæpè dictum est) C M, ad M K; & pariter, vt E N, ad N D, sic D N, ad N L; ergo, & vt C M, ad M K, ita D N, ad N L. Ergo & per conuersionem rationis, vt C M, ad C K, sic N D, ad D L. Et permutando, vt

H 2 C M,

CM, ad ND, seù ad H, sic CK, ad DL.

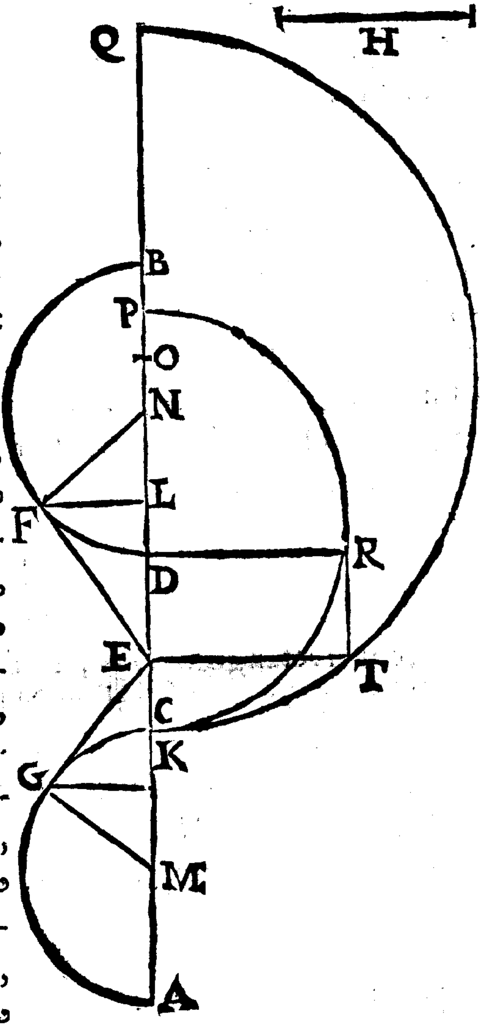
Si verò proportio MC, ad H, sit minor EA, quàm habet MC, ad DN, nempè si H, sit maior ND; fiat DO, æqualis ipsi H; & fiat vt ON, ad ND, sic CM, ad DP, & OD, ad PQ, ipsi DP, positam in directum, vbicumque cadant ista puncta P, Q; factis autem super PC, QC, semicirculis ad partem oppositam prioribus, & à puncto D, erecta normali DR; & per punctum R, ducta RT, parallela QA; & à puncto T, dimissa perpendiculari TE. Dico punctum E, esse quæsitum; hoc est, quod ductis tangentibus EG, EF, & perpendicularibus GK, FL, erit, vt MC, ad H, sic KC, ad DL.



Iam quilibet faciliter proprio Marte potest cognoscere,

scere, quadrata DR, ET, esse æqualia, ac proinde æquale quoque esse rectangulum QEC, rectangulo PDC. Ergo, vt QE, ad PD, sic DC, ad CE. Et diuidendo, vt QP, cum DE, ad PD, sic DE, ad EC. Sed (sumpta communi altitudine ON,) vt QP, cum DE, ad PD, sic rectangula QP, ON, & DE, ON, ad rectangulum PD, ON. Ergo, vt DE, ad EC, sic rectangula QP, ON, & DE, ON, ad rectangulum DP, ON. Sed rectangulum QP, ON, est æquale rectangulo ODN, (quia supra factum est, vt ON, ad ND, sic OD, ad PQ.) Et pariter rectangulum DP, ON, est æquale rectangulo ND, CM, (quia pariter factum est supra, vt ON, ad ND, sic CM, ad DP.) Ergo, & vt DE, ad EC, sic rectangulum ODN, cum rectangulo NO, DE, ad rectangulum ND, CM. Sed vt DE, ad EC, sic est (sumpta communi altitudine ND,) rectangulum EDN, ad rectangulum ND, CE. Ergo, & vt DE, ad EC, tàm est rectangulum ODN, cum rectangulo ON, DE, ad rectangulum ND, CM, quàm rectangulum NDE, ad rectangulum ND, EC. Ergo, & vt DE, ad EC, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe rectangula ODN; NO, DE, & NDE, ad rectangula ND, CM, & ND, CE. Sed rectangula ODN; NO, DE, & NDE, faciunt rectangulum OD, NE. Et pariter rectangula ND, CM, & ND, CE, faciunt rectangulum ND, EM. Ergo, & vt DE, ad EC, sic rectangulum OD, NE, ad rectangulum ND, EM. Quod seruetur.

Rursùm vt D E, ad E C; sic (sumpta cõmuni altitudine M C,) rectangulum D E, M C, ad rectangulum E C M; ergo & vt rectangulum O D, N E, ad rectangulum N D, E M, sic rectangulum D E, C M, ad rectangulum E C M. Et permutando, vt rectangulum O D, N E, ad rectangulum D E, C M, sic rectangulum N D, E M, ad rectangulum E C M. Sed, vt rectangulum O D, N E, ad rectangulũ D E, C M, sic rectangulum O D N, ad rectangulum D L, M C, (vt statim ostendetur.) Et vt rectangulum N D, E M, ad rectangulum E C M, sic rectangulum N D, M C, ad rectangulum M C K, (vt pariter statim ostendetur.) Ergo, & vt rectangulum O D N, ad rectangulum D L, C M, sic rectangulum



gulum N D, C M, ad rectangulũ M C K. Et permutando, vt rectangulũ O D N, ad rectangulũ D N, C M, nempe, vt O D, ad C M, sic rectangulum D L, C M, ad rectãgulum M C K, nempè, D L, ad C K. Ergo, & conuertendo, vt M C, ad D O, seù ad H, sic K C, ad D L. Quod &c.

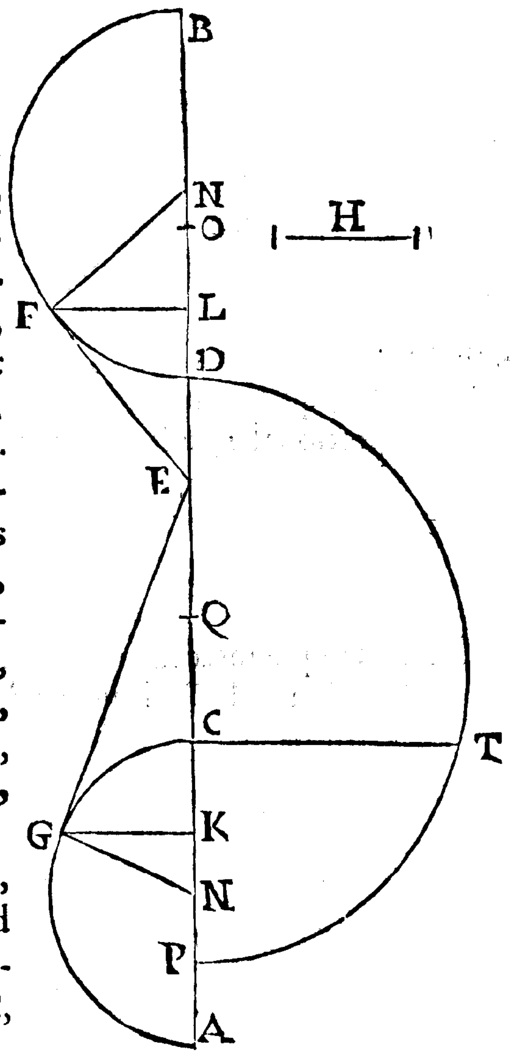
Primum autem, quod assumptum est, nempè rectangulum O D, N E, ad rectangulum D E, C M, esse, vt rectangulum O D N, ad rectãgulum D L, C M: patet, quia proportiones horum rectangulorum ex ijsdem proportionibus componuntur. Nam proportio D O, ad C M, est eadem in vtroque antecedente ad suum consequens. Proportio verò N E, ad E D, est æqualis proportioni D N, ad D L; quia, cum tres E N, N D, & N L, sint continue proportionales, erit, per conuersionem rationis, vt N E, ad E D, sic N D, ad D L.

Eodem pacto ostendetur secundum assumptũ, nempe esse, vt rectangulũ N D, M E, ad rectangulum E C M, sic rectangulum N D, M C, ad rectangulum M C K. Nam pariter in vtroque antecedenti ad suum consequens, est proportio N D, ad M C, reliqua verò proportio M E, ad E C, eodem modo concludetur æqualis proportioni M C, ad C K.

Si verò proportio data maior sit ea, quam habet M C, ad D N; nẽpè si H, est minor D N. Fiat ei æqualis D O; & fiat, vt N O, ad N D, sic vtraque simul O D, & C M, ad aliam; quæ, vel erit æqualis D C, vel maior; vel minor; & sic iste casus habebit tres casus.

Sit primum æqualis; & diuidatur D C, in Q, in partes consequentes proportionis; nẽpè sit, vt N O, ad N D, sic

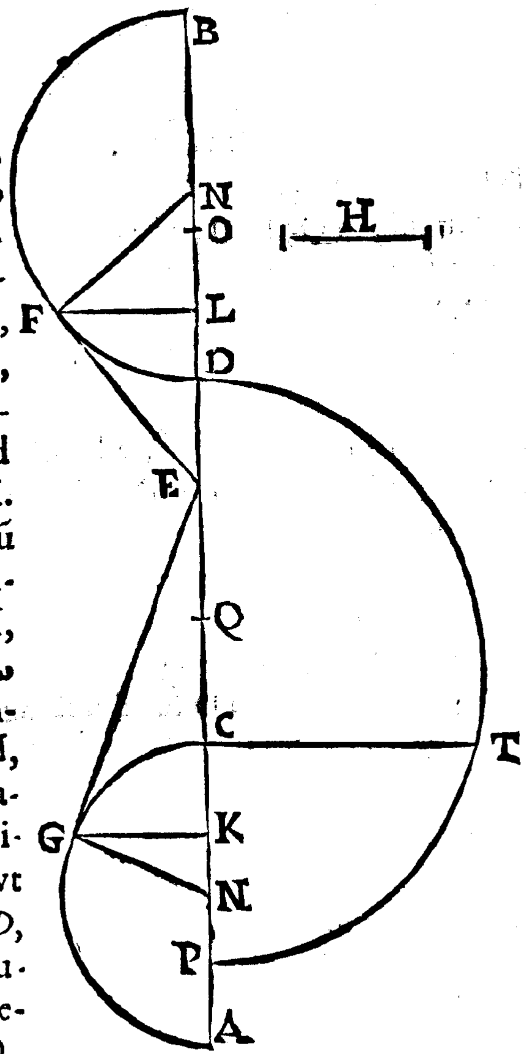
ſic M C, ad C Q, & D O, ad D Q; & ipſi C Q, fiat æqualis C P; & ſuper diametro D P, fiat ſemicirculus D T P, ad partem oppoſitã prioribus; ac à pũcto C, erigatur normalis C T. Patet C T, maiorem eſſe C P, ſeù C Q, & minorem C D. Fiat ei æqualis C E. Dico punctum E, eſſe quæſitum. Sint ergo ductæ tangentes, & perpendiculares, vt in ſchemate. Quoniam tres P C, C T, & C D, ſunt continuè proportionales. Ergo, & tres C Q, C E, & C D, eis æquales, erunt continuè proportionales. Quare erit, vt D C, ad C E, ſic C E, ad C Q. Et diuidendo, vt D E, ad E C, ſic E Q, ad Q C. Et vt vnum ante-



cedentium ad vnum conſequentium, nempè vt D E, ad E C, ſic ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nempe tota D Q, ad E C, cum C Q. Sed vt D Q, ad E C, cum C Q, ſic (ſumpta communi altitudine N O,) rectangulum N O, D Q, ad rectangula N O, E C, & N O, C Q. Ergo & vt D E, ad E C, ſic rectangulum N O, D Q, ad rectangula N O, E C, & N O, C Q. Sed rectangulo N O, D Q, eſt æquale rectangulum N D O, (quia ſupra factum eſt, vt N O, ad N D, ita D O, ad D Q;) & pariter rectangulum N O, C Q, eſt æquale rectangulo N D, M C, (quia pariter ſupra factum eſt, vt N O, ad N D, ſic M C, ad C P, ſeù ad C Q, ei æqualem.) Ergo, & vt D E, ad E C, ſic rectangulum N D O, ad rectangula N O, C E, & N D, C M.

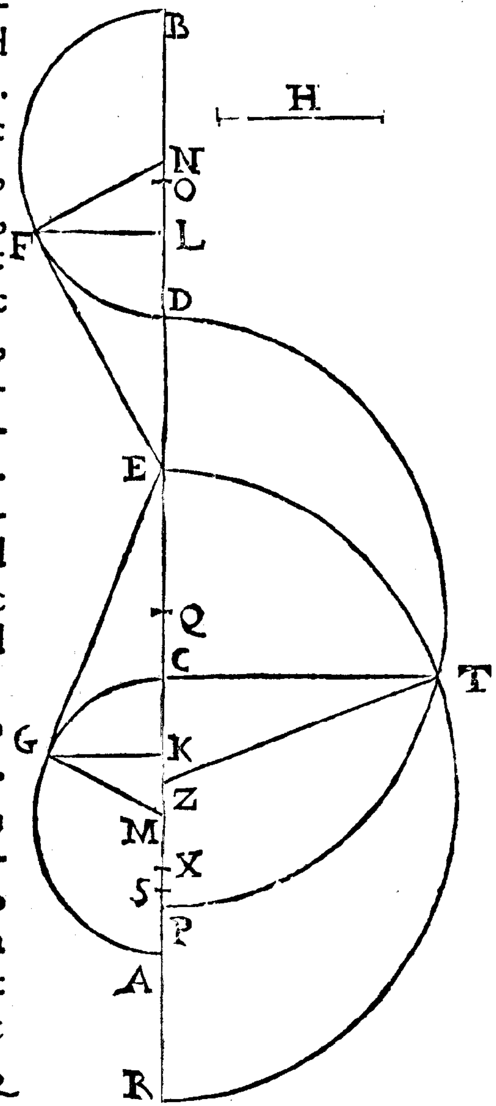
Pariter vt D E, ad E C, ſic (ſumpta communi altitudine D O,) rectangulum O D E, ad rectangulum O D, E C; ergo & vt D E, ad E C, ſic eſt tàm rectangulum N D O, ad rectangula N O, C E, & N D, C M, quàm rectangulum O D E, ad rectangulum O D, E C. Ergo, & vt D E, ad E C, ſic ambo antecedentia, nempe rectangula O D N, & O D E, ad ambo conſequentia, nempe ad tria rectangula N D, C M; N O, C E, & O D, C E. Sed rectangulum O D N, cum rectangulo O D E, eſt æquale rectangulo O D, N E; & pariter tria rectangula N D, C M, & N O, C E, & O D, C E, ſunt æqualia rectangulo N D, M E. Ergo, & vt D E, ad E C, ſic rectangulum O D, N E, ad rectangulum N D, M E.

Rurſùm, vt D E, ad E C, ſic (ſumpta communi altitudine CM,) rectangulum DE, CM, ad rectangulum ECM. Ergo, & vt rectangulũ OD, NE, ad rectangulũ ND, ME, ſic rectangulũ DE, MC, ad rectangulum ECM. Et permutando, vt rectangulum OD, NE, ad rectangulũ DE, CM, ſic rectangulum ND, ME, ad rectangulũ ECM. Sed, vt rectangulũ OD, NE, ad rectangulũ DE, CM, ſic rectangulum ODN, ad rectangulum DL, CM, vt patet ex probatione ſuperiori primi aſſumpti; & vt rectangulum ND, ME, ad rectangulum ECM, ſic rectangulum ND, MC, ad rectangulum MCK, vt patet ex probatione ſecundi aſſumpti.



Ergo, & vt rectangulum ODN, ad rectangulum DL, CM, ſic rectangulũ ND, CM, ad rectangulũ MCK. Et permutando, vt rectangulũ ODN, ad rectãgulũ ND, MC, nempe, vt DO, ad MC, ſic rectangulum DL, CM, ad rectangulum MCK, nempè ſic DL, ad CK. Quare, & conuertendo, vt MC, ad DO, ſeù ad H, ſic KC, ad DL. Quod erat faciendum.

SI autem illa alia ſit maior DC. Sit hæc DX; & pariter DX, diſtinguatur in Q, in partes proportionales, nempè fiat, vt NO, ad ND, ſic tàm OD, ad DQ, quã MC, ad QX. & ipſi QX, fiat æqualis CP, vbicumque cadant tria

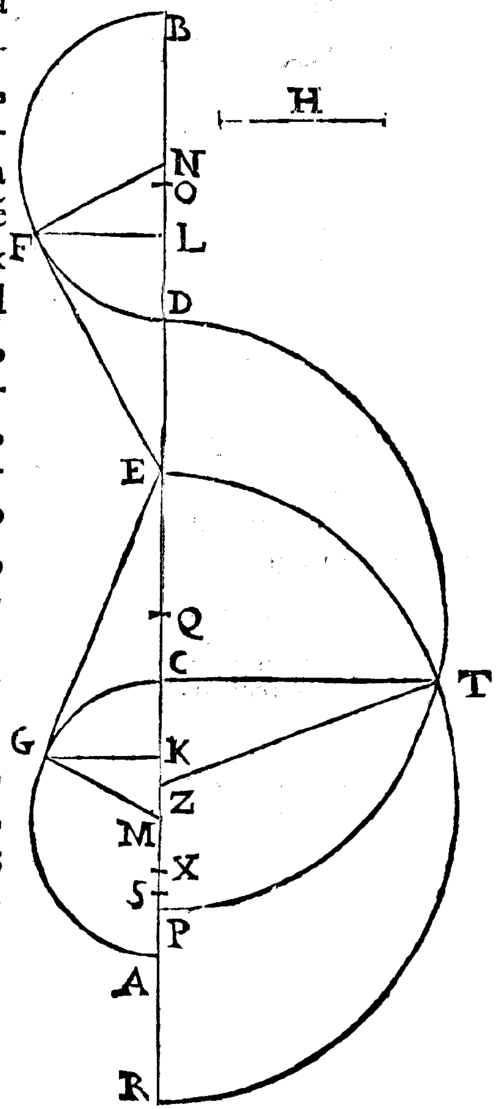


puncta Q, X, P. Deinde super diametrum DP, fiat semicirculus DTP; & erigatur normalis CT, ac diuisa CX, bifariam in Z, & iuncta ZT; centro Z, interuallo ZT, fiat semicirculus ETR, qui semper secabit DC, inter puncta D, C, vt patebit inferius. Dico punctum E, esse quæsitum. Ducantur enim tangentes, & perpendiculares. Quoniam enim rectangula DCP, ECR, sunt æqualia, quia æqualia eidem quadrato CT; & cùm rectangulum RCE, sit æquale rectangulo XEC, quia, cum ZE, sit æqualis ZR, & ZX, sit æqualis ZC, ergo reliqua EC, erit æqualis reliquæ XR. Ergo, & rectangulum DCP, erit æquale rectangulo XEC. Ergo vt DC, ad CE, sic XE, ad CP, seù ad QX, ei æqualem. Et diuidendo, vt DE, ad EC, sic EQ, ad QX. Et vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; nempè, vt DE, ad EC, sic DQ, ad EC, cum QX. In reliquis sequatur præcedens demonstratio, nempe, vt DQ, ad EC, cum QX, sic (sumpta communi altitudine, ON,) &c.

Quòd verò semper semicirculus secet DC, inter C, D, patet. Quia si non secat, vel cadit in D, vel vltra D. Non in D; quia tunc punctum R, esset idem, ac P; & esset idem semicirculus DTP. Cùm ergo tota ZD, esset æqualis toti ZP; & ZC, ZX; ergo, & reliqua DC, esset æqualis reliquæ XP. Quare, addita communi CX, tota DX, esset æqualis CP. Quod implicat; quia CP, facta est æqualis tantum QX, quæ est pars DX. Maius absurdum concluderetur si punctum E,

cade-

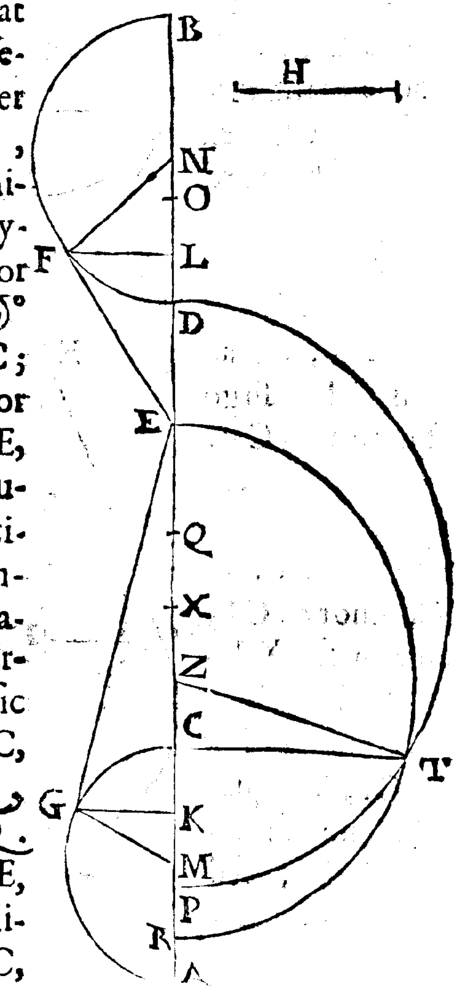
caderet vltra D, v. b. in L; quia tunc punctum R, caderet vltra P, putà in S; & tunc rectangulum DCP, esset æquale rectãgulo LCS, quia ambo æqualia eidẽ quadrato TC, ex hypothesi falsa. Sed rectangulo LCS, esset æquale rectangulum XLC, quia XS, est æqualis CL. Ergo rectangulũ DCP, esset æquale rectangulo XLC. Quare, esset, vt DC, minor ad CL, maiorem sic XL, ad CP. Ergo XL, esset minor CP; cum CP, sit æqualis QX, non solùm minor LX, sed etiam DX. Patet ergo assumptum.



SI tandem illa alia sit minor DC. Sit hæc DX; & distinguatur in

Q, in

Q in partes proportionis, vt sit sicut N O, ad N D, sic C M, ad D Q; & O D, ad Q X; & D Q, fiat æqualis C P. Et super D P, facto semicirculo, & erecta normali C T, diuisaque bifariam X C, in Z, & iuncta Z T; centro Z, interuallo Z T, fiat semicirculus R T E, secans D C, in E, inter D, C. Secabit enim, quia, cùm Z P, sit minor Z D, quia, ex hypothesi D X, est maior D Q, hoc est C P; & X Z, est æqualis Z C; vnde Z T, est minor Z D. Dico punctum E, esse quæsitum. Nam ductis, vt prius, tangentibus, & sinibus; rectangulum D C P, est æquale rectangulo E C R. Ergo, vt D C, ad C E, sic R C, ad C P. Sed R C, est æqualis E X, & C P, est æqualis D Q. Ergo, & vt D C, ad C E, sic E X, ad D Q. Et diuidendo, vt D E, ad E C, sic excessus X E, super D Q, ad D Q. Et vt vnum antecedentium, ad vnum consequentium, ita omnia antece-



tece-

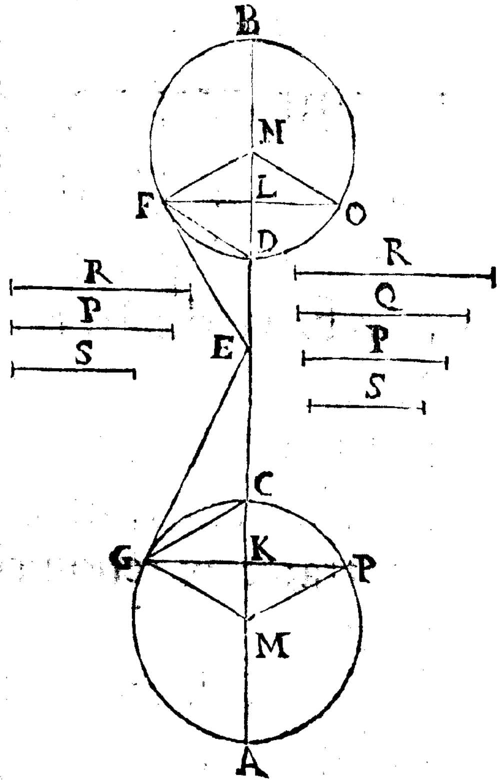
tecedentia, ad omnia consequentia; nempe, vt D E, ad E C, sic excessus D X, super D Q, nempè Q X, ad D Q, cum E C. Sed, vt Q X, ad D Q, cum E C, sic (sumpta communi altitudine O N,) &c. vt suprà factum est, & concludetur propositum. Factum est ergo in omnibus casibus, vt M C, ad H, sic K C, ad D L. Quod erat faciendum.

PROBL. XII. PROP. XXXIV.

Datis duabus sphæris cum conditionibus suprà positis, reperire punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G; & à punctis contactus dimissis perpēdicularibus F L, G K, ad diametros, & G M, F N, ad centra; & ex reuolutione sectorum planorum G M C, F D N, circa B A, factis sectoribus solidis G M P C, & F N O D; isti sint ad inuicem in data proportione.

Data proportio sit, quàm habet R, ad S; & fiat, vt C M, ad D N, sic R, ad Q; & pariter fiat, vt R, ad Q, sic Q, ad P. Deinde (intellectis prius sphæris

ris sectis per axem more solito) per Lemma antecedens, inueniatur punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G, & perpendicularibus G K, F L, sit, vt P, ad S, sic K C, ad D L; & intelligantur sectores, vt in schemate. Dico punctum E, esse quæsitum. Cùm enim factum sit, vt R, ad Q, sic M C, ad D N; ergo, vt quadratum R, ad quadratum Q, nempe, vt R, ad P, sic quadratum M C, ad quadratum D N. Verùm, cùm proportio R, ad S, componatur ex proportione R, ad P, & P, ad S; & vt R, ad P, sic sit quadratum M C, ad quadratum D N; & vt P, ad S, sic K C, ad D L. Ergo proportio R, ad S, componetur quoq; ex proportione quadrati M C, ad quadratum D N, hoc est ex dupla proportione M C, ad D N, & ex proportione K C, ad D L. Sed vt vna proportio M C, ad D N, sic A C, dupla C M, ad D B, duplam D N. Ergo proportio R, ad S, componetur ex triplici proportione, nempe ex proportione



MC,

M C, ad D N, ex proportione A C, ad D B, & ex proportione K C, ad D L. Sed proportiones A C, ad D B, & K C, ad D L, faciunt rationē rectanguli A C K, ad rectangulum B D L; nempe (ductis G C, F D) quadrati G C, ad quadratum F D. Ergo proportio R, ad S, componetur ex proportione quadrati G C, ad quadratum F D, & ex proportione M C, ad D N. Sed hæ duę proportiones componunt rationem sectoris G M P C, ad sectorem N F D O, vt elicitur ex Archimede lib. 1. de Sphæra, & Cylindro propos. 42. & ex nostra prima propositione huius. Ergo, vt R, ad S, sic sector G M P C, ad sectorem F D O N. Quod erat faciendum.

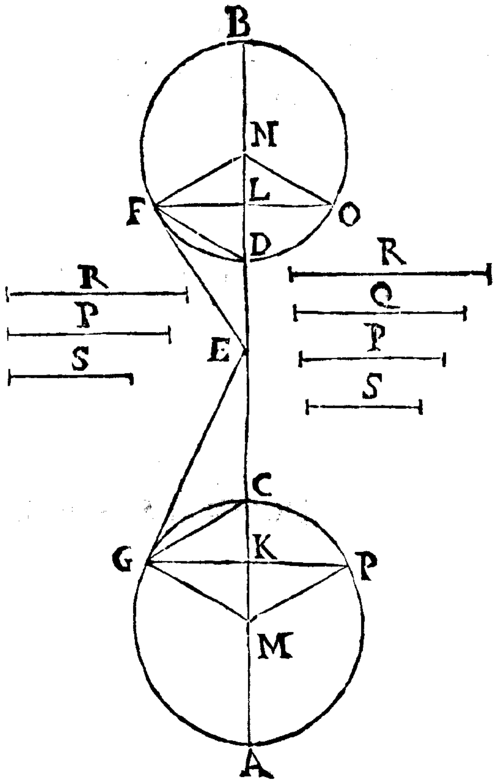
PROBL. XIII. PROP. XXXV.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis G C P, sit ad superficiem sphæricam portionis F D O, in data proportione.

IVngantur F D, G C; & data proportio sit, quàm habet R, ad S; & fiat, vt A C, ad D B, sic R, ad P, &, per propositionem 33. diuidatur C D, in E, vt factis omnibus, quæ ibidem, sit, vt P, ad S, sic K C, ad D L;

K &

& reuolutis omnibus, & factis portionibus G C P, F D O. Dico esse quæsitas. Nam proportio R, ad S, componitur ex proportione R, ad P, & ex proportione P, ad S; vt autem R, ad P, sic A C, ad D B; & vt P, ad S, sic K C, ad D L; ergo quoque proportio R, ad S, componetur ex proportione A C, ad D B, & K C, ad D L, nempe, ex proportione rectanguli A C K, ad rectangulum B D L, (cum proportiones horũ rectãgulorum componantur ex ijsdem proportionibus) ergo, vt R, ad S, sic rectãgulum A C K, ad rectangulum B D L, nempè, sic quadratũ G C, ad quadratum F D; nempè, sic superficies sphærica portionis G C P, ad superficiem sphæricã portionis F D O; vt elicitur ex Archimede primo, de Sphæra, & Cylindro proposit. 40. & 41. Ergo factum est, quod faciendum erat.



SCHOLIVM.

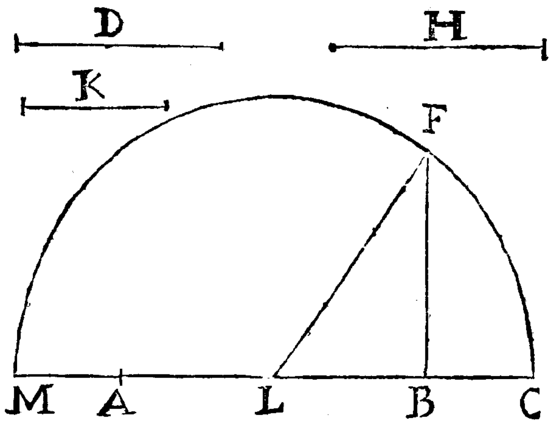
MVlta alia Problemata essent soluenda circa hanc materiam; sed quia eorum solutiones non tenemus, nisi, vel confusas, vel per locum solidũ; & cùm in præsenti, vel careamus tẽpore ipsas distinguendi, vel non intelligamus tradere, nisi Problemata soluta per locum planum; ideò eorum solutiones ad aliud opus, quod, Deo fauente, imprimetur, remittimus.

LEM. XXIII. PROP. XXXVI.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt quadratum compositæ ex data cum producta, vna cum quadrato productæ, & cum rectangulo contento sub tota cum producta, & sub producta, sit ad quadratum alterius datæ lineæ in data proportione.

DAtæ duæ rectæ lineæ sint A B, & D; & data proportio sit, quàm habet A B, ad H; oportet producere A B, in C, vt quadratum A C, cum quadrato C B, & cum rectangulo A C B, sit ad quadratum D, vt A B, ad H. Patet proportionem A B, ad H, debere esse maio-

maiorem ea, quàm habet quadratum AB, ad quadratum D. Fiat, vt H, ad tertiam partem AB, sic quadra-



tum D, ad quadratum K. Patet faciliter, ex determinatione Lemmatis, quadratum K, maius esse tertia parte quadrati AB. Erigatur ergo à puncto B, linea BF, perpendiculariter super AB, quæ possit excessum quadrati K, super tertiam partem quadrati AB; & secta AB, bifariam in L, & iuncta LF; centro L, interuallo LF, fiat semicirculus, cui occurrat AB, hinc inde producta in punctis M, C. Dico punctum C, esse quæsitum. Quoniam enim rectangula MBC, & ACB, sunt æqualia, & rectangulum MBC, est æquale quadrato FB; ergo rectangulum ACB, erit æquale quadrato BF. Et addita communi tertia parte quadrati AB, ergo rectangulum ACB, cum tertia parte quadrati AB, erit æquale quadrato BF, cum tertia parte quadrati AB, nempè quadrato K. Ergo quadratum D, ad hæc habebit eandem rationem. Sed quadratum D, factum est

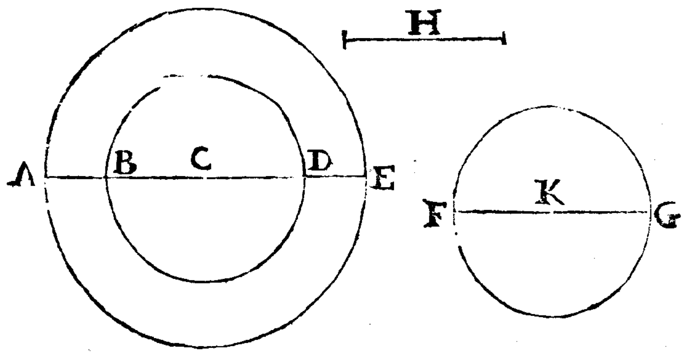
est ad quadratum K, vt H, ad tertiam partem AB. Ergo, & vt H, ad tertiam partem AB, sic quadratum D, ad rectangulum ACB, cum tertia parte quadrati AB. Ergo, & ad consequentium tripla, nempe, vt H, ad AB, sic quadratum D, ad quadratum AB, & ad tria rectangula ACB. Et conuertendo, vt AB, ad H, sic quadratum AB, cum tribus rectangulis ACB, ad quadratum D. Sed tria rectangula ACB, cum quadrato AB, faciunt quadratum AC, quadratum CB, & vnum rectangulum ACB; nam duo rectangula ACB, cum quadrato AB, faciunt duo quadrata AC, CB, vt consideranti patet. Ergo, & vt AB, ad H, sic duo quadrata AC, CB, cum rectangulo ACB, ad quadratum D. Producta est ergo AB, in C, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. XIV. PROP. XXXVII.

Data sphæra, & data recta linea, describere orbem solidum, cuius crassities sit data linea, qui ad spheram datam, sit in data proportione possibili.

HOC Problema est determinatum, & determinatio, quæ patebit ex processu demonstrationis, est, quod proportio data sit maior ea, quam habet cubus

bus datæ lineę, ad cubum ſemidiametri ſphæræ datæ. Sit data ergo ſphæra, cuius ſemidiameter F K, & data recta linea ſit A B, & oporteat facere, quod proponitur. Data proportio ſit, quàm habet A B, ad



H; & data linea A B, taliter producatur in C, vt ſit, ſicut F K, ad H, ſic quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Patet enim, ex determinatione Problematis, quod A B, poterit produci, cum proportio F K, ad H, maior ſit ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum F K. Nam ſi eſſet æqualis; cum proportio A B, ad H, componatur ex proportione A B, ad F K, & F K, ad H; vt autem F K, ad H, cum ſic ſit, ex ſuppoſitione, quadratum A B, ad quadratum F K. Ergo proportio A B, ad H, componeretur ex proportione A B, ad F K, & ex proportione quadrati A B, ad quadratum F K, quæ duæ faciunt rationem cubi A B, ad cubum F K; quod eſt contra determinationem Problematis; quia proportio A B, ad H, ſtatuitur maior ea, quàm habet cubus A B, ad cubum F K.

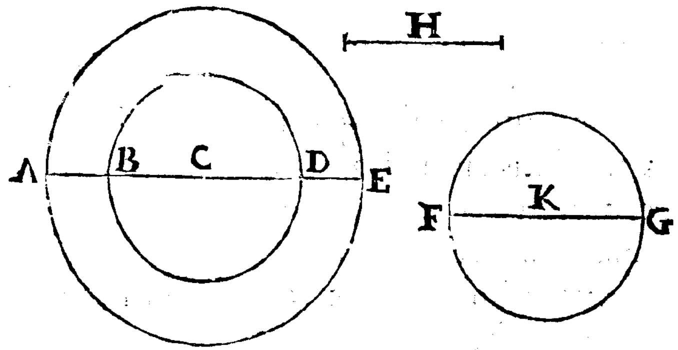
Et

Et multò maius abſurdum concluderetur, ſi proportio eſſet minor. Nam, eodem diſcurſu, concluderetur proportionem A B, ad H, minorem eſſe proportione cubi A B, ad cubum F K. Centro igitur C, interuallis A C, C B, deſcribantur circuli, quorum diametri A E, B D; quibus reuolutis circa diametros, deſcriptæ erunt duæ ſphæræ, quarum diametri itidem A E, B D. Si ergo intelligamus à maiori ablatam eſſe minorem, cuius diameter B D, patet relinqui orbem, cuius craſſities eſt A B. Aſſero eſſe quæſitum.

Etenim proportio A B, ad H, vt dictum eſt, de foris ſumpta F K, componitur ex proportione A B, ad F H, & F K, ad H. Vt autem F K, ad H, ſic facta ſunt duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Ergo quoque, proportio A B, ad H, componetur ex proportione A B, ad F K, & ex proportione quadratorum A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Sed iſtæ proportiones componunt proportionem exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum F K, (vt ſtatim patebit.) Vt autem exceſſus cubi A C, ſuper cubum C B, ad cubum F K, ſic orbis, cuius craſſities A B, ad ſphæram, cuius ſemidiameter F K. (Nam, vt cubus A C, ad cubum B C, ſic ſphæra A E, ad ſphæram B D. Et diuidendo, vt orbis ad ſphæram, ſic exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum B C. Vt autem cubus B C, ad cubum F K, ſic ſphæra B D, ad ſphæram F G. Ergo, ex æquali, vt exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum F K, ſic orbis, cuius craſſities A B, ad ſphæram F G.) Ergo, & vt A B, ad H,

ſic

ſic orbis ad ſphæram F G. Quod faciendum proponebatur.



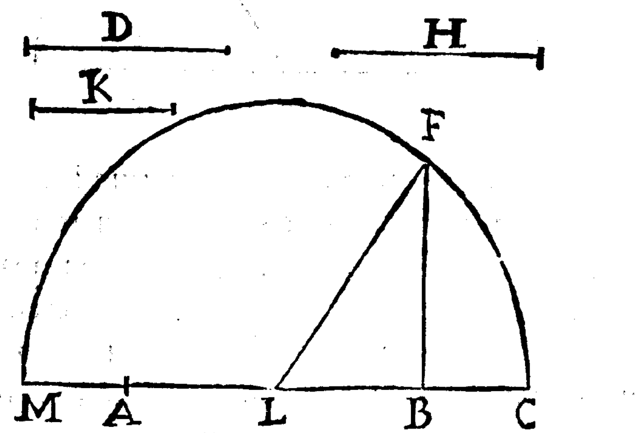
Quòd verò illæ duæ proportiones A B, ad F K, & duorum quadratorum A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K, componant rationem exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum F K; ſeù, quod factum ſub A B, in duo quadrata A C, C B, & in rectangulum A C B, ſit æquale exceſſui cubi A C, ſuper cubum B C; patet. Quia, duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, diuiduntur in quadratum A B, in tria rectangula A B C, & in tria quadrata B C; in quæ omnia ſi ducatur A B, fient, cubus A B, tria facta ſub A B, in quadratum B C, & tria facta ſub B C, in quadratum A B; nempè exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C. Oſtenſum eſt enim ab alijs, ſed præcipuè ab incomparabili Viro Bonauentura Caualerio Præceptore meo amantiſſimo, libro ſecundo Geometriæ indiuiſibilium Propoſit. 38. quod ſi recta linea ſecta ſit in puncto, cubus totius æquatur cubis partium, & tribus factis ſub qualibet partium in quadratum reliquæ.

Quod

Quòd verò oporteat proportionem datam maiorem eſſe ea, quam habet cubus A B, ad cubum F K, patuit ex proceſſu Problematis, alioquin non potuiſset conſtrui.

LEM. XXIV. PROP. XXXVIII.

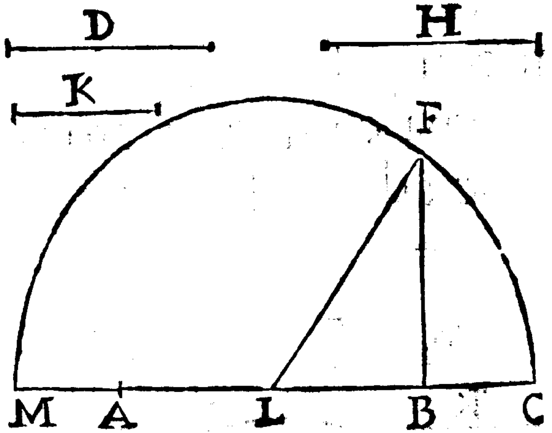
Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt quadratum compoſitæ ex data, & producta, vna cum quadrato productæ, ſic ad quadratum alterius lineæ datę in data proportione.



DAtæ duæ rectæ lineæ ſint A B, & D; oportet producere A B, in C, vt duo quadrata A C, C B,

L ſint

sint ad quadratum D, in data proportione, quæ sit ea, quam habet A B, ad H. Patet oportere hanc maiorem esse ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum D. Diuidatur A B, bifariam in L, & fiat, vt H, ad B L, sic quadratum D, ad quadratum K. Patet, ex determinatione Lemmatis, quadratum K, maius esse dimidio quadrati A B. Nam, si non esset maius, vel esset æquale, vel minus. Non æquale; quia, cùm sit, vt H,



ad B L, sic quadratum D, ad quadratum K, nempe ad dimidium quadrati A B; esset, & conuertendo, & vt antecedentium dupla, vt A B, ad H, sic quadratum A B, ad quadratum D. Quòd est contra determinationem. Maius absurdum concluderetur si supponeretur quadratum K, minus esse dimidio quadrati A B. Ergo cùm quadratum K, maius sit dimidio quadrati A B, linea potens excessum quadrati K, super dimidium quadrati A B, ducatur normaliter super A B, à puncto B, &

& sit B F; & iuncta L F, centro L, interuallo L F, fiat semicirculus, cui occurrat A B, hinc inde producta in M, & C. Dico punctum C, esse quæsitum.

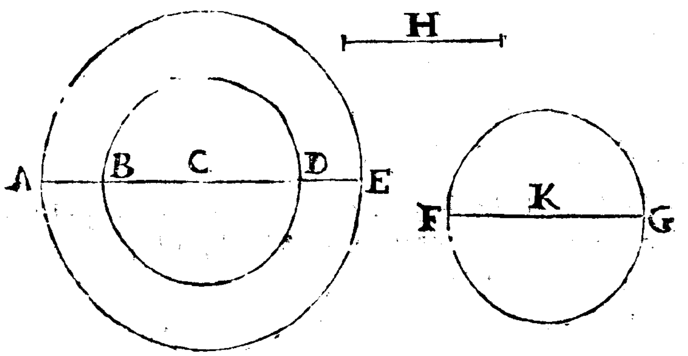
Cùm enim rectangulum M B C, seu A C B, ei æquale, sit æquale quadrato F B, addito dimidio quadrati A B; ergo rectangulum A C B, cum dimidio quadrati A B, erit æquale dimidio quadrati A B, & quadrato F B; nempè quadrato K. Ergo quadratum D, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed quadratum D, ad quadratum K, est vt H, ad L B. Ergo, & conuertendo, erit etiam, vt L B, ad H, sic dimidium quadrati A B, cum rectangulo A C B, ad quadratum D. Et vt antecedentium dupla. Ergo, vt A B, ad H, sic quadratum A B, cum duobus rectangulis A C B, ad quadratum D. Sed quadratum A B, & duo rectangula A C B, faciunt duo quadrata A C, C B. Quare patet propositũ.

PROBL. XV. PROP. XXXIX.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter orbis, sit ad superficiem sphæræ, in data proportione.

