EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

GINO LORIA

TEORIE GEOMETRICHE

STORIA E BIBLIOGRAFIA

QUARTA EDIZIONE

PADOVA
CEDAM
IX.

GINO LORIA - IL PASSATO E IL PRESENTE DELLE PRINCIPALI TEORIE GEOMETRICHE. STORIA E BIBLIOGRAFIA

QUARTA EDIZIONE
TOTALMENTE RIFATTA

CEDAM
CASA EDITRICE DOTT. A. MILANI
GIÀ LITOTIPO · PADOVA 1931 - IX

IL PASSATO E IL PRESENTE

DELLE PRINCIPALI

TEORIE GEOMETRICHE

GINO LORIA

PROFESSORE DI GEOMETRIA SUPERIORE NELL'UNIVERSITÀ DI GENOVA

IL PASSATO E IL PRESENTE

DELLE PRINCIPALI

TEORIE GEOMETRICHE

STORIA E BIBLIOGRAFIA

Quarta edizione totalmente rifatta

CEDAM

CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI

GIÀ LITOTIPO - PADOVA 1931-IX

Printed in Italy

VICENZA — Arti Grafiche delle Venezie — VICENZA

PREFAZIONE ALLA II EDIZIONE (1897)

Alla prima edizione del presente scritto (¹) io preludevo colle parole seguenti:

> « Après six mille années d'observations l'esprit humain n'est pas èpuisé; il cherche et il trouve encore à fin qu'il connaisse qu'il peut trouver à l'infini et que la seule paresse peut donner des bornes à ses connaissances et à ses inventions ».
>
> BOSSUET

« I progressi della scienza in genere e della matematica in ispecie furono in questi ultimi tempi così considerevoli, essi continuano a succedersi ancora in modo così rapido ed incessante, che si fa vivamente sentire il bisogno di gettare uno sguardo retrospettivo sul cammino già fatto, il quale permetta ai novizii di penetrare più facilmente nei misteri di essa, ai già provetti di giudicare con più sicurezza quali siano i problemi di cui è più urgente la soluzione.

Il desiderio di soddisfare questo bisogno per quanto riguarda la geometria, cioè per quanto concerne la parte più elevata delle nostre cognizioni positive — poichè, come disse Pascal, *tout ce qui passe la géométrie nous surpasse* — mi spinse a scrivere questa monografia storica. Possa questo abbozzo incompleto provocare uno scritto degno dell'altezza del suo scopo; possa questa povera cronaca precedere la storia della geometria del nostro secolo!

Aprile 1887 ».

Ho creduto conveniente riprodurre qui queste linee perchè esse bastano a designare gli intenti che ebbero e tuttora conservano le pa-

(1) Inserita nel T. XXXVIII, II Serie, delle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1887.

gine che ora presento al pubblico matematico « rinnovellate di novella fronda » ; tali intenti sono — mi piace ripeterlo — da un lato quello di aiutare la ricerca bibliografica preliminare che deve precedere oggi qualunque fruttifera investigazione scientifica ed adunare alcuni materiali per la storia della geometria nel secolo XIX; dall'altro quello di mostrare storicamente la legge di continuo sviluppo che governa i vari rami della geometria e di addurre innumerevoli esempi a sostegno di quel curioso fenomeno che un poeta di genio espresse tanto chiaramente colle parole:

Combien de temps une pensée
Vierge obscure, attend son époux

Non è il caso di esporre per disteso i segreti motivi delle modificazioni (alcune radicali) che subì il mio antico lavoro; d'altronde al lettore intelligente e dotto non isfuggirà che essi si compendiano nel desiderio di rendere questo quadro delle attuali condizioni della geometria più prossimo al vero e meno indegno della festosa accoglienza che ebbe al suo primo apparire, in particolare di renderlo più utile, precisando ed estendendo le notizie intorno alle più cospicue produzioni moderne. Spero non mi si imputerà come incoerenza la modificazione di certe opinioni o giudizi che l'evoluzione incessante della scienza in questi ultimi nove anni rende oggi inaccettabili. Così mi lusingo che non mi verrà fatto addebito di avere mantenuto il mio antico sistema di sopprimere tutti i particolari intorno alle persone di cui mi occupo, sistema inevitabile in una storia, qual'è l'attuale, non di uomini ma di idee; tuttavia, nell'intento di aiutare il lettore bramoso di conoscere, insieme alla geometria, i geometri, ebbi cura di far menzione, nei luoghi che mi parvero più opportuni, gli scritti biografici capaci di istruirlo.

Ritengo eziandio per superfluo il descrivere qui le enormi difficoltà che si oppongono a che un lavoro come quello che or congedo per le stampe si avvicini a quella sognata perfezione che è stimolo e tormento di ogni scrittore; lo sviluppo preso in questo scorcio di secolo dalla geometria, è di proporzioni talmente colossali da incutere terrore in chi voglia dei risultati conseguiti delineare i contorni e valutare l'essenza: valga questa considerazione a farmi perdonare le involontarie ommissioni, gli apprezzamenti certamente non sempre inconfutabili, la distribuzione della materia che per fermo non tutti troveranno commendevole.

Sicuro di essermi sforzato con ogni mia possa di accostarmi all'ideale dello storico imparziale e fedele, con animo sereno io abbandono una nuova volta questo libro nelle mani de' suoi giudici naturali, soltanto augurando che almeno gli intendimenti dell'autore siano così bene compresi e tanto rettamente apprezzati che fra non molto la letteratura matematica annoveri dei lavori congeneri, ma assai migliori, sulle altre scienze esatte. Il primo anello di questa aurea collana a venire doveva essere riserbata alla geometria, e spettava all'Italia il fonderlo, all'Italia dove la geometria per la prima volta assurse a dignità di scienza per merito di Pitagora, all'Italia che da un mezzo secolo a questa parte contribuisce così possentemente al progredire della scienza dell'estensione, da essere considerata oggi come aquilifera della geometria pura.

. . . .

Aprile 1896.

PER LA IV EDIZIONE

Quando sul finire del 1886 io fui chiamato ad occupare nell'Ateneo genovese la cattedra di Geometria superiore, pensai di preludere al mio insegnamento con una rapida rassegna del vasto campo di studi nel quale, per ufficio, dovevo fungere da guida. Ebbe così origine quella Monografia storica che l'illustre Accademia delle Scienze di Torino volle accogliere fra le sue Memorie e che, per iniziativa dei Professori Sturm (✠) e Dickstein, ebbe l'onore di traduzioni in tedesco e polacco. Manifestatosi, dopo dieci anni, il bisogno di una seconda edizione di quel mio scritto, io lo sottoposi ad un rifacimento *ab imis;* la versione in inglese del I Capitolo, dovuta al compianto Prof. G. Bruce Halsted ed inserita nella ben nota rivista *The Monist* (Ottobre 1902), basti a provare l'accoglienza onesta e lieta che essa ricevette. Ora, dopo più di altri trent'anni, si è manifestata la richiesta di una nuova edizione e si è trovata una benemerita Casa editrice disposta a soddisfarla.

Volendo che il mio lavoro continui a disimpegnare l'ufficio di guida bibliografica per coloro che si accingono alla ricerca geometrica, ho riconosciuto indispensabile fare ad esso subire una totale rifusione. Esso fu, quindi, diviso in due Libri; il primo ne riproduce con innumerevoli migliorie la seconda edizione, mentre il secondo è dedicato alla letteratura geometrica posteriore all'anno 1896.

Quantunque in questo nuovo periodo cadano gli anni terribili della conflagrazione mondiale, benchè il cannone abbia allora mietuto parecchie giovani vite che erano speranze della geometria, la ricerca matematica non subì alcun percepibile arresto; i nuovi lavori degni di venire menzionati sono tanto numerosi che una scelta s'impose [1]; sul modo con cui essa venne fatta i giudizi saranno discordi, essendo frequente il fenomeno di lettori i quali, mentre non sentono alcuna gratitudine per quanto viene loro insegnato, non perdonano all'autore di avere taciuto quanto essi conoscono perfettamente. Altro aspetto della presente opera, riguardo a cui i pareri saranno discordi, è il modo di distribuzione della materia; ogni lavoro matematico concerne una determinata figura A, la quale viene studiata dal punto di vista di un determinato gruppo di trasformazioni B (trasformazioni elementari, projettive, cremoniane, ecc.) e con certi mezzi C (ragionamenti geometrici, coordinate, calcolo vettoriale, ecc.); ora devesi riunire in un tutto quanto concerne la figura A, o quello che ha attinenza al gruppo B o finalmente ciò che si è ottenuto applicando il procedimento C? Ebbene, non v'ha dubbio che porre un siffatto problema porterebbe a dividere tutti i matematici del mondo in tre distinte categorie! D'altra parte, chi osserva nella sua totalità la recente letteratura geometrica, tosto si avvede che essa si ripartisce naturalmente in tre grandi sezioni: Geometria algebrica, Geometria infinitesimale, Metageometria. Se un tale concetto, ragionevole e seducente, non fu adottato nel presente Saggio gli è che, ove lo si fosse fatto, sarebbe nata un'opera destituita del carattere storico che l'autore voleva assicurarle.

Ora la cronologia matematica insegna che le prime figure che furono studiate sono le curve piane, le superficie e le curve gobbe, tutte

(1) Per colmare le lacune da noi lasciate si può ricorrere al V vol. (Leipzig-Berlin 1926) del celebre *Poggendorff's Biographisch-literarisches Handwörterbuch*.

algebriche; perciò ad esse vennero dedicati i primi quattro Capitoli del I Libro di questo volume. Creato l'algoritmo infinitesimale lo studio delle medesime figure fu ripreso, prescindendo dall'algebricità, con mezzi e risultati che diedero origine alla Geometria differenziale, nobilissimo ramo di scienza, a cui è consacrato il V Capitolo. Le stesse figure furono poi indagate dal punto di vista della forma, come si apprende dal VI, nel quale sono date notizie anche delle ricerche relative a nuove figure (le configurazioni), costituite ciascuna di un numero finito di punti, rette e piani. Gli effetti della introduzione della retta come elemento generatore delle figure a tre dimensioni sono descritti nel VII; quelli che traggono origine dal concetto di corrispondenza, nelle svariate sue forme, nell'VIII; mentre il IX, complemento dei primi, è consacrato ai procedimenti che servono a risolvere le questioni in cui si tratta di determinare i numeri di certe figure annesse a enti algebrici. I due Capitoli successivi hanno carattere metamatematico, avendo per oggetto i sistemi geometrici differenti dall'euclideo e gli spazi a più dimensioni. Ma poichè col nostro ordinamento della materia (come forse adottandone qualunque altro) alcuni indirizzi geometrici sarebbero rimasti nell'ombra, di essi si è data breve notizia nel Capitolo che chiude il I Libro.

Sopra un piano perfettamente simile fu architettato il II. Se non che, trattando esso di un periodo di più breve durata, lo si ripartì in tre soli Capitoli, divisi ciascuno in quattro paragrafi, i dodici paragrafi risultanti essendo in corrispondenza biunivoca con i Capitoli costituenti il Libro I. Con ciò la consultazione dell'intera opera riesce più agevole; essa è poi facilitata dall'Indice degli articoli, che si trova in principio del presente volume, e dall'Indice dei nomi citati, che ne forma la chiusa.

La stampa della presente opera subì traversie le quali debbono venire portate a conoscenza di chi legge.

L'edizione ne fu assunta dalla Casa Galàtola di Catania, la quale eseguì il relativo lavoro con tale deplorevole lentezza che circa quattro anni sono passati dal giorno in cui ad essa venne consegnato l'originale; ciò esigette da parte dell'autore un'incessante opera di aggiornamento, la quale dà ragione di una certa irregolarità di redazione, non *avendo potuto nei primi Capitoli venire ricordati lavori recenti che videro la luce dopo che essi erano già stati composti e licenziati.*

Passato a miglior vita — nell'Autunno 1929 — il titolare della Casa Galàtola, questa venne irrevocabilmente chiusa ed ogni tentativo per ottenere che la stampa iniziata venisse condotta a termine, s'infranse contro un invincibile rifiuto. Fortuna volle che la Casa CEDAM *— di cui sono note le benemerenze verso la coltura nazionale — assumesse di prendere il posto della Ditta siciliana; ciò spiega una lieve diversità nella stampa e nella carta del presente volume, che il lettore noterà paragonando la pag. 324 con le successive. Agli egregi colleghi Prof. G. Marletta, dell'Università di Catania, e A. Comessatti, dell'Università di Padova, nonchè al Prof. G. Aliprandi, che mi aiutarono validamente nelle trattative che condussero a questo risultato, vada l'espressione della mia viva gratitudine. In pari tempo compio il gradito dovere di ringraziare il Dott. G. Tacchella, già mio discepolo ed ora mio valido collaboratore, per il prezioso aiuto prestatomi nella compilazione dell'Indice dei nomi che chiude questo volume.*

Genova, Novembre 1930.

INDICE

Prefazione alla II Edizione. — *Pag.* VII.
Avvertenza relativa alla III Edizione. — *Pag.* X.
Elenco delle abbreviazioni adoperate per designare le Collezioni scientifiche più spesso citate. — *Pag.* XXI.

LIBRO I.

Dall'alba della ricerca geometrica al tramonto del secolo XIX

CAPITOLO I.

Sguardo alle origini ed allo sviluppo della geometria sin verso il 1850. — Pag. 1.

Introduzione. **1.** Etruschi, Cinesi, Babilonesi. **2.** La matematica presso gli antichi Egiziani. **3.** La geometria greca pre-euclidea. **4.** Il periodo aureo della geometria greca: Euclide, Archimede, Apollonio. **5.** Erone e Tolomeo. Il periodo argenteo della geometria greca. **6.** L'epoca Romana. Il Medio Evo. Gli Arabi. **7.** Il Rinascimento. **8.** Mydorge, Pascal, Desargues. **9.** La geometria analitica: Descartes e Fermat; loro immediati seguaci. **10.** Il calcolo infinitesimale e le applicazioni di esso alla geometria. Digressione intorno alle opere di divinazione, in particolare alla Scuola napolitana che ebbe a duce Nicola Fergola. **11.** Nuove applicazioni geometriche dell'analisi infinitesimale. La geometria analitica a tre coordinate: Eulero, Clairaut, Monge. **12.** Risorgimento della geometria pura. **13.** Digressione sopra i «poligoni di Poncelet». **14.** Chasles. Risveglio della geometria in Germania. **15.** Möbius, Steiner, Staudt, Plücker.