DAta proportio sit, vt suprà, quam habet A B, ad H, quàm patebit, ex processu demonstrationis, debere

bere maiorem esse ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum F K. Producatur A B, in C, vt duo quadrata A C, C B, sint ad quadratum F K, vt A B, ad H. Vnusquisque, ex dictis in superiori Problemate, & ex determinatione huius, potest elicere, A B, posse produci. Tunc centro C, interuallis A C, C B, describantur circuli, quorum diametri A E, B D; quibus

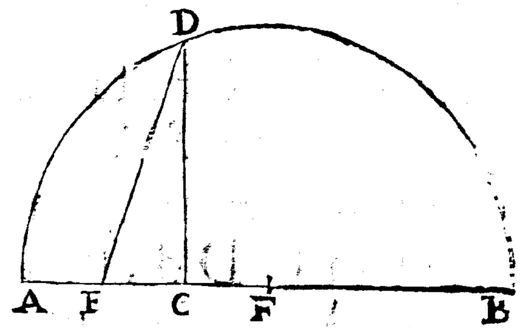


reuolutis circa A E, & intellectis omnibus, vt in superiori Problemate. Aio factum esse propositum. Nam cùm perimeter talis orbis sint duæ superficies sphæricæ, nempè interior, & exterior; superficies verò sphæricæ sint inter se, vt quadrata diametrorum, seù semidiametrorum, vt facilè elicitur ex Archimede primo de sphæra, & Cylindro proposit. 31. erit perimeter orbis, cuius crassities A B, ad superficiem sphæræ, cuius semidiameter F K, vt duo quadrata A C, C B, ad quadratum F K, nempe, vt A B, ad H. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XXV. PROP. XL.

Diameter A B, semicirculi A D B, cuius centrum F, sit diuisa taliter in C, vt B C, sit dupla C A; & erecta à puncto C, perpendiculari C D, ac diuisa A C, bifariam in E, iunctaque E D. Dico E D, esse æqualem F B; & A E, cum E D, esse ęqualem toti C B.



Quoniam enim B A, est tripla A C, nempe est ad ipsam, vt 6, ad 2; ergo A F, dimidia A B, erit sexquialtera A C, nempe erit ad ipsam, vt 3, ad 2. Ergo F C, est æqualis, tàm C E, quàm E A. Pariter, quoniam B C, est dupla C A; ergo, & quadratum C D, duplum erit quadrati A C, & erit octuplum quadrati dratiCE. Ergo quadratum DE, erit nonuplum quadrati EC. Sed pariter quadratum AF, seu FB, est nonuplum quadrati EC; ergo quadratum ED, erit æquale quadrato FB, & linea lineæ. Et quia pariter AE, est æqualis CF. Ergo AE, cum ED, erit æqualis CB. Quod erat ostendendum.

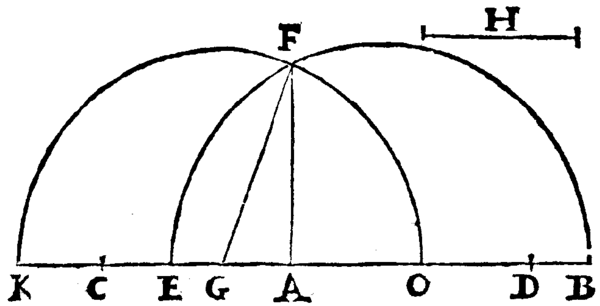
SCHOLIVM.

EX dictis deducitur faciliter, quod si BC, sit maior dupla AC, & fiant reliqua vt suprà; deducitur inquam, duas AE, ED, minores esse CB.

LEMMA XXVI. PROP. XLI.

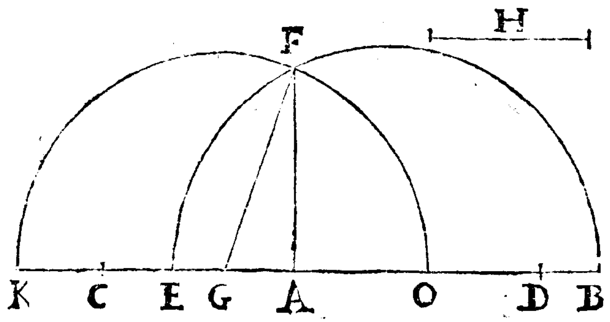
Data recta CB, secta taliter in A, vt BA, sit dupla AC, inuenire punctum inter A, B, putà D, vt rectangulum CDB, sit ad quadratum DA, in data proportione.

DAta proportio sit, quàm habet AB, ad H; & fiat vt dupla AB, cum dupla H, ad H, sic BA, ad AE, quam patet esse minorem dimidia AB, hoc est CA. Facto autem semicirculo super EB, & erecta à puncto A, perpendiculari AF, ac diuisa EA, bifariam in G, iunctaque GF; centro G, interuallo GF, describatur semicirculus KFO, producta AC, vsque ad K. Quoniam BA, est maior dupla AE, & ducta est perpendicularis AF, & diuisa est EA, bifariam in G, iunctaque est GF; ergo, per Scholium antecedentis Lemmatis, duæ EG, GF, hoc est EO, erit minor AB. Fiat ergo ipsi EO, æqualis AD. Dico punctum D, esse quæsitum; nimirum esse, vt AB, ad H, sic rectangulum CDB, ad quadratum DA.



Quoniam enim duo rectangula KAO, EAB, sunt æqualia inter se, quia sunt æqualia eidem quadrato AF; ergo communi addito rectangulo KAE, duo rectangula KAO, & KAE, nempe rectangulum sub KA, in EO, erit æquale duobus rectangulis EAB, & KAE. Sed rectangulum sub KA, in EO, est æquale quadrato KA, seu EO, quia duæ KA, & EO, sunt æquales; & quia EO, facta est æqualis AD, quadratum EO, est æquale quadrato AD; ergo quadratum AD, erit æquale rectangulo EAB, & rectangulo KAE.

KAE. Sed rectangulum KAE, est æquale rectangulo AEO, quia, vt dictum est, KA, est æqualis EO. Ergo quadratum AD, erit æquale rectangulis EAB, & AEO, nempe rectangulo sub AE, in compositam ex BA, EO, seù in compositam ex BA, AD. Ergo quadratum BA, simul cum rectangulo DAB, hoc est rectangulum sub AB, in compositam ex BA, AD, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub BA, in compositam ex BA, AD, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub BA, in compositam ex BA, AD, ad rectangulum sub EA, in compositam ex BA, AD, est, vt BA, ad AE; & BA, ad AE, facta est, vt dupla AB, cum dupla H, ad H. Ergo, & vt dupla AB, cum dupla H, ad H, sic rectangulum sub AB, in compositam ex BA, AD, ad quadratum AD, nempe sic quadratum AB, cum rectangulo BAD, (quia rectangulum sub AB, in compositam ex BA, AD, diuiditur in quadratum BA, & in rectangulum BAD,) ad quadratum AD. Et diuiden-

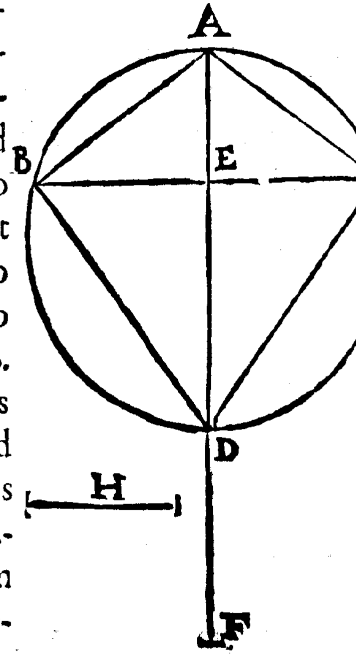


uidendo, vt dupla BA, cum H, ad H, sic quadratum BA, cum rectangulo BDA, ad quadratum DA. Et rursùm diuidendo, vt dupla BA, ad H, sic tria rectangula BDA, cum quadrato DB, ad quadratum AD. Et antecedentium dimidia. Ergo, vt AB, ad H, sic dimidium trium rectangulorum ADB, & quadrati DB, ad quadratum DA. Sed horum dimidium est rectangulum CDB; nam, dimidium duorum rectangulorum ADB, est vnicum rectangulum ADB; & dimidium rectanguli ADB, cum quadrato DB, nempe rectanguli ABD, est rectangulum CA, DB, quia CA, est dimidia AB. Duo autem rectangula ADB, & CA, DB, sunt æqualia rectangulo CDB. Ergo, & vt AB, ad H, sic rectangulum CDB, ad quadratum AD. Quod erat faciendum.

PROBL. XVI. PROP. XLII.

Datam sphæram, aliquo plano taliter diuidere, vt vna illius portio, ad conum super eamdem basim cum portionibus, cuius vertex sit vertex alterius portionis, sit in data proportione.

SIT data sphæra, cuius diameter AD. Oportet ipsam secare plano BEC, cui diameter sit perpendiculacularis, adeò vt, facto cono, cuius baſis ſit B E C, &c. vertex D, portio B A C, ſit ad conum B D C, in data proportione. Sit hæc, quam habet A D, ad H, & producta A D, in F, vt A D, ſit dupla D F, diuidatur, per propoſitionem antecedentem A F, in E, vt rectangulum F E A, ſit ad quadratum E D, vt A D, ad H; & per punctum E, acto plano B E C, cui A D, ſit normalis, &c. facto cono B D C, vt moris eſt. Dico factum eſſe propoſitum.

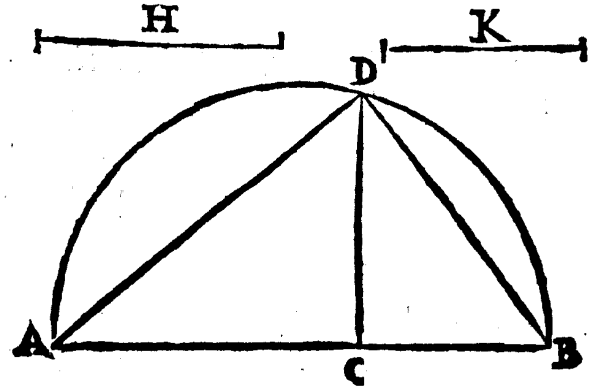


Intelligatur etiam conus B A C. Portio B A C, ad conum B D C, (de foris ſumpto cono B A C,) habet rationem compoſitam ex ratione portionis ad conum B A C, & coni B A C, ad conum B D C; ſed portio B A C, eſt ad conũ B A C, vt F E, ad D E, vt oſtenditur ab Archimede 2. de Sphæra, & Cylindro propoſit. 7. & conus B A C, ad conum B D C, eſt, vt A E, ad E D; ergo proportio portionis B A C, ad conum B D C, componetur quoque ex proportione F E, ad E D, & A E, ad E D. Sed hæ duæ rationes componunt rationem rectanguli F E A, ad quadratum E D. Ergo portio B A C, erit ad conum B D C, vt rectangulum F E A, ad quadratum E D, ſeù, vt D A, ad H. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XXVII. PROP. XLIII.

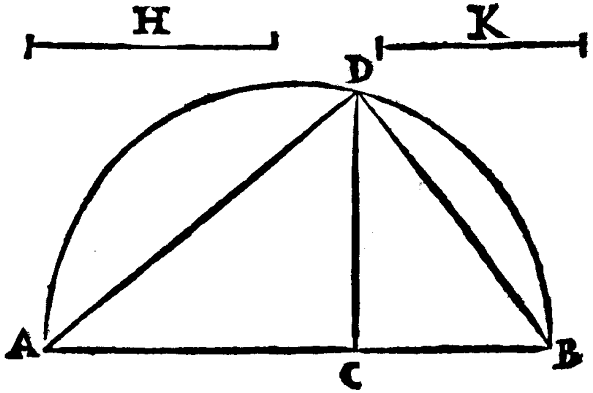
Data hypotenuſa trianguli rectanguli, & data ratione, quam habet quadratum vnius lateris, ad rectangulum, ſub alio latere in perpendicularem ductam ab angulo recto in hypotenuſam, inuenire triangulum.



DAta hypotenuſa ſit A B, & data ratio ſit, quam habet A B, ad H. Fiat, vt A B, ad H, ſic H, ad K; deinde ſuper A B, fiat ſemicirculus, & per propoſ. 20. huius, taliter diuidatur A B, in C, vt rectangulum A B C, ſit ad quadratum A C, vt A B, ad K; & à puncto

M 2 cto

cto C, erecto perpendiculo C D, fiat triangulum A D B. Quod affirmo esse quæsitum; nempè esse, vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum A D C.



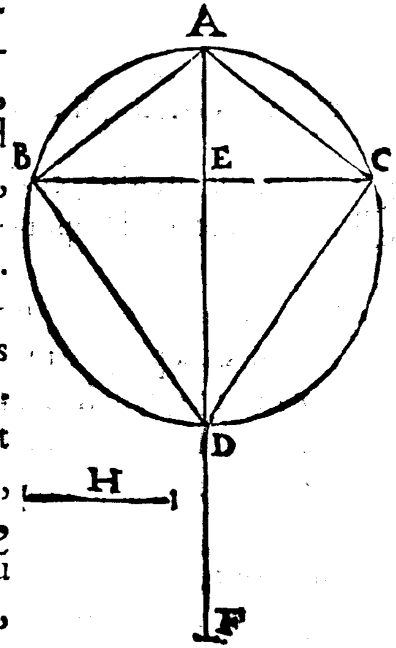
Quoniam enim factum est, vt A B, ad K, sic rectangulum A B C, ad quadratum A C; & rectangulo A B C, est æquale quadratum D B; ergo, & vt A B, ad K, sic quadratum D B, ad quadratum A C. At quoniam inter A B, & K, est media proportionalis H, & pariter inter quadrata D B, & A C, est medium proportionale rectangulum sub D B, in A C; ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum D B, A C. Sed, propter similitudinem triangulorum D B C, A D C, rectangulo D B, A C, est æquale rectangulum A D C. Ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum A D C. Factum est ergo, quod proponebatur.

PRO-

PROBL. XVII. PROP. XLIV.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis B A C, sit ad superficiem conicam coni B D C, in data proportione.

Data proportio sit pariter, quam habet A D, ad H. Data ergo diametro D A, sphæræ datæ, tamquam hypotenusa trianguli rectanguli, inueniatur triangulum rectangulum A D B, vt quadratum A B, sit ad rectãgulum D B E, vt D A, ad H, & intelligantur, portio B A C, & conus B D C. Dico plano B C, sectam esse sphæram, vt superficies portionis B A C, sit ad superficiem coni B D C, vt A D, ad H. Res est clara, quia ex Archimede sæpe, sæpius citato, vt quadratũ A B, ad rectãgulum D B E, seu, vt D A, ad H, sic superficies portionis, ad superficiem coni.



SCHO-

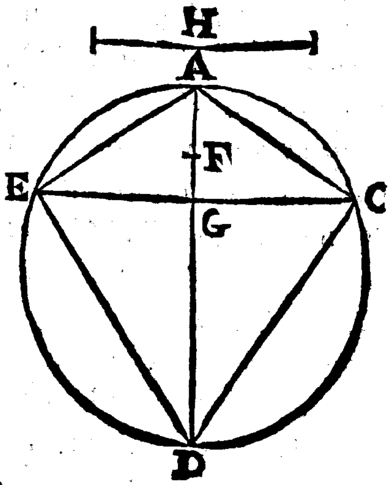
SCHOLIVM.

ARchimedes libro 2. de sphæra, & Cylindro propofit. 7. foluit hoc Problema. A data sphæra portionem abfcindere, quæ ad conum fuper eamdem bafim, & in eadem altitudine cum ipfa, habeat datam proportionem. Arbitror non effe inutile foluere Problema etiam quoad fuperficies.

LEMMA XXVIII. PROP. XLV.

In dato circulo inuenire arcum, vt chorda ipfius ad finum rectum, fit in data proportione.

SIT datus circulus, cuius diameter AD; oportet inuenire arcum AE, vt chorda AE, ad finum rectū EG, fit in data proportione, quæ fit ea, quam habet AD, ad H. Patet oportere hanc effe exceffus, cum chorda alicuius arcus, fit femper maior finu recto. Fiat ergo, vt DA, ad H, fic H, ad aliam, quæ vtique erit minor AD; fit hæc



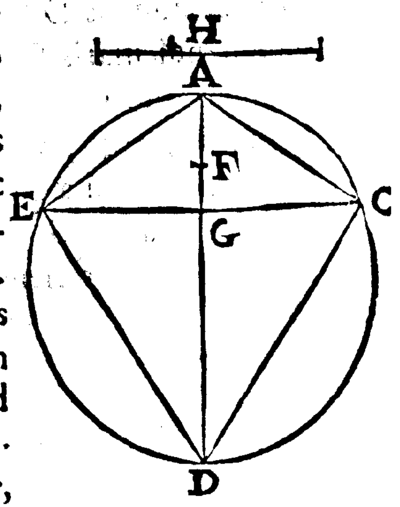
DG; & à puncto G, ducantur GE, normalis DA, & chorda EA. Quas affero effe quæfitas. Nam DA, H, & DG, funt tres continue proportionales. Ergo, vt DA, ad DG, fic quadratum DA, ad quadratum H. Sed pariter, vt DA, ad DG, fic (fumpta GA, communi altitudine,) eft rectangulum DAG, nempe quadratum AE, ad rectangulum DGA, nempe ad quadratum EG; ergo, & vt quadratum DA, ad quadratum H, fic quadratum AE, ad quadratum EG. Ergo, & vt DA, ad H, fic AE, ad EG. Quod erat faciendum.

Vel fic. Quoniam H, eft minor DA, ex hypothefi, aptetur ei æqualis DE, à puncto D, & ducantur EA, & perpendicularis EG, fuper diametrum DA. Quoniam duo triangula ADE, AEG, funt fimilia; ergo, vt AD, ad DE, feu ad H, ei æqualem, fic AE, ad EG. Quod erat faciendum.

PROBLEMA XVIII. PROP. XLVI.

A data ſphæra portionē abſcindere, cuius ſuperficies ſphærica, ad ſuperficiem conicam coni in eadem baſi, & altitudine cum portione, ſit in data proportione.

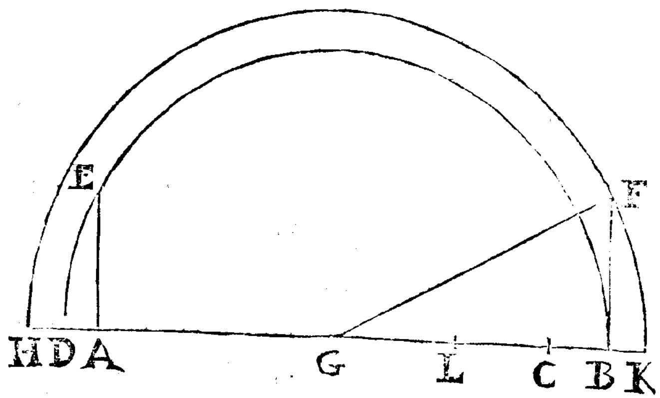
DAtæ ſphæræ, & eius circuli maximi ſit diameter D A, & data proportio ſit, quam habet D A, ad H. Per alteram verò duarum propoſitionum antecedentiũ, aptetur A E, & ducatur perpendicularis E G, vt A E, ſit ad E G, vt D A, ad H; & intelligantur portio, & conus E A C. Dico &c. Nam ſuperficies portionis eſt ad ſuperficiem coni, vt quadratum A E, ad rectangulum A E G, nempe, vt A E, ad E G; nempe, vt A D, ad H. Quod erat faciendum.



LEMMA XXIX. PROP. XLVII.

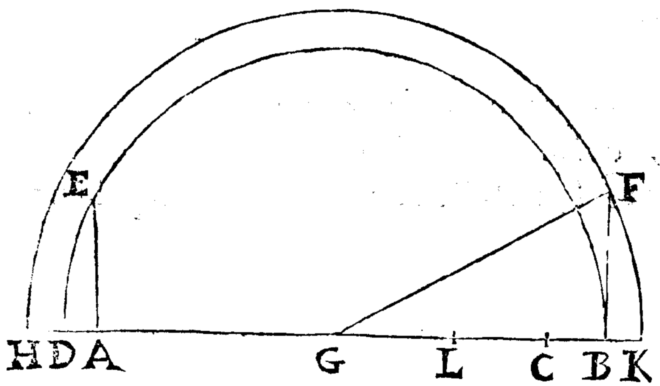
Datam A B, taliter ſecare in puncto C, vt duo quadrata A B, B C, ſint ad rectangulum A B C, cum quadrato B C, in data proportione.

DAta proportio ſit, quam habet A B, ad B L, quàm patet debere eſſe maioris inæqualitatis. Fiat, vt A L, ad L B, ſic B A, ad A D, ei poſitam in directum; & ſuper diametro D B, fiat ſemicirculus, cuius centrum G; & à puncto A, ducatur A F, normalis ſuper A B, & à puncto B, erigatur pariter normalis B F, æqualis ipſi A E, & ducta G F, centro G, interuallo G F, fiat ſemicirculus, cuius diameter ſit H K, & ipſi B K,



fiat æqualis BC, (cum BK, ſit minor BA, vt oſtendetur.) Dico punctum C, eſſe quæſitum.

In primis, quod BK, ſit minor BA, patet; quia, cum duæ AE, BF, ſint æquales, erunt æqualia, & illarum quadrata: quare, & rectangula HBK, DAB, erunt æqualia; & ideò erit, vt maior HB, ad minorem DA, ſic maior AB, ad minorem BK.



Quòd autem punctum C, ſit quæſitum, ſic probabitur. Iam probatum eſt, rectangulum DAB, eſſe æquale rectangulo HBK, hoc eſt rectangulo HBC, quia BC, facta eſt æqualis BK; ſed rectangulum HBC, quia (cùm HD, ſit æqualis BK, eſt etiam æqualis BC,) eſt æquale rectangulo DBC, & quadrato CB; ergo rectangulum DAB, erit æquale rectangulo DBC, & quadrato BC. At rectangulum DAB, eſt æquale rectangulis DAC, & DA, CB; ergo, & duo rectangula DAC, & DA, CB, erunt æqualia rectangulo DBC, & quadrato BC. Pariter rectangulum DBC, eſt

eſt æquale rectangulo ſub DA, in BC, & rectangulo ABC; ergo rectangula DAC, & DA, CB, erunt æqualia rectangulo DA, CB, rectangulo ACB, & quadrato BC. Quare communi ablato rectangulo ſub DA, in CB; rectangulum DAC, erit æquale rectangulo ABC, & quadrato CB. Ergo ad hæc plana æqualia, rectangulum BAC, habebit eandem proportionem. At rectangulum BAC, ad rectangulum DAC, eſt vt BA, ad AD, & BA, ad AD, facta eſt, vt AL, ad LB; ergo, & vt AL, ad LB, ſic rectangulum BAC, ad rectangulum ABC, cum quadrato BC. Quare, & componendo, vt AB, ad BL, ſic erit rectangulum BAC, cum rectangulo ABC, & cum quadrato BC, ad rectangulum ABC, cum quadrato BC. Sed duo rectangula BAC, & ABC, faciunt quadratum BA. Ergo, & vt AB, ad BL, ſic quadrata AB, BC, ad rectangulum ABC, cum quadrato BC. Quod erat faciendum.

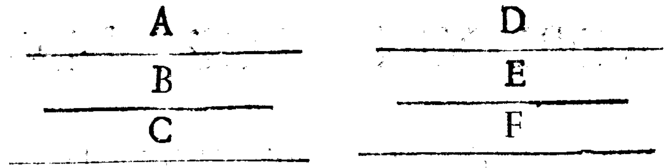
(:)

LEMMA XXX. PROP. XLVIII.

Si ſint quotcumquę magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione. Quàm proportionem habebit factum quodcumque ſub quibuslibet magnitudinibus primæ ſeriei, ad factum ſub alijs magnitudinibus eiuſdem ſeriei, ſic factum ſub magnitudinibus ſecundæ ſeriei antecedentibus homologis, ad factum ſub magnitudinibus ſecundæ ſeriei homologis conſequentibus, exiſtentibus omnibus factis homogeneis.

REM exemplifico. Sint duæ ſeries; in prima ſint quotcumquę magnitudines A,B,C,& in ſecūda aliæ iſtis numero æquales D,E,F, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione, nempe ſit, vt A, ad B, ſic D, ad E; & vt B, ad C, ſic E, ad F. Intelligo ergo, quod v. g. quadratum A, cum rectangulo A, B, ſit ad quadratum

dratum



dratum C, vt quadratum D, cum rectangulo D, E, ad quadratum F; & ſic in altioribus poteſtatibus, & in factis diuerſimode. Res eſt facilis probatu; quia proportio primi facti ad ſecundum factum, componitur ex ijſdem proportionibus, ex quibus componitur proportio tertij facti ad quartum factum.

SCHOLIVM.

EX dictis infertur, quod etiam permutando, vt primum factum in prima ſerie, ad primum factum in ſecunda ſerie, ſic ſecundum factum in prima ſerie, ad ſecundum factum in ſecunda ſerie, dummodo hæc omnia facta, ſint homogenea.

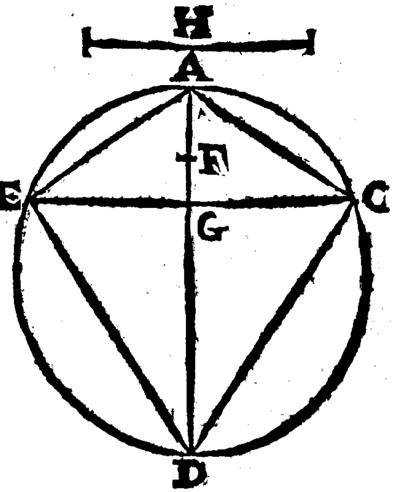
Pariter ex dictis infertur, quod ſi ſint duo triangula ſimilia, erit, vt quodlibet factum ſub quibuslibet lateribus vnius, ad quodlibet factum ſub quibuslibet lateribus eiuſdem, ita quodlibet factum ſub lateribus alterius antecedentibus in primo triangulo homologis, ad quodlibet factum ſub lateribus alterius, itidem conſequentibus in primo triangulo homologis; dummodo hæc facta, ſint homogenea. Res eſt euidens, quia latera duorum triangulorum ſimilium, ſunt duæ ſeries trium magnitudinum diſpoſitæ ſecundum conditionem Lemmatis.

PRO-

PROBL. XIX. PROP. XLIX.

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis, ſit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

DAtæ ſphæræ ſit circulus maximus, cuius diameter A D, & data ratio ſit, quam habet A D, ad H, quæ debet eſſe exceſſus. Diuidatur A D, in F, vt quadratum A D, cum quadrato D F, ſit ad rectangulum A D F, cum quadrato D F, in data ratione A D, ad H, per propoſitionem 47. Deinde à puncto D, aptetur D E, æqualis D F, & dimiſſa perpendiculari E G C, & iunctis E A, facta conſueta reuolutione, intelligantur portio, & conus E A C. Dico hæc ſolida eſſe quæſita. Cùm enim factum ſit, vt D A, ad H, ſic duo quadrata A D, D F, ad rectangulum A D F, cum quadrato



D F, nempe, (propter æqualitatem D F, D E,) duo quadrata A D, D E, ad rectangulum A D E, cum quadrato D E; & cùm (propter ſimilitudinem triangulorum A E D, A E G) ſit, vt duo quadrata A D, D E, ad rectangulum A D E, cum quadrato D E, ſic duo quadrata A E, E G, ad rectangulum A E G, cum quadrato E G, per Propoſ. anteced., nempe, ex Archimede ſæpe citato, perimeter portionis E A C, ad perimetrum coni E A C. Ergo, & vt A D, ad H, ſic perimeter portionis, ad perimetrum coni. Factum eſt ergo, quod proponebatur.

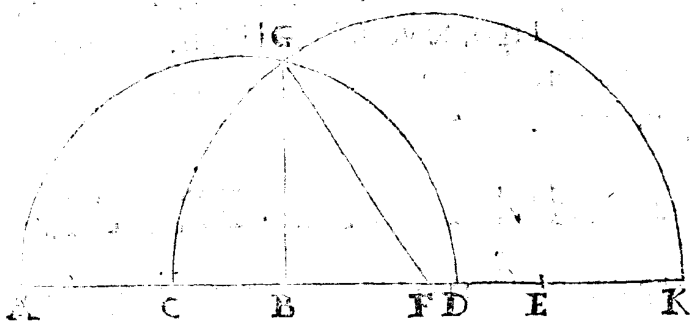
LEMMA XXXI. PROP. L.

Datam rectam lineam taliter ſecare in puncto, vt quadratum totius, ad rectangulum ſub tota, & ſub vno ſegmento, cum quadrato eiuſdem ſegmenti, ſit in data proportione.

DAta recta linea ſit A B, & data proportio ſit, quam habet A B, ad B D, ei poſitam in directum. Patet proportionem datam debere eſſe talis conditionis, vt A B, ſit maior ſubdupla B D, quia ſemper quadratum A B, eſt maius ſubduplo rectanguli A B C, & quadrati B C. Fiat B E, æqualis A B, quæ ſecetur bifa-

bifariam in F; deinde super A D, fiat semicirculus, & à puncto B, erigatur perpendicularis B G; & à puncto F, ducatur linea ad punctum G; centro autem F, interuallo F G, describatur semicirculus C G K, qui semper secabit A B, vt patebit inferius. Dico punctum C, esse quæsitum.

Quoniam enim rectangulum A B D, & rectangulum



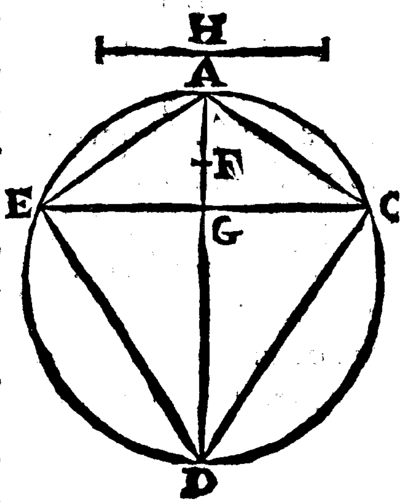
K B C, sunt æqualia inter se, quia æqualia eidem quadrato G B; & quia K E, est æqualis C B, rectangulum K B C, est æquale rectangulo E C B; ergo rectangulum A B D, est æquale rectangulo E C B, nempe rectangulo E B C, & quadrato C B. Sed quoniam E B, est æqualis A B, ergo rectangulum E B C, est æquale rectangulo A B C. Quare, & rectangulum A B D, erit æquale rectangulo A B C, & quadrato B C. Quare quadratum A B, ad hæc habebit eadem proportionem. Sed quadratum A B, ad rectangulum A B D, est vt A B, ad B D. Ergo, & vt A B, ad B D, sic quadratum A B, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Quod erat faciendum.

Quòd verò assumptum est, nempe semicirculum C G K, secare A B; seu F G, minorem esse F A, patet; quia, cùm D B, sit minor dupla B A, ergo, & quadratum G B, erit minus duplo quadrati A B. Ergo quadratum G B, ad quadratum A B, erit in ratione minori, quam 8, ad 4. Et quia B F, cum sit dimidia B A, est eius quadratum subquadruplum quadrati A B. Ergo duo quadrata G B, B F, nempe quadratum G F, erit ad quadratum A B, in ratione minori, quam 9, ad 4. Sed quadratum A F, est ad quadratum A B, vt 9. ad 4. Ergo quadratum F G, est minus quadrato F A; & consequenter F G, erit minor F A.

PROBLEMA XX. PROP. LI.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis E A C, sit ad perimetrum coni, in data proportione.

Pariter data ratio sit, quam habet A D, ad H, quam infra patebit, debere esse maiorem subdupla. Diuidatur, per Lemma antecedens, A D, in F, vt quadratum A D, sit ad rectangulum A D F, cum quadrato D F, vt A D, ad H. Et pariter, vt supra factum est, aptetur à puncto D, D E, æqualis D F, & fiant omnia, vt in antecedenti Problemate, & arguatur congruenti argumentatione, vt ibidem.



Tandem cócludemus, quadratum A E, ad rectangulũ A E G, cum quadrato E G, esse, vt A D, ad H. Quare patet etiam, superficiem sphæricam portionis E A C, esse ad perimetrum coni E A C, vt A D, ad H.

Quòd verò ratio A D, ad H, debeat esse subdupla. Patet, quia quadratum A E, est maius subduplo rectanguli A E G, cum quadrato E G.

SCHOLIVM.

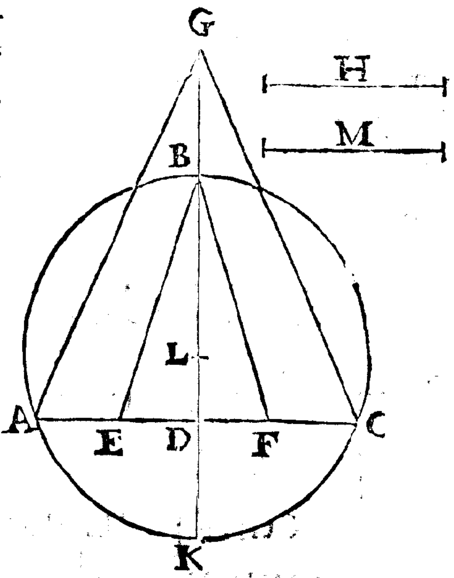
Ex dictis habemus modum, quo soluamus Problema, in gratiam cuius traditum est præsens; nempe. Datis ijsdem, quæ in tribus superioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis E A C, intus, & extra, dempto cono E A C, ad perimetrum coni E A C, sit in data proportione. Nam perimeter talis portionis extra, constaret superficie sphærica portionis, & circulo basis; intra verò, superficie conica, supponendo ablato cono, remanere basim. Si ergo fiat, vt excessus A D, super H, ad H, (quia in tali casu proportio data debet esse excessus) sic quadratum E A, ad rectangulum A E G, cum quadrato E G; erit componendo, vt A D, ad H, sic quadratum A E, cum rectangulo A E G, & cum quadrato E G, ad rectangulum A E G, cum quadrato E G; nempe, totus perimeter portionis, vt suprà expositæ, ad perimetrum coni.

PROBL. XXI. PROP. LII.

Data sphæræ portione quacumque, reperire conum circa eamdem axim cum portione, vt portio sit ad conum in data proportione.

Licet solutio huius Problematis possit haberi facilissimè ex Archimede, vt patebit; quia tamen possumus ipsum soluere, quamuis difficiliori modo, per quandam propriam propositionem vniuersalem, quam censemus non spernendam; ideò cùm nesciamus hanc aptiori loco collocare; in gratiam nostræ propositionis, soluimus hoc Problema, primò facilissimè ex Archimede postea præmisso proprio Lemmate vniuersali.

Sit ergo datæ sphæræ, cuius diameter B K, centrum L, data portio A B C, cuius axis B D, & data sit proportio, quam habet K B, ad H, & oporteat facere, quod imperatum est. Fiat, vt K D, ad eandem K D, cum KL, ſic D B, ad D G. Ergo, ex Archimede 2. de ſphæra, & Cylindro propoſ. 2. ſi fiat conus A G C, hic erit æqualis portioni A B C. Fiat ergo, & fiat, vt G D, ad D B, ſic K B, ad M; & fiat, vt M, ad H, ſic quadratum A D, ad quadratum D E. Facto ergo cono E B F. Dico hunc eſſe quæſitum.



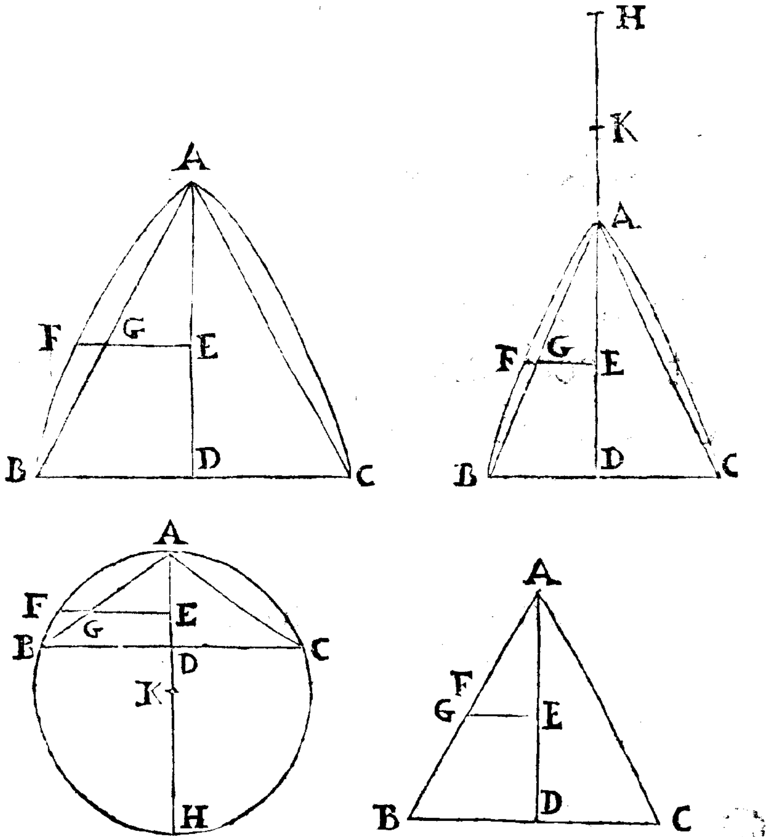
Nam conus A G C, ad conum E B F, habet rationem compoſitam ex ratione G D, ad D B, & ex ratione quadrati A D, ad quadratum D E, per propoſitionem primam huius. Sed, vt G D, ad D B, ſic facta eſt K B, ad M; & vt quadratum A D, ad quadratum D E, ſic M, ad H. Ergo conus A G C, ſeù portio A B C, ei æqualis, ad conum E B F, habet rationem compoſitam ex ratione K B, ad M, & M, ad H. Sed iſtæ duæ rationes K B, ad M, & M, ad H, faciunt rationem K B, ad H. Ergo, &c. Quod &c.

LEMMA XXXII. PROP. LIII.

Quodlibet Conoides parabolicum, vel hyperbolicum; quælibet portio ſphæræ, vel ſphæroidis, & etiam conus, ſunt ad conum ſuper eandem baſim, & circa eandem diametrum cum ipſis (ſecta diametro bifariam, & ordinatim ex puncto ſectionis applicata linea,) vt quadratum ordinatim applicatæ, cum quadrato portionis eiuſdem ordinatim applicatæ interceptæ inter punctum diuiſionis, & latus coni, ad duplum quadratum huius interceptæ.

SIT ergo Conoides parabolicum in prima figura, vel hyperbolicum, vt in ſecunda, vel quælibet portio ſphæræ, vel ſphæroidis, vt in tertia, vel conus, vt in quarta A B C, cuius diametrum A D; & circa diametrum A D, & ſuper eandem baſim B C, ſit, in vnaquaque figura, conus B A C; & diameter D A, ſit diuiſa,

uiſa bifariam in E, & per E, ſit ducta E F, parallela B D, ſecans A B, latus coni in G. Dico ſolidum B A C, eſſe ad conum B A C, vt duo quadrata F E, E G, ad duo quadrata G, E.



In cono res eſt euidens, quia eſt proportio æqualitatis. In portione ſphæræ, vel ſphæroidis, ſit diameter totius ſphæræ, vel ſphæroidis A H. In conoide hyperbolico, A H, ſit diameter tranſuerſa, & in omnibus iſtis ſit centrum K.

Tunc in Conoide parabolico. Quoniã ex prim. conic. prop. 20. quadratum B D, eſt duplum quadrati F E, cum ſit ad ipſum, vt D A, ad A E, & eſt quadruplum quadrati G E; ergo quadratum F E, erit duplum quadrati G E; & duo quadrata F E, E G, erunt ſexquialtera duorum quadratorum G E; nempe, vt Conoides B A C, eſt coni B A C, ex Archimede lib. de Conoid. & Sphæroid. prop. 23.

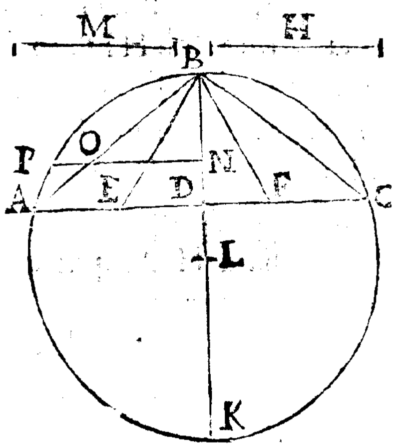
In Conoide verò hyperbolico, & in portione ſphæræ, vel ſphæroidis. Quoniam quadratum F E, eſt ad quadratum B D, ex primo conic. prop 21. vt rectangulum H E A, ad rectangulum H D A; & vt quadratum B D, ad quadratum G E, ſic rectangulum H D A, ad rectangulum ſub H D, in dimidiam ipſius A E, nempe ad rectangulum ſub dimidia H D, in A E. Ergo ex æquali, vt quadratum F E, ad quadratum G E, ſic rectangulum H E A, ad rectangulum ſub dimidia H D, in E A, nempe (propter eandem altitudinem A E,) vt H E, ad dimidiam H D, quæ eſt K E, vt conſideranti patet. Ergo, & componendo, vt quadratum F E, cum quadrato E G, ad quadratum E G. ſic H E, cum E K, ad E K. Et ad conſequentium dupla. Ergo, vt quadratum F E, cum quadrato E G, ad duo quadrata E G, ſic H E, cum K E, ad H D. Sed E H, cum K E, facit dimidiam A H, cum H D, vt conſideranti patet; & ex Archimede de Conoid. & ſphæroid. prop. 31. & 33 Portio B A C, vel conoides hyperbolicum, eſt ad conum B A C, vt dimidia H A, cum H D, ad H D. Ergo portio, vel conoides, eſt ad conum, vt duo quadrata E G. Quod &c.

In Conoide enim hyperbolico, patet, quod dimidia HA, cum HD, facit sexquialteram HA, cum AD.

PROBL. XXII. PROP. LIV.

Idem.

Diuidatur BD, bifariam in N, & ducatur per punctum N, NOP, parallela AD, secans BA, latus coni in O; & fiat, vt duo quadrata PN, cum duobus quadratis NO, ad quadratum AD, sic KB, ad M; deinde fiat, vt M, ad H, sic quadratum AD, ad quadratum DE, vbicunque cadat punctum E; & fiat conus EBF. Dico portionem ABC, esse ad conum EBF, vt KB, ad H.



Quoniam enim ratio portionis ABC, ad conū EBF, de foris sumpto cono ABC, componitur ex ratione portionis ad conum ABC, & coni ABC, ad conum EBF; & vt portio ad conum ABC, sic, per propositionem antecedentem, duo quadrata PN, & NO, ad duo quadrata NO; & vt conus ABC, ad conum EBF, sic quadratum AD, ad quadratum DE.

Ergo proportio portionis ABC, ad conum EBF, componetur quoque ex proportione quadratorũ PN, NO, ad duo quadrata NO, & ex proportione quadrati AD, ad quadratum DE. Sed proportio quadratorum PN, NO, ad duo quadrata NO, est eadem cum proportione duorum quadratorum PN, cum duobus quadratis NO, ad quatuor quadrata NO, quia, vt dimidium, ad dimidium, sic duplum ad duplum. Ergo proportio portionis ad conum EBF, componetur quoque, ex proportione duorum quadratorum PN, cum duobus quadratis NO, ad quatuor quadrata NO, seù ad quadratum AD, eis æquale, & ex ratione quadrati AD, ad quadratum DE. Sed vt duo quadrata PN, cum duobus quadratis NO, ad quadratum AD, sic facta est BK, ad M; & vt quadratum AD, ad quadratum ED, sic M, ad H. Ergo proportio portionis ABC, ad conum EDF, cõponetur ex proportionibus KB, ad M, & M, ad H. Sed ex ijsdem proportionibus componitur ratio KB, ad H. Ergo, vt KB, ad H. Sic portio ABC, ad conum EBF. Quod erat faciendum.

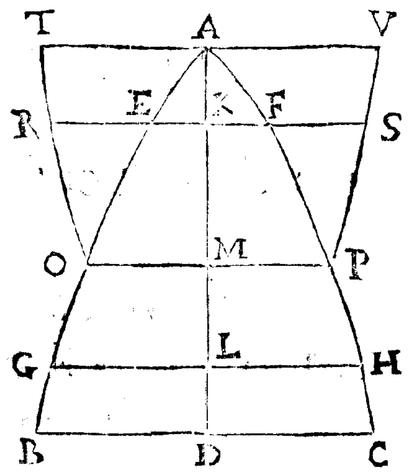
SCHOLIVM.