CAPITOLO II.

Teoria delle curve piane algebriche. — Pag. 32

1. Origine della teoria generale delle curve piane; primi teoremi generali. **2.** Proprietà metriche delle curve piane **3.** Investigazioni preliminari intorno alle loro singolarità. **4.** Prime esposizioni metodiche della teoria delle curve piane: Eulero e Cramer. **5.** Lamé e Plücker. **6.** Le singolarità superiori delle curve piane algebriche. **7.** Ulteriore sviluppo della teoria analitica. Applicazioni della teoria delle forme algebriche. **8.** Applicazioni delle funzioni trascendenti alla geometria. La teoria delle funzioni algebriche. **9.** Sistemi lineari di curve piane. Generalizzazione della teoria delle polari. **10.** Trattazione sintetica della teoria delle curve piane algebriche. **11.** Generalità intorno alle indagini sopra curve speciali. *Curve di terz'ordine generali:* Prime ricerche su di esse; vari modi di generazione; tangenti di flesso ed altre linee aventi con una cubica piana dei contatti speciali; ricerche puramente sintetiche; altre ricerche di vario genere; applicazione delle funzioni uniformi a due periodi; teoria delle forme ter-

narie cubiche. *Curve di terz'ordine particolari:* Le cubiche razionali; le cubiche metricamente specializzate. **12.** *Curve di quart'ordine generali:* tangenti doppie e tangenti di flesso; altre proprietà comuni a tutte le quartiche piane. *Curve di quart'ordine particolari:* quartiche di genere due; quartiche di genere uno; quartiche razionali; quartiche bicircolari; l'ipocicloide tricuspide. **13.** Cenni intorno alle curve di quint'ordine. Le curve piane razionali. **14.** Le curve piane ellittiche e le iperellittiche. **15.** Altre categorie speciali di curve piane.

CAPITOLO III.

Teoria delle superficie algebriche. — Pag. 72

1. Origine della teoria delle superficie: Eulero. Biforcazione di tale teoria. I trattati di Salmon, Cremona e Clebsch-Lindemann. **2.** Teoremi generali sulle superficie algebriche. Ricerche sui loro punti singolari. **3.** Generi e moduli di una superficie. **4.** Piani e rette tangenti notevoli di una superficie. Contatti di due superficie. **5** Varie generazioni e costruzioni. Teoria delle polari e sua generalizzazione. Proprietà metriche delle superficie. Sistemi di superficie. **6.** Superficie di ordine determinato. *Superficie di second'ordine:* Primordi della teoria. Proprietà focali ed altre proprietà di misura. Hesse. Varie costruzioni delle quadriche. Poligoni ad esse collegati Sistemi di quàdriche. Coni quàdrici e quàdriche non degeneri, metricamente specializzate. **7.** *Superficie di terz'ordine generali:* Cayley, Salmon, Sylvester, Steiner, Grassmann. Varie generazioni e costruzioni di una superficie cubica. Pentaedro ed esaedri. Configurazione delle rette e dei piani tritangenti di una superficie cubica. Curve di essa. Teoria delle forme quaternarie cubiche. Applicazioni della teoria delle sostituzioni. Altre proprietà delle superficie cubiche. **8.** *Superficie di terz'ordine particolari:* rigate di terzo grado. **9.** *Superficie di quart'ordine:* sviluppabili e rigate, classificazione delle superficie di quart'ordine contenenti infinite coniche. Superficie di quart'ordine aventi una conica (propria o degenerata) per linea doppia; toro e ciclide di Dupin. **10.** Superficie di Steiner. **11.** Superficie di Kummer: superficie delle onde e tetraedroide di Cayley; altre forme particolari e generalizzazioni della superficie di Kummer. **12.** Le altre superficie di quart'ordine con punto doppio. Le superficie con un punto triplo. La superficie di Weddle. Le superficie di quarto ordine razionali. **13** Alcune superficie di 5° e di 6° ordine. Alcune sviluppabili di ordini particolari. Le rigate. **14.** Superficie di ordine superiore con un numero finito di rette, o con infinite coniche, o con infinite trasformazioni infinitesime in sè stesse, o godenti di un'assegnata simmetria, o deducibili da una quàdrica, o generabili con forme fondamentali in corrispondenza algebrica o con sezioni piane di genere determinato. Altre classi speciali di superficie.

CAPITOLO IV.

Teoria delle curve algebriche a doppia curvatura. — Pag. 111

1. Linee a doppia curvatura conosciute dagli antichi. Origini della teoria generale. **2.** Caratteri di questa. I lavori di Cayley e de' suoi seguaci **3.** Halphen e Nöther; loro continuatori. **4.** Curve particolari. Le cubiche gobbe. **5.** Le quàrtiche gobbe di I specie. **6.** Le quàrtiche gobbe di II specie. **7.** Curve gobbe degli ordini **5, 6, 7.** Altre curve speciali. **8.** Le curve razionali.

CAPITOLO V.

Geometria differenziale. — Pag. 126

1. Introduzione. **2.** Primo stadio di sviluppo della geometria differenziale delle linee gobbe: Clairaut, Monge, Lancret, Saint-Venant. Le formole di Serret-Frenet, Bonnet, Bertrand ed altri minori. Hoppe. **3.** Altre ricerche congeneri; risultati ottenuti dal Lie. Alcune curve speciali. Esposizioni della geometria differenziale delle linee sghembe. **4.** Geometria differenziale delle superficie. La teoria della curvatura in Eulero ed in Meusnier. Monge e Gauss. **5.** L'*Applica-*

tion de l'analyse à la géometrie; alcuni lavori che da essa rampollano. **6.** L'opera geometrica di C. Dupin: suoi seguaci. **7.** Ricerche intorno alle superficie di rivoluzione, alle rigate e alle sviluppabili: le superficie che sono divise in quadrati infinitesimi dalle loro linee di curvatura. **8.** Superficie a linee di curvatura piane o sferiche. Superficie i cui raggi di curvatura sono legati dalla relazione $f(r_1, r_2) = 0$. **9.** Le superficie d'area minima generali o speciali. **10.** Le prime parti delle *Disquisitiones generales circa superficies curvas* di Gauss; ricerche intorno alla curvatura delle superficie. **11.** Applicabilità delle superficie le une sulle oltre. **12.** Le restanti parti delle *Disquisitiones*. Ricerche intorno alle geodetiche. Applicazioni geometriche della teoria delle forme differenziali quadratiche. **13.** Superficie a curvatura (integra) costante; superficie coll'elemento lineare riducibile alla forma di Liouville; altre superficie particolari. **14.** Ulteriore sviluppo delle teorie di Monge e Gauss. **15.** Coordinate curvilinee nello spazio; sistemi tripli ortogonali. **16.** Trattati moderni di gemetria differenziale.

CAPITOLO VI.

Ricerche intorno alla forma delle curve, delle superficie e di altre figure geometriche Analysis situs. Configurazioni. — Pag. 166

1. Prime ricerche sulle forme delle figure geometriche. **2.** Curve di terz'ordine e curve di terza classe. **3.** Curve di quart'ordine. **4.** Curve piane algebriche d'ordine qualunque. **5.** Curve sghembe. **6.** Superficie. Il nuovo campo di ricerche geometriche del Segre. **7.** Analysis situs: poliedri; topologia. **8.** Teoria delle configurazioni.

CAPITOLO VII.

Geometria della retta nello spazio. — Pag. 180

1. Origini della geometria della retta. Primi lavori di Plücker. Battaglini. **2.** La *Neue Geometrie des Raumes* di Plücker. Klein e Segre. **3.** Ulteriore sviluppo delle idee di Plücker. **4.** Ricerche sintetiche sulla geometria della retta, da G. Giorgini a R. Sturm. Applicazioni alla geometria della retta dei metodi di Halmilton e Grassmann. **5.** Altro indirizzo che seguirono alcuni cultori della geometria della retta. La prima memoria di Kummer. **6.** La seconda memoria di Kummer ed i complementi che a' di nostri ricevette. **7.** *Complessi speciali*: complessi tetraedrali, complessi tetraedroidali, complessi caratterizzati da speciali proprietà metriche, complessi generati da due piani correlativi, complessi quadratici aventi per superficie singolare una rigata. **8.** *Congruenze speciali*. **9.** Congruenze e complessi ottenuti col mezzo di due forme fondamentali di seconda specie in corrispondenza algebrica.

CAPITOLO VIII.

Corrispondenze, rappresentazioni, trasformazioni. — Pag. 196

1. Preliminari. Projezione centrale, omologia, projettività in generale. **2.** Projettività cicliche. Projettività che mutano in sè stesse certe figure. Alcune indagini moderne sulle collineazioni e le correlazioni. **3.** Alcuni particolari trasformazioni piane univoche. **4.** Le trasformazioni piane cremoniane in generale. **5.** Trasformazioni cremoniane involutorie. Le trasformazioni periodiche. Trasformazioni univoche con una curva unita, oppure con una curva involutoria. Altre speciali trasformazioni piane univoche. **6.** Trasformazioni che conservano gli angoli o le aree. Trasformazioni di Laguerre. Cenno sulla geometria dei polinomi. Le trasformazioni multiple, ossia (1 n). Le involuzioni piane. Le trasformazioni (m, n). **7.** Ciclografia. Teoria dei connessi e sua estensione allo spazio. **8.** Rappresentazione di una superficie su un piano: Lambert, Lagrange, Gauss e seguaci. **9.** Rappresentazione su un piano delle superficie al-

geoniche razionali. **10.** Le trasformazioni razionali dello spazio in generale. **11.** Le trasformazioni involutorie ed altre particolari trasformazioni univoche dello spazio. Classificazione delle trasformazioni birazionali. **12.** Trasformazioni multiple nello spazio. **13.** Sistemi nulli di ordine superiore. Le corrispondenze (m_1, ... m_r) fra r figure geometriche. Trasformazioni di contatto e gruppi di trasformazioni. — Conclusione.

CAPITOLO IX.

Geometria numerativa. — Pag. 225

1. Introduzione. **2.** Il periodo di preparazione: da Steiner a de Jonquières. **3.** Il primo periodo di esistenza della geometria numerativa: Chasles; sua polemica con de Jonquières. **4.** I continuatori dell'opera di Chasles. **5.** Estensione della teoria delle caratteristiche dalle coniche alle altre curve ed alle superficie algebriche. **6.** Legame fra la teoria delle caratteristiche e quella delle equazioni differenziali. **7.** Estensione della teoria delle caratteristiche a nuove figure quali triangoli, tetraedri e corrispondenze algebriche. **8.** Il principio di corrispondenza per forme razionali di prima specie. Principi analoghi per forme di genere qualunque e per spazi lineari di specie superiore alla prima. **9.** Di alcune applicazioni del principio di corrispondenza di Chasles. **10.** Ricerche dell'Halphen sulla teoria delle caratteristiche per le coniche: loro continuazione e dispute che provocarono. **11.** I metodi di Schubert; discussione che questi ebbe coll'Halphen. Geometria numerativa dello spazio ad n dimensioni. I continuatori dell'opera di Schubert.

CAPITOLO X.

Geometria non-euclidea. — Pag. 244

Preliminari. **1.** Il postulato di Euclide ed i primi tentativi per perfezionare la teoria delle parallele. **2.** Saccheri e Lambert. **3.** Fourier, Lagrange, Carnot, Laplace e Legendre. **4.** Gauss, Schweikart e Taurinus. **5.** Lobatscheffsky e Bolyai. **6.** Riemann, Helmholtz e Lie; Beltrami. **7.** Le investigazioni moderne sui fondamenti della geometria. **8.** Cayley e Klein. **9.** Ulteriore svolgimento della geometria non-euclidea. **10.** Meccanica e fisica degli spazi non-euclidei. **11.** Svariate ricerche di geometria non-euclidea. **12.** Esposizioni metodiche di questa disciplina; esposizioni storiche e critiche di essa.

CAPITOLO XI.

Geometria degli spazi a quantesivogliano dimensioni. — Pag. 262

1. Primordi della geometria a più dimensioni: Cayley e Cauchy. **2.** Gli spazi a più dimensioni come varietà numeriche: Riemann e Beltrami; loro continuatori. **3.** Geometria differenziale e Analysis situs delle varietà superiori. **4.** Cinematica e meccanica degli spazi a quantesivogliano dimensioni. **5.** Estensione della geometria elementare; le figure regolari degli spazi superiori. Generalizzazione di altre questioni geometriche. **6.** L'ipotesi di esistenza degli spazi superiori e le scienze naturali. **7.** Geometria analitico-projettiva delle varietà superiori. **8.** La geometria projettiva sintetica degli spazi a quantesivogliano dimensioni: Cayley, Clifford, Veronese. **9.** Loro continuatori. Projettività, quàdriche, rigate e curve in uno spazio lineare qualunque. **10.** La geometria sopra l'ente algebrico. Altre ricerche sulle varietà cubiche, sulle rette di un iperspazio, sulla forma di figure ivi contenute; applicazioni analitiche della geometria a n dimensioni; rappresentazione delle forme binarie su una curva di un iperspazio; geometria metrico-projettiva. Ricerca dei postulati indipendenti capaci di caratterizzare uno spazio lineare qualunque. **11.** L'indirizzo plückeriano. Spottiswoode. Geometria dello spazio di coniche e dello spazio di cubiche gobbe.

CAPITOLO XII.

Raccogliendo i dispersi. — Pag. 284

1. Introduzione. Cenni intorno alle coordinate projettive, al metodo della proiezione centrale e alla notazione simbolica per la teoria delle forme algebriche. **2.** Invarianti differenziali, geometria cinematica, teoria dei momenti di inerzia, probabilità geometriche. **3.** Dimostrazione dell'irrazionalità di π, costruzione con riga e compasso di poligoni regolari, geometria del triangolo. **4.** Metodo delle equipollenze e teoria dei quaternioni. **5.** Idee di Grassmann. **6.** Caratteri della geometria al tramonto del sec. XIX.

LIBRO II.

Progressi compiuti dalla geometria in quest'ultimo trentennio

CAPITOLO XIII.