CVM hæc huius Libelli imprimerentur, occasione, qua Proposit. 53. vsi sumus Archimede libro de Conoid. & Sphæroid. prop. 23. in qua demonstrat. Conoides parabolicum ad conum in eadem basi, & circa eandem diametrum cum ipso, esse in proportione sexquialtera, incidimus in modum hoc idem demonstrãdi, Sed per auream methodum indiuisibilium, quam qui aspernantur, aliam non merentur pœnam, quàm priuari fructu ex tali methodo colligendo. Visum est ergo peroptimum, hunc modum hoc loco explicare, qui vtique est diuersus ab his, quibus vtuntur columnæ herculeæ Geometrarum Italorum nostri sæculi, nimirum Bonauentura Caualerius lib. 4. Geometriæ indiuisibilium, prop. 21. & Euangelista Torricellius in exemplis pro indiuisibilibus curuis, exemplo 14. Ne ergo nostrum ordinem incæptum variemus, trademus hunc modum per duas sequentes propositiones extra ordinem sumptas.

PROPOSITIO PRIMA.

Esto parabola B A C, cuius diameter D A, basis B D C, & in diametro D A, sint sumpta duo puncta K, & L, æque remota à punctis A, & D, per quæ sint ductæ ordinatim applicatæ E K, G L. Dico duo quadrata E K, G L, esse æqualia quadrato B D.

QVoniam enim quadratum E K, est ad quadratum B D, vt K A, ad A D; & pariter quadratum G L, est ad quadratum B D, vt L A, ad A D, ex 20. prim. Conic. Ergo, & duo quadrata E K, G L,



erunt ad quadratum B D, vt K A, seu L D, simul cum A L, nempe, vt tota A D, ad A D. Quare æqualia.

SCHOLIVM.

FAcilè elicitur ex dictis, quod si A D, diuisa bifariam in M, &c. per M, ordinatim applicata O M P, mente concipiamus, frustrum B O P C, parabolæ, rotari super O P, veluti super cardinem, donec collocetur super O A P, adeò vt B D C, sit in T A V, &c. D M, congruat A M, & punctum D, congruat ipsi A; puncta verò B, C, congruant ipsis punctis T, V; infertur inquam, quod si in A M, sumatur quodlibet

 pun-

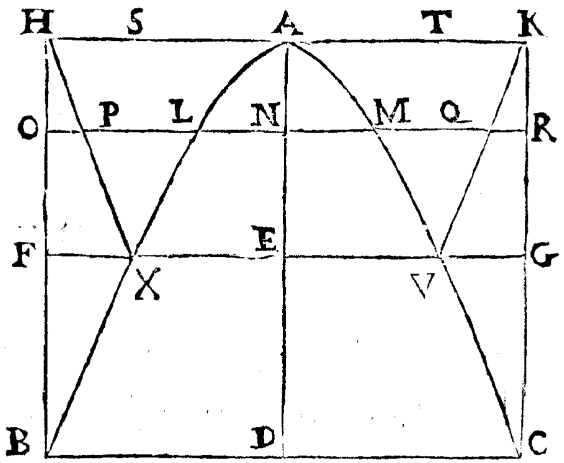
punctum K, per quod ordinatim applicetur R E K F S; ſemper duo quadrata R K, K E, erunt æqualia quadrato N M. Res eſt euidens.

PROPOSITIO SECVNDA.

Sit parabola A B C, & ei ſit circumſcriptum parallelogrammum H B C K, & omnia voluantur circa diametrum A D. Dico Cylindrum ortum ex tali reuolutione, eſſe conoidis parabolici duplum.

SEcetur A D, bifariam in E, & per punctum E, agatur planum F X E V G, parallelum planis H K, B C, & mente concipiamus fruſtum parabolicum B X V C, locari, adeò vt baſis B D C, ſit in H A K, punctum D, ſit in puncto A, & linea D E, ſit ſuper E A, & ſumatur in A E, quodlibet punctum N, per quod agatur planum O P L N M Q R, faciens in Cylindro circulum, cuius radius O N, in portione conoidis X A V, circulum, cuius radius L N, & in fruſto X H K V, circulum, cuius radius P N. Quoniam enim quadratum H A, ſeù O N, eſt æquale quadratis P N, & N L, ex Scholio Propoſitionis antecedentis. Ergo, & circulus, cuius radius O N, erit æqualis circulis, quorum radij

radij P N, N L; & punctum L, ſumptum eſt vtcumque. Ergo omnes circuli Cylindri H F G K, ſumpti iuxta



regulam planũ H A K, ſeù F E G, erunt æquales omnibus circulis fruſti H X V K, & portionis X A V, sũptis iuxta eandem regulam. Quare & Cylinder H F G K, erit æqualis fruſto H X V K, ſeù B X V C, & portioni X A V, nempe erit æqualis toti conoidi B A C. Sed Cylinder H B C K, eſt duplus Cylindri H F G K. Ergo talis Cylinder eſt duplus conoidis B A C. Quod erat oſtendendum.

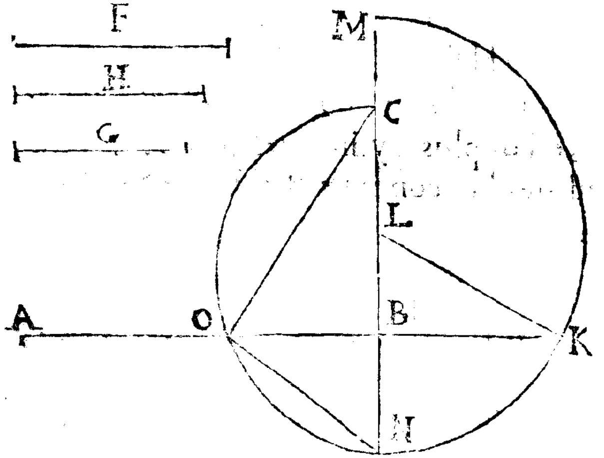
SCHOLIVM.

EX dictis clarè infertur propoſitum, nempe Conoides eſſe ſexquialterum coni ſuper baſe B D C, & circa diametrum A D. Ratio eſt, quia conus eſt ſubtriplus Cylindri, vnde, quorum Cylindrus eſt ſex, & conoides tria, conus erit duo.

LEM-

LEMMA XXXIII. PROP. LV.

Datis duabus rectis lineis A B, B C, continentibus angulum rectum, A B C, dataque F, potentia, à puncto C, ducere lineam occurrentem A B, etiam protractæ, ſi opus ſit, in O, vt quadratum F, ſit ad rectangulum C O B, in data proportione.



SIT hæc, quàm habet F, ad G; & inter F, & G, ſit media proportionalis H; & fiat, vt B C, ad H, ſic H, ad B K, poſitam in directum ipſi A B; ſectaque

B C,

B C, bifariam in L, & ducta L K; centro L, interuallo L K, fiat ſemicirculus, cuius diameter ſit M N; & ſuper C N, ex parte oppoſita, fiat ſemicirculus N O C, ſecans A B, in O. Dico punctum O, eſſe quæſitum, nempe ducta C O, eſſe quadratum F, ad rectangulum C O B, vt F, ad G. Ducatur O N. Quoniam L C, eſt æqualis L B, & M L, ipſi L N; ergo & M C, eſt æqualis B N. Ergo quadratum B K, eſt æquale rectangulo C N B, nempe quadrato N O. Ergo, & linea B K, eſt æqualis N O. Cùm autem (propter ſimilitudinem triangulorum C O B, N O B) rectangulum C O B, ſit æquale rectangulo ſub C B, in O N, ſeu in B K; & rectangulum C B K, ſit æquale quadrato H. Ergo & rectangulum C O B, erit æquale quadrato H. Sed quadratum F, ad quadratum H, eſt, vt F, ad G. Ergo, & vt F, ad G, ſic quadratum F, ad rectangulum C O B. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

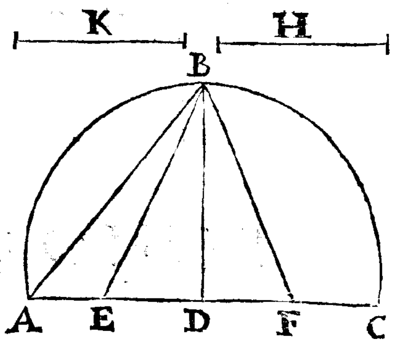
LEmma antecedens reducitur ad Problema Vieteum. Data baſe trianguli rectanguli, & media proportionali inter hypotenuſam, & perpendiculum, inuenire triangulum.

PRO-

PROBL. XXIII. PROP. LVI.

Datis ijſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt ſuperficies portionis, ſit ad ſuperficiem coni, in data proportione.

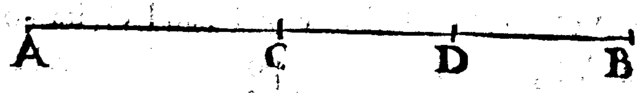
Data proportio ſit, quàm habet D B, ad H, & ducta B A, oporteat facere, quòd imperatum eſt. Datis ergo duabus AD, D B, continentibus angulum rectum A D B, ducatur à puncto B, per propoſitionem antecedentem, B E, vt quadratum datæ B A, ſit ad rectangulum B E D, vt B D, ad H; & fiat ex triangulo B E D, conus E B F. Quem dico eſſe quæſitum. Demonſtratio ex Archimede eſt faciliſſima, quapropter ad alia tranſeamus.



LEMMA XXXIV. PROP. LVII.

Datam rectam A B, ſectam vtcumque in C, rursùm diuidere in D, inter C, B; vt rectangulum A D C; ſit ad quadratum D B, in data proportione.

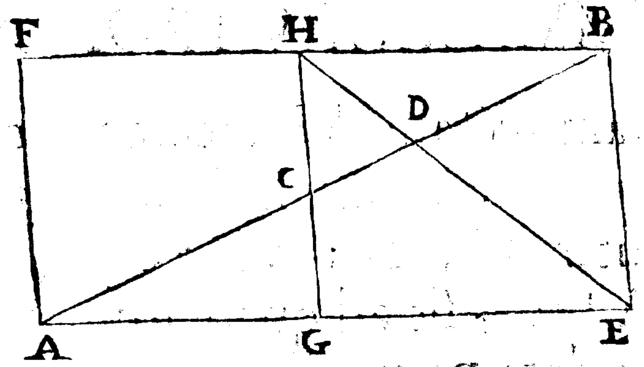
HOC Lemma triplicem habet caſum, ſecundùm quod proportio data eſt, vel æqualitatis, vel exceſſus, vel defectus. Si ſit æqualitatis, ſoluetur ſic.



Diuidatur B C, in D, vt ſit, ſicut A B, ad B C, ſic B D, ad D C. Nam cùm ſit, vt A B, ad B C, ſic B D, ad D C; ergo permutando, erit, vt A B, ad B D, ſic B C, ad C D. Ergo, & diuidendo, erit, vt A D, ad D B, ſic D B, ad D C. Quare rectangulum A D C, erit æquale quadrato D B.

VEL ſic. Fiat A B, diameter cuiuſcumque parallelogrammi F E, & per punctum C, agatur H C G, paralella F A, vel B E, & iungatur H E, ſecans B A, in D. Dico punctum D, eſſe quæſitum.

Quoniam enim triangulum A D E, eſt ſimile trian-



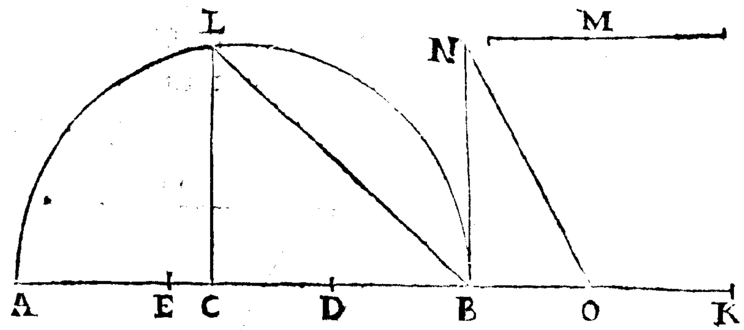
gulo HDB, & pariter triangulum EDB, est simile triangulo HDC. Ergo, vt AD, ad DB, sic ED, ad DH. Vt autem ED, ad DH, sic BD, ad DC; ergo & vt AD, ad DB, sic DB, ad DC. Quare rectangulum ADC, erit æquale quadrato DB.

SI autem proportio data sit excessus, sit ea, quam habet AC, ad CE, & fiat, vt AE, ad EC, ita composita ex AB, & CB, ad BK, positam in directum ipsi AB; deinde facto semicirculo super AB, & à puncto C, erecta perpendiculari CL, & iuncta LB, fiat, vt AE, ad EC, sic LB, ad M; & inter LB, & M, inueniatur media proportionalis, cui sit æqualis BN, erecta perpendiculariter super AB, à puncto B; sectaque BK, bifariam in O, & iuncta ON, fiat OD, ipsi ON, æqualis (infra enim patebit, punctum D, cadere inter C, B.) Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim duo quadrata NB, BO, sunt æqualia quadrato NO, nempe quadrato OD (quia OD, facta est æqualis NO;) & quadratum DO, est æquale duobus quadratis DB, BO, & duobus rectangulis

DBO,

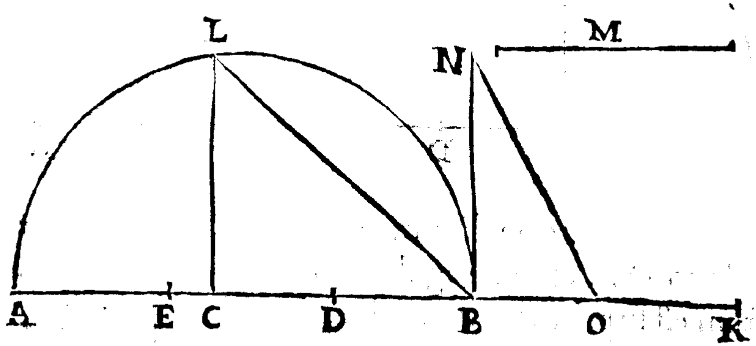
DBO, nempe vnico rectangulo DBK,) quia KB, dupla est BO.) Ergo duo quadrata NB, BO, erunt æqualia duobus quadratis DB, BO, & rectangulo DBK. Et communi ablato quadrato BO; quadratum NB, nempe rectangulum sub LB, & M, (quia NB,



est media proportionalis inter LB, & M,) erit æquale quadrato DB, & rectangulo DBK. Ergo, quoniam factum est suprà, vt AE, ad EC, sic LB, ad M; & est, vt LB, ad M, sic quadratum LB, ad rectangulum sub LB, in M, & quadrato LB, est æquale rectangulum ABC; & pariter rectangulo sub LB, & M, probatum est æquale quadratũ DB, cum rectangulo DBK; ergo erit etiam, vt AE, ad EC, sic rectangulum ABC, ad quadratum DB, cum rectangulo DBK. Sed quoniam supra factum est, vt AE, ad EC, sic composita ex AB, BC, ad BK; & vt composita ex AB, BC, ad BK, sic (sumpta communi altitudine BD,) rectangulum sub tali composita in DB, ad rectangulum DBK; & rectangulum sub composita ex AB, BC, in BD, diuiditur in duplum rectangulum CBD, & in rectangu-

 lum

lum sub A C, in D B. Ergo, & vt rectangulum A B C, ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, sic rectangulum A C, D B, cum duobus rectangulis C B D, ad rectangulum D B K. Cùm ergo sit, vt totum rectangulum A B C, ad totum, nempe ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, sic ablatum ad ablatum, nempe rectangulum A C, D B, cum duobus rectangulis C B D, ad ablatum rectangulum D B K; ergo, & vt totum ad totum, seù vt A E, ad E C, sic reliqum ad reliqum, nempe sic ex-

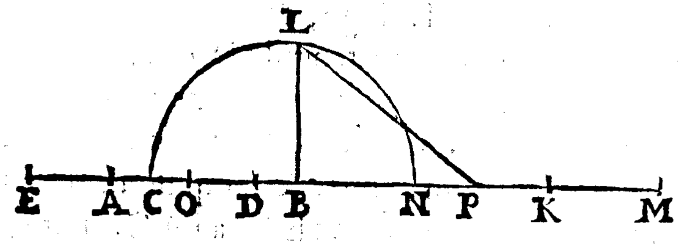


cessus rectanguli A B C, super rectangulum A C, D B, & super duo rectangula C B D, ad quadratum D B. Ergo, & componendo, vt A C, ad C E, sic talis excessus, cum quadrato D B, ad quadratum D B. Sed talis excessus, cum quadrato D B, facit rectangulum A D C. Nam, duo quadrata C B, B D, excedunt duo rectangula C B D, quadrato C D; & rectangulum A C B, excedit rectangulum A C, D B, rectangulo A C D, quod cum quadrato C D, facit rectangulum A D C. Ergo, & vt A C, ad C E, sic rectangulum A D C, ad quadratum D B. Quod erat faciendum.

Quòd

Quòd verò assumptum est, nempe punctum D, cadere inter C, B, patet ex processu demonstrationis. Quia non in C. Nam, cùm probatum sit, vt A E, ad E C, sic rectangulum A B C, ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, nempe ad rectangulum K D B, nempe, ex suppositione, ad rectangulum K C B; & cùm sit, vt rectangulum A B C, ad rectangulum K C B, sic A B, ad K C; erit, vt A E, ad E C, sic A B, ad C K. Sed pariter factũ est, vt A E, ad E C, sic A B, cum B C, ad B K. Ergo esset etiam, vt A B, ad C K, sic A B, cum B C, ad B K, minorem C K. Quod est absurdum. Et multò maius absurdum concluderetur si punctum D, caderet vltra C. Ergo cadit inter C, B.

SI Verò proportio data sit defectus, sit ea, quam habet A C, ad C E; & fiat, vt E A, ad A C, sic, & du-

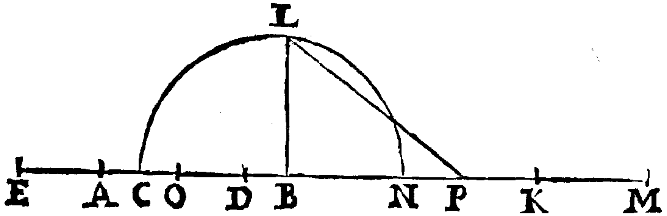


pla C B, ad B K, & E C, ad K M, positas in directum, tùm inter se, tùm ipsi A B, & diuisa B K, bifariam in N, super C N, fiat semicirculus, & à puncto B, erigatur perpendicularis B L. Pariter secetur B M, bifariam in P, & iuncta L P, fiat ei æqualis P D, (ostendetur inferius punctum D, cadere inter C, B,) & ipsi D B, fiat æqualis C O. Dico punctum O, esse quæsitum.

Eodem

Eodem enim modo, quò factum est suprà, ostendetur, quadratum L *B*, esse æquale quadrato D *B*, cum rectangulo D *B* M, ac proinde etiam rectangulũ C *B* N, esse æquale quadrato D *B*, cum rectangulo D *B* M. Sed quoniam factum est, vt E A, ad A C, sic dupla C *B*, ad *B* K, seù C *B*, ad B N; & vt C *B*, ad *B* N, sic quadratum C *B*, ad rectangulum C *B* N, seù ad ei æquale quadratum D *B*, cum rectangulo D *B* M. Ergo, & vt E A, ad A C, sic quadratum C B, ad quadratum D *B*, cum rectangulo D *B* M. Rursùm, quoniam supra factum est, vt E A, ad A C, sic tam E C, ad K M, quàm dupla C *B*, ad B K; ergo erit, vt E A, ad A C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe E C, cum dupla C *B*, ad totam *B* M. Sed vt E C, cum dupla *B* C, ad *B* M, sic (sumpta communi altitudine D *B*,) rectangulum sub E C, in D *B*, cum duplo rectangulo C *B* D, ad rectangulum D *B* M. Ergo, & vt quadratum C *B*, ad quadratum D *B*, cum rectangulo D *B* M, sic rectangulum E C, D *B*, cum duobus rectangulis C *B* D, ad rectangulum D *B* M. Cùm ergo sit, vt totum ad totũ, sic ablatum ad ablatum; ergo, & reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum, seù vt E A, ad A C. Ergo, & vt E A, ad A C, sic excessus quadrati C *B*, super rectangulum E C, D *B*, & super duo rectangula C *B* D, ad quadratum D *B*. Ergo, & componendo, vt E C, ad C A, sic excessus duorum quadratorum C *B*, *B* D, super rectangulum E C, D *B*, & super duo rectangula C *B* D, ad quadratum D *B*. Et conuertendo, vt quadratum D *B*, seù, vt quadratum C O, (quia C O, facta est æqualis D *B*,

D B,) ad excessum quadratorum C B, B D, vel C O, super rectangulum E C, D B, seù E C O, & super duo rectangula C B D, seù B C O, sic A C, ad C E. Sed, & vt A C, ad C E, sic rectangulum A C O, ad rectangulum E C O. Ergo, & vt A C, ad C E, tàm est quadratum C O, ad excessum duorum quadratorum C B, C O, super rectangulum E C O, & super duo rectangula B C O, quàm rectangulum A C O, ad rectangulum E C O. Quare, & vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, seù, vt A C, ad C E, sic ambo ante

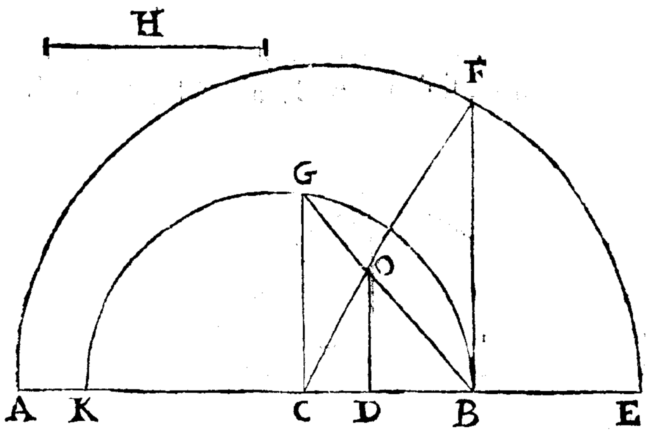


cedentia ad ambo consequentia, nempe sic quadratum C O, cum rectangulo A C O, nempe rectangulũ A O C, ad excessum duorum quadratorum B C, C O, solum, super duo rectangula B C O, nempe ad quadratum O B. Quod erat faciendum.

Quòd autem assumptum est, nempe punctum D, cadere inter C, B, patet. Quia non in C; nam cùm probatum sit, esse, vt E A, ad A C, sic quadratum C B, ad rectangulum M D B, nempe in tali casu, ad rectangulum M C B; & cùm sit, vt quadratum C *B*, ad rectangulum M C B, ita C B, ad C M; esset, & vt E A, ad A C, sic C B, ad C M. Quòd est absurdũ, quia supra factum

factum est, vt E A, ad A C, sic C B, ad solam B N. Et maius absurdum concluderetur, si punctum D, caderet vltra C. Ergo patet propositum.

SED præsens Lemma potest vnica demonstratione comprehendente omnes casus facilius solui, sed per locum solidum, quàm non erit inutile hic subingere.



Sit ergo data A B, diuisa in C, vt supra; & data ratio sit, quam habet A C, ad H. Producatur A B, in E, vt C B, B E, sint æquales; & facta A E, diametro semicirculi, erigatur à puncto B, perpendicularis B F; & circa axim C B, diametro transuersa A C, per prop. 53. primi conicorum, describatur hyperbola transiens per punctum F, cuius vertex sit C; deinde fiat, vt H, ad A C, sic C B, ad C K, vbicumque cadat punctum K, & super K B, fiat semicirculus ad eandem partem cum priori, ac à puncto C, erecta perpendiculari C G, ducatur G B, secans hyperbolam in puncto O; demissa

ergo

ergo à puncto O, perpendiculari O D, super A B, secante ipsam in D. Dico punctum D, esse quæsitum.

Etenim, propter similitudinem triangulorum G B C, O D B, est, vt G C, ad C B, sic O D, ad D B; & pariter est, vt quadratum G C, ad quadratum C B, sic quadratum O D, ad quadratum D B. Sed, vt quadratum G C, ad quadratum C B, sic K C, ad C B, nempe A C, ad H, (factum est enim supra, vt H, ad A C, sic B C, ad C K; quare conuertendo, erit, vt K C, ad C B, sic A C, ad H.) Ergo, vt A C, ad H, sic quadratum O D, nempe rectangulum A D C, (quod ei ostendetur æquale) ad quadratum D B. Quod erat faciendum.

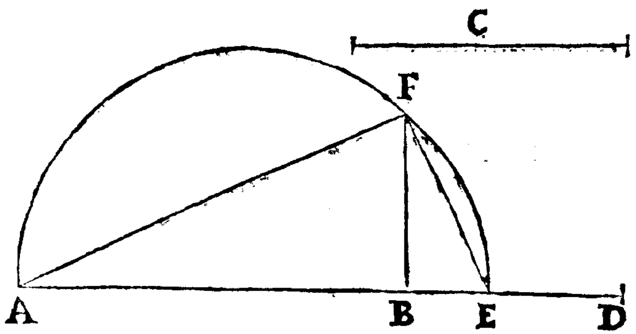
Quòd verò rectangulum A D C, sit æquale quadrato D O, sic patebit. Nam, quia B C, est æqualis B E, rectangulum A B C, erit æquale rectangulo A B E, nempe quadrato B F. Sed, ex propositione 21. primi conicorum, est vt rectangulum A B C, ad quadratum B F, sic rectangulum A D C, ad quadratum D O. Quare patet propositum.

R LEM-

LEM. XXXV. PROP. LVIII.

Data base trianguli rectanguli, & data media proportionali inter compositam, ex hypotenusa, & perpendiculo, & ipsum perpendiculum, inuenire triangulum.

DAta basis sit A B, & data media proportionalis sit C, & oporteat inuenire triangulum. Fiat, vt A B, ad C, sic C, ad B D, positam in directum ipsi A B; deinde data A D, secta in B, rursùm secetur in E, vt re-



ctangulum A E B, sit æquale quadrato D E, per propositionem antecedentem, & super A E, fiat semicirculus, ac à puncto B, erigatur perpendicularis B F, & ducantur A F, F E. Dico triangulum A F B, esse quæsitum.

Quo-

Quoniam enim rectangulum A E B, est æquale tàm quadrato E D, quàm quadrato E F; ergo, & duo quadrata E D, E F, pariter duæ lineæ E D, E F, erunt æquales. Tunc; quoniam rectangulū A B D, est æquale quadrato C, per constructionem, & pariter est æquale rectangulis A B E, & A B, E D; ergo, & quadratum C, erit æquale rectangulo A B E, nempe (quadrato B F,) & A B, E D, nempe A B, F E, quia duæ D E, F E, ostensæ sunt æquales. Sed, propter similitudinem triangulorum rectangulorum A B F, B F E, rectangulo A B, F E, est æquale rectangulum A F B. Ergo quadratum C, erit æquale quadrato F B, & rectangulo A F B, nempe rectangulo sub composita, ex hypotenusa A F, & perpendiculo F B, & sub perpendiculo F B. Quare patet propositum.

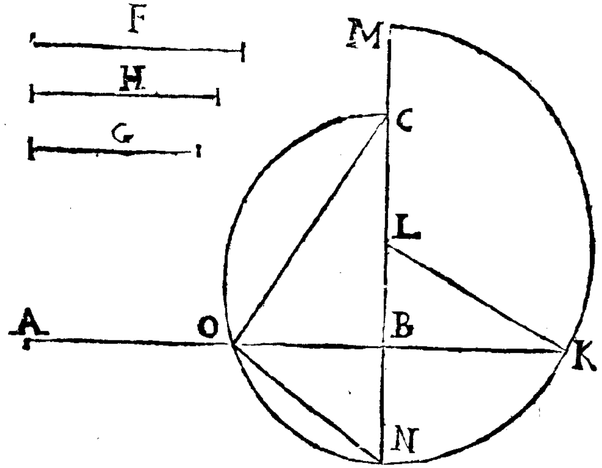
LEM. XXXVI. PROP. LIX.

Datis iisdem, quæ in propositione 55. facere eadem, quæ ibidem, vt quadratum F, sit ad rectangulum C O B, cum quadrato O B, in data proportione.

SIT data proportio, quàm habet F, ad G, & inter F, G, inueniatur media H. Data autem B C, base trianguli rectanguli, & data H, media proportionali

 inter

inter compositam, ex hypotenusa, & perpendiculo, & ipsum perpendiculum, inueniatur triangulum C O B. Dico factum esse, quod proponebatur.

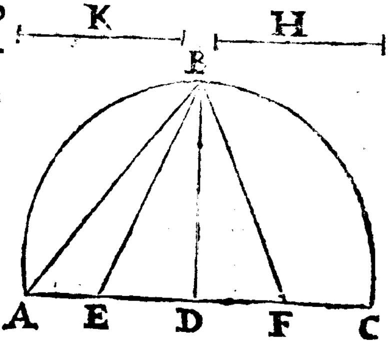


Quoniam enim rectangulum sub composita ex C O, & O B, & sub O B, est æquale quadrato H; ergo quadratum F, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed quadratum F, ad quadratum H, est vt F, ad G. Ergo, & vt F, ad G, sic quadratum F, ad rectangulum sub composita ex C O, O B, in O B, nempe ad rectangulum C O B, cum quadrato O B. Quod erat faciendum.

PROBL. XXIV. PROP. LX.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis sit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

Exponatur linea K, potens simul duo quadrata B A, A D; & data ratio sit, quàm habet A D, ad H. Datis autem duabus A D, D B, continentibus angulum rectum A D B, ducatur à puncto B, linea B E, vt sit, vt A D, ad H, sic quadratum K, ad rectangulum B E D, cum quadrato E D, per antecedentem propositionem, & fiat conus E B F. Quem dico esse quæsitum.



Quia, vt A D, ad H, sic quadratum K, nempe duo quadrata B A, A D, ad rectangulum B E D, cum quadrato E D, nempe, ex Archimede, totus perimeter portionis A B C, ad totum perimetrum coni E B F. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVamuis Propoſitione 57. propoſitum ſit Lemma ſic vniuerſaliter, attamen, vt patuit Propoſitione 58. non indigebamus ipſo ad ſolutionem antecedentis Problematis, ſic vniuerſaliter propoſito, ſed tantùm in proportione æqualitatis. Verùm ad vberiorem ſcientiam, & quia ex ipſo dependent alia Problemata, quamuis non pertinentia, nec ad conos, neque ad ſphæras, nec ad ſuperficies conicas, nec ad ſuperficies ſphæricas; propoſuimus ipſum vniuerſaliter. Vt ergo capiamus fructum ex ipſo manantem, ſoluemus duo ſequentia Problemata.

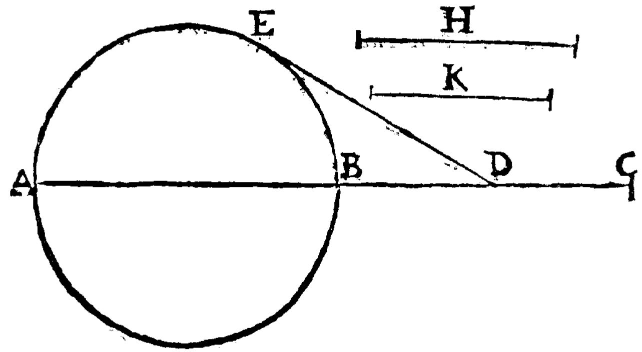
PROBL. XXV. PROP. LXI.

Datis circuli diametro A B, continuata in C, reperire inter B, C, punctum D, vt ab ipſo ducta tangente D E, ſit hæc ad D C, in data proportione.

DAta ratio ſit, quàm habet A B, ad H, quæ continuetur ad tertium terminum K; deinde, per Propoſitionem 57. data A C, ſecta in B, taliter ſecetur in D, inter C, B, vt rectangulum A D B, ſit ad quadratum

tum

tum D C, vt A B, ad K; & à puncto D, ducatur tangens D E. Dico factum eſſe, quod proponebatur.



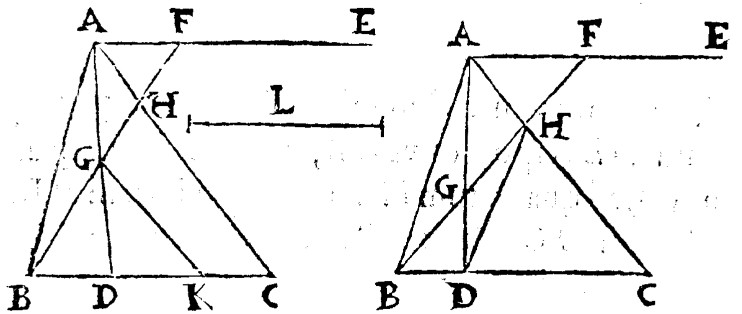
Quoniam enim rectangulo A D B, eſt æquale quadratum D E; ergo, & vt A B, ad K, ſeù, vt quadratum A B, ad quadratum H, ita erit quadratum D E, ad quadratum D C; & vt A B, ad H, ſic D E, ad D C. Quod erat faciendum.

PROBL. XXVI. PROP. LXII.

In triangulo B A C, à puncto A, ſint ductæ duæ lineæ, A D, occurrens B C, inter B, C, & A E, parallela B C, indefinita; à puncto B, ducere B G H F, tali lege, vt quadratum B G, ad rectangulum F G H, ſit in data proportione.

Data

DAta recta BC, secta in D, rursùm secetur in K, inter D, C, per propositionem 57. vt rectangulum BKD, sit ad quadratum KC, in data proportione, quæ sit ea, quam habet v. g., BC, ad L, & per punctum K, ducatur KG, parallela CA, occurrens AD, in G, & per puncta B, G, ducatur linea BGHF, secans AC, in H, & occurrens AE, in F. Dico lineam BF, esse quæsitam.



Quoniam enim rectangulum BKD, ad quadratum KC, habet rationem compositam ex rationibus BK, ad KC, & DK, ad KC; ergo, & ratio BC, ad L, componetur ex istis proportionibus. Sed vt BK, ad KC, sic (ob parallelas GK, AC,) BG, ad GH; & pariter, vt DK, KC, sic DG, ad GA, & (ob parallelas AF, BD,) vt DG, ad GA, sic BG, ad GF. Ergo, & BC, proportio ad L, componetur ex duplici proportione, nempe BG, ad GH, & BG, ad GF, quæ duæ faciunt rationem quadrati BG, ad rectangulum FGH. Quare patet propositum.

Quamuis verò hoc Problema sit sic vniuersale, attamen

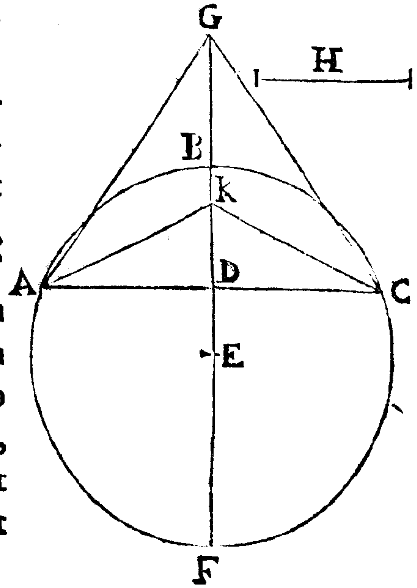
men non erit inutile tradere aliam propositionem in proportione æqualitatis, quæ non supponet propositionem 57.

Datis ergo, quæ supra, ducatur DH, parallela AB, & per B, & H, ducatur BGHF. Quàm dico esse quæsitam. Nam (ob parallelas HD, BA,) duo triangula AHB, ADB, sunt æqualia; & dempto communi triãgulo AGB, triangulum AGH, erit æquale triangulo BGD. Nunc; quoniam triangulum BGD, ad triangulum AGH, habet rationem compositam, ex ratione trianguli BGD, ad triangulum GAF, & trianguli GAF, ad triangulum GAH; vt autem triangulum BGD, ad triangulum GAF, sic (quia ista triangula sunt similia ob parallelas BD, AF,) quadratum GB, ad quadratum GF; & vt triangulum GAF, ad triangulum GAH, sic FG, ad GH. Ergo triangulum BGD, ad triangulum AGH, habet rationem compositam ex rationibus quadrati BG, ad quadratũ GF, nempe ex duplici ratione BG, ad GF, & GF, ad GH. Sed rationes BG, ad GF, & GF, ad GH, faciunt rationem BG, ad HG. Ergo triangulum BGD, ad triangulum AGH, habet rationem compositam, ex rationibus BG, ad GF, & BG, ad GH Sed istæ duæ rationes componunt etiam rationem quadrati BG, ad rectangulum FGH. Ergo vt triangulum BGD, ad triangulum AGH, sic quadratum BG, ad rectangulum FGH. Sed triangulum BGD, probatum est æquale triangulo FGH. Quare &c. Quod &c.

PROBL. XXVII. PROP. LXIII.

Data ſphæræ portione, conſtituere conum ſuper eamdem baſim portionis, vt portio ſit ad conum in data proportione.

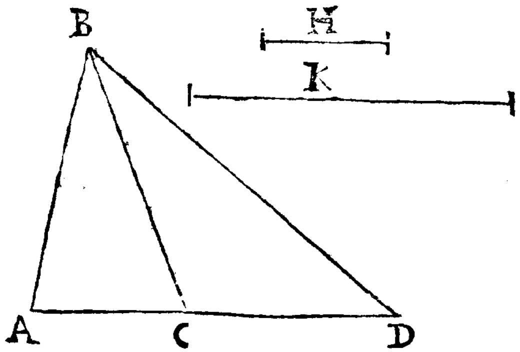
SIT data portio A B C, ſphæræ, cuius diameter F B, centrum E, & data proportio ſit, quam habet F D, ad H. Oportet facere &c. Fiat, vt F D, ad F D, cum F E, ſic D B, ad D G, & fiat conus A G C, cuius axis ſit G D. Ergo conus A G C, ex Archimede ſupra citato, eſt æqualis portioni A B C. Fiat ergo, vt F B, ad H, ſic G D, ad D K, vbicumque cadat K, & fiat conus A K C. Quem dico eſſe quæſitum. Nam conus G A C, ſeu portio A B C, eſt ad conũ A K C, vt G D, ad D K; ſeu vt F B, ad H. Quod erat faciendum.



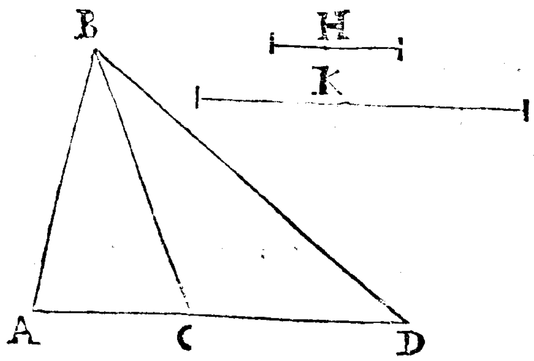
LEM. XXXVII. PROP. LXIV.

Dato quolibet triangulo A B C, cuius vertex B, ducere à vertice B, lineam B D, occurrentem lateri A C, etiam producto, vt quadratum vnius lateris, putà B C, ſit ad rectangulum ſub alio latere in ductam, nempe ad rectangulum A B D, in data proportione poſſibili.

PRoportio poſſibilis eſt, quod ſi proportio ſit exceſſus ſit, non maior ea, quàm habet quadratum



B C, ad rectangulum ſub B A, in perpendiculum, quia aliter B D, non eſſet ducibilis, cùm eſſet minor perpendicudiculo. Data ratio ſit, quam habet AC, ad H, & fiat vt AB, ad BC, ſic BC, ad K; & fiat vt AC, ad H, ſic K, ad aliam, quæ non erit minor perpendiculo trianguli, vt patebit ex determinatione Lemmatis, ac proinde ſi ducatur à puncto B, occurret AC; occurrat in puncto D. Dico quadratum BC, eſſe ad rectan-



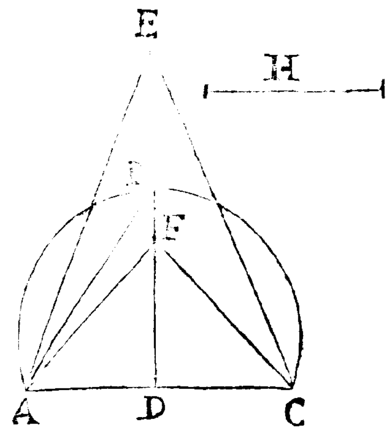
gulum ABD, in data proportione AC, ad H. Nam, quoniam factum eſt, vt AB, ad BC, ſic BC, ad K; ergo quadratum BC, erit æquale rectangulo ſub AB, & K. Ergo hęc ad rectangulũ ABD, habebunt eandem proportionem. Sed rectangulum ſub AB, in K, ad rectangulum ABD, eſt, vt K, ad BD; & vt K, ad BD, ſic AC, ad H. Ergo, & vt AC, ad H, ſic quadratum BC, ad rectangulum ABD. Quod erat faciendum.

Quòd verò BD, non ſit minor perpendiculo, patet, vt dixi, ex determinatione.

PROBL. XXVIII. PROP. LXV.

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt ſuperficies ſphærica portionis, ſit ad ſuperficiem conicam coni, in data proportione.

Data portio ſit ABC, & data ratio ſit, quam habet AD, ad H. Oportet facere, quod imperatum eſt. Ducatur BA. Infra patebit oportere proportionem datam minorem eſſe ea, quam habet quadratum AB, ad quadratum AD. A' vertice ergo A, dati trianguli ADB, ducatur AE, occurrens DB, in E, vt quadratum AB, ſit ad rectangulum EAD, vt AD, ad H; & ex triangulo EAD, reuoluto circa ED, fiat conus AEC. Dico conum AEC, eſſe quæſitum. Patet faciliter; nam ſuperficies portionis ABC, ad ſuperficiem coni EAC, eſt, ex Archimede ſæpè citato, vt quadratum BA, ad rectangulum EAD, nempe vt AD, ad H. Quod erat faciendum.



Quòd verò proportio data debeat esse minor ea, quàm habet quadratum B A, ad quadratum A D, patet; quia aliter cùm non possit duci A E, conus E A C, non esset construibilis.

LEM. XXXIIX. PROP. LXVI.

Sit portio A B C, cuius vertex B, axis B D, diameter basis A C, & ducatur A B, fiatque vt D A, ad A B, ita A B, ad aliam, quæ erit ipsa A B, maior, & sit A E, occurrens D B, productæ in E. Dico, quod si ex triangulo E A D, fiat conus E A C, superficies conica talis coni erit æqualis superficiei sphericæ portionis A B C.

INspiciatur schema antecedentis Propositionis. Patet propositum, quia rectangulum E A D, est æquale quadrato A B. Ergo, ex Archimede, & superficies portionis, erit æqualis superficiei coni.

COROLLARIVM.

EX dictis deducitur, totum perimetrum portionis, esse æquale toti perimetro coni, addita nempe basi communi.

SCHO-

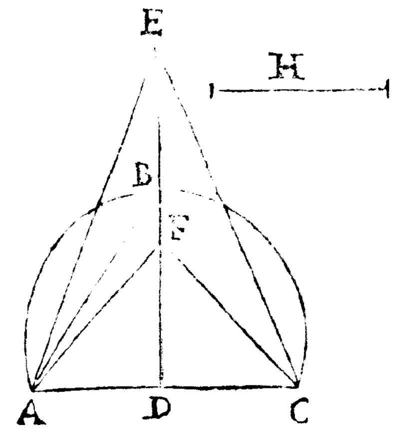
SCHOLIVM.

HIC etiam non erit inutile notasse, quòd si portio sit hemisphærium, latus coni erit æquale diametro sphæræ, quia tunc A B, est media proportionalis inter A D, semidiametrum sphæræ, & diametrum. Notetur etiam, si placet, totum perimetrum coni esse triplum circuli maximi sphæræ; ac proinde se habere ad circulum maximum, seù ad suam basim, vt Cylindrus in eadem basi, & altitudine, ad conum.

PROBL. XXIX. PROP. LXVII.

Idem.

DAta proportio sit A D, ad H; & fiat conus A E C, cuius superficies sit æqualis superficiei sphæricæ portionis. Patet ergo faciliter, quod si Problema debet solui, oportet rationem A D, ad H, esse minorem ea, quam habet rectangulum E A D, ad quadratum A D. Fiat ergo, vt A D, ad H, sic E A, ad aliam, quæ ex determinatione erit maior A D, ac proinde, si ducatur à puncto A, occurret D E, occurrat in F, & fiat conus A F C.



AFC. Quem aio esse quæsitum. Demonstratio est facilissima; quia vt A D, ad H, sic E A, ad A F, nempe, (sumpta communi altitudine A D,) rectangulũ E A D, ad rectangulum F A D. Nempe quadratum B A, æquale rectangulo E A D, ad rectangulum F A D. Nempe, superficies portionis A B C, ad superficiem coni A F C. Quod erat faciendum.

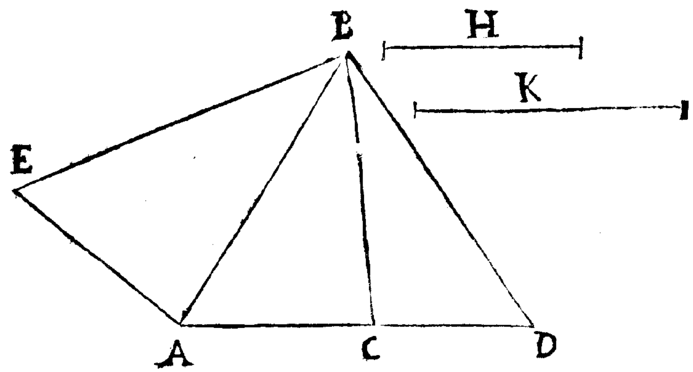
LEM. XXXIX. PROP. LXVIII.

Dato triangulo A B C, cuius vertex B, ducere à vertice B, lineã B D, occurrentem A C, productæ (si opus sit) tali lege, vt duo quadrata C B, B A, sint ad rectangulum D B A, cum quadrato B A, in data ratione possibili.

ETiam hic oportet proportionem datam non esse maiorem ea, quam habent duo quadrata C B, B A, ad quadratum B A, simul cum rectangulo sub B A, in perpendiculum; aliter B D, non posset duci, quia esset minor perpendiculo, vt consideranti patet.

Data ergo ratio sit, quam habet A C, ad H, & erigatur à puncto A, ipsi A B, perpendicularis A E, æqualis ipsi B C; & ducatur B E. Tunc fiat, vt A B, ad B E, sic

sic B E, ad K; deinde fiat vt A C, ad H, sic K, ad aliam, quæ ex determinatione Problematis, non erit minor composita ex A B, & perpendiculo, vt patebit ex processu demonstrationis. Quare si ab ipsa auferatur æqualis A B, & reliqua ducatur à vertice B, vtique occurret A C. Occurrat ergo, & sit B D.

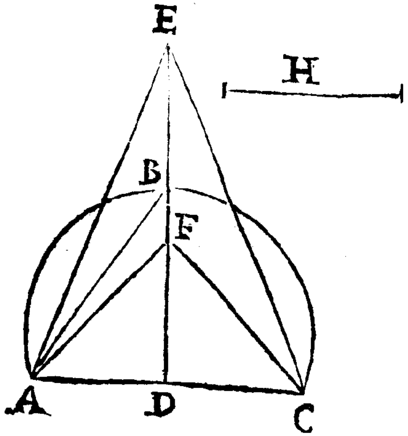


Quoniam enim factum est, vt A C, ad H, sic K, ad D B simul cum B A, & vt K, ad D B, cum B A, sic (sumpta communi altitudine B A,) rectangulum sub K, & sub B A, ad rectangulum sub composita ex D B, & B A, in A B, nempe ad rectangulum D B A, cum quadrato B A. Ergo, & vt A C, ad H, sic rectangulum sub K, in A B, nempe quadratum B E, (nam factum est supra, vt A B, ad B E, sic B E, ad K,) ad rectangulum D B A, cum quadrato B A. Sed quadrato B E, sunt æqualia duo quadrata B A, A E; & quadrato A E, est æquale quadratum B C, ex constructione. Ergo, & vt A C, ad H, sic quadrata A B, B C, ad rectangulum D B A, cum quadrato A B. Quod erat faciendum.

PROBL· XXX· PROP· LXIX·

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis, ſit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

DAta proportio ſit, quam habet A D, ad H, quam patebit oportere minorem eſſe ea, quam habent duo quadrata B A, A D, ad duo quadrata A D. Per Lemma ergo antecedens vniuerſalius propoſitum, à puncto A, vertice dati trianguli B A D, ducatur A F, vt duo quadrata B A, A D, ſint ad rectangulum F A D, cum quadrato A D, vt A D, ad H; & ex triangulo F A D, reuoluto circa F D, fiat conus A F C. Quem dico eſſe quæſitum.



Nam, vt A D, ad H, ſic duo quadrata B A, A D, ad rectangulum F A D, cum quadrato A D, nempe, ex ſæpe dictis, perimeter portionis A B C, ad perimetrum coni A F C. Determinatio eſt euidens, quia aliter Problema eſſet inſolubile, vt conſideranti fiet manifeſtum.

PROBL· XXXI· PROP· LXX·

Idem.

HOC idem Problema ſoluetur aliter, & facilius. Inueniatur conus E A C, cuius perimeter ſit æqualis perimetro portionis A B C. Deinde fiat, vt A D, ad H, ſic E A, cum A D, ad aliam, quæ ex determinatione, erit maior dupla A D. Quare, ſi ex ipſa auferatur æqualis A D, reliqua erit maior ipſa A D. Ergo poterit duci à puncto A, in D B. Ducatur ergo vbicunque cadat, & ſit A F; & fiat conus, vt prius, A F C. Quem aſſero eſſe quæſitum.

Demonſtratio eſt facilis; quia vt A D, ad H, ſic E A, cum A D, ad F A, cum A D, nempe (ſumpta communi altitudine A D,) rectangulum E A D, cum quadrato A D; nempe perimeter coni A E C, ad perimetrum coni A F C. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

DVo ſequentia Problemata, quoad ſolida ab alijs demonſtrantur, ac ſoluuntur, à nemine verò, quod ſciam, quoad ſuperficies; quare ipſos ſoluemus quoad ſuperficies.

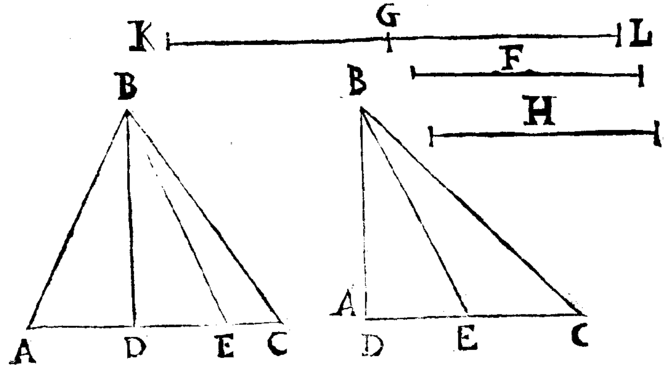
LEM. XL. PROP. LXXI.

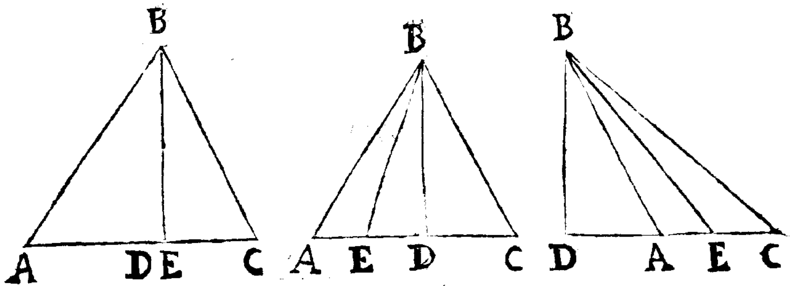
In dato triangulo ducto perpendiculo ab angulo verticis in baſim, ducere ab eodem angulo aliam lineã in baſim protractam etiam ſi opus ſit, vt rectangulum ſub ducta, & ſub perpendiculo, vna cum rectangulo ſub vno latere, & ſub eodem perpendiculo, ſit ad hoc idẽ rectangulum, cum quadrato alterius lateris, in data proportione.

Datum triangulum ſit A B E, data verò ratio, quã habet A B, ad H; & ſit ducta perpendicularis B D. Oportet à puncto B, ducere B C, vbicunque occurrentem A E, vt rectangulum C B D, cum rectan- A B D, ſit ad idem rectangulum A B D, cum quadrato B E, vt A B, ad H.

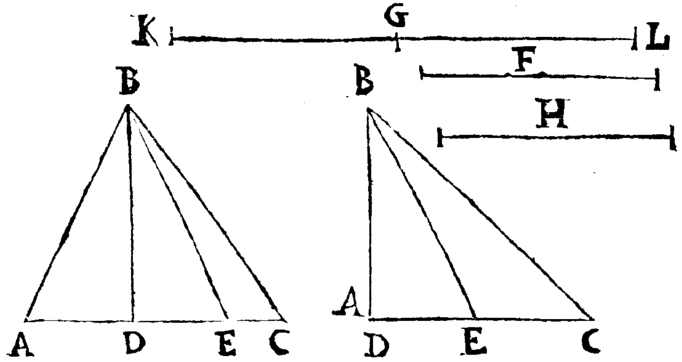
Patet in primis, Lemma quinque habere caſus, ſecundum diuerſitatem anguli verticalis, & diuerſum modum caſus perpendiculi. Poteſt enim, vel cadere inter A, E, vt in prima figura; vel in ipſo puncto A, vt in ſecunda, quando ſcilicet perpendiculum eſt idem, ac latus B A; vel in ipſo puncto E, vt in tertia, quando

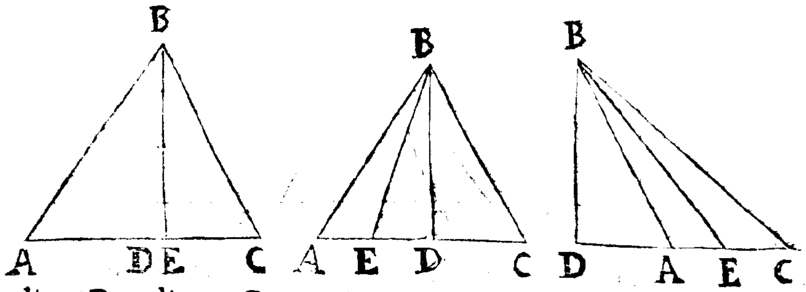
ſcilicet eſt idem, ac latus B E; vel extra A E, ad partes E, vt in quarta; vel tandem extra A E, ad partes A, vt in quinta. In primo, quarto, & quinto caſu, oportet, quod ſi proportio ſit minoris inæqualitatis, tamen ſemper ſit





maior ea, quam habet rectangulum A B D, cum quadrato B D, ad rectangulum A B D, cum quadrato B E. In ſecundo caſu oportet eſſe maiorem ea, quam habent duo quadrata B A, ad quadrata B A, & B E. Tãdem in tertio caſu, oportet ſemper eſſe proportionem maioris inæqualitatis. Determinationes facilè erunt manifeſtæ conſideranti; nam, ſi aliter eſſet, quam determinatum eſt, B C, non poſſet duci; nam, vel eſſet æqualis B D, vel minor ea. His præhabitis. Fiat, vt perpendiculum B D, ad latus *B* E, sic B E, ad F; deinde fiat vt H, ad A B, sic composita ex A *B*, & F, ad K L, quam aio futuram maiorem ipsis *A* B, B D, (vt patebit inferius.) Si ergo à maiori K L, auferatur K G, æqua-





lis *A* B, reliqua G L, erit maior B D. Ergo poterit duci à puncto B, ad aliquod punctum lineæ *A* E, etiam productæ, si opus sit; ducatur, & sit B C. Dico factum esse, quod proponebatur. Patet. Nam, quoniam factum est, vt H, ad *A* B, sic *A* B, cum F, ad K L, nempe ad duas A B, B C; ergo conuertendo, erit vt *A* B, ad H, sic *A* B, cum B C, ad *A* B, cum F. Sed vt C B, cum B *A*,

B *A*, ad B *A*, cum F, sic (sumpta communi altitudine B D,) rectangulum C B D, cum rectangulo *A* B D, ad idem rectangulum *A* B D, cum rectangulo sub B D, in F, nempe cum quadrato B E, (quia factum est, vt B D, ad B E, sic B E, ad F.) Ergo vt A B, ad H, sic duo rectangula C B D, & A B D, ad idem rectangulum A B D, cum quadrato B E. Quod erat faciendum.

Quòd K L, sit maior A B, B D, patet ex processu demonstrationis, & ex Lemmatis determinatione.

SCHOLIVM.

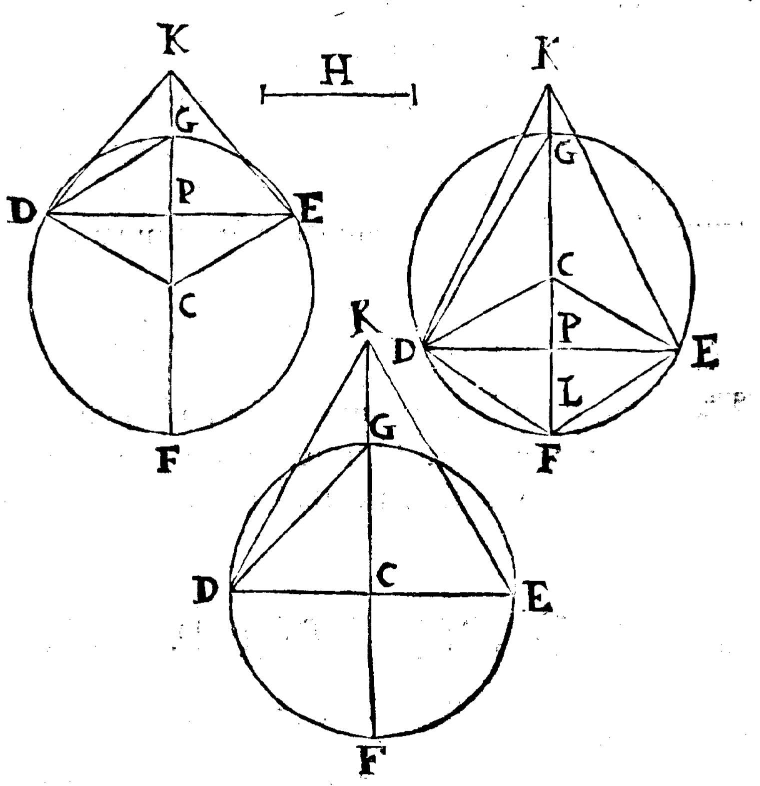
PRoposuimus hanc propositionem adeò vniuersaliter, quamuis pro solutione futuri Problematis, non indigeamus tanta vniuersalitate, ad vberiorem scientiam.

PROBL. XXXII. PROP. LXXII.

Dato sectore sphærico, inuenire rhombum conicum, cuius vnus conus sit idem, ac conus sectoris, & basis conorum sit basis coni sectoris, adeò vt superficies rhombi, sit ad superficiem sectoris, in data proportione.

Hoc

HOC Problema triplicem habet casum, secundùm quod sector, vel est maior, vel minor, vel æqualis hemisphærio, scilicet quando sector degenerat



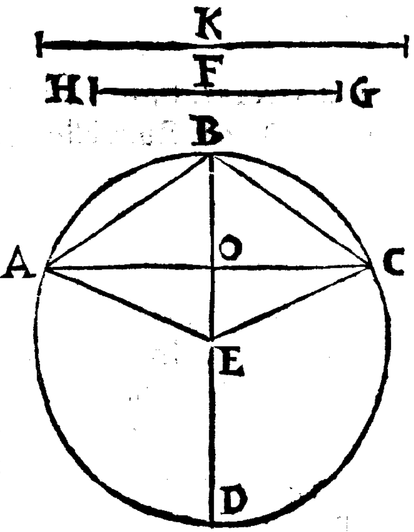
in hemisphærium; & secundùm diuersos casus, Problema recipit diuersas determinationes. Sit ergo sphæra, cuius diameter G F, centrum C, & sit sector D G E C, vel minor hemisphærio, vt in prima figura, vel maior, vt in secunda, vel æqualis, vt in tertia, (quamuis impropriè hemisphærium dicatur sector, sicut, & rhombus inueniendus, non est rhombus, sed conus, quia hemisphærij non est conus) Pariter in secunda figura, sector maior hemisphærio non habet conum, sed est minor portione D G E P, quantitate coni D C E. Intelligatur circulus maximus D G E F, ortus ex sectione, & reliqua, vt moris est; & in omni casu, ducta D G, ac in secunda figura, facta P L, æquali P C, & iunctis D L, L E, ac intellectis conis D C E, D L E, patet istos esse æquales. Data ergo ratio sit, quam habet F C, ad H. Oportet, quod si hæc sit minoris inæqualitatis, sit tamen in primo, & secundo casu, maior ea, quam habet rectangulum C D P, cum quadrato D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G. In tertio verò casu, oportet maiorem esse ea, quam habent duo quadrata C D, ad quadratum C D, cum quadrato D G. Tunc, per antecedēs Lemma, dato triangulo C D G, & ducto perpendiculo D P, ducatur D K, vt rectangulum C D P, cum rectangulo K D P, ad rectangulum C D P, cum quadra~~to D G, sit vt F C, ad H,~~ & intelligatur rhombus K D C E, in ~~prima, K D L E, in~~ secunda, & conus K D E, in tertia figura. Dico factum esse, quod proponebatur.

Nam, in prima figura, proportio rectangulorum C D P, & K D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G, ~~est eadem cum~~ proportione perimetri rhombi K D C E, ad superficiem sectoris D G C E, ex Archimede sæpe citato. In secunda verò figura, est eadem cum proportione superficiei rhombi K D L E, ad superficiem sectoris D G E C. Quia superficies sectoris constat ex superficie sphærica portionis D G E, & conica coni D C E, cui est æqualis conica coni D L E. In tertia figura autem, est eadem cum ea, quam habet totus perimeter coni K D E, ad totum perimetrum hemisphærij D G E.

Determinationes, & reliqua, petenda sunt ex antecedenti Lemmate; nam præsens Problema, aliud non est, quam antecedens Lemma.

PROBL. XXXIII. PROP. LXXIII.

In data sphæra reperire sectorem, cuius superficies sphærica, sit ad superficiem conicam sui coni, in data proportione.



Datæ sphæræ sit diameter D B, centrũ E, & data proportio sit, quam habet B E, ad H F. Oportet facere, quod imperatum est. Sumatur ipsius H F, dupla H G, & fiat, vt E B, ad H G, sic H G, ad K; deinde diuidatur B D, in O, vt sit, sicut B E, ad K, sic B O, ad O D, vbicunque cadat punctũ O, & per O, duca-

tur perpendicularis A O C, ipsi B D, & reliqua fiant, vt in schemate; & intelligantur solida, &c. Dico inuentũ esse sectorem A B C E, siue maiorem, siue minorem hemisphærio, cuius superficies sphærica A B C, sit ad superficiem conicam coni A E C, vt B E, ad H F. Nam, quoniam factum est, vt E B, ad K, sic B O, ad O D, & proportio B E, ad H G, est subduplicata proportionis B E, ad K, & pariter proportio B O, ad O A, est subduplicata proportionis B O, ad O D. Ergo, & vt B E, ad H G, sic B O, ad O A. Et ad consequentium dimidias. Ergo vt B E, ad H F, sic B O, ad dimidiam A O. Sed, vt B O, ad dimidiam A O, sic (sumpta communi altitudine B D,) rectangulum D B O, nempe ei æquale quadratum A B, ad rectangulum sub D B, in dimidiam A O, nempe ad rectangulum sub dimidia B D, nempe sub A E, in totam A O. Ergo vt B E, ad H F, sic quadratum A B, ad rectangulum E A O; nempe superficies sphærica portionis A B C, ad superficiem conicam coni E A C. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Vt diximus supra, hoc Problema comprehendit, tàm sectores maiores, quàm minores hemisphærio, & semper punctum O, diuidet B D, vt possit fieri conus, præterquamquod, quando proportio erit dupla, quia tunc, punctum O, cadet in E, nempe in centro.

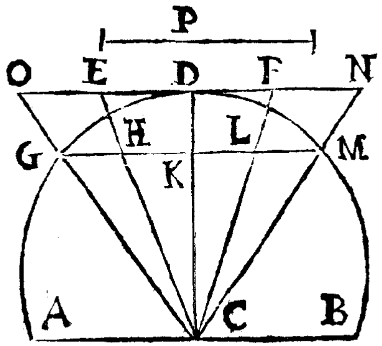
Dominus Ricardus Albius Anglus, Vir nobilitate sanguinis, ac eruditione conspicuus, in suo hemisphærio dissecto propos. 11. soluit hoc Problema. Conum segmenti, ad conum rectangulum, in quacumque data ratione constituere. Curauimus aliquando, soluere hoc Problema in superficiebus conicis, at animaduertimus, Problema posse proponi vniuersalius, nõ solùm in cono rectangulo, sed in omni cono, & non solùm in hemisphærio, sed in quocumque solido rotundo orto ex reuolutione circa axem, cuius basis sit circulus; siue tale solidum sit quodlibet conoides, vel portio sphæræ, sphæroidis, vel solidum cycloidale, vel quodlibet aliud.

PROBL. XXXIV. PROP. LXXIV.

Dato quolibet solido rotundo ADB, circa axim DC, cuius basis sit circulus, cuius diameter sit ACB, vertex eius sit punctum D, & dato cono ECF, circa eandẽ axem CD, cuius basis sit circulus EDF, tangens solidum in vertice D; secare solidum ADB, & conum ECF, plano GM, basi parallelo vt facto cono GCM, sit hic, ad conum HCL, abscissum à cono ECF, in data proportione.

Data

Data proportio sit, quam habet CD, ad P, & fiat vt P, ad DC, sic quadratum DE, ad quadratum DO, & iuncta OC, per punctum G, vbi CO, secat superficiem solidi, ducatur planũ GHKLM, basi ACB, parallelum, & intelligantur coni GCM, HCL. Quos dico esse quæsitos Est enim vt CD, ad P, sic quadratum OD, ad quadratum DE; nempe (ob parallelas OD, GK,) sic quadratum GK, ad quadratum HK. Vt autem quadratum GK, ad quadratũ HK, sic circulus, cuius diameter GM, ad circulum, cuius diameter HL, nempe conus GCM, ad conum HCL: Quod erat faciendum.

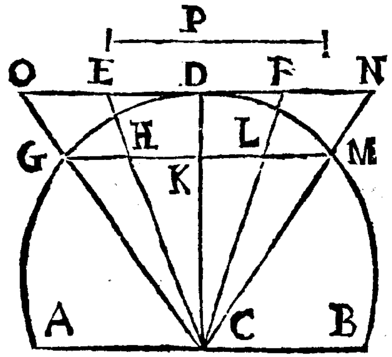


PROBL. XXXV. PROP. LXXV.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies coni GCM, sit ad superficiem conicam coni HCL, vt CD, ad P.

Intelligantur omnia secta plano consueto modo; & datis duabus rectis lineis CD, DE, continentibus angu-

angulum rectum CDE, ducatur CO, vt rectangulum COD, ſit ad rectangulum CED, in data proportione CD, ad P, per propoſit. 55. & per punctum G, agatur planum, & fiant omnia, vt in ſuperiori Problemate. Dico &c.



Nã, ob parallelas OD, GK, facilè patebit, eſſe, vt rectangulum COD, ad rectangulum CED, nempe, vt CD, ad P, ſic rectangulum CGK, ad rectangulum CHK, nempe ſuperficiem coni GCM, ad ſuperficiem coni HCL. Quod erat faciendum.

PROBL. XXXVI. PROP. LXXVI.

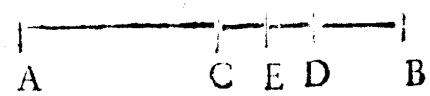
Datis ijſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidẽ, vt totus perimeter coni CGM, ad totum perimetrum coni CHL, ſit vt CD, ad P.

AD ſoluendum hoc Problema, vtemur prop. 68. nempe, ducemus CO, vt rectangulum COD, cum quadrato OD, ſit ad lineam potentem rectangulũ CED, cum quadrato ED, vt CD, ad P; & per punctum G, ducetur planum, vt prius, & reliqua fient vt prius. Dico perimetrum coni GCM, eſſe ad perimetrum coni HCL, vt CD, ad P. Demonſtratio eſt facilis, ac proinde omittitur.

LEM. XLI. PROP. LXXVIII.

Sit recta linea AB, ſecta in C, vel biſariam, vel non biſariam, ſed adeò vt AC, ſit maior CB. Si rursùm CB, ſecetur in D, & DC, ſecetur biſariam in E; tria rectangula ACB, erunt maiora tribus rectãgulis AC, EB, tribus rectangulis EDB, & duobus quadratis CE.

QVoniam enim BE, maior eſt BD, & DE, EC, ſunt æquales; ergo tria rectangula BEC, erunt maiora tribus rectangulis BDE. Sed & tria quadrata CE, ſunt maiora duobus quadratis CE; ergo tria rectangula BEC, cum tribus quadratis CE; nempe tria rectangula BCE, erunt maiora tribus rectangulis BDE, & duobus quadratis CE. Sed, ſi linea AB, ſecta



secta est bifaria in C, tria rectangula B C E, sunt æqualia tribus rectangulis A C E; si verò A C, est maior C B, tria rectangula A C E, sunt maiora tribus rectangulis BC E. Ergo, in vtroque casu, tria rectangula A C E, erunt maiora tribus rectangulis B D E, & duobus quadratis C E. Et communibus additis tribus rectangulis A C, E B. Ergo tria rectangula A C E, cum tribus A C, E B; quæ omnia faciunt tria rectangula A C B, erunt maiora tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

EX dictis claré tenetur, quòd, cùm tria rectangula A C, E B, vna cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint minora, quam triplum vnius rectanguli A C B. Si proponatur. Datam rectam lineam A B, sectam in puncto C, rursùm secare in puncto D, inter C, B, vt rursùm secta DC, in puncto E, bifariam, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint ad rectangulum A C B, in proportione, vel tripla, vel maiori tripla; tenetur dico, quod semper A C, debet esse minor C B. Et è contra, si proportio sit minor tripla, tenetur, Problema posse solui, siue A C, sit æqualis, siue maior C B.

LEM. XLII. PROP. LXXVIII.

Sit recta linea A B, secta in punctis C, D, E, F, G, sic, vt D C, sit dupla A C; D F, sit dupla FB; & DE, sit dupla G B. Patet, quod, cum tota BD, sit sexquialtera D F, & DE, cum G B, sit sexquialtera DE, etiā reliqua EG, erit sexquialtera EF. Si D E, secetur bifariam in H, tria rectangula CDF, cum rectangulo D E B, erunt æqualia, rectangulo A D E, triplo rectangulo C D, H F, triplo rectangulo H E F, & duplo quadrato D H.

QVoniam enim B G, & D H, sunt æquales, quia dimidiæ eiusdem D E; ergo rectangulum D E, G B, erit æquale rectangulo E D H, seù duobus quadratis D H. Communi addito rectangulo D E G. Ergo rectangulum D E G, cum rectangulo D E, G B, nempe totum rectangulum D E B, erit æquale rectangulo DEG, & duplo quadrato DH. Sed rectangulo D E G, est æquale triplum rectangulum H E F, quia G E, est sexquialtera E F, & D E, est dupla H E. Ergo rectangulum D E B, erit æquale triplo rectangulo H E F, & duplo

quadrato D H. Et communibus additis tribus rectangulis C D F. Ergo tria rectangula C D F, cum rectangulo D E B, erunt æqualia tribus rectangulis G D F, (nempe tribus rectangulis C D H, & tribus rectangulis C D, H F,) tribus rectangulis H E F, & duplo quadrato D H. Sed tria rectangula C D H, quia A D, est sexquialtera D C, & D E, est dupla D H, faciunt rectangulum A D E. Ergo tria rectangula C D F, cum rectangulo D E B, erunt æqualia rectangulo A D E, triplo rectangulo C D, H F, triplo rectangulo H E F, & duplo quadrato D H. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM I.

EX dictis infertur, quod si D F, sit maior D C, vnde, & D B, sexquialtera D F, sit maior A D, sexquialtera C D, & ex D B, auferatur K B, æqualis A D. Infer-

fertur inquam, quod, cùm tunc, duo rectangula A D F, & D E, K B, sint æqualia, si hæc hinc inde auferantur, etiam reliqua remanebunt æqualia. Vnde, tria rectangula C D F, cum rectangulo D E K, erunt æqualia tribus rectangulis C D, H F, tribus rectangulis H E F, & duobus quadratis D H.

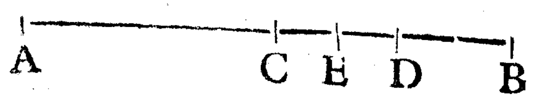
SCHOLIVM II.

INfertur secundò, quod si imperetur. Datam C F, sectam in puncto D, rursùm diuidere in E, vt diuisa D E, bifariam in H, tria rectangula C D, H F, vna cum tribus rectangulis H E F, & cum duobus quadratis D H, sint ad rectangulum C D F, in data proportione maiori, quam tripla. Infertur inquam, quod Problema erit determinatum. Et determinatio erit, vt facta D B, sexquialtera D F, & ab ipsa ablata B K, sexquialtera C D; proportio data, non sit maior ea, quam habet triplum rectangulum C D F, cum quadrato dimidiæ D K, ad rectangulum C D F. Nam, cum supra probatum sit, illa plana esse æqualia triplo rectangulo C D F, & rectangulo D E K, patet, quod ex omnibus rectangulis factis sub segmentis D K, diuisæ in puncto, rectangulum sub partibus æqualibus, seù quadratum dimidiæ, est maximum.

LEM· XLIII· PROP· LXXIX·

Si recta linea A B, sit taliter secta in C, vt A C, sit, vel minor, vel æqualis tertiæ parti C B; & rursùm C B, secetur in D, & C D, secetur bifaria in E. Tria rectangula A C B, erunt minora tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

QVoniam enim B C, est vel tripla, vel maior tripla A C. Ergo rectangulum B C E, erit, vel æquale, vel maius triplo rectangulo A C E. Sed rectangulū



B C E, est æquale rectangulo B D E, & duplo quadrato D E, vel C E, vt consideranti patet. Ergo, & rectangulum B D E, cum duplo quadrato C E, erit absolutè maius, triplo rectangulo A C E. Et communi addito triplo rectangulo A C, E B. Ergo triplum rectangulum A C, E B, cum triplo rectangulo E D B, & cum duobus quadratis C E, erit maius triplo rectangulo A C E, & triplo

triplo rectangulo A C, E B; quæ omnia faciunt tri rectangula A C B. Quare patet propositum.

SCHOLIVM.

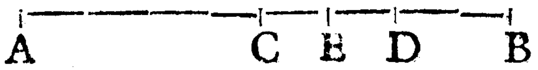
EX dictis infertur, quod si linea A B, secta in C, proponatur taliter secanda in D, vt secta C D, in E, bifariam, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint, vel tripla; vel minora, quam tripla, rectanguli A C B. Infertur inquam, quod A C, non potest esse, nec minor, nec æqualis tertiæ parti C B, sed maior.

LEM· XLIV· PROP· LXXX·

Si linea A B, secta bifaria in C, rursùm secetur in D, inter C, B, & C D, secetur bifaria in E. Tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

QVoniam enim, tria rectangula B C E, sunt æqualia tribus rectangulis B D E, & sex quadratis D E, vel

vel C E, vt consideranti patet; & pariter sunt æqualia tribus rectangulis A C E; ergo tria rectangula A C E, erunt æqualia tribus rectangulis B D E, & sex quadratis C E. Et communibus additis tribus rectangulis A C,



E B. Ergo tria rectangula A C E, cum tribus rectangulis A C, E B, quæ omnia faciunt tria rectangula A C B, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & sex quadratis C E. Et ablatis hinc inde quatuor quadratis C E, quæ sunt æqualia quadrato C D. Ergo tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Ex hoc Lemmate habemus, quod tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis B D E, & cum duobus quadratis C E, erunt maiora, quam dupla rectanguli A C B. Nam ostensa sunt æqualia tribus rectangulis A C B, minus quadrato C D. Sed hæc sunt maiora quàm dupla rectanguli A C B; quia quadratum C D, est minus quadrato C B, nempe vno rectangulo A C B. Vnde habemus, quod si proponatur. Diuidere lineam A B, sectam bifariam in C, rursùm in D, vt diuisa C D, bifariam in E, tria rectangula A C, E B, cũ tribus B D E, & cum duobus quadratis C E, sint ad rectangulum A C B, in data proportione minori tripla, hæc tamen proportio debet esse maior dupla.

LEM. XLV. PROP. LXXXI.

Sit recta linea A B, taliter secta in C, vt A C, sit maior C B, & C F, sit sexquialtera C A, & F K, sit sexquialtera C B, quæ C B, sit secta vtcumque in M, & C M, sit secta bifariam in N. Tria rectangula A C B, minus rectangulo K M C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, N B, tribus rectangulis N M B, & duobus quadratis C N.

Fiat C G, sexquialtera B C. Quoniam G C, est æqualis F K, quia ambæ factæ sunt sexquialteræ C B; ergo rectangulum F K, C M, erit æquale rectangulo G C M, nempe rectangulo B G M, & rectangulo G B, M C. Sed rectangulum G B, M C, est æquale rectangulum B C N, quia B C, est dupla G B, & C N, est dimidia

dia C M; & rectangulum B C N, eſt æquale rectangulo B M N, & duplo quadrato C N, vt conſideranti patet; & pariter rectangulum B C M, eſt æquale quadrato C M, & rectangulo B M C, nempe duplo rectangulo B M N. Ergo rectangulum F K, C M, erit æquale tribus rectangulis B M N, duobus quadratis C N, & quadrato C M. Et communi addito rectangulo K C M. Ergo duo rectangula F K, C M, & K C M, nempe rectangulum F C M, erit æquale tribus rectangulis B M N, duobus quadratis C N, quadrato C M, & rectangulo K C M. Sed quoniam rectangulũ F C M,

F A K C N M B G

eſt æquale triplo rectangulo A C N, quia F C, eſt ſexquialtera A C, & C M, eſt dupla C N; & pariter rectangulum K C M, cum quadrato C M, facit rectangulum K M C. Ergo, & triplum rectangulum A C N, erit æquale triplo rectangulo N M B, duplo quadrato C N, & rectangulo K M C. Quo ablato hinc inde, & additis tribus rectangulis A C, N B. Ergo tria rectangula A C N, cum tribus rectangulis A C, N B, (quæ faciunt tria rectangula A C B,) minus rectangulo K M C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, N B, tribus rectangulis B M N, & duobus quadratis C N. Quod erat oſtendendum.

LEMMA XLVI. PROP. LXXXII.

Sit recta linea F B, ſecta in punctis A, K, C, vt in ſuperiori Lem. ſed C B, ſit ſecta tantùm bifariam in M. Tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, M B, & duobus quadratis C M.

Fiat G C, ſexquialtera C B. Quoniam F K, & G C, ſunt æquales, quia ambæ ſexquialteræ C B; ergo rectangulum F K, C B, erit æquale rectangulo G C B, nempe rectangulo G B C, & quadrato B C. Sed quia tres G B, B M, & M C, ſunt æquales, rectangulum

F A K C M B G

G B C, eſt æquale duplo quadrato B M, vel M C. Ergo rectangulũ F K, C B, erit æquale duplo quadrato C M, & quadrato C B. Et communi addito rectangulo K C P. Ergo duo rectangula F K, C B, & K C B, nempe rectangulum F C B, erit æquale duobus quadratis C M, quadraro C B, & rectangulo K C B. Sed rectangulum F C B, eſt æquale tribus rectangulis A C M, quia F C, eſt ſexquialtera C A, & B C, eſt dupla C M; & pariter rectangulum K C B, cum quadrato C B, facit rectangulum K B C. Ergo tria rectãgula A C M, erunt æqualia duobus quadratis C M, & rectangulo K B C. Quo hinc inde ablato, & additis tribus rectangulis A C, M B. Ergo tria rectangula A C M, cum tribus rectangulis A C, M B, nempe tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, M B, & duobus quadratis C M. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CVM linea F B, sit eadem in duabus propositionibus superioribus, & eodem modo diuisa, præterquam quod in 82 linea C B, tantùm diuiditur bifariam, & in 81. diuiditur prius in M, postea C M, bifariam in N; & cum rectangulum K B C, sit maius rectangulo K M C, & quocumque alio K M C, quod habeatur secando lineam C B, in puncto M; sequitur etiam, quod tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, sint minora quibuscunque tribus rectangulis A C B, minus rectangulo K M C, quod habeatur ex tali sectione. Vnde, si proponatur. Datam lineam A B, sectam in puncto C, adeò vt A C, sit maior C B, rursùm diuidere in M, inter C, B, vt secta bifariam C M, in N, tria rectangula A C, N B, cum tribus rectãgulis N M B, & cum duobus quadratis C N, sint ad rectangulum A C B, in data proportione minori, quam tripla; patet, hanc proportionem debere esse adeò minorem tri

pla, vt tamen sit maior ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, facto ex composita ex K C, quæ sit excessus sexquialteræ A C, super sexquialteram C B, & ex C B, in C B, ad rectangulum A C B; vt consideranti patet, alioquin C B, non posset diuidi.

LEM. XLVII. PROP. LXXXIII.

Sit recta linea F G, secta in punctis A, B, & C, vt F A, sit minor A B, sed maior eius tertia parte, & G B, sit dimidia A B, & G C, sit sexquialtera F A, & C B, sit diuisa in M, & A M, bifariã in K. Tria rectangula F A B, minus rectangulo A M C, erunt æqualia tribus rectangulis F A, K B, tribus K M B, & duobus quadratis A K.

QVoniam rectangulum M A K, est æquale duobus quadratis A K, quia M K, & K A, sunt æquales. Ergo communibus additis tribus rectãgulis A K, B M, duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulo M A K, & tribus rectangulis B M, A K. Sed rectangulum M A K, cum rectangulo B M, A K, facit rectangulum B A K; & duo rectangula B M, A K, sunt æqualia rectangulo B M A. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulis B A K, & B M A. Sed rectangulum B A K, est æquale rectangulo B G, A M, quia G B, est dimidia B A, & M A, est dupla A K. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, seu B M K, erunt æqualia rectangulo B M A, & rectan-

gulo G B, M A, quæ duo faciunt vnicum rectangulum G M A. Sed quoniam G C, est sesquialtera F A, & A M, est dupla A K; ergo tribus rectangulis F A K, erit æquale rectangulum G C, A M. Sed rectangulum G C, A M, est æquale rectangulo G M A, & rectãgulo C M A. Ergo ablato rectangulo C M A, tria rectãgula F A K, minus rectangulo C M A, erunt æqualia rectangulo G M A. Sed rectangulo G M A, ostensa sunt, supra, æqualia duo quadrata A K, & triplum rectangulum K M B. Ergo tria rectangula F A K, minus rectangulo C M A, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis K M B. Et communibus additis tribus rectangulis F A, K B. Ergo tria rectangula F A K, cum tribus rectangulis F A, K B, nempe tria rectangula F A B, minus rec-

rec-

rectangulo C M A, erunt æqualia, tribus rectangulis F A, K B, & tribus rectangulis K M B, & duobus quadratis A K. Quod erat ostendendum.

LEM. III. PROP. LXXXIV.

Sit recta linea F G, secta in punctis A, C, B, vt in superiori Lemmate, sed A B, tantùm in K, bifariam. Tria rectangula F A B, minus rectangulo A B C, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis F A, K B.

NAM eodem modo, quo supra probabitur tria rectangula F A K, esse æqualia rectangulo G C, A B, nempe rectangulo G B A, & rectangulo C B A. Quo ablato hinc inde, & additis tribus rectãgulis F A,

K B; patebit, tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, æqualia esse, tribus rectangulis F A, K B, & rectangulo G B A, hoc est, (quia tres G B, B K, & K A, sunt æquales,) duobus quadratis A K. Quod erat ostendendum.

SCHO-

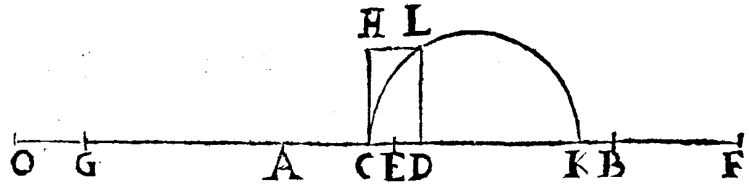
SCHOLIVM.

ETiam in duobus superioribus Lemmatibus, patet, lineam F B, diuidi eodem pacto, præterquã quod quando punctum M, cadit in C. Vnde cum rectangulum C B A, sit maius omnibus, quæ habentur, quando punctum M, cadit inter C, B, sequitur etiam, quod tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, sint minora quibuscumque tribus rectangulis F A B, minus rectangulo C M A, quod habeatur ex tali sectione. Vnde si proponatur. Datam rectam F B, sectam in A, vt F A, sit minor A B, sed maior eius tertia parte, & in C, inter A, B, vt facta G A, sexquialtera A B, etiam G C, sit sexquialtera F A; rursùm diuidere ipsam in M, inter C, B, vt secta A M, bifariam in K; tria rectangula F A, K B, cum tribus rectangulis K M B, & cum duobus quadratis A K, sint ad rectangulum F A B, in data proportione minori quam tripla; patet hanc proportionem adeò debere esse minorem tripla, vt tamen sit maior ea, quam habent tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, facto ex A B, in excessum sexquialteræ F A, super dimidiam A B, ad rectangulum F A B. Quod facilè patet consideranti, alioquin non posset diuidi.

LEM. II. PROP. LXXXV.

Datam rectam lineam A B, sectam in C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt diuisa C D, bifariam in E, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint ad rectangulum A C B, in data proportione.

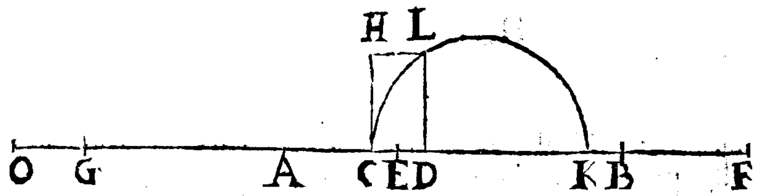
HOC Lemma quinque habet casus. Nam, vel proportio data est maior, vel æqualis, vel minor tripla; & si est minor, vel A C, est æqualis C B, vel maior, vel minor. In omnibus istis casibus, Lem-



ma recipit aliquas determinationes, quas assignabimus vnicuique. Sit ergo proportio data maior quam tripla, & sit ea, quam habet O C, ad C A. In hoc casu, Lemma recipit duas determinationes, vna, quæ habetur

tur ex Scholio propositionis 77. est, quod A C, sit minor C B; alia, quæ habetur ex Scholio 2. propos 78. & est, quod facta F C, sexquialtera C B, & ab ipsa ablata F K, sexquialtera A C, proportio data nō sit maior ea, quam habet triplum rectangulum A C B, cum quadrato dimidiæ C K, ad rectangulum A C B.

Quoniam O C, est maior tripla C A, fiat G C, eius tripla, & super C K, fiat semicirculus, & fiat, vt C A, ad O G, sic rectangulum A C B, ad quadratum C H, lineæ erectæ perpendiculariter à puncto C, super A B. Patebit inferius, hanc non esse maiorem dimidia C K.



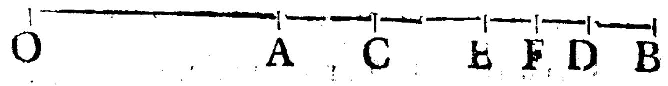
Si ergo per punctum H, ducatur H L, parallela A B, hæc occurret semicirculo. Occurrat in L, & dimittatur perpendicularis L D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Quoniam enim, conuertendo, factum est, vt O G, ad C A, sic quadratum C H, ad rectangulum A C B. Ergo & tribus vicibus componendo, vt O C, ad C A, sic quadratum C H, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed quadratum C H, est æquale quadrato D L, seù rectangulo C D K. Ergo, & vt O C, ad C A, sic rectangulum C D K, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed triplum rectangu-

tangulum A C B, cum rectangulo C D K, ex Schol. 1. propos. 78. est æquale triplo rectangulo A C, E B, triplo rectangulo E D B, & duobus quadratis C E. Ergo & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C, E B, cum triplo rectangulo E D B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A C B.

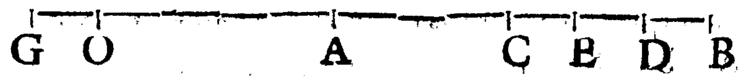
Quòd verò H C, sit minor dimidia C K, patet ex determinatione, alioquin, eodem progressu, probaremus esse, vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, cum quadrato maioris dimidia C K, ad rectangulum A C B. Quod repugnat determinationi.