§ 1. **Preliminari.** — Pag. 293

1. Necrologio. **2.** Nuove ricerche sui problemi di chiusura. **3.** Teoria degli immaginari.

§ 2. **Teoria delle curve piane algebriche.** — Pag. 297

4. Generalità. **5.** Ricerche sintetiche. **6.** Proprietà metriche. **7.** Formole di Plücker e punti singolari. **8.** Applicazioni della teoria delle funzioni algebriche. **9.** Sistemi lineari di curve piane. **10.** Curve algebriche speciali. Le cubiche. **11.** Quàrtiche piane generali. **12.** Quàrtiche piane con 1, 2 o 3 punti doppi. **13.** L'ipocicloide tricuspide ed altre quàrtiche speciali. **14.** Curve di 5° e 6° ordine; curve speciali d'ordine qualunque. **15.** Curve di genere determinato.

§ 3. **Teoria delle superficie algebriche.** — Pag. 315

16. Ricerche analitiche e proprietà metriche. **17.** Punti singolari delle superficie. **18.** Problemi di geometria numerativa concernenti sistemi di superficie. **19.** Ricerche generali sulle superficie algebriche. **20.** Applicazione degli stessi metodi e concetti ad alcune classi di superficie. **21.** Superficie d'ordine determinato: le superficie di 2° ordine. **22.** Superficie di 3° ordine generali. **23.** Superficie cubiche speciali. **24.** Superficie di 4° ordine; superficie di Steiner, superficie di Kummer, tetraedroide, superficie delle onde. Altre superficie di quart'ordine con soli punti doppi. **25.** Superficie di quart'ordine a conica doppia. Rigate di 4° grado. **26.** Alcune superficie di ordine superiore al quarto, in particolare rigate degli ordine 5, 6, 7. **27.** Rigate in generale. **28.** Di alcune classi di superficie speciali d'ordine qualunque.

Nota bibliografica sulla recente teoria delle funzioni algebriche p. 334

§ 4. **Teoria delle curve algebriche a doppia curvatura.** — Pag. 337

29. Ricerche sulle curve gobbe in generale. **30.** Sistemi di coniche nello spazio. Cubiche gobbe; sistemi formati da tali curve. **31.** Quàrtiche gobbe di I specie. **32.** Quàrtiche gobbe di II specie. **33.** Curve speciali di 5° e 6° ordine. Curve razionali.

CAPITOLO XIV.

§ 1. **Geometria differenziale.** — Pag. 344

1. Esordio. Trattati. 2. Geometria intrinseca, calcolo vettoriale e calcolo differenziale assoluto. 3. Curve gobbe in generale. 4. Curve gobbe speciali. 5. Superficie; generalità. 6. Le quàdriche di Lie. 7. Linee geodetiche. 8. Deformazioni (finite) delle superficie. 9. Deformazione delle quàdriche. 10. Deformazione infinitesime delle superficie. Altre corrispondnze fra due superficie. 11. Sistemi tripli ortogonali. 12. Superficie speciali: rigate e superficie W. 13. Superficie di area minima; generalizzazione. 14. Superficie a curvatura costante. 15. Altre classi di superficie speciali. 16. Geometria differenziale projettiva: generalità: i tre indirizzi. 17. Lavori sulle curve; studi nell'indirizzo americano. 18. L'indirizzo italiano. 19. La geometria affine e la geometria conforme.

§ 2. **Ricerche intorno alla forma delle curve, delle superficie e di altre figure geometriche. Analysis situs. Configurazioni.** — Pag. 371

20. Preliminari Curve piane. 21. Ricerche originate da una questione posta da Jordan. 22. Forme delle curve gobbe e delle superficie. 23. Analysis situs. 24. Continuazione. 25. Poliedri. 26. Configurazioni nel piano e nello spazio. 27. Continuazione.

§ 3. **Geometria della retta nello spazio.** — Pag. 382

28. Trattati. Le idee di E. Study. 29. Fondamenti della geometria della retta e rappresentazioni dello spazio rigato. 30. Ricerche su complessi algebrici. 31. Ricerche sulle congruenze algebriche. 32. Applicazioni di metodi vettoriali e dei concetti di Lie e Kummer. 33. Altre investigazioni nel campo differeziale. Geometria differenziale projettiva della retta.

§ 4. **Corrispondenze, rappresentazioni, trasformazioni.** — Pag. 390

34. Esordio. Collineazioni e correlazioni dotate di speciali proprietà. 35. Trasformazioni piane univoche generali. 36. Trasformazioni piane univoche speciali. 37. Altre trasformazioni piane non univoche. 38. Trasformazioni razionali dello spazio. 39. Trasformazioni non razionali dello spazio; connessi. 40. Sviluppi ed applicazioni delle teorie di S. Lie.

CAPITOLO XV.

§ 1. **Geometria numerativa.** — Pag. 400

1. Problemi speciali. Critiche ai metodi di Schubert. Lavori del Severi.

§ 2. **Geometria non-euclidea.** — Pag. 403

2. Scritti storici. 3. Trattati e lavori filosofici. 4. Svariate ricerche di geometria non-euclidea nell'indirizzo Bolyai-Lobatschewsky. 5. Il *Festschrift* di Hilbert e le sue derivazioni. 6. Ricerche sulle basi della geometria elementare e e della geometria projettiva. 7. Digressione sulla teoria dell'equivalenza. 8. Ricerche nell'indirizzo di Cayley-Klein e Clifford. 9. Geometria non euclidea differenziale delle curve e delle superficie.

§ 3. **Gometria degli spazi a quantesivogliano dimensioni.** — Pag. 417

10. La fase attuale dell'ipergeometria. Trattazioni metodiche di essa. 11. Estesione agli iperspazi di teoremi di geometria elementare e del metodo dei vettori 12. Analysis situs e geometria descrittiva. 13. Estensione di concetti e teoremi della geometria projettiva. 14. Proprietà projettive e metriche delle quà-

driche negli iperspazi. **15.** Geometria delle rette d'un iperspazio. **16.** Curve algebriche negli iperspazi. **17.** Varietà cubiche degli spazi a 4 o 5 dimensioni. **18.** Speciali varietà di ordine 4 o superiore. **19.** Continuazione. **20.** Varietà rappresentate da matrici. **21.** Figure costituite da infiniti spazi lineari. **Estensioni del teorema fondamentale di Nöther. 22.** Trasformazioni birazionali negli iperspazi. **23.** Sviluppi concernenti le idee del Reye. Configurazioni. Altre ricerche projettive. **Geometria differenziale.** Curve. **24.** Calcolo differenziale assoluto e geometria intrinseca. **25.** Le teorie di Lie negli iperspazi. **26.** Considerazioni cinematiche iperspaziali. **Sistemi n-pli ortogonali.** Teoremi sulla curvatura di ipersuperficie. **Altre ricerche di ipergeometria differenziale. 27.** Gli spazi a infinite dimensioni.

§ 4. **Altre ricerche. Conclusione.** — Pag. 441

28. Calcolo logico e geometria di posizione. Geometria cinematica. Rappresentazione delle forme binarie sulle coniche. **29.** Geometria elementare, trigonometria, geometria del triangolo e del tetraedro. **30.** Misura dell'esattezza di costruzioni geometriche. **31.** Metodi vettoriali. **32-36.** Epilogo.