SI verò proportio data sit tripla, ex Scholio propositionis 77. habemus, quod A C, debet esse minor C B, sed ex Scholio propositionis 79 habetur debere esse maiorem eius tertia parte. Fiat ergo B F, æqualis A C, & ex F B, auferatur F D, æqualis dimidiæ C F, quæ ex determinatione poterit auferri. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E. Quoniam



A C, F B, sunt æquales; ergo, & earum triplæ erunt æquales. Vnde tres A C, erunt æquales etiam tribus B D, & tribus D F; nempe D C, quæ est tripla D F. Et omnibus ductis in C D; tria rectangula A C D, erunt æqualia tribus rectangulis B D C, & quadrato C D. Et subduplatis omnibus, tria rectangula A C E, erunt æqualia tribus rectangulis B D E, & dimidio quadrati C D, nempe duobus quadrati C E. Et additis communibus tribus rectangulis A C, E B; tria rectangula A C E, cum tribus rectangulis A C, E B, (nempe tria rectangula A C B,) erunt æqualia, tribus rectangulis A C, E B, tribus E D B, & duobus quadratis C E. Ergo hæc sunt tripla vnius rectanguli A C B, nempe sunt ad ipsum, vt O C, ad C A. Quod erat faciendum.

SI verò proportio data sit minor tripla, sed A C, sit æqualis C B. Patet ex Scholio propos. 80. debere esse



maiorem dupla. Fiat G C, tripla C A. Ergo G O, ex determinatione, erit minor A C, vel C B. Si ergo inter G O, & C B, inueniatur media, erit minor C B. Sit hæc C D. Dico punctum D, esse quæsitum.

Diuidatur C D, bifariam in E. Quoniam rectangulum G O, C B, est æquale quadrato C D. Ergo cõmuni addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe totum rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & quadrato C D. Sed quoniam G C, est tripla C A, rectangulum G C B, erit æquale triplo rectangulo A C B. Ergo, & triplum rectangulum A C B, erit æquale rectangulo O C B, & quadrato C D. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed vt O C, ad C A, sic rectangulum O C B, ad rectangulum A C B. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus quadrato C D, ad rectangulum A C B. Sed tria rectangula A C B, minus qua-

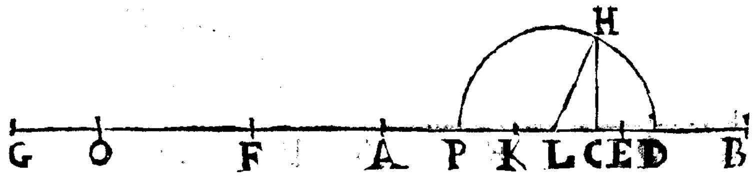
quadrato C D, ex propositione 80. sunt æqualia, tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis E C. Ergo, & vt O C, ad C A, sic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B.

SI verò proportio data sit minor tripla, sed A C, sit maior C B. Fiat C G, tripla C A, & fiat C F, sexquialtera A C, & ex ipsa auferatur F K, sexquialtera B C. Determinatiò huius casus est, ex Scholio propos. 82. quod sit maior ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B.

Inter G O, C B, sit media proportionalis C H, erecta normaliter à puncto C, super A B, & diuisa K C, bifariam in L, & iuncta L H; centro L, interuallo L H, fiat semicirculus P H D, qui, vt patebit, secabit C B, in D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Rectangula enim G O, C B, & P C D, sunt æqualia inter se, quia ambo sunt æqualia eidẽ quadrato H C, ex constructione. Sed rectangulum P C D, est æquale rectangulo K D C, quia P K, est æqualis C D. Ergo rectangulum K D C, erit æquale rectangulo G O, C B.

Ergo communi addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo K D C. Sed quia G C, eſt tripla A C, rectangulum G C B, eſt æquale tribus rectangulis A C B. Ergo tria rectangula A C B, erunt æqualia rectangulis O C B, & K D C. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus rectangulo K D C, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, eſt ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, ſic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K D C, ad rectangulum A C B. Sed, per propoſit. 81. tria rectangula

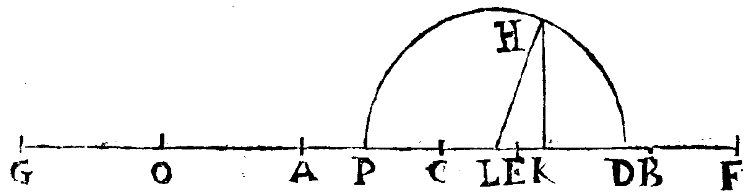


A C B, minus rectangulo K D C, ſunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Ergo, & vt O C, ad C A, ſic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B. Quod erat &c.

Quòd verò ſemicirculus ſecet C B, in D, patet ex determinatione, alioquin eodem progreſſu demonſtrabimus eſſe, vt O C, ad C A, ſic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K B C, vel minus maiori eo, ad rectangulum A C B. Quod determinationi aduerſatur.

SI

SI tandem proportio data ſit minor tripla, ſed A C, ſit minor C B. In primis, ex Schol propoſit. 79. patet, oportere A C, eſſe maiorem tertia parte C B. Fiat F C, ſexquialtera C B, & auferatur F K, ſexquialtera A C. Iam punctum K, cadet inter C, B; nam cum A C, ſit maior tertia parte C B; ergo, quorum C B, eſt tria, & B F, eſt vnum cum dimidio, A C, eſt magis, quam

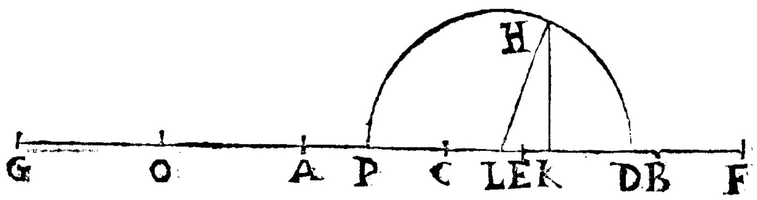


vnum, & eius ſexquialtera F K, eſt maior vno cum dimidio, nempe maior B F. Patet ergo, his præmiſſis, ex Scholio propoſit. 84. oportere proportionem datam maiorem eſſe ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B. Secetur ergo C K, bifariam in L, & inter G O, & C B, ſit media proportionalis K H, erecta normaliter ſuper A B, à puncto K, & iuncta L H, centro L, interuallo L H, deſcribatur ſemicirculus P H D, ſecans K B, in D, (ſecabit enim, vt patebit.) Dico punctum D, eſſe quæſitum. Secetur C D, bifariam in E.

Quoniam rectangula G O, C B, & P K D, ſunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato K H; & rectangulo P K D, eſt æquale rectangulum C D K. Ergo rectangulum G O, C B, erit æquale rectangulo C D K.

Qua

Quare, communi addito rectangulo O C B. Ergo duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe vnicum rectangulum G C B, seù triplum rectangulum A C B, quia G C, est tripla C A, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo C D K. Quo hinc inde ablato, triplum rectangulum A C B, minus rectangulo C D K, erit æquale rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, est ad



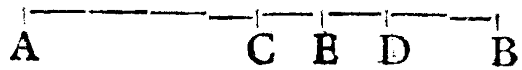
ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo C D K, hoc est, ex proposit. 83. tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis E C, ad rectangulum A C B. Quod erat faciendum.

Assumptum patet ex determinatione, & ex processu demonstrationis, & etiam ex his, quæ dicta sunt in alijs casibus.

LEM. L. PROP. LXXXVI.

Sit recta linea A B, secta in punctis C, & D, vtcumque, & C D, sit secta bifariam in E. Rectangulum sub composita ex D A, A C, in sexquialteram D B, cum rectangulo sub composita ex D A, & dupla A C, in dimidiã C D, nempe in C E, erit æquale tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

NAM rectangulum sub composita ex D A, A C, in sexquialteram D B, æquatur duobus rectan-



gulis sub A C, in sexquialteram D B, & rectangulo sub C D, in sexquialteram D B. Rectangulum verò sub dupla A C, in sexquialteram D B, æquatur triplo rectangulo A C, D B. Et pariter rectangulum sub C D, in sexquialteram D B, æquatur triplo rectangulo E D B.

Ergo

Ergo rectangulum sub composita ex D A, A C, in sexquialteram D B æquatur triplo rectangulo A C, D B, & triplo rectangulo E D B.

Pariter, rectangulum sub composita ex D A, & dupla A C, in C E, æquatur triplo rectangulo A C E, & rectangulo D C E, nempe duplo quadrato C E. Ergo rectangulum sub composita ex D A, A C, in sexquialteram D B, cum rectangulo sub composita ex D A, & dupla A C, in C E, æquatur tribus rectangulis A C, D B, tribus rectangulis E D B, tribus rectangulis A C E, siue A C, E D, & duobus quadratis C E. Sed tria rectangula A C, D B, cum tribus rectangulis A C, E D, faciunt tria rectangula A C, E B. Quare patet propositum.

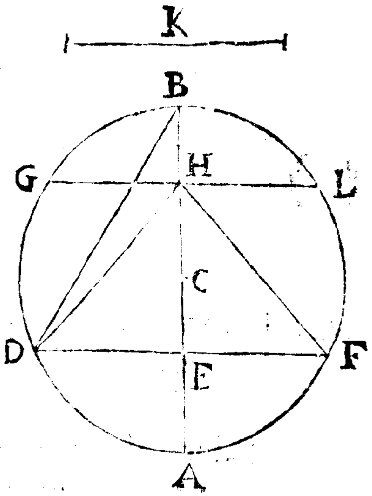
PROBL. XXXVII. PROP. LXXXVII

Datam sphæram, cuius diameter sit A B, sectam plano D E F, cui diameter A B, sit perpendicularis, rursùm secare plano G H L, plano D E F, parallelo, vt facto cono, cuius basis D E F, axis H E, axis etiam segmenti intermedij G B F H; segmentum sit ad conum D H F, in data proportione.

Datam

Data proportio sit, quam habet A B, ad K, & data A B secta in puncto E, rursùm secetur in H, inter E, B, vt secta E H, bifariam in C, sit, vt A B, ad K, sic triplum rectangulum A E, C B, cum triplo C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A E B, per propos. 85. & per punctum H, agatur planũ G H L, plano D E F, parallelum, & fiat conus D H F. Dico factum esse, quod proponebatur.

Nam, per ab alijs ostensa, præcipuè à Caualerio lib. 3. Geometr. indiuisib. propos. 3. proportio segmenti intermedij G D F L, ad conum D H F, est eadem, cum proportione rectanguli compositæ ex H A, & A E, in sexquialteram B H, vna cũ rectangulo compositæ ex H A, & dupla A E, in E C. Sed, per propos. antecedentem, hæc proportio est eadem cum proportione tripli rectanguli A E, C B, cum

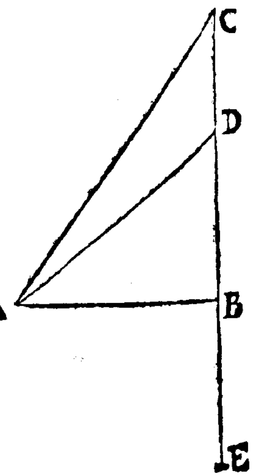


triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B. Sequitur ergo, quod, vt triplũ rectangulum A E, C B, cum triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B, sic sit segmentum intermedium G D F L, ad conum D H F, & A B, ad K. Vnde cum præsens Problema non sit aliud, quam propos. 85. sequitur recipere easdem determinationes cum ipsa. Quare &c.

LEM·LI· PROP· LXXXVIII·

Sint duo triangula rectangula ABD, ABC, quorum angulus rectus, qui ad B. Dico DB, ad DA, hypotenuſam minorem, habere minorem proportionem, quam habet BC, ad CA, hypotenuſam maiorem.

Quoniam enim quadratum BC, maius eſt quadrato BD, ergo quadratum AB, ad quadratum BD, habebit maiorem proportionem, quam ad quadratum BC. Et componendo, quadratũ AB, cum quadrato BD, nempe quadratum AD, ad quadratum BD, habebit maiorem proportionem, quam quadratum AB, cum quadrato BC, nempe quadratum AC, ad quadratum CB. Quare, & linea AD, ad lineam DB, habebit maiorem proportionem, quam AC, ad CB. Et conuertendo BD, ad DA, habebit minorem proportionem, quam BC, ad CA.



SCHOLIVM.

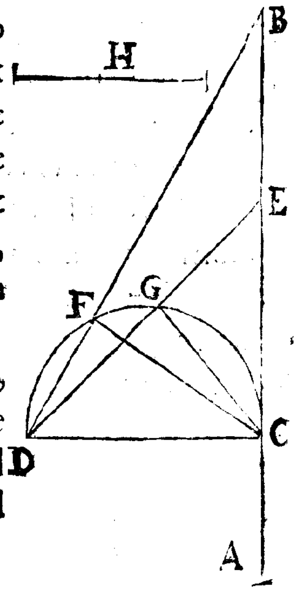
Ex dictis colligitur, quod ſi producatur CB, in E, minor erit proportio rectanguli ſub EC, in DB, ad rectangulum DAB, proportione rectanguli ECB, ad rectangulum CAB. Nam, proportio rectanguli ſub EC, in DB, ad rectangulum DAB, componitur ex proportione CE, ad AB, & BD, ad DA; & proportio rectanguli ECB, ad rectangulum CAB, componitur ex eadem proportione EC, ad AB, & BC, ad CA. Sed proportio BD, ad DA, oſtenſa eſt minor proportione BC, ad CA. Quare patet propoſitum.

LEMMA LII· PROP· LXXXIX·

Data recta linea AB, & data DC, ei perpendiculari, ducere à puncto D, DE, occurrentem BC, inter B, C, vt rectangulum ſub BA, in EC, ſit ad rectangulum EDC, in data proportione.

Hoc Lemma eſt determinatum, & determinatio eſt, quod ducta BD, proportio data, ſit minor ea, quam habet rectangulum ABC, ad rectangulum BDC. Quæ determinatio patet ex ſuperiori Scholio.

Sit ergo proportio data, quam habet H, ad D C, & ſuper D C, fiat ſemicirculus ad partes B C, ſecans B D, in puncto F, & iungatur F C; deinde fiat vt B A, ad H, ſic D C, ad aliam, quæ infra oſtendetur minor C F; quæ aptetur à puncto C, & ſit C G, & per puncta D, G, ducatur D G E, occurrens B C, in E. Dico factum eſſe, quod imperabatur.



Quoniam enim proportio D C, ad H, componitur ex proportione D C, ad A B, & A B, ad H. Sed vt B A, ad H, ſic facta eſt D C, ad C G; & propter ſimilitudinem triã gulorum DCG, & D E C, vt D C, ad C G, ſic eſt D E, ad E C. Ergo proportio D C, ad H, componetur quoque ex proportionibus D C, ad A B, & D E, ad E C. Sed iſtæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E D C, ad rectangulum ſub A B, in C E. Ergo, & vt D C, ad H, ſic rectangulum E D C, ad rectangulum ſub A B, in C E. Quare, & conuertendo, vt H, ad D C, ſic rectangulum ſub B A, in C E, ad rectangulum E D C. Quod erat faciendum.

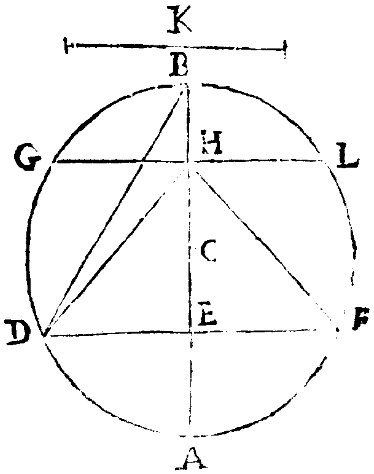
Quòd verò C G, minor ſit C F; patet, quia ſi eſſet æqualis, vel maior, eodem diſcurſu probaretur eſſe H, ad D C, vel in æquali, vel in maiori proportione rectanguli A B C, ad rectangulum B D C. Quod eſt contra propoſitam determinationem.

PRO-

PROBL. XXXVIII. PROP. XC.

Datis iiſdem, quæ in antecedenti Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt ſuperficies ſphærica ſegmenti G D F L, ſit ad ſuperficiem conicam coni HDF, in data proportione.

ETiam hoc Problema eſt determinatum eadem determinatione, qua determinatum eſt Lemma antecedens, nempe, eſt neceſſe, quod proportio data ſit minor ea, quam habet rectangulum A B E, ad rectangulum B D E, prius ducta B D. Sit proportio data, quam habet A B, ad K, & datis duabus rectis lineis A B, & D E, ſibi inuicem perpendicularibus, ducatur à puncto D, linea D H, occurrens E B, inter E, B, per antecedens Lemma, vt ſit ſicut A B, ad K, ſic rectangulum ſub A B, in H E, ad rectangulum H D E, & per punctum H, agatur planũ



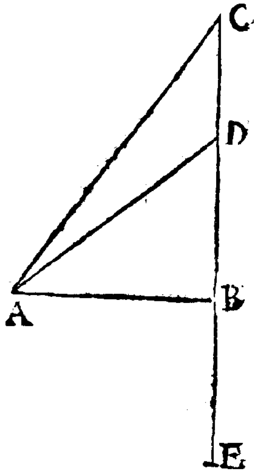
GHL,

GHL, & fiat conus DHF. Dico factum esse, quod imperebatur. Nam, vt rectangulum sub AB, in EH, ad rectangulum HDE, seù vt AB, ad K, sic superficies sphærica segmenti GDFL, ad superficiem conicam coni DHF, vt elicitur ex Archimede lib. 1. de sphæra, & Cylindro proposit. 40. & 41. Quod erat faciendum.

Quod verò determinatio sit ea, quæ assignata est; patet, quia præsens Problema, non est aliud, quam antecedens Lemma.

LEMMA LIII. PROP. XCI.

Datis iisdem, quæ in Proposit. 88. Dico, quod BD, ad DA, cum AB, habebit minorem proportionem, quam BC, ad CA, cum AB.



NAM, cum probatum sit BD, ad DA, habere minorem proportionem proportione BC, ad CA; & pariter, cùm minor BD, ad BA, habeat minorem proportionem, quam maior CB, ad BA. Ergo DB, ad vtrasque simul DA, AB, habebit minorem proportionem, quam CB, ad vtrasque simul CA, AB. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

ETiam ex Lemmate præsenti elicitur, rectangulum sub EC, in DB, ad rectangulum compositæ ex DA, AB, in AB, nempe ad rectangulum DAB, cum quadrato AB, habere minorem proportionem, quam rectangulum ECB, ad rectangulum CAB, cum quadrato AB. Etenim eodem modo, quo factum est supra, discurretur, & patebit propositum.

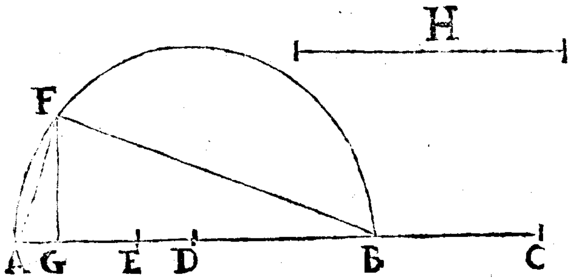
LEM. LIV. PROP. XCII.

Data hypotenusa trianguli rectanguli, & data proportione vnius lateris ad aliud latus simul cum hypotenusa, inuenire triangulum.

DAta hypotenusa sit AB, super quam fiat semicirculus, & data ratio sit, quam habet H, ad AB, quam patet oportere esse minoris inæqualitatis. Fiat ergo, vt AB, ad H, sic H, ad BC, positam in directum ipsi AD, cui AB, fiat æqualis BD; deinde fiat, vt AC, ad CD, ita AB, ad BE; & à puncto A, aptetur AF, æqualis AE, & ducatur FB. Dico triangulum AFB, esse

eſſe quæſitum, & in eo eſſe, vt H, ad A B, ſic B F, ad compoſitam ex B A, A F.

Quoniam enim eſt vt A B, ad B E, ſic (ſumpta communi altitudine A B,) quadratum A B, ad rectangulum A B E, & vt quadratum A B, ad rectangulum A B E, ſic duo quadrato A B, ad duo rectangula A B E.



Ergo, & vt A B, ad B E, ſic erunt duo quadrata A B, ad duo rectangula A B E Sed pariter vt A B, ad B E, ſic (sũpta cõmuni altitudine A E,) eſt rectangulũ B A E, ad rectangulũ A E B, & duo rectangula B A E, ad duo A E B. Ergo erit vt A B, ad B E, ſic tam duo quadrata A B, ad duo rectangula A B E, quam duo rectangula B A E, ad duo rectangula A E B. Ergo erit, vt vnum antecedentium ad vnum conſequentium, vel vt A B, ad B E, ſic ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nempe duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad duo rectangula A B E, cum duobus rectangulis A E B. Sed A B, ad B E, facta eſt, vt A C, ad C D. Ergo, & vt A C, ad C D, ſic duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad duo rectangula A B E, cum duobus rectangulis A E B. Et ad conſequentium dimidia.

Ergo

Ergo, vt A C, ad C B, ſic duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad rectangulum A B E, cum rectangulo A E B. Et diuidendo, vt A B, ad B C, ſic exceſſus duorum quadratorum A B, cum duobus rectangulis B A E, ſuper rectangulum A B E, & ſuper rectangulum A E B, ad rectangulum A B E, cum rectangulo A E B, ſimul. Sed talis exceſſus, eſt æqualis vno quadrato A B, vno quadrato A E, & duobus rectangulis B A E; quia vnicum quadratum A B, excedit rectangula A B E, & A E B, ipſo quadrato A E. Ergo, & vt A B, ad B C, ſic quadratum A B, cum quadrato A E, ſeù cum quadrato A F, quia A E, & A F, factæ ſunt æquales, & cum duobus rectangglis B A E, ſeù B A F, ad rectangulum A B E, cum rectangulo A E B. Sed quadratum A B, cum quadrato A F, & cum duobus rectangulis B A F, eſt æquale quadrato compoſitæ ex B A, & A F. Et pariter, rectangulum A B E, cum rectangulo A E B, eſt æquale exceſſui quadrati A B, ſuper quadratum A E, ſeù A F, cui etiam exceſſui, eſt æquale quadratum F B. Ergo, & vt A B, ad B C, ſeù vt quadratum lineæ A B, ad quadratum lineæ H, ſic quadratum compoſitæ ex B A, A F, ad quadratum lineæ F B. Quare conuertendo, vt quadratum H, ad quadratum A B, ſic quadratum F B, ad quadratum compoſitæ ex F A, & A B. Quare, & vt H, ad A B, ſic F B, ad compoſitam ex F A, A B. Quod erat faciendum.

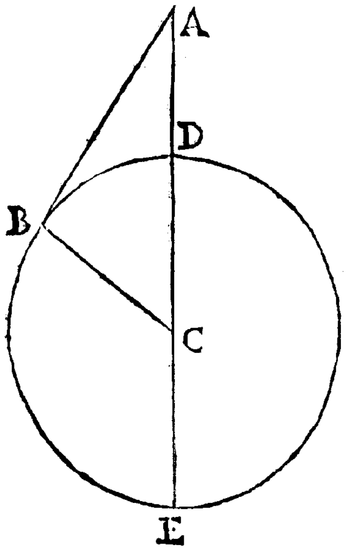
Bb SCHO-

SCHOLIVM.

EX hoc Lemmate poteſt etiam ſolui ſequens Problema; nempe triangulum rectangulum conſtituere, vt totus perimeter triãguli, ſit ad vnum duorum laterũ, in data proportione; vt conſideranti patet. Sed hoc Lemma poteſt facilius ſolui præmiſſo Lemmate ſequenti.

LEM. LV. PROP. XCIII.

Quodlibet latus trianguli rectanguli, eſt medium proportionale, inter compoſitam ex hypotenuſa, & ex alio latere, & inter differentiam eorundem.

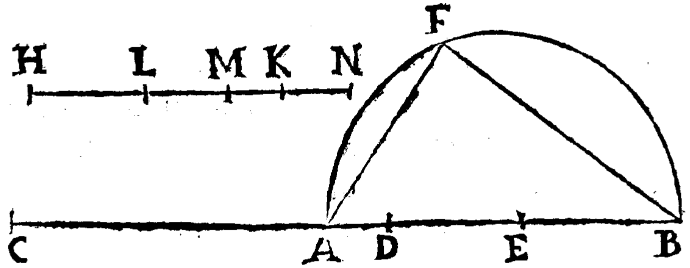


SIT triangulum rectangulum A B C, cuius angulus rectus, qui ad B. Dico, quod v. g. A B, erit media proportionalis inter compoſitam ex A C, C B, & inter differentiam earundem AC, CB. Centro C, interuallo C B, deſcribatur circulus ſecans C A, in D, & A C, producta ei occurrat in E. Quoniam ergo A B, tangit circulum, quia angulus A B C, eſt rectus; ergo quadratum A B, eſt æquale rectangulo E A D. Sed A D, eſt differentia inter A C, C D, ſeu inter A C, C B; & A E, eſt compoſita ex A C, C E, hoc eſt C B. Quare patet propoſitum.

LEMMA LVI. PROP. XCIV.

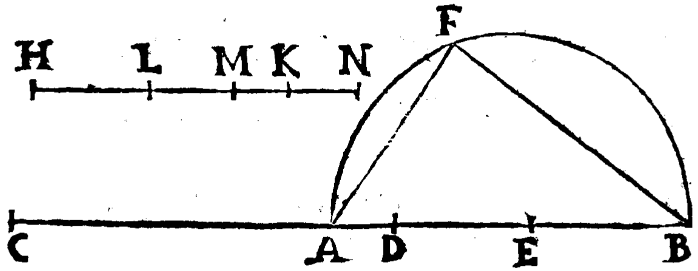
Datis iiſdem facere eadem, quæ in Propoſitione 102.

PRæmiſſo hoc Lemmate, ſoluetur antecedens facilius. Data ratio ſit, quam habet K L, ad K H; & fiat vt H K, ad K L, ſic K L, ad K M, & M K, producatur in N, vt M N, ſit dupla M K. Pariter B A, producatur in C, vt C B, ſit dupla B A, & fiat vt H N, ad



N M, ſic C B, ad B D; & D B, ſecetur bifariam in E; & ſuper A B, facto ſemicirculo, in ipſo à puncto A, aptetur A F, æqualis A E, & iungatur F B. Dico triangugulum A F B, esse quæsitum, & in ipso esse, vt H K, ad K L, sic B A, cum A F, ad F B.

Quoniam enim factum est, vt H N, ad N M, sic C B, nempe dupla A B, ad B D. Ergo & diuidendo, vt H M, ad M N, sic B A, cum A D, ad D B. Et ad consequentium dimidia. Ergo, vt H M, ad M K, sic B A, cum A D, ad D E. Et componendo, vt H K, ad K M,



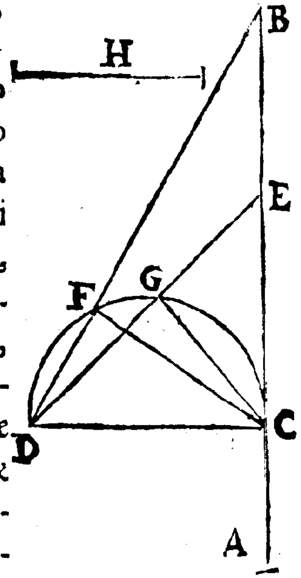
sic A B, cum A E, ad D E, seù ad E B. Sed A E, facta est æqualis A F. Ergo B E, erit differentia inter A B, & A F. Quare erit, vt H K, ad K M, sic B A, cum A F, ad E B, differentiam inter hypotenusam, & latus. Sed H K, ad K L, est in subduplicata ratione H K, ad K M, quia tres H K, K L, & K M, sunt continue proportionales; & pariter, ex Lemmate antecedenti, B A, cum A F, ad F B, est in subduplicata ratione B A, cum A F, ad E B. Ergo, & vt H K, ad K L, sic B A, cum A F, ad F B. Et conuertendo, vt K L, ad K H, sic F B, ad B A, cum A F. Quod &c.

LEM-

LEM. LVII. PROP. XCV.

Datis iisdem, quæ in propos. 89. facere eadem, quæ ibidem, adeò vt rectangulum sub A B, in C E, ad rectangulum E D C, simul cum quadrato D C, sit in data proportione.

HOC etiam Lemma est determinatum, & determinatio est, quod proportio data sit minor ea, quam habet rectangulum A B C, ad rectangulum B D C, cum quadrato D C, vt constat ex Scholio proposit. 91. Data ergo proportio sit, quam habet H, ad D C. Data ergo D C, hypotenusa trianguli rectanguli, & data proportione, quam habet A B, ad H, inueniatur triangulum rectangulũ D C G, vt sit, sicut A B, ad H, sic composita ex C D, D G, ad G C, quæ inferius ostendetur minor F C, & D G, producatur vsque ad E. Dico factum esse, quod imperebatur.



Etenim, vt dictum est supra, proportio D C, ad H, com-

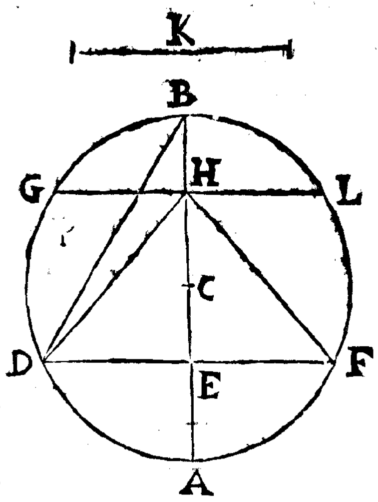
componitur ex proportione D C, ad A B, & A B, ad H. Sed vt A B, ad H, sic composita ex C D, D G, ad G C; & vt composita ex C D, D G, ad G C, sic propter similitudinem triangulorum C G D, & E D C, composita ex E D, & D C, ad C E. Ergo proportio quoque D C, ad H, componetur ex proportione D C, ad A B, & ex proportione compositæ ex E D, D C, ad C E. Sed illæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E D C, cum quadrato D C, ad rectangulum A B, C E. Ergo, & conuertendo, vt H, ad D C, sic rectangulum sub A B, in C E, ad rectangulum E D C, cum quadrato D C. Quod erat faciendum.

Quòd verò C G, sit minor C F, patet; alioquin, eodem discursu, concluderetur contra determinationem.

PROBL. XXXIX. PROP. XCVI.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica segmenti intermedij, sit ad perimetrum coni, in data proportione.

Etiam hoc Problema est determinatum, & determinatio est, quod proportio data, sit minor ea, quam habet rectangulum A B E, ad rectangulum B D E, cum quadrato D E. Quæ determinatio patet ex superioribus, sicut etiam constructio Problematis. Nam proportio superficiei sphæricæ segmenti intermedij, G D F N, ad perimetrum coni D H F, est eadem cum proportione rectãguli A B, H E, ad rectangulũ H D E, cum quadrato D E; vt deducitur ex Archimede supra citato.

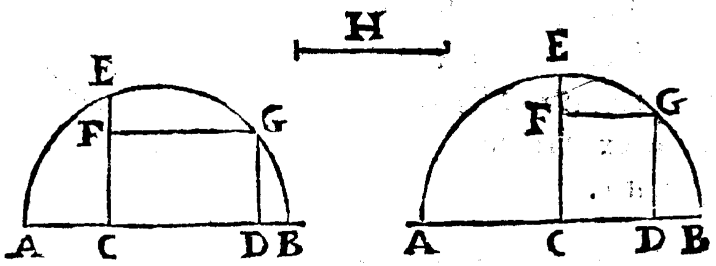


LEMMA LVIII. PROP. XCVII.

Datam rectam lineam A B, sectam in puncto C, rursum diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A C B, sit ad rectangulum A D B, in data proportione.

Data proportio sit, quam habet A B, ad H. Linea autem A C, respectu lineæ C B, se habet tali pacto, vt sit, vel ea minor, vt in prima figura, vel nõ minor, vt in secunda. In primis patet, semper oportere, proportionem A B, ad H, esse talis conditionis, vt non

non sit minor ea, quam habet rectangulum A C B, ad quartam partem quadrati A B. Res est euidens, quia ex omnibus rectangulis, quæ possunt haberi ex sectione A B, in puncto, factis sub duobus segmentis, maximum est quando linea secatur bifariam, & tunc tale rectangulũ est æquale quadrato dimidiæ, nempe quartæ parti quadrati A *B*. Tunc patet, quod si A C, sit minor



C B, Lemma potest solui in quacumque proportione vniuersaliter, præter quam quod in qualibet proportione defectus; quia in proportione defectus, Lemma est coarctandum, vt non sit minor ea, quam habet rectangulum A C B, ad quartam partem quadrati A B. Si verò A C, non sit minor C B; tunc Lemma nequit solui nisi in proportione maioris inæqualitatis, quia semper rectangulum A C B, est maius quocumque rectangulo A D B, vt consideranti patet. His præmissis.

Super A *B*, fiat semicirculus, & à puncto C, erigatur perpendicularis C E; tunc fiat, vt A B, ad H, sic quadratum E C, ad quadratum lineæ, quam ex determinationibus supra expositis; patet nunquam esse

maio-

maiorem dimidia A B; quare si in C E, sumatur ei æqualis, siue hæc sit semper minor E C, vt in secundo casu, siue sit minor, siue æqualis, siue maior, vt in prima figura, (quamuis ponamus in schemate minorem,) quæ sit C F, & per punctum F, ducamus F G, parallelam A B, hæc semper occurret circumferentiæ. Ducatur ergo, & occurrat in G, & à puncto G, demittatur perpendicularis D G. Dico punctum D, esse quæsitum.

Res est euidens, quia cum factum sit, vt A B, ad H, sic quadratum E C, ad quadratum C F, seù ad quadratum D G, ei æquale, & quadratis E C, G D, sint æqualia rectangula A C B, & A D *B*, alterum alteri. Ergo, & vt A B, ad H, sic rectangulum A C *B*, ad rectangulum A D B. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Si vice semicirculorũ constituerentur super A B, semiellipses, nihilominus eodem modo fieret propositum; quia quamuis in ellipsi, quadrato v. g. C E, non sit æquale rectangulum A C B, attamen, ex propos. 21. primi Conic. est, vt quadratum C E, ad quadratum D G, sic rectangulum A C B, ad rectangulum A D B.

Pariter si loco semicirculorũ, vel semiellipsium vtamur duabus quibuscunque parabolis, nihilominus faciliter habebimus propositum, supponendo A B, esse vnam ex ordinatim applicatis ad axem, vel diametrũ. Nam, si per punctum C, ducatur C E, parallela axi, vel diametro, & fiat vt A B, ad H, sic E C, ad C F, & fiant

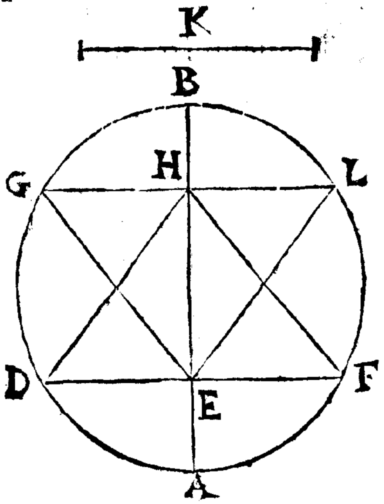
 reliqua,

reliqua, vt ſupra; punctum D, erit quæſitum. Nam, vt alij oſtendunt, ſed præcipue Caualerius lib 4. Geometr. indiuiſib. propoſ. 3. vt EC, ad GD, ſic eſt rectangulum ACB, ad rectangulum ADB.

PROBL. XL. PROP. XCVIII.

Datis ijſdem, quæ in ſuperioribus Problematibus; facere eadem, quæ ibidem, vt factis duobus conis, nẽpe DHF, ſuper baſim datam, & GEL, ſuper baſim non datam, quorum communis axis ſit EH, ſint in data proportione.

QVoniam enim duorum conorum eſt eadem altitudo, ergo ſunt inter ſe, vt baſes. Quare conus DHF, erit ad conũ GEL, vt baſis DEF, ad baſim GHL, ſeù vt quadratũ DF, ad quadratũ GH, ſeù vt rectãgulũ AEB, ad rectãgulũ AHB. Quare cõſtat præſens Problema reduci ad antecedens Lemma, & habebimus intentum, vt vnuſquiſque facile poteſt cognoſcere.



SCHOLIVM.

HIC ſoluenda venirent Problemata circa ſuperficies horum conorum, ſed ipſas reſeruamus ad aliud tempus, ſicut etiam hæc, nempe. Datam ſphæram, vt in ſuperioribus Problematibus, ſectam plano DEF, rursũm ſecare plano GHL, plano DEF, parallelo, vt facto cono GEL, ſuper baſim non datam; vel ſegmentum intermedium GDFL, ad conum GEL; vel ſuperficies ſegmenti ad ſuperficiem, vel ad perimetrum coni, ſit in data proportione.

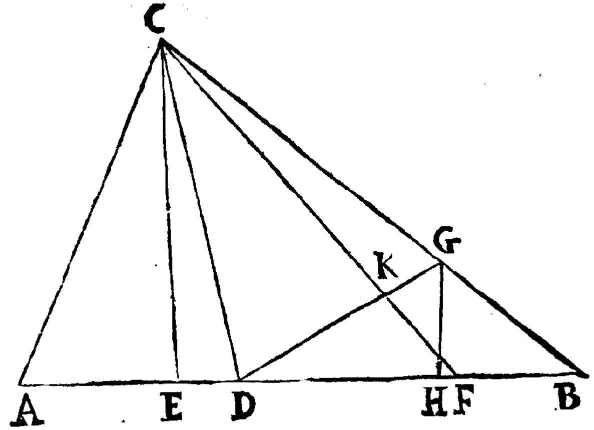
Sed hæc, vt diximus, reſeruamus pro alio Opere; quod, Deo fauente, imprimetur.

LEMMA LIX. PROP. IC.

Esto triangulum A C B, cuius angulus C, secetur bifariam à linea C D, & latus A C, sit minus latere C B, vnde, & A D, sit minor D B, cui A D, sit facta æqualis D F, & sit ducta C F. Si super basim D B, fiat triangulum æquale triangulo F C B, perpendiculum ipsius ductum à vertice G, semper minus erit D F, seù D A.

QVoniam C B, maior supponitur C A, fiat ipsi C A, æqualis C G, & ducatur D G. Quoniam trianguli A C D, duo latera A C, C D, sunt æqualia duobus lateribus D C C G, trianguli D C G, alterum alteri, & angulus A C D, est æqualis angulo D C G; ergo basis A D, erit æqualis basi D G, & triangula erunt æqualia. Sed etiam triangulo A C D, est æquale triangulum D C F. Ergo triangula D C F & D C G, erunt æqualia. Quare addito communi triangulo A C D, totum triangulum A C F, erit æquale trapezio A C G D. Quare, & reliquum F C B, erit æquale reliquo D G B.

Sed.



Sed in hoc, dimisso perpendiculo G H, patet ipsum minus esse hypothenusa D G, hoc est ipsa D A, seù D F. Quare patet propositum.

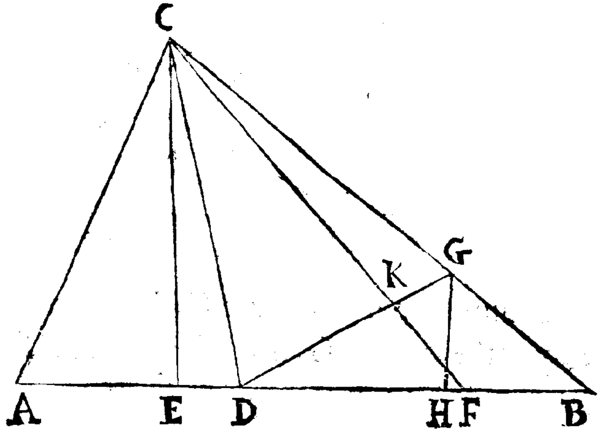
Vel postquam facta sunt omnia, vt supra, & conclusum est triangulum D C G æquale esse triangulo D C F, si auferatur commune triangulum D C K &, addatur commune trapezium F K G B, nihilominus facilius concludetur propositum. Res est clara.

LEMMA LX. PROP. C.

Sint facta, & ostensa eadem, quæ in superiori Lemmate, & sit ductum C E, perpendiculum trianguli A C B. Erit, vt D B, ad B F, sic C E, ad G H.

Quo-

QVoniam ſupra oſtenſum eſt, triangulum G D B, æquale, eſſe triangulo F C B, & triangulũ B G D, eſt æquale rectangulo contento ſub D B, in dimidiam G H, & pariter triangulum F C B, eſt æquale



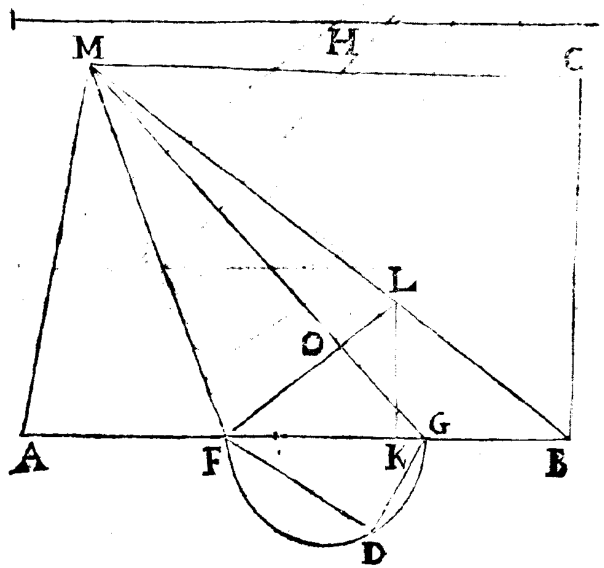
rectangulo contento ſub F B, in dimidiam C E. Ergo, & hæc rectangula, & illorum dupla erunt æqualia, nempe rectangulum ſub D B, in H G, erit æquale rectangulo ſub F B, in C E. Quare, vt D B, ad F B, ſic C E, ad G H. Quod erat oſtendendum.

LEM. LXI. PROP. CI.

Data baſe, perpendiculo, & proportione laterum trianguli inuenire triangulum.

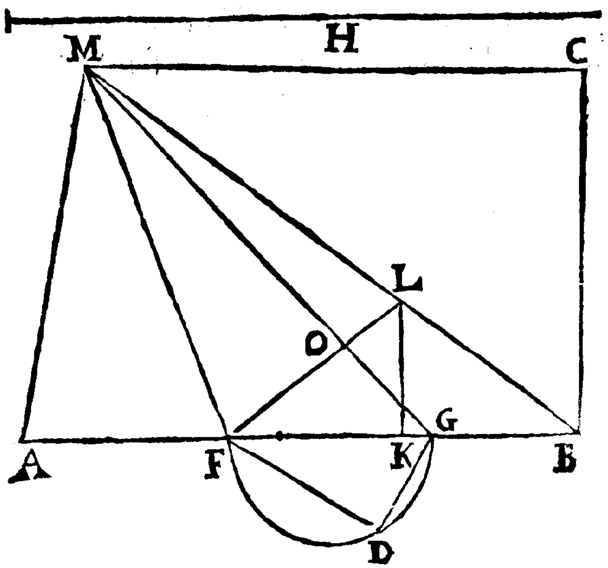
SI proportio data ſit æqualitatis, res eſt adeò facilis, vt pudeat in hoc verba profundere. Si autem ſit

ſit inæqualitatis; tunc Lemma debet determinari. Si ergo eſt defectus, vt in præſenti ſupponimus, determinatio talis eſt. Oportet proportionem datam, & perpendiculum talis eſſe conditionis, vt ſecta baſe in data proportione, & facto vt maius ſegmentum ad exceſſum eius ſupra minus, ſic perpendiculum ad aliam, hæc ſit minor minori ſegmento. Determinatio patet ex propoſitionibus antecedentibus. Nam in propoſit. 99. oſtenſum eſt G H, eſſe minorem D F, ſeù D A. In 100. verò oſtenſum eſt D B, ad B F, eſſe, vt C E, ad G H.



Sit ergo data baſis A B, & data proportio ſit, quam habet A B, ad H, perpendiculum verò datum ſit B C, erectum normaliter ſuper A B, à puncto B. Diuidatur A B, in F, vt ſit, ſicut A B, ad H, ſic A F, ad F B, fiatque

que F G, æqualis A F, & ſuper F G, fiat ſemicirculus, fiatque vt F *B*, ad B G, ſic C *B*, ad aliam. Patet ex determinatione, hanc eſſe minorem F G. Ergo poterit aptari in ſemicirculo, cuius diameter F G; aptetur, & ſit F D, fiatque ei æqualis F K, atque à puncto K, erigatur K L, normalis ſuper A B, quæ ſit æqualis D G, & per



punctum C, ducta C M, indefinita, & parallela A B, per puncta B, L, ducatur B L M, occurrens C M, in M, (occurret enim, cum anguli M C *B*, C B M, ſint duobus rectis minores;) tunc ducatur M A. Dico triangulum A M B, eſſe quæſitum. Nam eſt ſuper baſi A B, & ſuum perpendiculum C B. Quòd verò ſit, vt A B, ad H, ſic A M, ad M B, ſic patebit. Ducantur M F, M G, & F L. Patet duo triangula A M F, F M G, eſſe æqualia, pro-

propter baſes A F, F G, æquales, & propter eandem altitudinem. Cùm autem factum ſit, vt F B, ad B G, ſic C B, ad D G, ſeù ad K L; ergo rectangulum ſub F *B*, in K L erit æquale rectangulo facto ſub C B, in B G. Ergo & illorum dimidia, nempe triangula F L B, G M B, erunt æqualia. Quare communi ablato trapezio L O G *B*, atque addito communi triangulo F M O, triangulum F M L, erit æquale triangulo F M G, ſeù A M F. Cùm autem ſuper eandem baſim M F, ſint duo trianguli M L F, & M G F, æqualia, ducta L G, erit parallela M F. Ergo angulus F L G, erit æqualis alterno M F L, & angulus externus A F M, erit æqualis interno, & oppoſito F G L. Verùm cùm duæ F K, K L, ſint æquales duabus F D, D G, & anguli F K L, F D G, ab ipſis contenti ſint æquales, quia recti. Ergo, & F L, erit æqualis F G, ſeù F A. Cùm autem in triangulo L F G, duo latera F L, F G ſint æqualia. Ergo anguli quoque ad baſim, nempe F L G, F G L, erunt æquales. Sed angulo F L G, eſt æqualis ei alternus M F L & angulo F G L, oſtenſus eſt æqualis ei externus, & oppoſitus A F M. Ergo habemus duo triangula M F A, & M F L, quæ habent duo latera æqualia duobus lateribus, alterum alteri, & angulus A F M, cõtentus ſub æqualibus lateribus vnius, eſt æqualis angulo contento ſub æqualibus lateribus alterius. Ergo baſis A M, erit æqualis baſi M L, triangulum erit æquale triangulo, & angulus A M F, erit æqualis angulo F M L. Ergo, vt A F, ad F B, ſeù vt A B, ad H, ſic A M, ad M B. Quod erat faciendum.

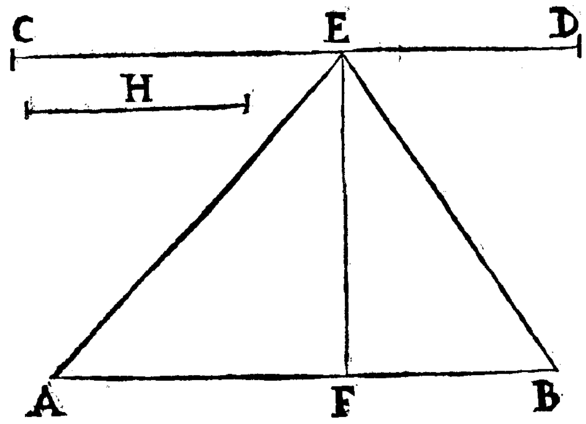
Si proportio data sit excessus, soluetur Lemma faciliter, faciendo, vt prius ex alia parte, & conuertendo.

PROBL. XLII. PROP. CII.

Data AB, magnitudine, & positione, & data CD, ei parallela, tantùm positione; inuenire in C D, punctum E, vt iunctis A E, E B, & ducta perpendiculari E F, & reuolutis triangulis E A F, F E B, circa A B, vt fiant coni; superficies conica coni ex triãgulo AEF, ad superficiem conicam coni ex triangulo F E B, sit in data proportione.

Data ratio sit, quam habet A B, ad H. Problema faciliter soluetur ex antecedentibus Lemmatibus. Nam cum duæ A B, & C D, sint datæ positione, dabitur etiam E F, magnitudine, per Propos. 32. datorum. Data ergo basi A B, & dato perpendiculo E F, & data ratione laterum, quę sit proportio data A B, ad H, inue-

niatur triangulum A E B, hoc est duo triangula A F E, B F E, vt sit sicut A B, ad H, sic A E, ad E B. Dico, quod si ex ipsis reuolutis circa A B, fiant coni, quod erunt quęsiti. Nam est vt A B, ad H, sic A E, ad E B, nẽpe rectangulum A E F, ad rectangulum B E F, nempe, ex



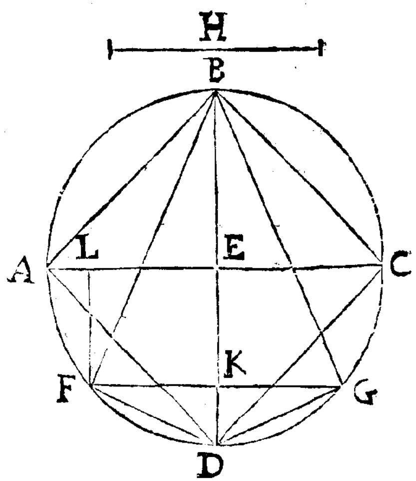
Archimede sæpe citato, superficies conica coni orti ex reuolutione trianguli A F E, circa A F, ad superficiem conicam coni orti ex reuolutione trianguli E F B, circa F B. Quod erat faciendum.

LEMMA LXII. PROP. CIII.

Sphæra ad rhombum sibi inscriptum, est vt quadratum inscriptibile in circulo maximo, ad quadratum radij circuli, qui est basis rhombi.

 Sit

SIT in ſphæra, cuius centrum E, rhombus inſcriptus B F D G. Dico eſſe &c. Fiat rhombus BADC, cuius latera ſint chordæ quadratis. Quod autē ſphæra ad rhombum BADC, ſit vt quadratū B A, ad quadratum A E, patet; quia, ex Archimede 1. de ſphæra, & Cylindro propoſit. 32. ſphæra eſt talis rhombi dupla, ſicut etiam quadratum B A, eſt duplum quadrati A E. Tunc; quoniā rhōbus BADC,



eſt ad rhombum B F D G, vt quadratum A E, ad quadratum F K. Ergo ex æquali, ſphæra ad rhombum B F D G, erit, vt quadratum B A, ad quadratum F K. Quod erat oſtendendum.

PROBL. XXXXII. PROP. CIII.

In data ſphæra inuenire rhombum, vt ſphæra ſit ad rhombum, in data ratione poſſibili.

RAtio poſſibilis eſt, vt proportio data non ſit minor dupla, quia maximus rhombus inſcriptibilium

in ſphæra, eſt æquilaterus, qui eſt ſphæræ ſubduplus. Data ergo ſphæra ſit A B C D, cuius diametri ſe ſe decuſſantes ad angulos rectos in E, ſint A C, B D; & ſit ducta B A, & data ratio ſit, quam habet B A, ad H; & inter B A, & H, inueniatur media proportionalis, quæ vtique non erit maior A E, ſed vel minor, vel ęqualis, vt patebit. Si ęqualis, facto rhombo B A D C, erit quæſitus. Si autem ſit minor A E, ſit hęc E L, & per punctum L, ducatur L F, parallela ipſi B D, occurrens ſphæræ, vel ex vna parte, vel ex alia in F, & per punctum F, acto plano F K G, cui diameter B D, ſit perpendicularis, fiat rhombus B F D G. Dico hunc eſſe quæſitum.

In primo caſu, res eſt clara; nam eſt, vt A B, ad H, ſic quadratum B A, ad quadratum A E, nempe ſphęra ad rhombum B A D C, per antecedens Lemma.

In ſecundo verò caſu, res eſt clariſſima. Nam pariter eſt, vt B A, ad H, ſic quadratum B A, ad quadratum E L, nempe ad quadratum F K; nempe ſic ſphęra ad rhombum B F D G. Quod erat oſtendendum.

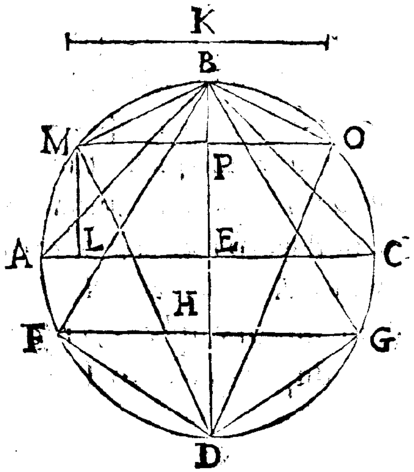
Quòd verò media proportionalis inter B A, & H, nō ſit maior A E, patet ex determinatione; quia cum B A, non ſit minor dupla H; ergo nec quadratum A B, erit minus duplo quadrato L E, ſeù F K.

PRO-

PROBL. XLIII. PROP. CV.

In data sphæra, dato rhombo inscribere alium rhombum, ad quem rhombus datus sit, in data ratione possibili.

RAtio possibilis est, vt non sit minor ea, quam habet quadratum semidiametri basis dati ad quadratum semidiametri sphæræ, quia proportio quadrati radij basis dati rhombi, ad quadratum semidiametri sphæræ, est proportio rhombi dati ad rhombū maximum inscriptibilē in sphæra; ergo non potest esse minor ea.



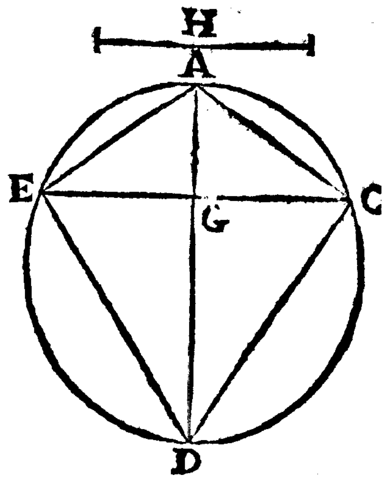
Sit ergo rhombus datus FBGD, in data sphæra A B C D, cuius diametri se secantes ad angulos rectos, sint B D, A C, & data ratio sit, quam habet A B, ad K, & fiat vt A B, ad K, sic quadratū F H, ad quadratum alterius lineæ, quæ non erit maior A E, sed vel ei æqualis, vel minor. Si æqualis, rhombus B A D C, erit

erit quæsitus. Si minor, per L, acta L M, parallela B D, occurrens circumferentiæ, aut ex vna, aut ex altera parte, in puncto M, & intellecto rhombo M B O D, ipse erit quæsitus. Res est adeò euidens, vt non mereatur prolixiorem discursum.

PROBL. XLIV. PROP. CVI.

In data sphæra inscribere rhōbum, vt superficies conicę conorum, sint ad inuicem, in data proportione.

DAtæ sphæræ diameter sit A D, & data proportio sit, quā habet D A, ad H. Diuidatur D A, in G, vt sit, sicut quadratum D A, ad quadratum H, sic D G, ad G A; & per punctum G, acto plano E G C, cui diameter D A, sit normalis, fiat rhombus A E D C. Quem dico esse quæsitum.



Quoniā enim vt DA,

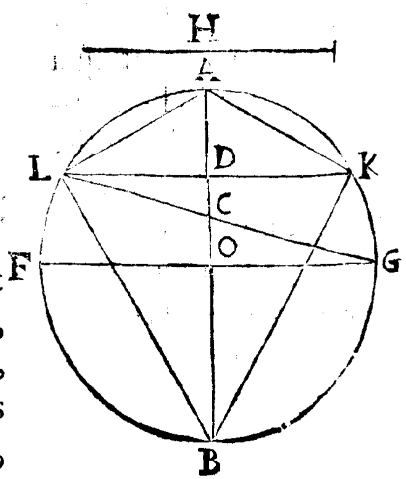
qua-

quadratum, ad quadratum H, ita facta est D G, ad G A; vt autē D G, ad G A, sic (sūpta cōmuni altitudine DA,) rectangulū ADG, DAG, & rectāgulis ADG, DAG, sunt æqualia quadrata DE, AC, alterū alteri. Ergo, & vt quadratū D A, ad quadratū H, sic quadratū DE, ad quadratum A E. Ergo, & vt D A, ad H, sic D E, ad E A. Sed vt D E, ad E A, sic rectangulum D E G, ad rectangulū A E G; vt autem rectangulum D E G, ad rectangulum A E G, sic superficies conica coni E D C, ad superficiem conicam coni E A C. Ergo &c. Quod &c.

PROBL·XLV·PROP·CVII·

Idem.

IDem Problema soluetur aliter, & forsitā facilius. Sint data omnia, quę supra, & data proportio sit, quā habet A B, ad H. A B, F G, sint diametri se se decussātes ad angulos rectos in O; & diuidatur B A, in C, vt sit sicut B A, ad H, sic B C, ad C E; & per puncta G C, ducatur linea occurrens circumferentiæ in L; & à puncto L, ducantur L A, L B, & perpēdicularis L D K;



&

& intelligatur rhombus A L B K. Qui vtique erit quæsitus. Cùm enim duo anguli A L C, B L C, sint æquales, propter æqualitatem circumferentiarum A G, G B, quibus insistunt. Ergo vt B C, ad C A, seù, vt B A, ad H, sic B L, ad L A; nempe rectangulum B L D, &c. In reliquis sequatur præcedens demonstratio.

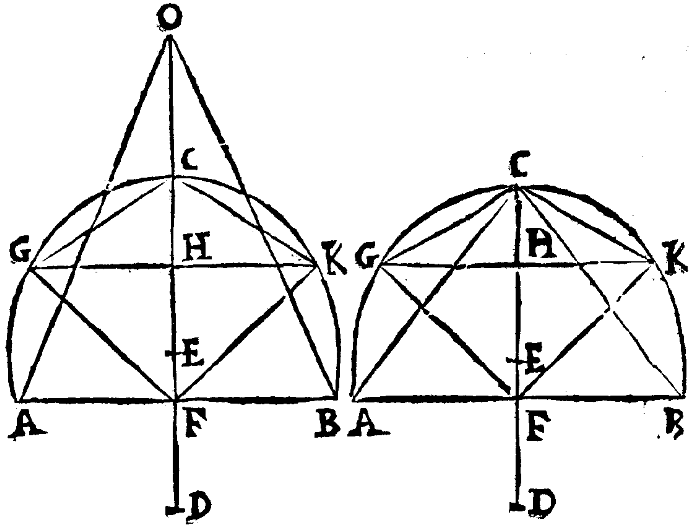
LEM·LXIII·PROP·CVIII·

Sit quælibet portio sphæræ A C B; diameter totius sphæræ C D; centrum E; F, si cētrum basis portionis, & ducto quolibet plano G H K, basi A F B, parallelo, fiat rhombus inscriptus in portione C G F K. Dico portionem A C B, ad rhombum C G F K, esse, vt rectāgulum D F C, cum rectangulo E C F, ad rectangulum D H C.

FIat, vt D F, ad D F, cum D E, sic C F, ad F O; & fiat conus O A B. Ergo, ex Archimede 2. de sphær. & Cylindr. supra citato, conus O A B, erit æqualis portioni A C B. Quoniam verò conus O A B, ad rhombum C G F K, habet proportionem compositam ex proportione

E e

tione O F, ad F C, & ex proportione quadrati A F, ad quadratum G H. Ergo, & portio A C B, ad rhombum F G C K, habebit proportionem compositam ex ratione O F, ad F C, & ex ratione quadrati A F, ad quadratum G H; nempe ex ratione rectanguli D F C, ad rectan-



gulum D H C. Sed vt O F, ad F C, sic E D, cum D F, ad D F, ex constructione; & proportio rectanguli D F C, ad rectangulum D H C, componitur ex rationibus F D, ad D H, & F C, ad H C. Ergo, & proportio portionis A C B, ad rhombum C G F K, componetur ex rationibus E D, cum D F, ad D F; D F, ad D H, & F C, ad H C. Sed duæ rationes E D, cum D F, ad D F, & D F, ad D H, faciunt rationem E D, cum D F, ad D H. Ergo quoque proportio portionis ad rhombum componetur ex rationibus E D, cum D F, ad D H, & F C, ad C H. Sed istæ

duæ

duæ rationes componunt quoque rationem rectāgulorum D F C, & E D, F C, seù E C F, ad rectangulum D H C. Quare patet propositum.

Vel intelligatur conus A C B, super eandem basim, & circa eundem axim cum portione, quæ sit A C B. Ergo portio A C B, ex Archimede 2. de sphær. & Cylin. propos 7. est ad conum A C B, vt D F, cum D E, ad D F; sed vt D F, cum D E, ad D F, sic (sumpta communi altitudine F C,) rectangulum D F C, cum rectangulo D E, C F, hoc est cum rectangulo E C F, ei æquale, ad rectangulum D F C; vt autem conus A C B, ad rhombum C G F K, sic (propter eandem altitudinem C F) est quadratum A F, ad quadratum G H, seù rectangulū D F C, ad rectangulum D H C. Ergo ex æquali, portio A C B, est ad rhombum G C K F, vt rectangulum D F C, cum rectangulo E C F, ad rectangulum D H C. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FOrsitan non erit inutile notasse, proportionem sphæræ, & hemisphærij ad suum rhombum, esse eandem; proportionem verò maioris portionis ad suum rhombum, esse is maiorem, minoris verò minorem. Quòd patet, quia, cùm portio A C B, sit ad rhombum G C K F, vt rectangulum D F C, cum rectangulo E C F, nempe cum quadrato E C, (si portio sit hemisphæriū) ad rectangulum D H C; patet, quod in hemisphærio, rectangulum D F C, seù D E C, seù quadratum E C,

 (quia

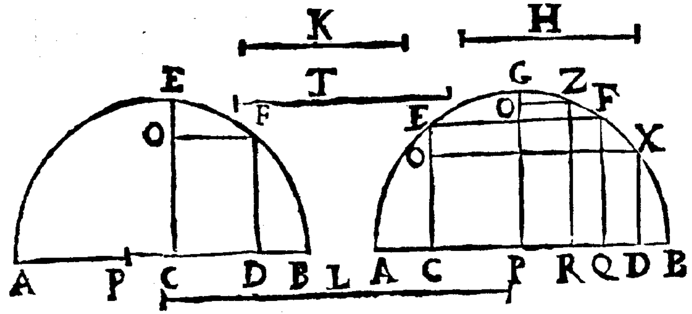
(quia hæc omnia sunt vnum, & idem) cum quadrato E C, est duplum vnius quadrati E C. Quare hemisphęrium ad rhombum sibi inscriptum, est, vt quadratum inscriptibile in circulo maximo, ad quadratum G H, quæ proportio est eadem cum proportione sphæræ ad suum rhombum, per proposit 103. Quod etiam facilius patet, supponendo portionem A C B, esse hemisphærium, & mente intellecto rhombo C G D K, cuius basis eadem G H K. quia cùm duo rhombi C G F K, & C G D K, habeant communem basim G H K, erunt inter se, vt altitudines. vnde cùm in tali casu, altitudo C D, sit dupla altitudinis C F, sicut etiam sphæra est dupla hemisphærij; patet permutando, sphęram ad rhombum G C K D, esse vt hemisphęrium A C B, ad rhombum C G F K.

Quòd verò proportio maioris portionis ad suum rhombum sit maior his, & minoris minor; patet, quia rectãgulum D F C, in primo casu, cum rectangulo E C F, est maius duplo quadrato C E, nempe quadrato inscriptibile in circulo maximo; in secundo verò casu est minus, vt esperienti patebit. Res enim est facilis demonstratu.

LEMMA LXIV. PROP. CIX.

Datam A B, vtcumque sectam in C, rursùm secare in D, inter C B, vt rectangulum A C B, vna cum rectangulo dimidiæ A B, in C B, sit ad rectangulum A D B, in data ratione possibili.

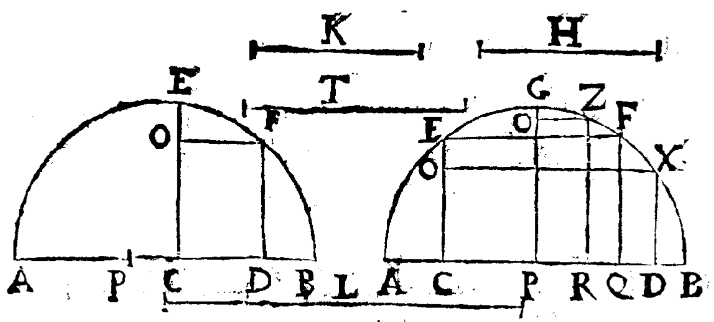
VEL A C. est non minor C B, vt in prima figura, vel minor, vt in secunda. In quolibet casu super A B, fiat semicirculus, cuius centrum sit P, & data ratio sit, quam habet A B, ad H, quæ in primo casu, de-



bet esse maior proportione rectanguli A C B, cum rectangulo sub dimidia A B, nempe sub P B, in C B, ad rectangulum A C B, quia sumpto vtcumque puncto D, semper rectãgulum A D B, minus est rectangulo A C B. In secũdo verò casu, potest esse ęqualis, maior, & minor.

Nam

Nam, si fiat ipsi C P, æqualis P Q, rectangulum A C B, erit æquale rectangulo A Q B. Si verò punctum D, sumatur inter C, Q, rectangulum factum ex talibus segmentis, erit maius rectangulo A C B. Secus erit, si punctum D, sumatur inter Q, B; nam semper tale rectangulum erit minus rectangulo A C B, vt consideranti patet. Si verò proportio data est minor ea, quam habet rectágulum A C B, cum rectangulo P B C ad rectangulum A C B, nempe si rectangulum inueniendum sit maius



rectangulo A C B, patet non oportere rationem datam minorem esse ea, quam habet rectangulum A C B, cum rectangulo P B C, ad rectangulum A P B; quia rectangulum A P B, est maius omnibus. His iactis. Exponatur linea L, potens ambo rectangula A C B, & P B C, & fiat vt A B, ad H, sic L, ad K, & inter L, K, inueniatur media T, quæ in primo casu erit minor E C, erecta normaliter super A B, à puncto C; in secundo autem casu, vel erit æqualis E C, vel maior, sed nunquá maior A P, vel minor, vt patebit inferius. In primo casu, fiat C O, æqualis

æqualis T, & acta O F, parallela A B, ducatur F D, normalis super A B. Dico punctum D, esse quæsitum. In secundo auté casu, si T, sit æqualis E C, agatur E F, parallela A B, & ducatur F Q, perpendicularis, & punctum Q, erit quæsitum. Si autem T, sit quidem maior C E, sed æqualis A P, punctum P, erit quæsitum. Si verò T, sit quidem maior C E, sed minor A P, seù G P, erectæ normaliter à puncto P, fiat P O, æqualis T, & acta O Z, parallela A B, vel ex vna parte, vel ex alia, & demissa perpendiculari Z R, punctum R, erit quæsitum. Si tandem T, sit minor E C, facta ei æquali C O, & per punctum O, ducta parallela A B, ipsa O X, & à puncto X, demissa perpendiculari X D. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim factum est vt A B, ad H, sic L, ad K, & vt L, ad K, sic quadratum L, ad quadratum T, & cú T, sit æqualis in prima figura ipsi F D; in secunda autem vel F Q, vel G P, vel Z R, vel X D. Ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum L, ad quadratum F D, in prima figura; in secunda verò, ad quadratum linearum æqualium ipsi T. Sed quadratum L, est æquale rectangulo A C B, & rectangulo P B C, & quadratis linearum æqualium ipsi T, in prima figura, est æquale rectangulum A D B, in secunda verò sunt eis æqualia facta sub segmentis A B, diuisæ in punctis vbi incidunt perpendiculares. Quare, & vt A B ad H, sic rectangula A C B, & P B C, ad rectangula inuenta, & supra exposita. Quare patet propositum.

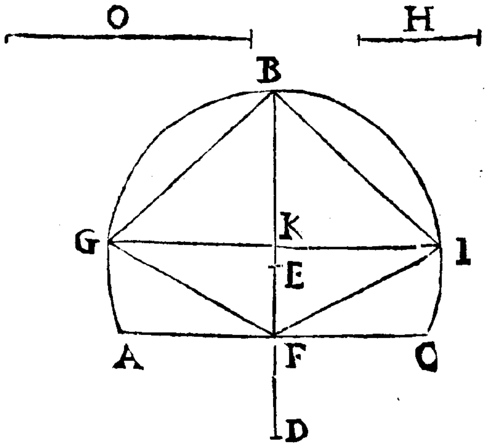
Quòd verò linea T, in ambabus figuris habeat con-

conditiones prius expoſitas, patet ex determinatione congruente vnicuique caſui, quæ determinationes ſupra ſunt expoſitæ.

PROBL. XLVI. PROP. CX.

Data qualibet ſphærę portione, inſcribere in ipſa rhombum, vt portio ſit ad rhombum, in data proportione.

DAta portio ſit ABC, & DB, ſit diameter ſphæræ, cuius eſt portio, E, ſit eius centrum, & data ratio ſit, quam habet BD, ad H. Cùm ergo ex propoſitione centum, & octo, pateat rationē portionis ad rhombum ſibi inſcriptum eſſe eandem cum ratione rectanguli DFB, cum rectangulo EBF, ad rectangulū v.g. DKB, inueniatur per antęcedens Lemma, punctum K, ſecundum hanc conditionem, vt illa duo rectangula ſint ad



rectan-

rectangulum DKB, vt BD, ad H. Si per punctum K, agatur planum GKL, parallelum AC, & fiat rhombus GFLB, hic erit quæſitus. Res eſt euidens.

PROBL. XLVII. PROP. CXI.

In data portione dato rhombo inſcripto, inſcribere alium rhombum, vt rhombus prius inſcriptus, ſit ad hunc poſteriorem, in data proportione.

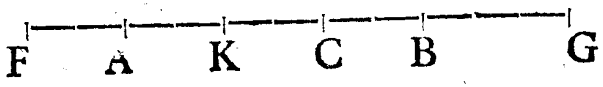
HOC Problema eſt faciliſſimum; quia cum illi duo rhombi ſint in eadem altitudine, erunt inter ſe vt quadrata baſium, & quadrata erunt vt rectangula contenta ſub ſegmentis diametri; vnde adhibita congruenter Propoſit. 109. habebimus intentum.

LEMMA LXV. PROP. CXII.

Datam rectam lineam FB, ſectam in puncto K, rurſum in C, diuidere inter K, B, vt rectangulum FCB, cum quadrato KC, ſit ad rectangulum FBC, in data proportione.

 Da-

DAta proportio debet esse talis conditionis, vt si fiat in data proportione F K, ad aliam, hæc sit minor tota F B. Nam si esset æqualis, esset vt F K, ad illã, aliã, hoc est ad FB, ita rectãgulũ FKB, ad rectãgulũ FBK,



vnde KB, nõ posset diuidi in data proportione; & multo minus posset diuidi, si illa alia esset maior F B. Sit ergo proportio data ea, quam habet F K, ad F A, vbicumque cadat punctum A, inter F, B, & fiat vt K F, ad F A, sic K B, ad B G, ei positam in directum; deinde K B, taliter secetur in C, vt sit sicut G B, ad B A, sic B C, ad C K. Dico punctum C, esse quæsitum.

Quoniam enim factum est, vt K F, ad F A, sic K B, ad B G, & vt K B, ad B G, sic (sumpta communi altitudine K C,) rectangulum B K C, ad rectangulũ sub K C, in B G. Ergo, & vt K F, ad F A, sic rectangulum B K C, ad rectangulum sub K C, in B G. Pariter vt K F, ad F A, sic (sumpta communi altitudine C B,) rectangulũ F K, C B, ad rectangulum F A, C B. Ergo, & vt K F, ad F A, tàm est rectangulum B K C, ad rectangulum sub K C, in B G, quam rectangulum F K, C B, ad rectangulum F A, C B. Ergo & vt K F, ad F A, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe rectangula B K C, & F K, C B, ad rectangula C K, B G, & F A, C B. Sed rectangula B K C, & F K, C B, faciunt rectangulum F C B, cum quadrato C K; quia rectangulum B K C, diuiditur in rectangulum B C K, & in quadratum K C; & rectan-

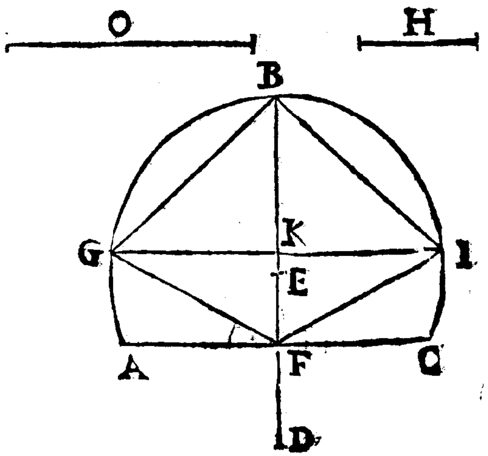
gulum B C K, cum rectangulo F K, C B, facit rectangulum F C B. Ergo, & vt K F, ad F A, sic rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad rectangula G B, K C, & F A, C B.

Quoniam verò factum est supra, vt G B, ad B A, sic B C, ad C K. Ergo rectangulum sub G B, in K C, erit æquale rectangulo A B C. Et communi addito rectangulo F A, C B. Ergo rectangulum A B C, cum rectangulo F A, C B, quæ duo faciunt vnum rectangulum F B C, erunt æqualia rectangulis G B, K C, & F A, C B. Sed supra probatum est esse vt K F, ad F A, sic rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad duo rectangula G B, K C, & F A, C B. Quare & vt K F, ad F A, sic erit rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad rectangulum F B C. Quod erat ostendendum.

PROBL. XLVIII. PROP. CXIII.

Data qualibet sphæræ portione, inscribere in ipsa rhombum, vt superficies conicæ conorum rhombi, sint in data proportione.

DAta portio sit A C B, cuius axis sit B F, & B D, sit tota diameter sphæræ, data proportio sit, quam habet D F, ad H, & fiat vt D F, ad H, sic H, ad O. Dico in primis hoc Problema esse determinatum, & determinationem esse, quod proportio data sit talis conditionis, vt si fiat in data proportione DF, defectus axis portionis a diametro sphæræ, ad aliam, quæ sit H, & proportio DF, ad H, continuetur ad tertium terminum O; O, sit minor diametro sphæræ, vt patebit inferius.



Linea ergo DB, diuisa in F, rursùm diuidatur in K, inter F, B, vt rectangulum DKB, cum quadrato KF, sit ad rectangulum DBK, vt DF, ad O, per antecedens Lemma, & per punctum K, acto plano GKL plano AFC, parallelo, intelligatur rhombus BGFL, inscriptus in portione. Dico hunc esse quæsitum. Quoniam enim factum est, vt DF, ad O; nempe vt quadratum DF, ad quadratum H; sic rectangulum DKB, cum quadrato KF, ad rectangulum DBk, & rectangulo DkB, est æquale quadratum Gk, & pariter rectangulo DBK, est æquale quadratum GB. Ergo & vt quadratum DF, ad quadratum H, sic quadratum GK, cum quadrato kF, nempe quadratum GF, æquale istis duobus quadratis, ad quadratum GB. Quare, & vt linea DF, ad lineam H, sic latus FG, ad latus GB. Sed vt FG, ad GB, sic (sumpta communi altitudine GK,) rectan-

rectangulum FGK, ad rectangulum BGk; & vt rectangulum FGk, ad rectangulum BGK, sic superficies coni GFL, ad superficiē coni GBL, ex Archimede sępe citato. Ergo, & vt DF, ad H, sic superficies coni GFL, ad superficiem coni GBL. Quod erat faciendum.

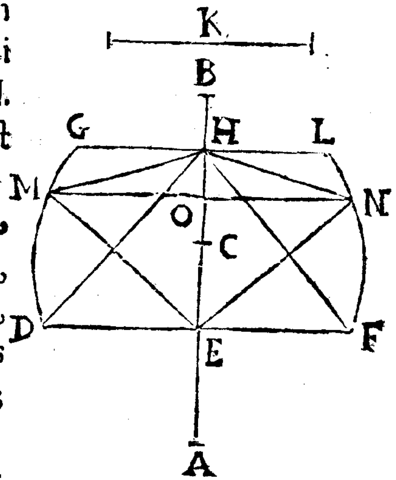
Determinatio patet, quia cùm hoc problema omnimodè dependeat à Lemmate antecedenti, debet sortiri cum ipso eandem determinationem. Quare patet propositum.

LEMMA LXVI. PROP. CXIV.

Si sphæra, cuius diameter BA, secetur tribus planis GHL, MON, & DEF, parallelis, quibus diameter AB, sit normalis, & in segmento intermedio GDFL, inscribatur rhombus HMEN. Dico, quod secta HE, bifariam in C, segmentum GDFL, erit ad rhombum HMEN, vt tria rectangula sub AE, in CB, cum tribus rectangulis CHB, & cum duobus quadratis CE, ad rectangulum AOB.

Nam

NAM super basim D E F, & circa axim segmenti intermedij H E, facto cono D H F, segmentum ad rhombum de foris sumpto cono, habet rationem compositam ex ratione segmenti G D F L, ad conum D H F, & ex ratione coni D H F, ad rhombũ H M E N. Sed segmentum G D F L, est ad conum D H F, ex Caualerio supra citato, vt tria rectangula sub A E, in C B, cũ tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A E B; conus verò D H F, ad rhombum H M E N, quia sunt circa eundem axim H E, est, vt basis ad basim, nempe, vt quadratum D E, ad quadratum M O, seu vt rectangulum A E B, ad rectangulum A O B. Ergo ex æquali, segmentum G D F L, ad rhombum G M E N, erit vt tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A O B. Quod &c.



SCHOLIVM.

NON diuerso modo probaremus, segmentum G D F L, esse ad rhombum H M E N, vt tria rectangula B H, C A, cum tribus rectangulis C E A, & cum duobus quadratis C H, seù C E, ad rectangulum B O A. Quare, cum rectangulum A O B, sit idem, ad quod ista plana habent eandem determinationem, patet esse æqualia, nempe tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E esse æqualia tribus rectangulis B H, C A, tribus rectangulis C E A, & duobus quadratis C E, vel C H. Quibus hinc inde ablatis, & subtriplatis omnibus; vnũ rectangulum sub A E, in C B, cum vno rectangulo C H B, erit æquale vno rectangulo B H, C A, & vno rectangulo C E A. Vnde ex dictis habemus, quod si quædam recta linea B A, secetur in duobus punctis E, H, & rursùm segmentum intermedium H E, secetur bifariam in C; rectangulum A E, C B, cum rectãgulo C H B, erit æquale rectangulo B H, C A, cum rectangulo C E A. Quod etiam patet facilius, quia hæc rectangula sunt eadem plana, sed diuersimode denominata. Nam rectangulum sub A E, & B H, est idem cum rectangulo sub B H, E A; rectangulum verò sub A E, C H, est æquale rectangulo C E A; ergo duo rectangula sub A E, B H, & sub A E, C H, nempe rectangulum sub A E, C B, erit æquale rectangulo sub B H, E A, & rectangulo C E A. Et communi addito rectangulo C H B, cui est æquale rectangulum sub B H, C E. Ergo rectangulum sub A E, C B, cum rectangulo C H B, erit æquale rectangulo B H, E A; rectangulo C E A, & rectangulo B H, C E. Sed rectangulum B H, E A, cum rectangulo B H, C E, facit rectangulum B H, C A. Quare patet propositum.

Vnde

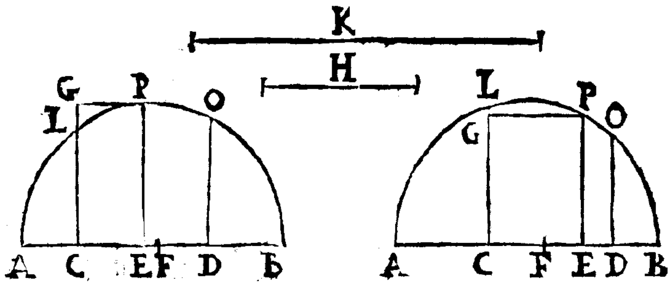
Vnde habemus ex dictis, quod ſi proponatur, vt proponetur in Lemmate ſequenti. Datam rectam A *B*, ſectam in duobus punctis E, H; rursùm ſecare in O, inter E, H, vt diuiſa H E, bifariam in C, rectangulum ſub A E, C B, cum rectangulo C H B, & cum ſexta parte quadrati E H, ſit ad rectangulum A O B, in data proportione; etiam ſi fiat in data proportione ex alia parte rectangulum ſub *B* H, in C A, cum rectangulo C E A, & cum ſexta parte quadrati H E, ad idem rectangulum B O A; tamen habebimus intentum.

LEM. LVII. PROP. CV.

Datam rectam AB, ſectam in punctis C, & D; rursùm diuidere in E, inter C, D, vt diuiſa CD, bifariam in F, rectangulum ſub A C, in F B, vna cum rectãgulo FDB, & cum ſexta parte quadrati CD, ſit ad rectangulum A E B, in data proportione.

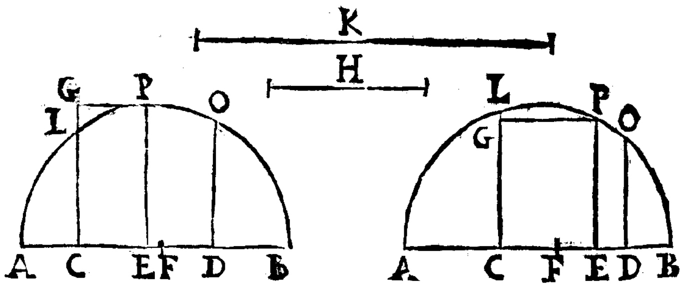
HOC Lemma poteſt habere duplicem caſum; nam vel A C, D *B*, ſunt æquales, vel inæquales. Si ſint æquales, patet, quod proportio data debet eſſe talis conditionis, vt ſemper ſit minor ea, quam habet rectan-

rectangulum ſub A C, in F B, cum rectangulo F D B, & cum ſexta parte quadrati C D, ad alterum rectangulorum A C B, A D B. Quod patet, quia in quocumque puncto E, ſecetur C D, ſemper rectangulum A E B, erit maius rectangulo A C B, vel A D B. Debet tamen proportio data adeò eſſe minor, vt ſupra expoſitum eſt, vt tamen non ſit minor ea, quam habent prædicta illa plana, ad quartam partem quadrati A *B*; quia rectangulum æquale quartæ parti quadrati A B, eſt maximũ



omnium, vt conſideranti patet. Si verò A C, D B, ſint inæquales, oportet quod proportio data ſit minor ea, quam habent prædicta plana ad rectangulum ſub minori illatum A C, D B, in reliquam totius A B. Debet tamen taliter eſſe minor, vt non ſit minor ea, quam habent prædicta plana, ad quartam partem quadrati A B.

Data ergo ratio ſit, quam habet A B, ad H, & ſuper A B, fiat ſemicirculus, & exponatur linea K, potens ſimul rectangulum ſub A C, in F B, cum rectangulo F D B, & cum ſexta parte quadrati C D, & fiat vt A B, ad H, ſic quadratum K, ad quadratum alterius lineæ, quæ ex determinationibus ſupra expoſitis, erit non maior medietate A B, ſed ſemper maior, lineis C L, D O, erectis normaliter ſuper A B, à punctis C,D, in prima figura; & in ſecunda figura, ſemper erit maior O D, ſupponendo D B, eſſe minorem A C, ſed poteſt eſſe aliquando maior, aliquando æqualis, & aliquando minor ipſa C L, & hoc ſecundum diuerſas determinationes, & habitudines lineæ A C, ad totam A B, vt conſideranti patet; ſemper tamen erit non maior medietate



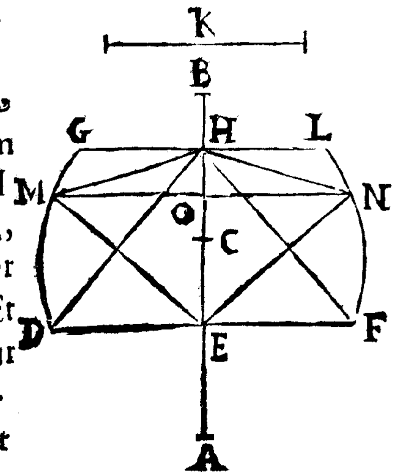
Sit ergo hæc alia C G, & per punctum G, ducatur G P, parallela A B, quæ ſemper occurret, ex determinationibus ſupra poſitis, circumferentiæ inter puncta L, O. Occurrat ergo vt in P, & à P, dimiſſa perpendiculari P E. Dico punctum E, eſſe quæſitum.

Cùm enim factum ſit, vt A B, ad H, ſic quadratum K, ad quadratum C G, nempe ad quadratum P E; & cum quadrato k, ſint æqualia rectangulum A C, F B, rectangulum F D B, cum ſexta parte quadrati C D; & pariter cum quadrato P E, ſit æquale rectangulum A E B. Ergo, & vt A B, ad H; ſic illa plana ad rectangulum A E B. Quod erat faciendum.

PROBL. IL. PROP. CXVI.

In dato ſegmento intermedio inſcribere rhombum, vt ſegmentum ſit ad rhombum, in data proportione.

DAtum ſegmentum intermedium ſit G D F L, in quo inſcribendus ſit rhombus &c. Data ratio ſit, quam habet A B, ad k. Et ſecta E H, axis ſegmenti bifariam in C, diameter A B, ſphæræ taliter diuidatur in O, vt rectangulum ſub A E, C B, cum rect angulo C H B, & cum ſexta parte quadrati E H ſit ad rectangulum A O B, vt tertia pars A B, ad k, per antecedens Lemma. Et per punctum O, agatur planum M O N, prioribus parallelum, & ſuper ipsũ fiat rhõbus H M E N. Quem dico eſſe quæſitum.



Sed antequam procedamus ad demonſtrationem, ſciendum eſt; quod cum præſens Problema dependeat ab antecedenti Lemmate, vt patet, & vt magis patebit, debet cum ipſo ſortiri eaſdem determinationes, quas repetere eſt ſuperuacaneum.

Quoniam enim, vt tertia pars A B, ad K, ſic rectangulum A E, C B, cum rectangulo C H B, & cum ſexta parte quadrati E H, ad rectangulum A O B. Ergo, & vt antecedentium tripla; nempe vt A B, ad K, ſic tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum tribus ſextis partibus quadrati E H, nempe cum dimidio quadrati E H, ſeù cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A O B. Sed & vt illa plana, ad rectangulum A O B, ſic ſegmentum G D F L, ad rhombum H M E N, ex Propoſitio. 114. Quare patet propoſitum.

LEM. LXVIII. PROP. CXVII.

Datam rectam lineam F G, ſectam in punctis A, K, B, rurſum ſecare in C, inter A, B, vt rectangulum F K G, ſit ad rectangulum F C G, in data proportione.

HOc Lemma in aliter non difert à Propoſ. 115. niſi in hoc, quod terminus antecedens proportionis eſt diuerſum, ſed conſequens eſt idem, nempe rectangulum

gulum

gulum ortum ex ſectione lineæ F G, inter A, B. Quare recipit etiam cum ipſo eandem determinationem, & eandem explicatioaem, vt conſideranti patet. Quare non eſt amplius immorandum. Solum meminendum eſt, pro huius ſolutione, poſſe adhiberi, circulum Parabolam, & Ellipſim, vt dictum eſt ſupra in Scholio propoſit. 97.

PROBL. L. PROP. CXVIII.

In dato ſegmento intermedio ſphæræ inſcripto rhombo, inſcribere alium rhombum, vt rhombus inſcriptus, ſit ad rhombum, qui inſcribetur, in data proportione.

HOc Problema dependet ab antecedenti Lemmate, & omnia ab explicatis in ſimili propoſito; quare ex ſuperioribus, facilè patet eius conſtructio, & demonſtratio.

SCHOLIVM.