Indice dei nomi citati — *Pag.* 463.

ELENCO DELLE ABBREVIAZIONI

adoperate per designare le Collezioni scientifiche più spesso citate

Acta = Acta mathematica. Journal rédigé par G. Mittag-Leffler.
Am. Journ. = American Journal of Mathematics pure and applied.
Amsterdam Versl. = Verslagen en Mededeelingen der K. Academie van Wetenschappen, Amsterdam.
Ann. de Math. = Annales des Mathématiques (Gergonne).
Ann. Ec. norm. = Annales scientifiques de l'École normale supérieure (Paris).
Ann. di Mat. = Annali di Matematica pura ed applicata.
Arch. der Math. = Archiv. der Mathematik und Physik, gegründet 1841 durch J. A. Grunert; fortgesetz durch R. Hoppe; gegenwärtig (sino al 1919) herausgegeben von E. Lampe, W. Franz Meyer, E. Jahnke.
Ass. fr. = Association Française pour l'Avancement des Sciences. Compte-rendus.
Atti Ist. Ven. = Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.
Belgique Bull. = Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.
Belgique Mém. = Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie ecc.
Berliner Abh. = Abhandlugen der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
Berliner Ber. = Monatsberichte o, *dal 1882*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
Bibl. math. = Biblioteca matematica. Zeitschrift für Gesch. der math. Wiss. herausgegeben von G. Eneström.
Bökl. Mitth. = Mathematisch - naturwissenschaftliche Mittheilungen herausgegeben von Dr. O. Böklen.
Boll. bibl. stor. = Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche.
Boll. Un. mat. It. = Bollettino della Unione matematica italiana.
Bologna Mem. = Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istit. di Bologna.
Bologna Rend. = Rendiconti delle sedute dell'Accademia ecc.
Bordeaux Mém. = Mémoires de la Société des sciences physique et naturelles de Bordeaux.
Brit. Ass. = Reports of the Meetings of the British Association for the Advancement of Science.
Bull. Bonc. = Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni.
Bull. Sc. Math. = Bulletin des Sciences mathématiques (*sino al 1884* et astronomiques).
Bull. S. M. F. = Bulletin de la Societé mathématique de France.
Bull. A. M. S. = Bulletin of the American mathematical Society.
Bull. Soc. phil. = Bulletin de la Société philomatique de Paris.
C. R. = Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris).
Cambridge Journ. = Cambridge and Dublin mathematical Journal.
Cambridge Proc. = Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.
Cambridge Trans. = Transactions id.

Coll. math. = In memoriam Dominici Chelini Collectanea mathematica. Mediolani, 1881.
Corr. Ec. pol. = Correspondance sur l'école polytechnique.
Corr. mat. = Correspondance mathématique et physique dirigée par Garnier et Quetelet.
D'Ovidio Scritti = Scritti matematici offerti a Enrico d'Ovidio (Torino, 1918).
Encikl. math. = Enciklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einsch'uss ihrer Annwendungen.
Deutsch. Math.- Ver. = Jahresbericht der Deutschen Mathematiker- Vereinigung.
Edinburg Trans. = Transactions of the R. Society of Edinburgh.
Ens. = L'enseignement mathématique.
Erlägener Ber. = Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Socität zu Erlangen.
Giorn. di Mat. = Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane.
Götting. Abn. = Abhandlungen der Gesellschaft der Wissensch. zu Götingen.
Götting. Nachr. = Nachrichten id.
Hamburger Mitth. = Mittheilungen der Hamburger math. Gesellschaft.
Hopkins Circ. = John Hopkins University Circulars.
Journ. de Math. = Journal de Mathématiques pures et appliquées.
Journ. Ec. pol. = Journal de l'Ecole polytechnique (Paris).
Journ. für Math. = Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Huygens = Christiaan Huygens. Internationaal mathematisch tijdschrift.
Irish Proc. = Proceedings of the Royal Irish Academy (Dublin).
Kjob. Overs = Oversigt over det k. Danske Vid. Sels. Forh. Kjöbenhavn.
Irish Trans. o *Dublin Trans.* = Transaction id.
Leipziger Abh. = Abhandlungen der Sächsichen Gesellschaft der Wissensch. zu Leipzig.
Leipziger Ber. = Berichte über die Verhandlungen id.
Lie Arch. = Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.
Liège Mém. = Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège.
Lincei Atti = Atti della R. Accademia dei Lincei (Roma).
Lincei Mem. = Memorie, id.
Lincei Rend. = Rendiconti delle sedute, Id. (Ogni annata è divisa in due semestri, che distingueremo con gli indici I e II posti al piede del numero che designa l'anno di pubblicazione.
Lincei Trans. = Transunti, id.
Lund Akad. = Lund Akademiens Afhandlinger.
Math. Zeit. Mathematische Zeitschrift.
Mathésis. = Receuil publié par P. Mansion et J. Neuberg (ora da A. Mineur).
Math. Ann. = Mathematische Annalen.
Mém. pres. = Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre.
Mem. Ist. Lomb. = Memorie del R. Istit. Lomb. di Scienze, Lettere ed Arti.
Mem. Ist. Ven. = Memorie del R. Istit. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.
Mem. Soc. XL = Memorie della Società italiana (detta dei XL).
Mess = The Messenger of Mathematics.
Monatshefte = Monatshefte für Mathematik und Physik.
Münchener Abh. = Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissensch. zu München.
Münchener Ber. = Sitzungsberichte, id.
Napoli Atti = Atti dell'Accad. delle Sc. fisiche e matem. di Napoli.
Napoli Rend. = Rendiconti, id.
Napoli Mem. = Memorie, id.
Note e Mem. = Note e memorie matematiche, Catania.
Nouv. Ann. = Nouvelles Annales de Mathématiques.
Nova Acta = Nova Acta Acad. Caes. Leop. Carol. Germ. Nat. Curiosorum.
Palermo Rend. = Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.
Pavia Riv. = Rivista di fisica, matematica e scienze naturali.
Petersbourg Bull. = Bulletin de l'Académie impiriale de St. Petersbourg.
Petersbourg Mém. = Mémoires, id.
Phil. Mag. = London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine.
Phil. Trans. = Transactions of the Royal Society of London.
Pisa Ann. = Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa.

Proc. R. S. = Proceedings of the Royal Society of London.
Prager Abh. = Abhandlungen der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften (Prag).
Prager Ber. = Sitzungsberichte, id.
Proc. L. M. S. = Proceedings the London Mathematical Society.
Progreso = El Progreso mathématico.
Quart. Journ. = Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.
Rend. Ist. Lomb. = Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.
Riv. di Mat. = Rivista di Matematica diretta da G. Peano.
Stockholm Oefv = Oefversigt af K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandliganr. Stockholm.
Tidsskr. = Tidsskrift for Mathematik.
Tohoku = The Science Reports of the Tohku Imperial University.
Torino Atti = Atti dell'Accademia reale delle Scienze di Torino.
Torino Mem. = Memorie, id.
Tortolini Ann. = Annali delle Scienze matematiche e fisiche.
Toulouse Ann. = Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathlmatiques et les sciences physiques.
Trans. A. M. S. = Transactions of the American mathematical Society.
Ungarn Ber. = Mathematische und naturwissenschaftlichen Berichte aus Ungarn.
Wiener Ber. = Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Akademie der Wissenchaften zu Wien.
Wiener Denk = Denkschriften, id.
Wolf Zeitschr. = Vierteljahrsschrft der naturforschenden Gesellschaft in Zürich.
Zeitschr. f. Math. = Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Avvertenza. Nelle citazioni il numero romano indica la *Serie* il successivo numero arabico il *Volume*, a cui segue l'*anno di pubblicazione*. L'abbreviazione *Diss.* serve a **indicare una Dissertazione** di laurea.