HIc eſſet ſoluendum Problema. In dato ſegmento intermedio, inſcribere rhombum, vt ſuperficies conorum rhombi ſint in data proportione, ſed quia hoc

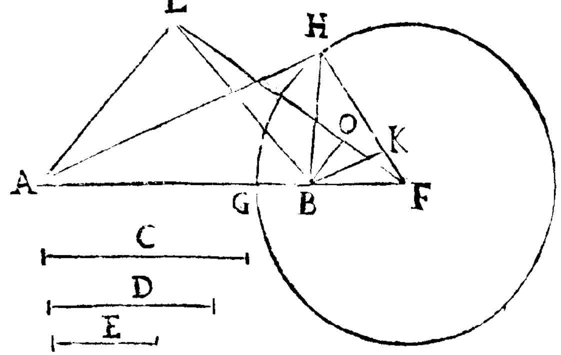
hoc

hoc Problema est quodam particulare contentum sub vniuersali, quod statim proponetur, ideò omittitur.

LEM. LXIX. PROP. CXIX.

Inuenire circulum secantem datam rectam lineam magnitudine, & positione, taliter, vt ab extremitatibus datæ lineæ inflexis lineis, quæ vniantur in quolibet puncto circumferētiæ inuenti circuli, semper retineant imperatam rationē. Inflexis autem talibus lineis, & vnitis extra periphæriam, impossibile sit retinere eandem rationem.

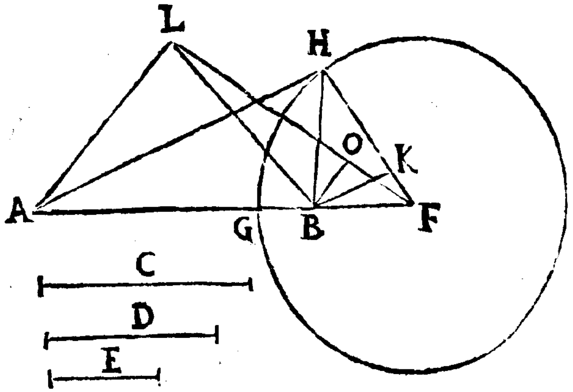
HOC Lemma, vel per modum Problematis, vel per modum Theorematis, solutum fuit à diuersis. Nempe, ab Eutocio initio Comentariorum super Apollonium Pergeum. Postea aliqualiter à Bartholomæo Souero lib. 3 de recti, ac curui proportione, ni fallor. Deinde à Galileo in postremis Dialogis pagina, apud nos 45. Tandē à P. Bonauentura Caualerio exercitatione 6. Propos 33. Et forsitan ab alijs, quos non vidimus. Soluemus ipsum, & nos, quamuis construc-tione, & demonstratione parum diuersa à tradita ab Eutorio, præcipuè cum ipso vtamur in solutione Problematum alicuius considerationis.



Data ergo recta linea sit A B, & data proportio sit, quam habet C, ad D. Oportet inuenire circulum secātem A B, in puncto v.g. G, vt ab extremitatibus A, B, inflexis lineis A H, H B, ad quodlibet punctum circumferentiæ, semper A H, ad H B, sit vt C, ad D.

Si data proportio sit æqualitatis, Lēmma, vt proponitur, nequit solui; quia, vt ibidem ait Galileus, hoc admirabile tunc accidit, quod circulus degeneret in rectā lineam indefinitam, perpendiculariter erectam super datam rectam lineam A B, à puncto eius medio. Nam ab extremitatibus A, B, inflexis lineis ad quodlibet punctū illius perpendicularis, semper hæ retinebunt proportionem æqualitatis, quia semper constituent triangulum æquicrure. Si verò proportio data sit inæqualitatis, semper Lemma potest construi; & eius constructio talis erit.

erit. Data ratio C, ad D, continuetur ad tertium terminum minorem, hoc est si C, sit maior D, fiat vt C, ad D, sic D, ad E; & fiat vt excessus C, super E, ad E, sic A B,



ad B F, ipsi productam in directum; & inter A F, F B, inueniatur media proportionalis, quæ sit F G. Tunc, centro F, interuallo F G, describatur circulus. Dico hunc esse quæsitum, nimirum, quod si in periphæria ipsius sumatur quodlibet punctum H, & vniantur in ipso A H, B H, quod semper A H, ad H B, erit vt C, ad D. Ducatur per punctum B, linea B K, parallela H A. Quoniam enim F G, est media proportionalis, per constructionem, inter A F, F B. Ergo vt A F, ad F G, seu ad F H, sic F G, seu F H, ad F B. Quare habemus duo triangula, nempe A F H, H F B quæ circa communem angulum F, habent latera proportionalia. Ergo sunt similia. Ergo angulus F H B, erit æqualis angulo H A F. Sed propter parallelas A H, B K, etiam angulus A H B, est æqualis alterno H B K. Ergo etiam duo triangula

AHB,

A H B, H B K, erunt similia. Ergo vt A H, ad H B, sic H B, ad B K. Et vt quadratum A H, ad quadratū H B, sic A H, ad B K. Sed vt A H, ad B K, sic (ob parallelas A H, B K,) A F, ad F B, vt autem A F, ad F B, sic C, ad F, (quia cum supra factum sit, vt excessus C, super E, ad E, sic A B, ad B F.) Ergo, & vt C, ad E, seu, vt quadratum C ad quadratum D, sic erit quadratum A H, ad quadratum H B. Ergo, & vt C, ad D, sic A H, ad H B. Quod erat ostendendum.

Quòd verò extra circumferentiam circuli inuenti nō sit reperibile aliud punctum, vt ad illud inflexis lineis à punctis A, B, inflexæ habeant proportionem C, ad D, patet. Nam, sit tale punctum, si datur, L, vel intra, vel extra circulum; & sint ductæ L A, L B, L F; & per punctum B, sit ducta B O, parallela A L. Quoniam, per hypothesim, vt C, ad D, sic A L, ad L B. Ergo & vt quadratum L A, ad quadratum L B, sic quadratum C, ad D, quadratum, nempe sic C ad E. Sed vt C, ad E, sic, ex præostensis A F, ad F B, & ob parallelas B O, L A, vt A F, ad F B, sic A L, ad B O. Ergo, & vt quadratum L A, ad quadratum L B, sic A L, ad B O. Ergo tres A L, L B, B O, sunt continue proportionales. Cùm verò angulus A L B, sit æqualis alterno L B O. Ergo triangula A L B, L B O, erunt similia. Vnde angulus L A B, erit æqualis angulo B L O. Cùm verò angulus ad F, sit cōmunis duobus triangulis A F L, L F B. Ergo hæc duo triangula cùm sint æquiangula, erunt similia. Vnde erit vt A F, ad F L, sic F L, ad F B. Quare F L, erit media proportionalis inter A F, F B. Sed etiam F H, est me-

Hh dia

dia proportionalis inter easdẽ duas A F, F B. Ergo duæ F L. & F H, erunt æquales. Quod implicat, siue punctum L, sumatur extra, vt in schemate, siue intra circulũ. Quare patet propositum.

ROBL· LI· PROP· CXX·

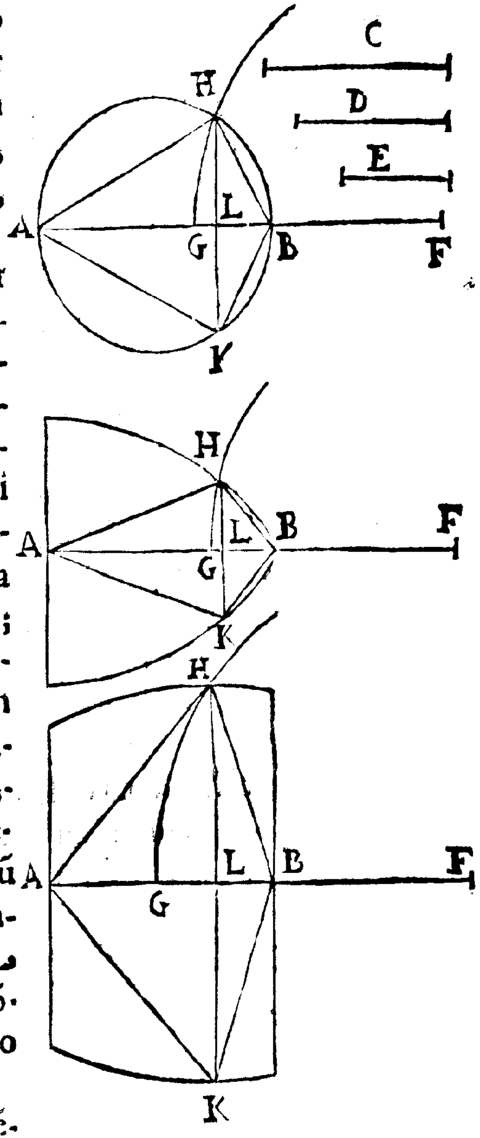
In dato quolibet solido rotundo orto ex reuolutione circa axim, siue in dato quolibet eius segmento, seù ad verticem, seù intermedio, inscribere rhombum, vt superficies conicæ conorum rhombi, sint in data proportione.

SIT solidum quodlibet rotundum, vel sphæra, vel sphæroides, vel solidum cycloidale, vel quodlibet aliud ortum ex reuolutione circa axim, &c., inclusum à curua tantùm superficie, quod nobis repræsentatur in prima figura. Vel quælibet portio sphæræ, vel sphæroidis, vel quodlibet conoides, vel conus, vt in secunda; vel quodlibet segmentum intermedium prædictorum solidorum, vt in tertia, & omnium solidorũ sit axis A B, oportet facere, quod imperatum est &c.

Data proportio sit, quam habet C, ad D; quæ si sit æqualitatis, erubescimus verba profundere, cùm res etiã

cæcu-

cæcutientibus sit splendidissima. Si verò proportio data sit inæqualitatis, vel est excessus, vel defectus; si est excessus, & data ratio C, ad D, continuetur ad tertium terminum E, & fiat vt excessus C, super E, ad E, sic A B, ad B F, positam sibi in in directum, & inter A F, F B, inuenta media F G, centro F, interuallo F G, describatur portio circuli secans superficiem dati solidi in H; (in prima enim, & secunda figura semper secabit; in tertia verò nõ semper, sed quando non secat, Problema est insolubile, vt patebit inferius,) & per punctum H, ducatur planũ H L K, perpendiculare axi A B; & supra HLK, inscribatur rhõbus A H B K. Dico hunc esse quæsitum.



Nam, per antecedẽ-

tem

tem Propositionem, est, vt C, ad D, sic A H, ad H B. Sed vt A H, ad H B, sic (sumpta communi altitudine HL,) rectangulum A H L, ad rectangulum B H L, vt autem rectangulũ A H L, ad rectangulum B H L, sic ex Archimede, superficies coni H A K, ad superficiẽ coni B H K. Ergo, & vt C, ad D, sic superficies coni A H K, ad superficiem coni H B K. Quod erat faciendum.

Quòd verò, quando in tertia figura, circulus non secat superficiem, Problema sit insolubile; patet, quia, ex secunda parte Propos. antec. extra periphæriam circuli, non datur punctum, ad quod ductæ A H, H B, sint in proportione C, ad D.

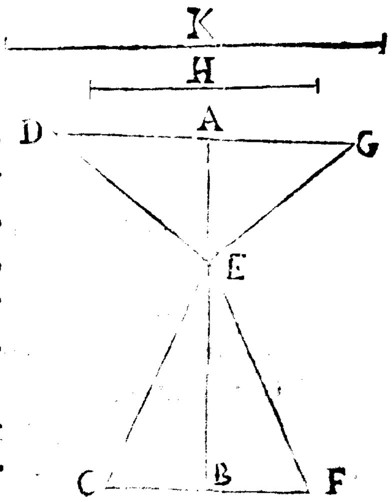
Si verò proportio data sit defectus, tunc fieret vt D, maior ad C, minorem, sic C, ad E, & producta B A, ad partes A, fierent reliqua, vt supra: Sed tunc circulus ductus non semper secaret superficiem secundæ figuræ. At quando non secaret, Problema esset inconstruibile. Res est clara ex præcedentibus. Quare ad alia transeamus.

PRO-

PROBL. LII. PROP. CXXI.

Data recta linea A B, à cuius extremitatibus A, B, sint erectæ perpendiculares A D, B C, quæ pariter sint datæ; reperire in A B, punctum E, vt iunctis E D, E C, & triangulis D E A, C E B, reuolutis circa A B, coni C E F, D E G, orti, ex tali reuolutione, sint in data proportione.

Data proportio sit, quam habet B A, ad H, & fiat vt quadratũ C B, ad quadratum D A, sic B A, ad K, & B A, diuidatur in E, vt sit, sicut K, ad H, sic B E, ad E A, & ductis E D, E C, intelligantur coni E C F, D E G. Quos dico esse quæsitos. Nam, ex proposit. 1. proportio coni C E F, ad conum D E G, componitur



ex

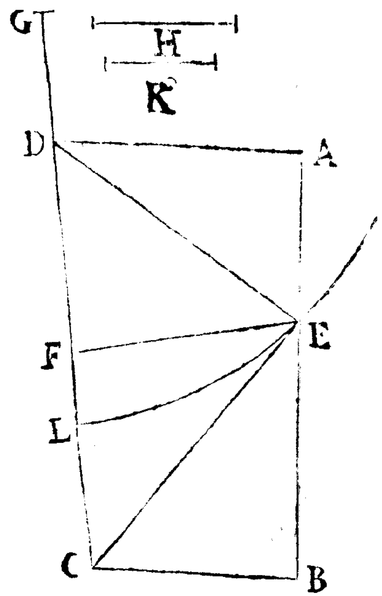
ex proportione quadrati C B, ad quadratum D A, & ex proportione B E, ad E A. Sed vt quadratum B C, ad quadratum D A, sic B A, ad K; & vt B E, ad E A, sic K, ad H. Ergo proportio coni C E F, ad conum D E G, componetur quoque ex proportione B A, ad K, & K, ad H. Sed istæ duæ proportiones componunt quoque rationem B A, ad H. Ergo vt B A, ad H, sic conus C E F, ad conum D E G. Quod erat faciendum.

LEM. LXX. PROP. CXXII.

Data recta A B, & ab eius extremitatibus erectis normalibus B C, A D, quæ pariter sint datæ; reperire inter A, B, punctum E, vt ductis rectis lineis C E, D E, sint in data ratione possibili.

Data ratio sit, quam habet C B, ad H, quæ vel est æqualitatis, vel excessus, vel defectus. Si sit æqualitatis. Ducatur D C, & diuidatur bifariam in F, & à puncto F, super D C, erigatur normalis F E, quæ occurret A B, vel inter A, B, vt in E, vel in aliquo punctorum B, vel A; vel extra B A, vel ad partes A, vel ad partes B. Vbicumque occurrat, semper istud punctum erit quæsitum, nempe si ducantur ad illud punctum lineæ

à punctis D, C, istæ semper erunt æquales. Sed quando occurrit, vel in punctis A, B, vel extra ipsa, Lemma non est solubile, vt proponitur. Quando verò occurrit intra, vt in E, ductis D E, C E, patet ipsas esse æquales. Nam cum duæ D F, F E, sint æquales duabus E F, F C, & anguli D F E, E F C, sint recti. Ergo basis D E, erit æqualis basi C E.



Si verò ratio data sit excessus, fiat vt C B, ad H, sic H, ad K, & producatur C D, in G, vt sit sicut C B, ad K, sic C G, ad G D, & inter C G, G D, inueniatur media G L, & centro G, interuallo G L, describatur circulus occurrens A B, inter A, B, in puncto E. Dico punctum E, esse quæsitum.

Ducantur C E, D E. Ergo per ea, quæ habita sunt prop. 119. vt C B, ad K, seù vt quadratum C B, ad quadratum H, seù vt quadratum C G, ad quadratum G L, sic quadratum C E, ad quadratum E D. Quare, & vt C B, ad H, sic C E, ad E D.

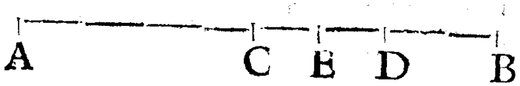
Si verò circulus non occurreret B A, inter B, A, Lemma vt proponitur esset insolubile, vt patet ex secunda parte eiusdem propos. 119. quia extra circumferentiam inuenti

inuenti circuli non est reperibile punctum, ad quod inflexæ lineæ retineant imperatam proportionem.

Si verò proportio C B, ad H, sit defectus; fiat pariter, vt G B, ad H, sic H, ad K; sed D C, producatur vt factũ est prius, sed ex parte C, & fiant reliqua, vt prius. Nam eodem discursu concludemus conuertendo propositum. Factum est ergo, quod faciendum erat.

SCHOLIVM

Ex hoc Lemmate habemus modum, quo soluamus alias duas propositiones, quæ sub Lemmate continentur, tamquam particularia sub generali.



Primum est. Datam rectam v. g. A B, sectam in punctis C, D, rursum diuidere C D, in E, vt duo quadrata A C, C E, sint ad duo quadrata B D, D E, in data proportione. Nam si intelligamus A C, D B, elleuari supra C D, perpendiculariter, & inueniamus punctum E, vt ductis A E, B E, sint in subduplicata ratione proportionis datæ, punctum E, erit quæsitum.

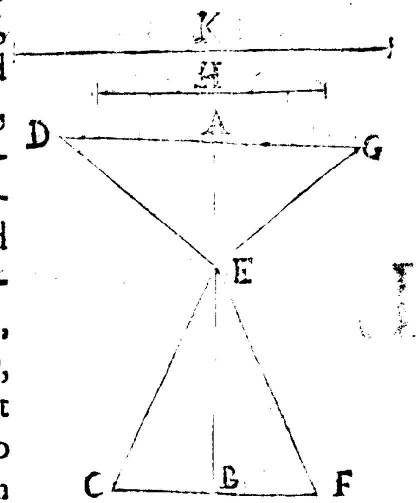
Secundum est. Datam rectam A B, sectam in duobus punctis C, D, rursùm diuidere C D, in E, vt rectangulum A C B, cum quadrato C E, sit ad rectangulum A D B, cum quadrato D E, in data proportione. Nam si à punctis C, D, intelligamus erectas perpendiculariter medias proportionales inter A C, C B; & inter A D, D B.

D B. Et in C D, inueniamus punctum E, vt ductis lineis ab extremitatibus normalium ad punctum E, quæ sint in subduplicata ratione data, factum erit, quod proponebatur, vt consideranti patet.

PROBL. LIII. PROP. CXXIII.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies conicæ conorum, sint in data proportione.

Data proportio sit, quam habet B A, ad H, & fiat vt C B, ad D A, sic B A, ad K, & inter puncta B, A, inueniatur punctum E, vt ductis C E, D E, sit vt K, ad H, sic C E, ad E D, per propositionem antecedẽtem, & ex triãgulis EBC EAD, reuolutis circa A B, fiant coni C E F, D E G. Dico hos esse quæsitos. Nam B A, ad H, habet rationem compositam ex ratione A B, ad K, & ex ratione K, ad H, sed



H, sed vt AB, ad K, sic facta est CB, ad DA, & vt K, ad H, sic CE, ad ED. Ergo ratio BA, ad H componetur ex rationibus CB, ad DA, & CE, ad ED. Sed illæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli ECB, ad rectangulũ EDA & vt rectãgulũ ECB, ad rectangulũ EDA, sic superficies conica coni ECF, ad superficiem conicam coni EDG. Quare, & vt BA, ad H, sic superficies conica coni CEF, ad superficiem conicam coni EDG. Quod erat faciendum.

LEM. LXXI. PROP. CXXIV.

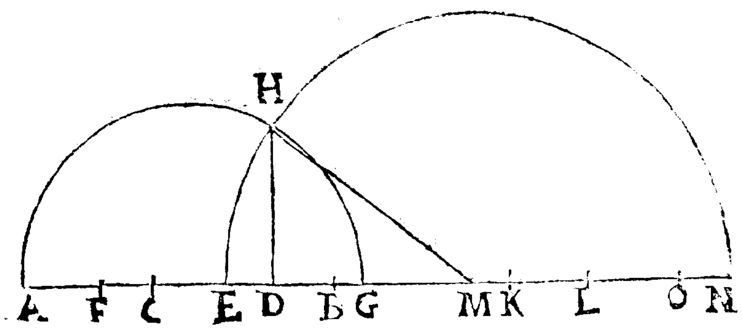
Datam rectam lineam AB, sectam vtcumque in duobus punctis C, D, rursum diuidere in E, inter C, D, vt rectangulum AEC, sit ad rectangulum BED, in data proportione.

Lemma duplicem habet casum, secundùm quod proportio data est æqualitatis, vel inæqualitatis.

Si sit æqualitatis. Diuidatur DC, in E, vt sit sicut AD, ad CB, sic DE, ad EC. Dico punctum E, esse quæsitum. Quoniam enim, vt tota AD, ad totam CB, sic ablata

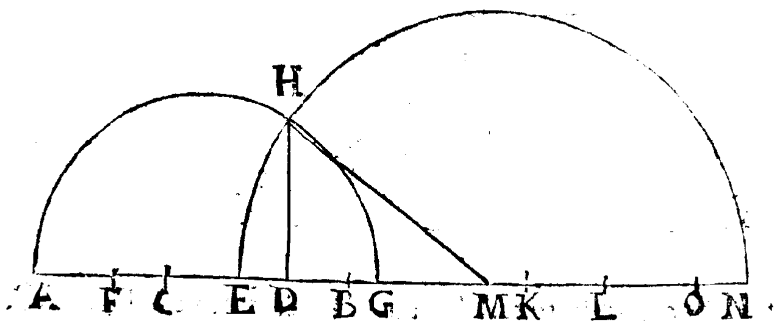
ablata DE, ad ablatam EC; ergo & reliqua AE, erit ad reliquam EB, vt tota ad totam, seù vt ablata DE, ad ablatam EC. Ergo rectangulum AEC, erit æquale rectangulo BED.

SI verò proportio data sit inæqualitatis, determinetur rectangulum, quod debet esse maior terminus datæ proportionis, & sit hoc rectangulum AEC. Data ra-



tio sit, quam habet AC, ad CF, & fiat, vt AF, ad FC, sic CD, ad DG, & super AG, fiat semicirculus, & à puncto D, erigatur super AG, normalis DH. Sumatur autem ipsius DG, dupla DK, & pariter fiat vt AF, ad FC, sic AC, ad KL, ipsi AK, positam in directum, & tandem fiat vt AF, ad AC, sic DB, ad LO, itidem AL, positam in directum; & secta DO, bifariam in M, & iuncta MH, centro M, interuallo MH, fiat semicirculus, qui vtique secabit CD, inter C, D, vt postea ostendetur; secet igitur eam in puncto E. Dico punctum E, esse quæsitum. Quoniam enim rectangula ADG, NDF, sunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato DH,

& pariter rectangulo N D E, eſt æquale rectangulum O E D, quia N O, vt facilè patet, eſt æqualis ipſi D E, & O E, eſt æqualis ipſi N D. Ergo rectangulum A D G, erit æquale rectangulo O E D. Ergo vt A D, ad E O; ſic E D, ad D G. Sed vt A D, ad E O, ſic (ſumpta communi altitudine A F,) rectangulum D A F, ad rectangulum ſub O E, in A F. Ergo & vt E D, ad D G; ſic rectangulum D A F, ad rectangulum ſub O E, in A F. Quoniam verò, ſupra factum eſt, vt A F, ad F C, ſic



C D, ad D G. Ergo, & permutando, vt A F, ad C D, ſic F C, ad D G. Et conuertendo vt C D, ad A F, ſic D G ad F C. Sed vt C D, ad A F, ſic (ſumpta communi altitudine A D,) rectangulum A D C ad rectangulum D A F. Ergo, & vt D G, ad F C, ſic rectangulum A D C, ad rectangulum D A F. Sed quoque ſupra probatum eſt, vt E D, ad D G, ſic rectangulum D A F, ad rectangulum ſub O E, in A F. Ergo ex æquali; & in perturbata analogia, vt E D, ad F C, ſic rectangulum A D C, ad rectangulum ſub O E, in A F. Sed rectangulum

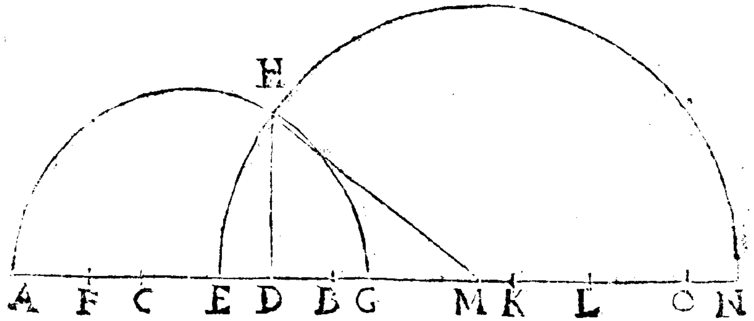
gulum

gulum ſub O E, in A F, diuiditur in rectangulum ſub D E, in A F, in rectangulum ſub D K, in A F, in rectangulum ſub K L, in A F, & in rectangulum ſub L O, in A F. Ergo & vt E D, ad F C, ſic rectangulum A D C, ad rectangulum ſub D E, in A F, cum rectangulis ſub D K, in A F, ſub K L, in A F, & ſub L O, in A F. Sed rectangulum ſub D K, in A F, eſt æquale duplo rectangulo F C D, quia ſupra factum eſt, vt A F, ad F C, ſic C D, ad D G vel dupla C D, ad duplam D G, quæ eſt ipſa D K. Et pariter rectangulum ſub A F in K L, eſt æquale rectangulo A C F, quia ſupra factum eſt, vt A F, ad F C, ſic A C, ad K L. Et tandem rectangulum ſub L O, in A F, eſt æquale rectangulo ſub A C, in D B quia pariter ſupra factũ eſt, vt A F, ad A C, ſic D B ad L O. Ergo & vt D E, ad F C, ſic rectangulum A D C, ad quinque rectangula, nempe ad rectangulum ſub D F, in A F, cum duobus rectangulis F C D, cum rectangulo A C F, & cum rectangulo ſub A C, in D B. Quod ſeruetur.

Rurſum, quoniam vt D E, ad F C, ſic (ſumpta communi altitudine D E) quadratum E D, ad rectangulum ſub E D, in F C. Ergo, & vt D E ad F C, tàm eſt rectangulum A D C, ad illa quinque rectangula, quàm quadratum D F, ad rectangulum ſub D E, in F C. Ergo & vt D E, ad F C, ſic ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nempe rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad ſex rectangula, nempe ad rectangulum ſub E D, in F C, cum rectangulo ſub E D, in A F, cum duobus rectangulis F C D, cum rectangulo A C F, & cum rectangu-

tangu-

tangulo ſub A C, in D B. Sed rectangula ſub D E, in F C, & ſub D E, in A F, faciunt rectangulum ſub D E, in C A. Et pariter rectangulum ſub A C, in D B, cum rectangulo ſub A C, in E D, facit rectangulum ſub A C, in E B. Ergo, & vt D E, ad F C, ſic rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad rectangulum ſub A C, in E B, cum duobus rectangulis F C D, & cum rectangulo A C F.



Tandem vt D E, ad F C, ſic (ſumpta communi altitudine compoſita ex A C, & ex dupla C D,) rectangulum ſub E D, in talem compoſitam, nempe rectangulũ ſub A C, in E D, cum duobus rectangulis C D E, ad rectangulum A C F, cum duobus rectangulis D C F. Quare, & vt rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad rectangulum ſub A C, in E B, cum duobus rectangulis F C D, & cum rectangulo A C F, ſic rectangulum ſub A C, in E D, cum duplo rectangulo C D E, ad rectangulum A C F, cum duobus rectangulis F C D. Cum ergo ſit, vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum. Ergo, & reliquum ad reliquum erit vt totum ad totum,

ſiue

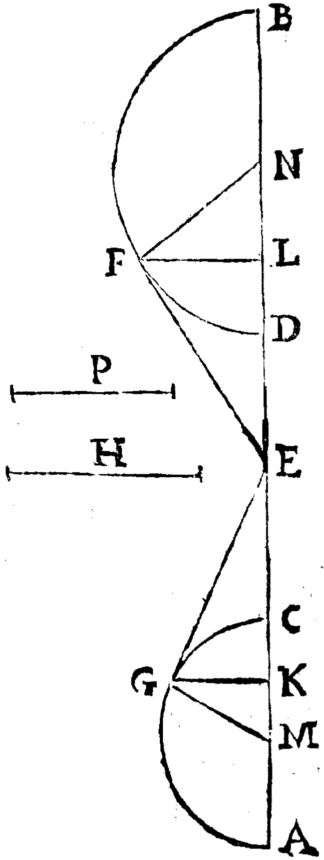
ſiue vt D E, ad F C. Quare & vt D E, ad F C, ſic exceſſus rectanguli A D C, cum quadrato E D, ſuper rectangulum A C, E D, & ſuper duo rectangula C D E, ad rectangulum ſub A C, in E B. Sed exceſſus rectanguli A D C, cum quadrato D E, ſuper rectangulum ſub A C, in E D, & ſuper duo rectangula C D E, eſt rectangulum A E C. Quia rectangulum A D C, diuiditur in rectangulum A C D, & in quadratum C D; duo autem quadrata C D, D E, excedunt duo rectãgula C D E, quadrato C E, & rectangulum A C D, excedit rectangulum A C, E D, rectangulo A C E, quod cum quadrato C E, facit rectangulum A E C. Ergo, & vt D E, ad F C, ſic rectangulum A E C, ad rectangulum ſub A C, in E B. Sed vt A C ad E D, ſic rectangulum ſub A C, in E B, ad rectangulum B E D. Ergo ex æquali in perturbata analogia, vt A C, ad C F, ſic rectangulum A E C, ad rectangulum B E D. Quod erat &c.

Quòd verò aſſumptum eſt ſupra, nempe punctum E, cadere inter C, D; patet. Nam, ſi non cadit inter C, D, cadet vel in C, vel vltra C. Non in C, quia eodem progreſſu, demonſtrabitur eſſe, vt D E, ad F C, ſic exceſſus rectanguli A D C, cum quadrato D E, ſeù ex hypotheſi, cum quadrato D C, ſuper rectangulum A C D, & ſuper duo rectangula C D E, nempe ſuper duo quadrata C D, qui exceſſus eſſet in tali caſu nihil, ad rectangulum ſub A C, in C B, nempe ad rectangulum A C B. Quod implicat. Et multum maius abſurdum concluderetur, ſi punctum E, caderet vltra C; quia tunc minus nihilo, eſſet ad rectangulum poſitiuum, vt E D, ad F C.

LEM-

LEM. LXXII. PROP. CXXV.

Datis duobus semicirculis extra se positis, nec se contingentibus, quorum diametri sint sibi in directum, reperire in linea intermedia inter duos semicirculos punctum, à quo ductis tangentibus semicirculos, istæ sint ad inuicem, in data proportione.



Dati duo semicirculi sint, quorum diametri B D, C A, sint vna linea continuata, & D C, sit linea extra semicirculos, & inter ipsos intercepta. Oportet autem facere, quod imperatum est. Data proportio sit, quam habet A C, ad H, & fiat vt A C, ad H, sic H, ad P; deinde per Lemma antecedens, in C D, inueniatur punctum E, vt rectangulum A E C, sit ad rectangulum B E D, vt A C, ad P,

&

& à puncto E, ducantur tangentes E F, E G. Quas assero esse quæsitas. Nam, quoniam vt A C, ad P, tàm est quadratum A C, ad quadratum H, quàm rectangulum A E C, ad rectangulum B E D, & rectangulis A E C, & B E D, sunt æqualia quadrata tangentium E G, E F, alterum alteri. Ergo, & vt quadratum A C, ad quadratum H, sic quadratum E G, ad quadratum E F. Quare, & vt A C, ad H, sic E G, ad E F. Quod erat faciendum.

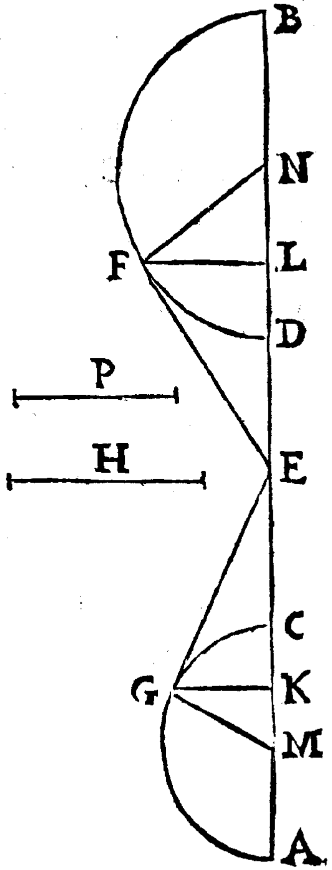
PROBL. LIV. PROP. CXXVI.

Datis iisdem, quæ in superiori Lemmate, inuenire in C D, punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G, & à centris M, & N, semicirculorum ductis M G, & N F, duo triangula rectangula M G E, N F E, sint in data proportione.

Quod triangula M G E, & N F E, sint rectangula, patet ob tangentes, & semidiametros. Data ergo proportio sit, quam habet A M, ad H, & in C D, inueniatur punctum E, inter C, D, vt ductis tangentibus E G, E F, tangens G E, sit ad tangentem F E, vt N D, ad H, & iungantur F N, G M. Dico triangula

gula

gula M G E, N F E; esse quæsita. Dimittantur à punctis G, F, perpendiculares G K, F L. Tunc arguitur sic. Proportio A M, ad H, cōponitur ex proportione A M, ad N D, seù M G, ad N F, & ex proportione N D, ad H, hoc est, ex factis, ex proportione G E, ad E F. Sed hæ duæ proportiones componunt etiam proportionē rectanguli M G E, ad rectangulum N F E. Ergo & vt A M, ad H, sic rectangulum M G E, ad rectangulum N F E. Sed propter similitudinem triangulorum rectangulorum E G M, G M K, rectangulum M G E, est æquale rectangulo sub E M, in K G, & pariter propter eandē rationem similitudinis, rectāgulū E F N, est æquale rectāgulo sub N E, in F L. Ergo, & vt A M, ad H, sic rectangulum sub E M, in K G, ad rectangulum sub N E, in F L. Ergo, & horum rectangulorum dimidia, nempe triangula E G M, E F N. Ergo, & vt A M, ad H, sic triangulum E G M, ad triangulum N F E. Quod erat faciendum.

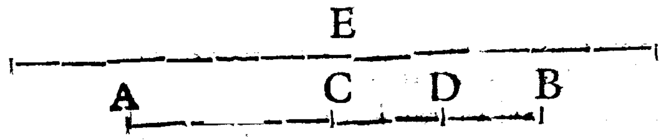


LEM.

LEM. LXXIII. PROP. CXXVII.

Datam A B, sectam in C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A B, C D, sit ad rectangulum A D, C B, in data proportione.

Patet proportionem datam oportere esse defectus, quia rectangulum A B, C D, minus est rectangulo A D, C B, vt facile patebit consideranti. Proportio ergo data sit ea, quam habet A B, ad E, & fiat vt excessus E, super C B, ad C B, sic A C, ad C D. Patet punctum D, cadere inter C, B, quia non solum E, est maior A C, sed etiam A B. Dico punctum D, esse quæsitum. Quoniam enim factum est, vt excessus E, super



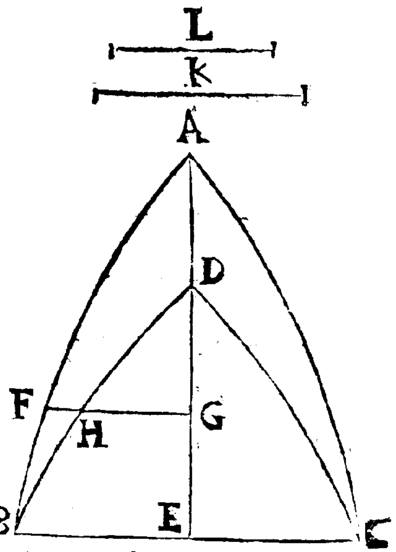
C B, ad C B, sic A C, ad C D. Ergo, & cōponendo, & conuertendo, vt C B, ad E, sic C D, ad D A. Tunc, quoniam ratio A B, ad E, de foris sumpta C B, composita est rationibus A B, ad C B, & C B, ad E, & vt C B, ad E, sic C D, ad D A. Ergo ratio A B, ad E, componetur ex rationibus A B, ad C B, & C D, ad D A. Sed

ex

ex ijsdem rationibus componitur ratio rectanguli A B, C D, ad rectangulum A D, C B. Quare patet factum esse, quod proponebatur.

PROBL. LV. PROP. CXXVIII.

Datis duabus Parabolis ABC, DBC, in eadem basi B C, & circa eandem diametrum A E, inæqualis tamen altitudinis. Ducere FHG, ordinatim applicata, vt F G, ad G H, sit in data proportione.



Data proportio sit, quam habet BC, ad K, quæ continuetur ad tertium terminum L, & datam A E, diuisa in D, rursùm diuidatur in G, inter D, E, vt sit sicut L, ad B C, sic rectangulum A E, G D, ad rectangulū A G, D E, per proposit. antecedētem, & per punctum G, ordinatim applicetur G H F. Quam dico esse quæsitam. Quoniam enim quadratum F G, ad quadratum

dratum G H, de foris sumpto quadrato B E, habet rationem compositam ex ratione quadrati F G, ad quadratum B E, & ex ratione quadrati B E, ad quadratum H G. At vt quadratum F G, ad quadratum B E, sic A G, ad A E; & vt quadratum B E, ad quadratum H G, sic E D, ad D G, ex primo Conic. proposit. 20. Ergo ratio quadrati F G, ad quadratum G H, componetur ex rationibus A G, ad A E, & D E, ad D G. Sed ex ijsdem rationibus componitur ratio rectanguli A G, D E, ad rectangulum A E, D G, & vt rectangulum A G, D E, ad rectangulum A E, D G, sic facta est conuertendo B C, ad L, nempe quadratum B C, ad quadratum K. Ergo, & vt quadratum B C, ad quadratum K, sic quadratum F G ad quadratum G H. Ergo, & vt B C, ad K, sic F G, ad G H. Quod erat faciendum.

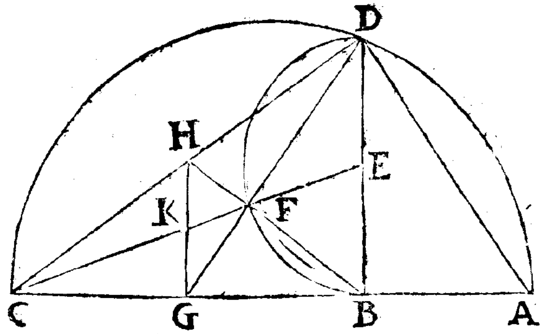
LEM. LXXIV. PROP. CXXIX.

Datam rectam lineam taliter diuidere in puncto, vt rectangulum sub tota, & sub altero, segmentorum ad quadratum alterius segmenti, sit in data proportone.

Hoc Lemma solutum est etiam propos. 20. sed ad vberiorem scientiam, soluetur etiam nunc aliter, quamuis prolixius. Sit ergo data recta linea C B, quæ taliter sit secanda in G, vt rectangulum B C G, sit ad

qua-

quadratum G B, in data proportione. Data proportio sit, quam habet C B, ad B A, sibi positam in directum, & super A C, fiat semicirculus, ac à puncto B, erigatur normalis B D, & super diametrum D B, fiat semicirculus ad partes C, cuius centrum sit E, & ducatur E C, secans circulum in F, & per puncta D F, ducatur D F G, occurrens B C, in G. Dico punctum G, esse quæsitum.



Ducatur D C, & per punctum G, agatur G H, parallela D B; & ducantur B F, F H. Quoniam D B, & H G, sunt factæ parallelæ, & D B, secatur bifariam in E, à linea C E. Ergo & H G, secabitur ab eadem bifariam in K, & angulus F K G, erit æqualis angulo D E F. Sed & angulus D F E, est æqualis sibi ad verticem K F G. Ergo triangulum D F E, erit æquiangulum, & simile triangulo K F G. Ergo, vt F D, ad D E, sic F G, ad G K. Et ad consequentium dupla. Ergo vt F D, ad D B, sic F G, ad G H. Sed & angulus G D B, est æqualis sibi alterno H G F. Ergo duo triangula D F B, H F G, sunt similia. Ergo angulus rectus D F B, est æqualis recto H F G. Ergo

Ergo duæ lineæ B F, F H, sunt sibi in directum. Cùm autem triangulo D F B, sit simile triangulum D B G; & pariter triangulo H G F, sit simile triangulum H G B, quia omnia sunt rectangula, & bina habent vnum angulum communem. Ergo, & triangulum D B G, erit simile triangulo H G B. Quare vt D B, ad B G, ita B G, ad G H. Quare rectangulum sub D B, H G, erit æquale quadrato G B. Iungatur A D. Ergo triangulum D B A, est simile triangulo D B C; triangulo autem D B C, est simile triangulum H G C. Ergo vt D B, ad B A, sic H G, ad G C. Ergo rectangulum sub D B, in H G, erit æquale rectangulo sub C G, in B A. Sed rectangulum sub D B, in H G, ostensum est æquale quadrato G B. Ergo quadratum G B, erit æquale rectangulo sub C G, in B A. Ergo tres C G, G B, B A, sunt continue proportionales. Cùm autem sit, vt C G, ad G B, sic quadratum C G, ad rectangulum C G B. Ergo, & componendo, vt C B, ad B G, sic quadratum C G, cum rectangulo C G B, nempe rectangulum B C G, ad rectangulum C G B. Sed vt C G, ad G B, seu vt G B, ad B A, sic rectangulum C G B, ad quadratum G B. Ergo ex æquali vt C B, ad B A, sic rectangulum B C G, ad quadratum G B. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Constructio præsentis Lemmatis potest inseruire pro solutione propositionis. *Data vna extrema* rum in ordine trium continue proportionalium, & summa ma mediæ, & alterius extremæ, distinguere singulas. Nam cùm probatum sit C G, G B, & B A, esse tres continue proportionales. Ergo B A, est vna extremarum, & C B. est composita ex altera extrema, & ex media.

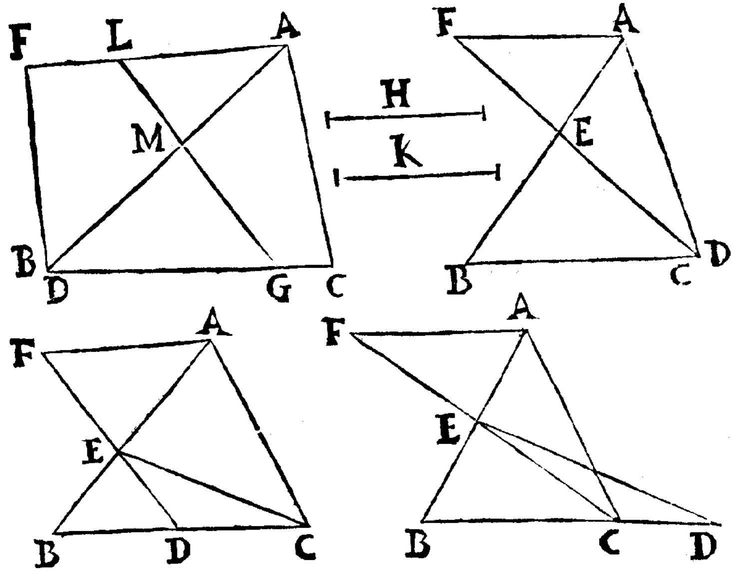
LEM. LXXV PROP. CXXX.

Dato triangulo ABC, & per punctum A, acta A F, indefinita, & parallela B C, & dato in B C, etiam producta ad partes C, punctum D, & ducta D E F, triangulum externum F E A, sit ad triangulum datum A B C, in data proportione.

Quatuor diuersis modis potest dari punctum D, in linea B C. Nam vel potest cadere in ipso B, vt in prima figura; vel in ipso C, vt in secunda; vel inter B, C, vt in tertia; vel tandem vltra B C, vt in quarta. Si cadit in B, vt in prima, tunc res est facilis negotij. Nam data ratio sit, quam habet B C, ad H. Et fiat vt H, ad B C, ita B C, ad F A, & ducatur F B. Dico triangulum F B A, esse quæsitum. Quod patet, quia cum duo triangula F B A, B A C, sint inter easdem parallelas; ergo habebunt eandem altitudinem. Quare erunt

erunt ad inuicem, vt bases. Ergo triangulum F B A, erit ad triangulum B A C, vt basis F A, ad basim B C, seu vt B C, ad H.

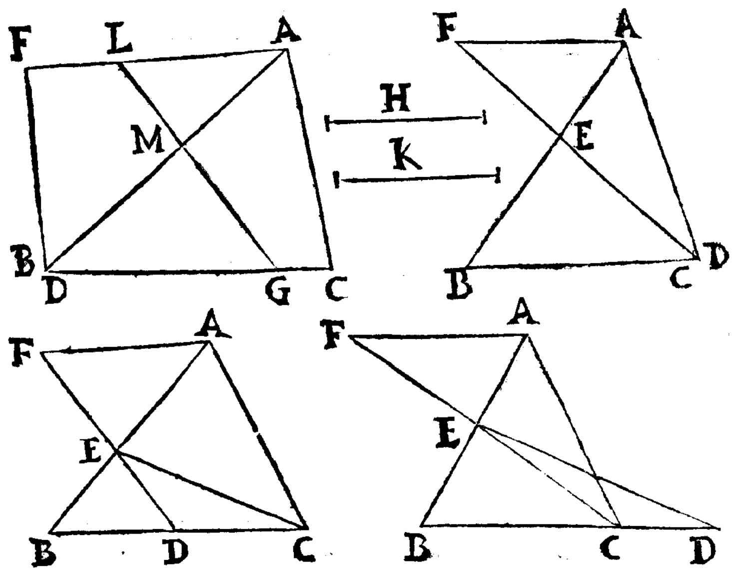
In alijs tribus casibus semper fiat, vt B C, ad B D, ita H, ad K, & per propos. antec. B A, taliter secetur in E, vt rectangulum A B E, sit ad quadratũ A E, vt K, ad BC,



& ducatur per puncta D E, linea DEF, occurrens AF, in F. (Occurret enim, quia F A, B C, sunt parallelæ.) Dico triangulum F A E, esse quæsitum. Ducatur E C. Triangulum F A E, ad triangulum A B C, habet rationem cõpositam, ex rationibus trianguli FAE, ad triangulum B E D; trianguli B E D, ad triangulum B E C; & trianguli B E C, ad triangulum A B C. Sed triangulũ F E A, ad triangulum B E D, (quia ob parallelas FA, BC, sunt similia,) est vt quadratum A E, ad quadratum E B; &

 trian-

triangulum B E D, est ad triangulum B E C, vt B D, ad B C; triangulum verò B E C, est ad triangulum BCA, vt B E, ad B A. Quare ratio trianguli FAE, ad triangulum A B C, componetur quoque ex ratione quadrati A E, ad quadratum E B, seù ex duplicata ratione A E, ad E B; & ex rationibus B D, ad B C; & B E, ad B A. Sed ex vna



ratione A E, ad E B, & ex ratione B E, ad BA, componitur ratio A E, ad B A, & vt B D, ad B C, ita est K, ad H Ergo ratio trianguli F A E, ad triangulum A B C, componetur quoque ex vna ratione A E, ad E B, ex ratione A E, ad A B, & ex ratione K, ad H. Sed ex rationibus A E, ad E B, & A E, ad A B, componitur ratio quadra-A E, ad rectangulum A B E; & vt quadratum A E, ad rectangulum A B E, sic est B C, ad K, conuertendo per constructionem. Ergo & ratio trianguli F A E, ad triangulum

lum B A C, componetur ex rationibus B C, ad K, & K, ad H; nempe erit ad ipsum, vt B C, ad H. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

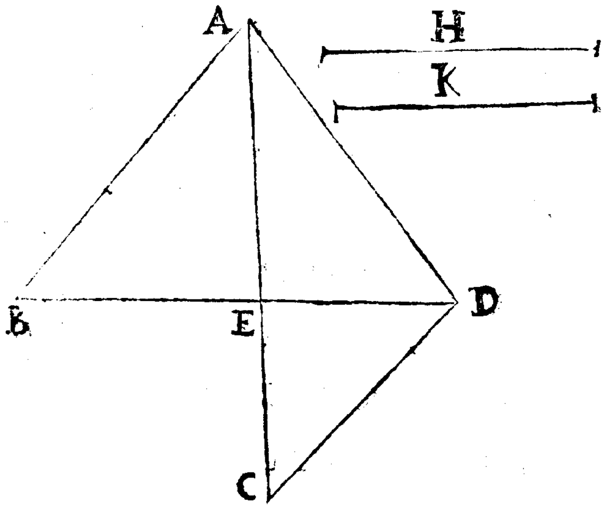
EX dictis habemus modum, quo soluamus hanc propositionem. Dato parallelogrammo F C, vt in prima figura, cuius diameter sit B A, & dato in B C, etiam producta ad partes C, punctum G, ducere G M L, vt triangulum L M A, sit ad parallelogrammum F C, in data proportione. Soluta est enim propositio in triangulo, quod est dimidium parallelogrammi.

PROBL. LVI. PROP. CXXXI.

Datis duabus rectis lineis BA, AD, continentibus quemlibet angulum, & data A C, secante angulum B A D, vtcumque; datoque in altera ipsarum AB, vel A D, puncto D. Ducere D E B, vt quadratum B E, sit ad rectangulum B D E, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet H, ad K, & per punctum datum D, agatur D C, parallela B A, quæ

quæ vtique occurret A C, indefinite productæ, quia cum ipsa concurrit etiam ei parallela B A; occurrat in C, adeò vt fiat triangulum A C D; per proposit. ergo anteced., dato in C D, puncto D, ducatur D E B, occurrens A B, in B, vt triangulum A B E, sit ad triangulum A C D, vt H, ad K. Dico factum esse, quod proponebatur. Nam triangulum B E A, ad triangulum A C D, habet rationem compositam ex ratione trianguli B E A, ad triangulum A E D, & trianguli A E D, ad triangulum A C D. Ergo ratio quoque H, ad K, com-



ponetur ex istis rationibus. Sed vt triangulum BAE, ad triangulum A E D, sic est B E, ad E D; & vt triangulum E A D, ad triangulum A D C, sic est A E, ad A C. Sed ob parallelas B A, C D, vt A E, ad A C, sic B E, ad B D. Ergo ratio quoque H, ad K, componetur ex ratione BE, ad

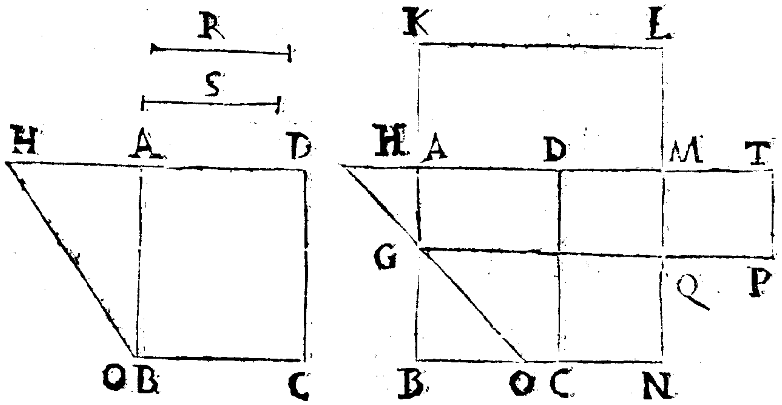
ad E D, & ex ratione B E, ad B D. sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem quadrati B E, ad rectangulum B D E. Ergo erit vt H, ad K, sic quadratum B E, ad rectangulum B D E. Quod erat faciendum.

PROBL. LVII. PROP. CXXXII.

Dato parallelogrammo quocumque A C, & in eius basi B C, etiam protracta ad partes C, dato vbilibet puncto O, ducere O G H, secantem latus A B, in G, & occurrentem M A, protractæ indefinite in H, vt triãgulum H A G, sit ad parallelogrammum A C, in data proportione.

Data proportio sit, quam habet R, ad S. Punctum autem O, potest cadere, vel in B, vel in C, vel inter C, B, vel tandem vltra C. Si cadit in B, vt in prima figura. Problema est facilis solutionis. Nam si fiat, vt S, ad R, sic dupla D A, ad A H, & iungatur B H, triangulum H A B, erit quæsitum. Nam triangulum H A B, ad triangulum, cuius basis dupla A D, & eadem altitudo cum altitudine trianguli H A B, est vt H A, ad duplam

duplam AD, nempe ex constructione vt R, ad S. Sed triangulo cuius basis AD, & altitudo, altitudo trianguli HAB, seù parallelogrammi AC, est æquale parallelogrammum AC. Quare patet propositum.



SI autem cadit in C, vel inter *B*, C, vel vltra C. In omnibus istis casibus fiet eadem constructio. Ad euitandam verò confusionem ponemus tantùm figuram, in qua cadit inter *B*, C. Vnusquisque etenim poterit applicare eandem constructionem cæteris casibus. Producatur *B* A, in K, vt AK, sit æqualis *B*O; deinde fiat vt S, ad R, sic parallelogrammum AC, ad aliud, cuius duplo applicetur ad rectam KA, in angulo KAD, æquale, quod sit KM, & vbicumque secet A*D*, etiam productam, si opus sit, compleatur parallelogrammum KN, & ad datam rectam lineã AM, in angulo *B*AM, applicetur parallelogrammũ AP, æquale parallelogrammo AN, excedens rhombo MP, secans A*B*, in puncto G, & per puncta OG, ducatur OGH, occurrens DA, in

in H, & faciens triangulum HAG. Dico triangulum HA*G*, esse quæsitum.

Quoniam enim parallelogrammum AN, est æquale parallelogrammo AP. Commune ablato parallelográmo AG. Ergo parallelogrammum reliquum *G*N, erit æquale rhombo MP; & sunt in eodem angulo, quia tàm angulus *BG*Q. quàm angulus QMT, externi, sunt æquales interno, & opposito *GAM*. Ergo vt *B*N, seù AM, ei æqualis ad MQ, seù ad A*G*, ei æqualem, ita MQ, ad QN, seù AG, ad *G*B. Sed vt A*G*, ad *G B*, sic (propter similitudinem triangulorum H*A*G, *G*BO, sunt enim similia, quia HA, BO, sunt parallelæ) ita H*A*, ad *B*O, seù ad *A*K, (supra enim facta est *A*K, æqualis ipsi *B*O.) Quare, & vt M*A*, ad *AG* sic H*A*, ad *A*K. Ergo, quod fit sub extremis est æquale facto sub medijs, dummodo omnia sint facta sub eodem angulo, vt ab alijs ostenditur, sed præcipuè à Caualerio lib 2. *G*eometr. indiuid. propos. 7. Ergo quod fit sub M*A*, in *A*K, nempe parallelogrammum MK, erit æquale ei, quod fit sub H*A*, in A*G*, nempe parallelogrammo duplo trianguli HA*G*; quia duo anguli KAM, & HA*G*, ad verticem sunt æquales. Ergo, & illorum dimidia erunt æqualia, nempe triangulum HA*G*, erit æquale dimidio parallelogrammi KM. Sed dimidium parallelogrammi KM, est ad parallelogrammum AC, vt R, ad S; (factum est enim supra vt S, ad R sic parallelogrammũ AC, ad aliud, cuius duplum factũ est parallelogrammũ KM.) Quare, & vt R, ad S, sic triangulum HA*G*, ad parallelogrammum AC. Quod erat faciendum.

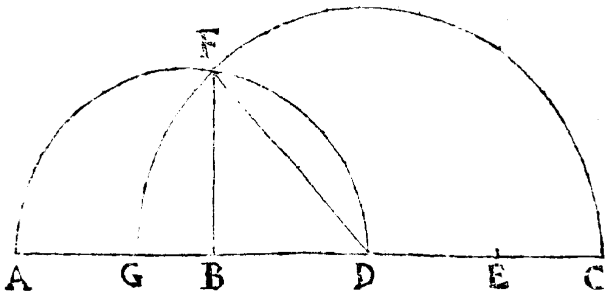
SCHO-

SCHOLIVM.

QVamuis in hoc Problemate ſint deſignata tantùm duo ſchemata ad euitandam confuſionem, attamen propter diuerſitatem caſus O, & diuerſitatem applicationum parallelogramorum, conſtituerentur 12. Schemata diuerſa, vt experienti patebit. In omnibus tamen caſibus, præterquam in primo, fiet eadem conſtructio.

LEM. LXXVI. PROP. CXXXIII.

Datam rectam lineam taliter producere, vt quadratum datæ, vna cum duobus rectangulis ſub data, & ſub inuenta, ad quadratum inuētæ: ſit in data proportione.



DAta recta linea ſit A B, quam oportet taliter producere in C, vt quadratum A B, cum duobus rectangulis A B C, ſit ad quadratum B C, in data proportione, quæ ſit ea, quam habet A B, ad B D, ei poſitam in directum. Super A D, diametro fiat ſemicirculus, & B D, ſumatur dupla B E, à puncto autem B, erigatur normalis B F, & iuncta D F, centro D, interuallo D F, deſcribatur ſemicirculus ſecans B E, productam in C, & in G, vbilibet. Dico A B, datam, eſſe productam in C, ſic, vt quadratum A B, cum duobus rectangulis A B C, ſit ad quadratum B C, vt A B, ad B D.

Quoniam enim duo rectangula A B D, & C B G, ſunt æqualia inter ſe, quia ambo æqualia eidem quadrato B F, & cum rectangulum C B G, ſit æquale rectangulo B C E, quia G B, & C E, ſunt æquales, vt facilè patet conſideranti. Ergo rectangulum A B D, erit æquale rectangulo B C E. Et communi addito rectangulo C B E. Ergo duo rectangula A B D, & C B E, erunt æqualia rectangulis B C E, & C B E, nempe quadrato B C. Verùm vt A B, ad B D, ſic (ſumpta communi altitudine A B,) eſt quadratum A B, ad rectangulum A B D. Pariter vt A B, ad B D, ſic (ſumpta communi altitudine B C,) eſt rectangulum A B C, ad rectangulum C B D; vt autem vnum ad vnum, ſic duo ad duo. Ergo, & vt A B, ad B D, ſic duo rectangula A B C, ad duo rectangula C B D, nempe ad rectangulum C B E. Cùm ergo probatum ſit eſſe, vt A B, ad B D, ſic tàm quadratum A B, ad rectangulum A B D, quàm duo rectangula A B C, ad rectangulum C B E. Ergo, & vt A B, ad B D, ſic ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nempe quadratum A B, vna cum duobus rectangulis A B C, ad rectangulū

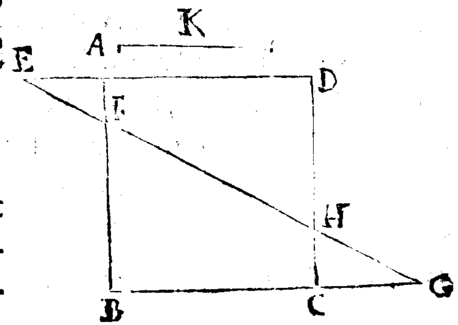
 A B D,

ABD, cum rectangulo CBE. Sed istis probatum est supra æquale esse quadratum BC. Ergo, & vt AB, ad BD, sic quadratum AB, cum duobus rectangulis ABC, ad quadratum BC. Quod erat faciendum.

PROBL. LVIII. PROP. CXXXIV.

Dato quocumque parallelogrammo, ABCD, & dato puncto G, in BC, producta; ducere GHFE, occurrente DA, productæ in E, vt trapezium FADH, sit ad triãgulum EAF, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet BC, ad K, & DA, per propos. anteced. taliter producatur in E, vt quadratum DA, cum duobus rectangulis DAF, sit ad quadratum AE, vt BC, ad K. Et ducatur GE, secans latera DC, AB, in punctis H, & F. Dico factum esse, quod proponebatur.



Quoniam enim triãgula DEH, AEF, sunt similia. Ergo triangulum DEH, erit ad triãgu-

gulum AEF, vt quadratum DE, ad quadratum AE. Et diuidendo, trapezium DAFH, erit ad triangulum AEF, vt excessus quadrati DE, super quadratum AE, ad quadratum AE. sed talis excessus est æqualis quadrato DA, & duobus rectangulis DAE. Ergo, & vt quadratum DA, cum duobus rectangulis DAE, ad quadratum AE, seù vt BC, ad K; sic trapezium DAFH, ad triangulum AEF. Quod erat faciendum.

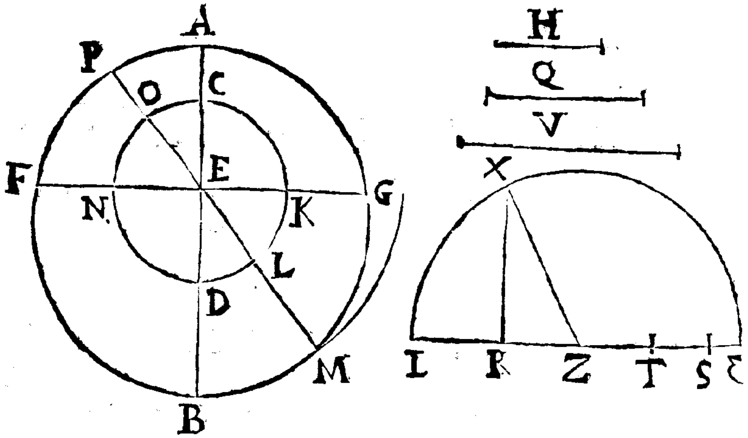
PROBL. LIX. PROP. CXXXV.

Datis duobus circulis circa eandem diametrum, quorum vnus sit intra alium, aptare per cẽtrum minoris lineam in maiori, vt segmẽta intercepta inter circumferentias circulorum, sint in data proportione.

DAtorum circulorum diametri sint AB, CD. E verò sit centrum minoris; data verò ratio sit, quam habet DE, ad H. Oportet ducere POELM, vt ML, ad PO, sit vt DE, ad H. Vel circuli sunt concẽtrici, vel excentrici. Si sunt cõcentrici, patet Problema non posse solui nisi in proportione æqualitatis, & tunc omnis linea aptata in maiori circulo transiens per cen-

 trum

trum minoris facit propositum. Si verò sunt excentrici, vel se tangunt intus, vel non se tangunt, quamuis notemus tantùm schema, in quo non se tangunt; & proportio vel est æqualitatis, vel inæqualitatis, & si est inæqualitatis, si est maioris inæqualitatis, nequit esse



maior ea, quam habet B D, ad C A. Si verò sit minoris inæqualitatis, nequit esse minor ea, quam habet A C, ad D B. Ratio est, quia ex omnibus segmentis interceptis inter circumferentias linearum aptatarum in circulo maiori, & transeuntium per punctum E, D B, est maximum omnium, & A C, minimum, vt facilè potest probari. His præmissis.

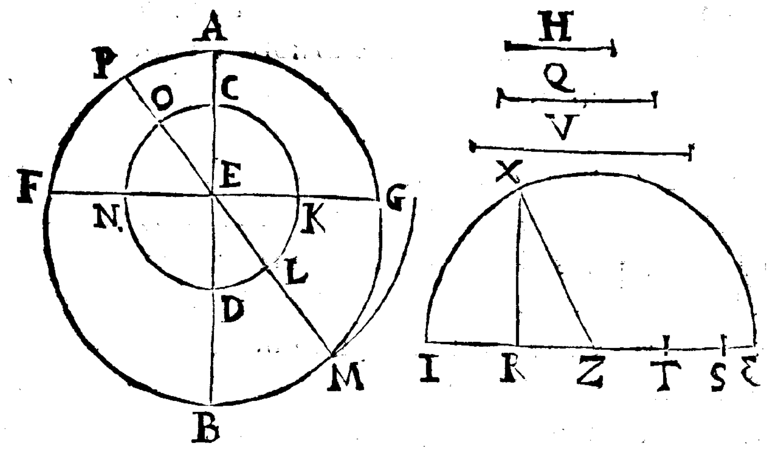
A puncto E, erigatur super A B, E F, secans circumferentiam minoris circuli in N, quæ producatur ad K, G. Et ob euitandam confusionem in schematibus, exponantur seorsim R T, æqualis E K, seù E D, & Q, potens

tens excessũ quadrati E G, super quadrato E K; & fiat vt H, ad R T, seù ad E D, sic R T, ad I S, sibi ipsi positam in directum. Et pariter fiat vt H, ad R T, sic Q, ad V, & inter Q, V, inueniatur media proportionalis, cui æqualis fiat R X, erecta normaliter super R T, à puncto R; & diuisa R T, bifariam in Z, & iuncta Z X, centro Z, interuallo Z X, describatur semicirculus secans R T, productam in I, & 3. Deinde centro E, interuallo æquali ipsi T I, describatur portio circumferentiæ circuli occurrens circumferentiæ maioris circuli in puncto M. (Occurret enim semper, vt infra probabitur,) & per puncta M, & E, ducatur linea M L E O P. Dico talem esse ductam, vt sit sicut E D, ad H, sic M L, ad P O.

Quoniam enim tota Z I, est æqualis totæ Z 3, & Z R, est facta æqualis Z S; ergo, & reliqua I R, erit æqualis reliquæ S 3. Quare & rectangulum S I R, erit æquale rectangulo 3 R I. Sed rectangulum 3 R I, est æquale quadrato X R, quadratum autem X R, est æquale rectangulo contento sub Q, & V, ex constructione. Ergo rectangulum S I R, erit æquale rectangulo contéto sub Q, & V. Quoniam verò supra factum est, vt H, ad R T, sic Q, ad V, vt autem Q, ad V, sic (sumpta communi altitudine Q,) est quadratum Q, ad rectangulum Q, V, & rectangulo Q, V, ostensum est supra æquale rectangulum S I R. Ergo, & vt H, ad R T, sic quadratum Q, ad rectangulum S I R. Pariter quoniã supra factum est, vt H, ad R T, sic R T, ad T S, vt autem R T, ad T S, sic (sumpta communi altitudine I R,) rectangulum T R I, ad rectangulum sub S T, in I R.

Ergo,

Ergo, & vt H, ad R T, ſic rectangulum T R I, ad rectangulum ſub T S, in I R. Sed & vt H, ad R T, ſic ſupra probatum eſt eſſe quadratum Q, ad rectangulum S I R. Ergo & vt quadratum Q, ad rectangulum S I R, ſic rectangulum T R I, ad rectangulum cõtentum ſub S T, in R I. Cùm ergo ſit, vt H, ad R T, ſic tàm totũ quadratum Q, ad totum rectangulum S I R, quàm ab-



latum rectangulum T R I, ad ablatum rectangulũ S T, I R. Ergo, & reliquum ad reliquum erit vt totum ad totũ, ſeù vt H, ad R T. Quare, & vt H, ad R T, ſic exceſſus quadrati Q, ſuper rectangulum T R I, ad rectangulum T I R. Sed R T, eſt æqualis E D, vel E L; T I, eſt æqualis ipſi E M; R I, eſt æqualis ipſi L M; vnde rectangulum T R I, eſt æquale rectangulo E L M, ſeù rectangulo ſub O E, in L M; rectangulum verò T I R, eſt æquale rectangulo E M L; quadratum autem Q, eſt æ-

quale

quale exceſſui quadrati E G, ſuper quadratum E K. Ergo, & vt H, ad D E, ſic exceſſus quadrati E G, ſuper quadrato E K, minus rectangulo ſub O E, in L M, ad rectangulum E M L. Sed quoniam rectangulo F E G, ſeù quadrato E G, eſt æquale rectangulum P E M. Ergo, & quadratum E G, minus rectangulo O E, L M, & minus quadrato E K, ſeù E L, erit æquale rectangulo M E P, minus quadrato E L, & minus rectangulo O E, L M; nempe rectangulo ſub E M, in P O. Quia rectangulũ M E P, diuiditur in rectangula M E O, & M E, O P; rectangulum verò M E O, diuiditur in rectangulum L E O, nempe in quadratum L E, & in rectangulum M L, E O. Ergo & vt H, ad D E, ſic rectangulũ M E, P O, ad rectangulum E M L. Sed vt rectangulum M E, P O, ad rectangulum E M L, ſic (propter eandem altitudinem M E,) eſt P O, ad L M. Ergo, & conuertendo vt D E, ad H, ſic M L, ad P O. Quod erat &c.

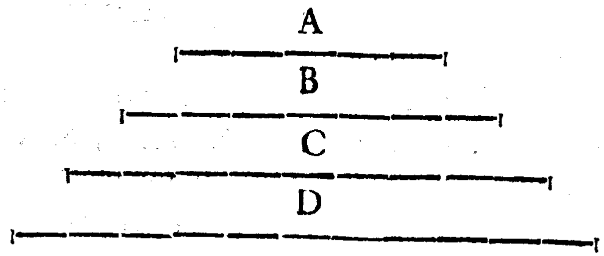
Quòd verò circulus factus cẽtro E, interuallo æquali ipſi H I, ſemper occurrat circumferentiæ maioris circuli, facilè patebit ex proceſſu demonſtrationis, & ex determinationibus Problematis. Quia, ſi non occurreret, ſed caderet vel totus intra, vel totus extra, probaretur eodẽ diſcurſu, proportionem datam eſſe maiorem ea, quam habet B D, ad C A; vel minorem ea, quam habet C A, ad B D, vt conſideranti, & experienti patebit.

LEM-

LEM·LXXVII·PROP·CXXXVI

Si ſint quatuor rectæ lineæ continuè proportionales, erit, vt quadratum primæ minoris, ad exceſſum quadrati mediæ minoris ſuper ipſā ſic media minor ad exceſſum quartæ ſuper ipſam.

Sint quatuor rectæ lineæ A, B, C, D, continuè proportionales. Dico eſſe, vt quadratum A, ad exceſſum quadrati B, ſuper quadratum A, ſic B, ad exceſſum D, ſuper ipſam.

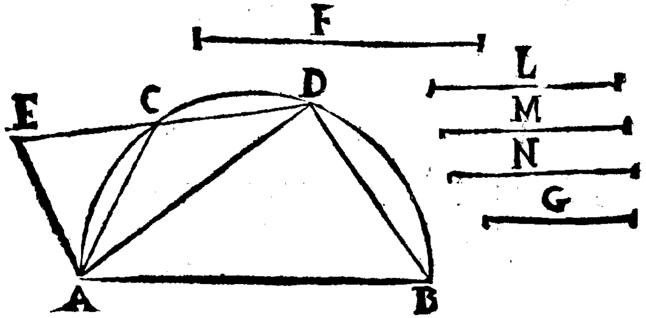


Quoniam enim D, C, B, A, ſunt quatuor continuè proportionales, erit, vt D, ad B, ita quadratum B, ad quadratum A. Quare, & per conuerſionem rationis, erit vt D, ad exceſſum illius ſuper B, ſic quadratum B, ad exceſſum illius ſuper quadratum A. Ergo, & diuidēdo, vt B, ad exceſſum D, ſuper B, ſic quadratum A, ad exceſſum quadrati B, ſuper ipſum. Quod erat &c.

LEM·LXXVIII·PROP·CXXXVII.

Sit ſemicirculus A C B, cuius diameter A B, & eius periphæria ſubtendatur à tribus chordis A C, C D, & D B; D C, autem ſit producta verſus C, indefinite, & à puncto A, ſit ducta ſuper ipſam normalis A E. Dico parallelepipedum factum ſub A B, in rectangulum E C D, eſſe æquale ſolido facto ſub D B, in rectangulum A C D.

Dvcatur A D. Quoniam duo anguli A C D, & D B A, ſunt æquales duobus rectis, quia quadrangulum A C D B, eſt in circulo; & pariter duo anguli A C E, & A C D, ſunt æquales duobus rectis. Ergo duo ſunt æquales duobus. Quare communi ablato angulo A C D, ergo angulus A C E, erit æqualis angulo A B D. Et pariter angulus rectus A E C, eſt æqualis angulo recto A D B. Quare, & reliquus erit æqualis reliquo; & triangulum A E C, erit ſimile triangulo A D B. Ergo, vt E C, ad C A, ſic D B, ad B A. Sed vt E C, ad C A, sic (sumpta communi altitudine C D,) est rectangulum E C D, ad rectangulum A C D. Ergo



& vt D B, ad B A, sic rectangulum E C D, ad rectangulum A C D. Ergo solidum factum sub extremis erit æquale facto sub medijs. Ergo factum sub D B, in rectangulum D C A, erit æquale facto sub A B, in rectangulum E C D. Quod erat ostendendum.

LE. LXXIX. PROP. CXXXVIII.

Datis ijsdem, quæ supra. Dico quadratum A B, esse æquale tribus quadratis A C, C D, D B, & duobus rectangulis E C D.

NAM quadratum A B, est æquale duobus quadratis B D, & D A. Quadratum autem D A, est

est æquale duobus quadratis A E, & E D, quia tam angulus A E D, quam A D B, sunt recti. Quadratum autem E D, est æquale quadrato E C, quadrato C D, & duobus rectangulis E C D; & pariter duo quadrata A E, E C, sunt æqualia quadrato A C. Ergo à primo ad vltimum, quadratum A B, erit æquale quadratis B D, D C, & C A, & duobus rectangulis E C D. Quod erat ostendendum.

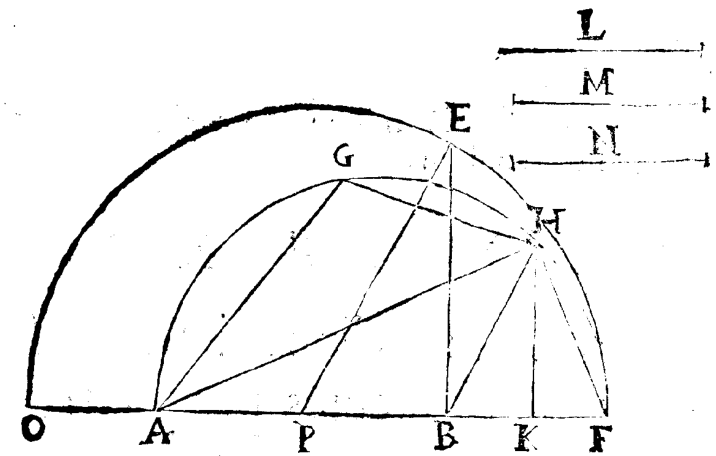
PROBL. LX. PROP. CXXXIX.

Datis tribus rectis lineis, inuenire semicirculum, cuius periphæria subtendatur ab ipsis.

DAtæ tres rectæ lineæ sin L, M, N, & oporteat facere, quod imperatum est. Tunc vel omnes sunt inæquales, vel sunt duæ illarum æquales. Si duæ sunt æquales soluetur Problema per locum planũ. Sint ergo L, & M, æquales, & ipsi N, fiat æqualis A B. A puncto B, erigatur perpendicularis B E, cuius quadratum sit duplum quadrati L, vel M, & diuidatur A B, bifariam in P, & iungatur P E. Centro autem P, interuallo P E, describatur semicirculus, cui occurrat A B, producta in punctis O, & F, & super A F, tamquam supra diametro fiat semicirculus A G F, & à puncto A, aptetur A G, æqualis A B, & circumferentia G F, secetur bifariam in H, & iungantur G H, H F, & H B, & du-

 catur

catur à puncto H, perpendicularis H K, ipſi A F. Dico G H, & H F, eſſe æquales ipſi L, & M, & ſemicirculũ A G F, eſſe quæſitum.

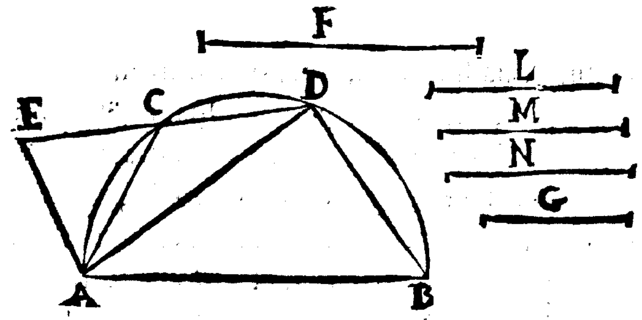


Quoniam enim circumferentia G F, eſt ſecta bifariam in H. Ergo angulus G A H, eſt æqualis angulo H A B. Sed etiam duæ lineæ G A, A H, ſunt æquales duabus lineis H A, A B, altera alteri. Ergo triangulũ G A H, erit æquale triangulo H A B, & G H, erit æqualis H B. Sed G H, eſt æqualis H F. Ergo B H, erit æqualis H F. Quoniam autem duobus quadratis B K, & K H, eſt æquale quadratum B H, & pariter duobus quadratis H K, K F, eſt æquale quadratum H F, & duo quadrata B H, & H F, ſunt inter ſe æqualia, quia & latera B H, & H F, oſtenſa ſunt æqualia. Ergo duo quadrata B K, H K, erunt æqualia duobus quadratis H K, K F. Et communi ablato quadrato H K. Ergo, quadratum B K, erit æquale quadrato K F, & B K, erit

æqua-

æqualis K F. Ergo rectangulum A F B, erit duplum rectanguli A F K. Sed rectangulo A F B, eſt æquale rectangulum O B F, quia B F, eſt æqualis O A; & rectangulum O B F, eſt æquale quadrato B E; & pariter rectangulum A F K, eſt æquale quadrato F H. Quare, & quadratum B E, erit duplum quadrati F H. Sed pariter, quadratum B F, factum eſt duplum quadrati L, vel M. Ergo quadratum F H, eſt æquale quadratis L, vel M, & F H, & H G, ſunt æquales ipſis L, & M, & A G, facta eſt, æqualis A B, ſeu N. Ergo inuentus eſt ſemicirculus &c.

SI verò tres L, M, & N, ſint inæquales, ſoluetur Problema per locum ſolidum, demonſtratione comprehendente etiam caſum antecedentem. Exponatur linea F, potens ſimul tria quadrata L, M, N, & fiat vt quadratum F, ad duplum rectangulum contentum ſub M, & N, ſic L, ad G; & data F, minori extrema, & G, differentia ſecundæ, & quartæ in ordine quatuor continue



proportionalium, inueniatur ſecunda A B, quæ fiat dimetiens ſemicirculi. Quoniam A B, eſt maior F, hoc

 eſt

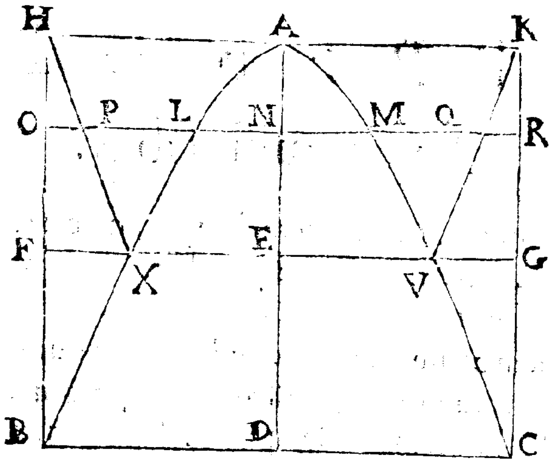
est tribus quadratis L, M, & N. Quare, si aptentur duæ ipsarum L, M, & N, in semicirculo, cuius diameter A B, ipsum totum non occupabunt. Aptetur A C. æqualis L, & C D, æqualis M, & D B, ducatur. Dico D B, esse æqualem N, & semicirculum A C D B, esse quæsitum. Producatur D C, versus C, indefinite, cui à puncto A. occurrat perpendicularis A E, & ducatur A D. Quoniam sunt quatuor continue proportionales, quarum prima minor est F, & G, est excessus quartæ super secundam, & A B, est secunda. Ergo per proposit. 136. erit vt quadratum F, ad excessum quadrati A B, super ipsum, ita erit A B, ad G. Ergo factum sub quadrato F, in G, erit æquale facto sub excessu quadrati A B, super quadratum F, in A B. Pariter quoniam supra factum est vt quadratum F, ad duplum rectangulum contentum sub M, & N, sic L, ad G. Ergo factum sub quadrato F, in G, erit æquale solido contento sub duplo rectangulo M, N, in L, seù solido contento sub duplo rectangulo L, M, in N. Quare solidum contentum sub duplo rectangulo L, M, in N, erit æquale facto sub A B, in excessum quadrati A B, super quadratum E, seu super tria quadrata L, M, N, ei æqualia. Quare, & communibus additis factis sub A B, in tria quadrata L, M, N. Ergo cubus A B, erit æquale factis sub N, in duo rectangula L, M, seù A C D, quia A C, est æqualis L, & C D, est æqualis M, & solidis factis sub A B, in tria quadrata A C, C D, & N. Et quoniam per proposit. antec. quadratum A B, æquatur quadratis A C, C D, D B, & duobus rectangulis E C D. Ergo, & cubus A B, erit æquale factis sub A B, in tria quadrata A C, C D, D B, & in duo rectangula E C D. Ergo & hæc facta erunt æqualia factis sub A B in quadrata L, & M, seù in quadrata A C, C D, & in quadratum N, & in duo rectangula A C D. Et communibus ablatis factis sub A B, in quadrata A C, C D. Ergo factum sub A B, in quadratum D B, cum facto sub A B, in duo rectangula E C D, seù sub D B, in duo rectangula A C D, quæ illis sunt æqualia, per proposit. 137 erunt æqualia factis sub A B, in quadratum N, & sub N, in duo rectangula A C D. Ex vtraque parte sunt duo æqualia, nempe duo rectangula A C D, & A B. Ergo, & N, erit æqualis D B. Quod erat ostendendum.

APPENDIX
Pro Indiuisibilibus.

PRopos. 2 extra ordinem sumpta, quæ habetur pag. 116. demonstrauimus peculiari modo per Indiuisibilia, Cylindrum esse duplum Conoidis parabolici super eandem basim, & circa eundem axim cum ipso. At nunc animaduertimus, nostro ordine procedendi, posse concludi illud admirabile, quod Celeberrimus Galilæus habet in postremis Dialogis, pag. apud nos 28. Nimirũ circuli circumferentiam æqualem esse puncto. Modum Galilæi videat Lector, loco supra citato. Noster autem sequens est non aliter discrepans à Methodo Galilei, nisi quia vtimur solidis diuersi ab ijs, quibus ipse vtitur.

Pro-

Proposit. ergo supra citata; cuius schema denuo ponimus ostendebamus, quod si accepto in A E, vbilibet puncto N, per quod ordinatim applicaretur O P L N, semper verum esse circulum, cuius radius O N, æquari circulis, quorum radij P N, N L. Sed non solùm hoc verum est, sed etiam armillam circularem signatam litteris O P Q R, æqualem esse circulo L N M. Quod patet faciliter; quia cum quadratum O N, sit æquale tam duobus quadratis P N, N L, quàm quadrato P N, & rectangulo O P R, sequitur (dempto communi quadrato P N;) rectangulum O P R, remanere æquale quadrato L N; ac proinde, armillam O P Q R; esse æ-



qualē circulo L N M; & cum hoc semper verificetur, etiam verificari, excessum Cylindri H G, qui signatur litteris H F X V G K, supra frustum parabolicū H X V K, æqualem esse portioni Conoidis X A V, tàm secundum totum,

totum, quàm secundum partes. Vnde cum v. g. pars H O P Q R K, sit æqualis L A M, portioni conoidis, & hoc semper verum sit; sequitur etiam, quod cum tandem ex continua diuisione deueniamus ad circumferētiam, cuius diameter H K, & ad A, verticem conoidis, etiam circumferentiam esse æqualem vertici, nempe puncto. Circa hoc non immoror, quia facilissimè, & clarissimè explicatur à Galilæo, ac eodem modo debet in casu nostro philosophari.

At P. Marius Bettinus Societatis Iesu, Vir, qui cum fuerit author Apiariorum potest Apis nuncupari; quia sicut hæc habet vnde, & mellificet, & pungat, sic hic mellificat, suauissimam doctrinam docendo, pungitque suo aculo non rectè de Mathematicis, secundum ipsum, sentientes. At Apis infelix, quæ stimulum ammittens feriendo Indiuisibilia, periclitata est. Author ergo iste parui pendens, quæ in paradoxo Galilæi ait Illustrissimus Interlocutor Sagredo Conciuis meus verbis, quæ loco Galilæi citato, possunt conspici, tom. 3. sui Ærarij pareg Geom. schol. 1 & alibi, notat aliqualiter Galilęi paradoxum, vnde, nec nostrum omnimodè ei placeret. Admonet ergo nō esse intelligendum, circumferentiam æqualem esse puncto sic absolutè, & Geometricè, sed physicè. Attamen deducimus ex hoc veritatem pulcherrimam, nimirum inter physica indiuisibilia vnum aliud multum physicè excedere. Nam cùm verum sit, physicè loquendo, circumferentiam, cuius diameter H K, æqualem esse puncto A, & possimus concipere Cylindrum in infinitum basium maiorum, & in eo inscriptū Conoi-

Conoides, vt ſupra factum eſt, & ſemper circumferentia ſit æqualis, phyſicè loquendo, vertici conoidis, & tamen, & hæ circumferentiæ, & hi vertices ſint quantitates phyſicæ, adeò vt inter ipſas cadat vera proportio æqualitatis. Sequitur, quod permutando, quam proportionem habet circumferentia maior, & vt ita dicam, maxima, ad paruiſſimam circumferentiam, hanc eandem habeat vertex conoidis maximi ad verticē conoidis paruiſſimi. Vnde vertex conoidis maximi excedet, vt ita dicam, infinitè, verticem conoidis paruiſſimi; & tamen vterque vertex, eſt punctum phyſicè indiuiſibile. Et vtique admirabiliſſimum eſt conſiderare, quantum poſſimus concipere diſtrahi indiuiſibile phyſicum, vt vertex coni, vel conoidis, phyſicè accepti, æquetur circumferentiæ circuli, quæ cauſa ſuę immenſitatis, quæ poteſt concipi, infinita queat appellari.

Verùm P. Bettinus loc. ſup. cit. §. 28. &c. adducit paradoxum longè, vt ipſe appellat, miriſſimum; nimirum, non ſolum circumferentiam, ſed circulum totum, æqualem eſſe puncto. Sed vt ignorantiam meam liberè fatear, tale paradoxũ tali pacto mihi videtur miriſſimũ, vt intelligentiam meam effugiat. Contra tale paradoxum aliqua Geometrice obijcerem, ſed nolo verba habere cũ mortuis. Videat Lector tale paradoxum loco citato, & forſitan agnoſcet, quam melius fuiſſet Bettino per indiuiſibilia procedere, quam irrationabili liuore ipſa ſpernere. Sic enim ab indiuiſibilibus abhorret, vt quaſi ipſa lutum ſint, ipſe verò Armellinus, cupiat potius mori, quam fędari. Sic enim loc ſup cit. Schol. 2. de Indiuiſibi-

ſibilibus loquitur: *In postremis reſpondeo impingentibus mihi ſimilitudinem phyloſophantium circa figuras Geometricas per indiuiſibilia. Longè longius à me abſit fruſtrari Geometricas meas theorias optato fine demonſtratæ veritatis. Quod fieret ſi (contra 4. definitionem lib. 5 & ſcholia noſtra ad eam) compararem inter ſe, quæ Geometricam inter ſe proportionem non habent, qualis eſt comparatio figurarum, & phyloſophatio circa eas per indiuiſibilia.* Intelligis ergo Lector, quomodo author iſte in indiuiſibilia incidens, quaſi ſibi Dæmones occurrerent exclamet: *Longè longius à me abſit &c.* Sed cum contra indiuiſibilia Author iſte anno 1648. nihil, præter nouum liuorem, noui adducat ab ijs, quæ contra ea obiecit Paulus Guldinus in ſua centrobarica, quibus abundè ſatisfecit ipſemet Indiuiſibilium inuentor Bonauentura Caualerius in ſuis exercitationibus Geometricis exercitat. 3. anno 1647. quo, maxima Matheſis iactura, vitam cum morte cõmutauit; ideò nec nos circa hoc debemus nouiter verba profundere.

SCHOLIVM.

HÆc ſunt, Benigne Lector, quæ pro hac vice determinauimus tibi legēda proponere. Quamplurima adhuc tenemus diuerſis temporibus à nobis elaborata, pręcipuè circa proportiones Superficierum Sphęricarum, & Conicarum, quę ſuis temporibus tradentur, ſi Deus ſanitatem, & vitam impertierit. Hęc perlege, ſi tibi placet, reliqua in non modica quantitate

tate, vel his pulchriora, vel his turpiora expecta. Tabellam errorum, vt moris est, tradere, non exhibemus, sed ipsos corrigere tuæ industrię relinquimus, pręcipuè cum adhibita aliquali diligentia, faciliter cognosci possint. Et vale.

FINIS.