Correzione ed aggiunte

p. 287, linea 5, dopo Brocard si legga (1845-1922).

p. 28, nota (3). Aggiunte all'articolo di R. Sturm leggonsi nella nota di S. Rindi, *Alcune questioni elementari dello Steiner* (Atti della R. Acc. Lucchese, Nuova Serie, T. I., 1927).

p. 247. Fra i manoscritti di Lagrange esistenti nella Biblioteca dell'Istituto di Francia, si trova l'originale, tuttora inedito, di una sua memoria sulle parallele, letta il 3 Febbraio 1806.

LIBRO I.

Dall'alba della ricerca geometrica al tramonto del secolo XIX

CAPITOLO I.

Sguardo alle origini e allo sviluppo della geometria sin verso il 1850.

« Tutte le fasi della coltura sono siffattamente collegate fra loro, che si tenterebbe invano di studiare un ramo qualunque di storia, a partire da un'epoca determinata, senza gettare uno sguardo su i tempi e gli avvenimenti anteriori » (1) Se questo aforisma storico è difficilmente confutabile riguardo ad una qualunque delle scienze a noi note, sembra dotato di irrefragabile verità quando venga applicato ad una disciplina così conservatrice com'è la matematica, la quale non distrugge i lavori dei periodi precedenti per costruire in luogo di essi dei nuovi edifici (2). Ragion vuole pertanto che noi, prima di addentrarci nel tema proprio di questa storia, prima cioè di discorrere della geometria moderna, esaminiamo brevemente quali furono le origini e quali i gradi di sviluppo che attraversò la nostra scienza prima di raggiungere lo stato a partire dal quale ci proponiamo di studiarne accuratamente lo svolgimento.

(1) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, I (Paris, 1838), p. 3.

(2) Hankel, *Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten* (II Aufl., Tübingen, 1885), p. 7.

1. Determinare e storicamente dimostrare l'origine prima delle ricerche geometriche è questione che invano tenterebbesi di risolvere (1), perchè nessun documento scritto ci fa assistere al risveglio e al primo balbettio dello spirito umano. Le esperienze quotidiane di qualsia persona intelligente guidano in modo tanto naturale alla concezione delle forme geometriche più semplici ed alla contemplazione delle loro scambievoli relazioni, che invano si tenterebbe di assegnare l'epoca in cui nacque la geometria e tanto meno di citare colui al quale spetta il vanto di avere per primo coltivata tale nobilissima disciplina. Le informazioni che a tal proposito ci tramandarono gli antichi sono tanto incerte, vaghe e poco degne di fede, che, se non tenebre complete, certamente soltanto qualche po' di luce crepuscolare sta innanzi a chi si propone di rendersi ragione del come e del perchè la geometria entrò a far parte del campo d'indagine dei pensatori; anzi tale luce è così scarsa che soltanto permette di percepire i contorni di alcuni frammenti di maggior mole che si sottrassero all'ingiuria del tempo. Quali siano e qual valore possiedano diremo ora brevemente, occupandoci successivamente dei vari popoli che nell'antichità più remota raggiunsero un grado di civiltà sufficiente da permettere lo studio della scienza pura.

Non parleremo però degli Etruschi, in primo luogo perchè le notizie intorno al sapere geometrico d'un popolo il cui linguaggio è tuttora un enigma pei filologi sono, se non nulle, certamente infinitesime, e in secondo luogo perchè sembra accertato che essi esercitarono qualche influenza soltanto sui Romani, i quali da essi vennero avviati e diretti nelle ricerche geodetiche (cfr. più innanzi, al n. 6). Se altrettanto facciamo per gl' Indiani è che, non potendosi con sicurezza determinare di dove scaturiscano le relative notizie che oggi abbiamo a nostra disposizione, non si è in diritto di parlare di una geometria indiana più antica epperò indipendente dalla geometria greca di cui fra poco ci occuperemo (v. nn. segg.). In modo non dissimile ci comporteremo rispetto ai Cinesi, perchè chi mai può farsi garante che le cognizioni geometriche (d'altronde assai esigue) da essi possedute non siano state importate dal di fuori e poi dichiarate come proprietà nazionale da un popolo la cui boria è tale che ancor oggi si vanta di essere pervenuto nell'antichità più remota a ritrovati a cui le altre nazioni arrivarono a mala pena in tempi a noi vicini?

Il popolo che ebbe per propria sede le rive del Tigri e dell'Eufrate viene considerato come quello che prima d'ogni altro si dedicò all'aritmetica e all'astronomia; tuttavia anche fra gli Assiri e i Babilonesi si possono rintrac

---

(1) Essa è trattata dal punto di vista psicologico nel I Libro dell' *Histoire des mathématiques* dell' Hoefer (2e éd., Paris, 1879), che noi citiamo a titolo di curiosità, non già per fare adesione alle idee ivi sostenute.

ciare delle cognizioni di geometria, scienza verso cui essi si sentivano spinti dalla speranza di poterla applicare a trarre i presagi dell'avvenire; ed è forse dal loro affaticarsi intorno alla *geomanzia* che essi furono guidati a considerare, come fecero, parallele, triangoli e quadrangoli, a cercare metodi per costruire in pratica gli angoli retti, a dividere la periferia d'un cerchio in 6 e in 360 parti eguali e a determinare un valore approssimato del rapporto della circonferenza al diametro.

2. Importanza di gran lunga maggiore del popolo testè considerato ha per noi quello che ebbe stanza sulle rive del Nilo, giacchè i Greci, che sono senza dubbio da considerarsi per i nostri progenitori scientifici, si dichiaravano, ed erano infatti, ad esso debitori della piattaforma sulla quale eressero il loro edificio geometrico.

Erodoto, che viaggiò in Egitto verso il 460 a. C., assevera che la geometria ebbe origine in quel paese allorquando il re Sesostri divise in parti eguali fra i suoi sudditi tutto il terreno coltivabile che si trovava nel suo regno; aggiunge che una spinta potentissima ad occuparsi di geometria proveniva agli Egiziani dalla necessità di ripristinare ogni anno le linee di confine fra le varie proprietà che il Nilo cancellava durante le periodiche sue inondazioni. Niuna meraviglia adunque deve recare se, d'altra parte, Isocrate, verso il 593 a. C., accertava che lo studio della geometria veniva raccomandato ai giovani Egiziani. In senso non dissimile si esprimono Platone ed Aristotele, Diodoro Siculo ed Erone Alessandrino, Strabone e Democrito; anzi quest'ultimo per dimostrare la propria abilità geometrica non trova di meglio che asserire: « nel costruire le linee mediante conseguenze tratte dalle ipotesi, nessuno mi ha sorpassato, nemmeno i cosidetti ἁρπεδονάπται degli Egiziani »; chi fossero questi « arpedonatti » non si sa con assoluta certezza, ma però è dotata di molta verosimiglianza l'ipotesi di M. Cantor (1), secondo cui il loro nome (tenditori di corde) deriverebbe dall'essere stato loro principale ufficio quello di costruire in pratica degli angoli retti foggiando a triangolo rettangolo una corda divisa in tre parti lunghe risp. 3, 4 e 5 unità lineari.

L'origine pratica assegnata alla geometria da Erodoto, la speciale operazione affidata agli « arpedonatti » e l'esistenza in Egitto di opere architettoniche ed idrauliche colossali ed ammirande, fanno pensare che la geometria degli Egiziani avesse una spiccata tendenza verso le applicazioni, e questo sospetto si rafforza esaminando un importantissimo documento scritto, che noi possediamo intorno alla matematica di quel popolo. Alludiamo al *Manuale del Calcolatore* conservatoci nell'omai celebre Papiro Rhind, scritto da un tal Ahmes

(1) *Vorlesungen über Geschichte der Math.*, I (Leipzig, 1ª ed. 1880, p. 55; 2ª, 1894, p. 64; 3ª, 1907 p. 104).

diciassette o venti secoli a. C. (1). Sventuratamente questo scritto, mentre offre una larga messe di notizie intorno agli antichi procedimenti di calcolo, dà scarse informazioni sulle cognizioni geometriche che avevano gli abitanti della terra dei Faraoni, giacchè ivi la geometria non è trattata *ex-professo*, ma al contrario certe regole che essa insegna per valutare superficie e volumi vengono semplicemente applicate nell' intento di illustrare i procedimenti aritmetici. Nel *Manuale* citato si trovano quindi soltanto alcune tracce di geometria di misura, sul valore delle quali non v' è accordo perfetto fra i vari storici (2); così è ben vero che sembra indiscutibile gli Egiziani sapessero calcolare l'area d' un quadrato, ma non è sicuro sapessero fare altrettanto per un rettangolo, ed è ancora più dubbio se essi fossero in grado di misurare con esattezza l' area d' un triangolo o d' un trapezio; inoltre essi eguagliavano un cerchio ad un quadrato avente per lato $^8/_9$ del diametro, il che val quanto assumere $\pi = (^{16}/_9)^2 = 3,1604$, valore abbastanza approssimato. Quanto alle regole con cui essi misuravano la capacità di certi granai, è impossibile giudicarle, non essendo dichiarata la forma di questi; giova però espressamente rilevare come certi problemi concernenti le piramidi fossero da essi sciolti con un calcolo speciale presumibilmente analogo a quello che oggi noi eseguiremmo valendoci delle nozioni di *seno* e di *tangente* d'un angolo (3). Si vede dunque che la geometria degli antichi Egiziani offre parecchi punti oscuri, a chiarire i quali bisognerebbe ricorrere ad altri documenti, ma questi o sono tuttora sconosciuti o non vennero ancora decifrati (4): intanto, cioè sino a che non siasi dimostrato che gli Egiziani sapessero dar ragione delle regole geometriche applicate da Ahmes, ci crediamo autorizzati a negare alla collezione di cognizioni geometriche che essi possedevano il carattere di vera scienza.

3. Tale conclusione ha importanza specialmente perchè (tenendo conto anche di quanto dicemmo nel n. 1) ci esonera dal trattare la questione che consiste nel determinare quali e quanti elementi esotici si trovino nella geometria greca (5); infatti, ammesso pure che i Babilonesi e gli Egiziani abbiano comunicato ai Greci tutto il loro sapere geometrico, questi non ne avrebbero in

(1) A. Eisenlohr, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (Leipzig, 1e Aufl., 1877, 2e Aufl., 1891); T. E. Peet, *The Rhind mathematical Papyrus Introduction, transcription, traslation and commentary* (London, 1923).

(2) Cfr. oltre alle opere già citate: E. e V. Revillout in *Revue Egyptologique*, 2, 1881, pp. 304-314 e Em. Weyr, *Ueber die Geometrie der alten Aegypter* (Wien, 1884).

(3) M. Cantor, *Ueber den sogenannten Seqt der alten Aegypter* (Wiener Ber., 90, 1884).

(4) Cantor, *Vorlesungen*, I (3a ed.), p. 99.

(5) Come è noto, la questione analoga per le altre discipline, e specialmente per le filosofiche è estremamente controversa: cfr. Zeller, *Die Philosophie der Griechen* (Leipzig).

conseguenza ritratto che una somma di cognizioni assai esigua e certamente non lo stimolo alla ricerca matematica; d'altronde ciò è confermato dall'unità di direzione nell'evoluzione di tutta la geometria greca, unità che sarebbe difficilmente spiegabile da chi la considerasse come un albero trapiantato da paesi stranieri.

La persona per merito della quale in Grecia la lampada della scienza si accende e agitata vampeggia è Talete Milesio (1); a lui siamo debitori del trasporto in Europa dei germi delle scienze esatte e dei primi tentativi di coltivarle; se a lui ed ai suoi seguaci (i componenti della « Scuola jonica ») non si può far risalire alcuna capitale scoperta matematica, gli è che l'indiscutibile tendenza verso le ricerche fisiche che aveva Talete si accentua siffattamente ne' suoi discepoli e continuatori (Anassimandro e Anassimene) che questi finiscono col porre in non cale le investigazioni di matematica pura: Talete e la scuola ionica rappresentano dunque, a parer nostro, il bagliore antelucano precursore dell'alba della matematica greca.

Ma, scomparsa la setta dei fisici Joni, appare un altro uomo e vengono gettate le basi d'un'altra scuola — Pitagora e la Scuola italica — nella quale sembra ragionevole collocare le scaturigini del maestoso fiume delle investigazioni geometriche; infatti in essa, con l'assetto stabile raggiunto dalla teoria dei rapporti e delle proporzioni, lo studio dei problemi di « applicazioni di aree », la scoperta dei poliedri regolari e l'introduzione delle quantità irrazionali vengono approntati gli strumenti che vennero dipoi continuamente adoperati dai più eminenti fra i geometri antichi, ed ai quali deve sempre ricorrere chiunque intenda seguirne le tracce luminose.

Lo sfacelo della comunità pitagorica non spegne l'entusiasmo per la matematica negli ammiratori e seguaci del filosofo di Samo, tanto vero che noi troviamo in Ippocrate da Chio e Archita da Taranto, tardi discepoli di Pitagora, due strenui combattenti per la ricerca del vero geometrico. Nè le altre sètte filosofiche che dapoi pullularono in Grecia rimasero indifferenti al progresso delle scienze esatte: lo dimostra quanto sappiamo intorno a Zenone e Democrito, ad Anassagora e Ippia, a Platone e Aristotele alla falange di pensatori che da questi vennero istruiti o diretti.

Grazie al concorso di tanti elevati ingegni vengono gettate così solide basi dell'edificio geometrico che più d'uno giudica arrivato l'istante di organizzare in un corpo di dottrina i risultati delle investigazioni compiute; vengono inoltre studiati a fondo i tre famosi problemi della quadratura del circolo, della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, il che offre il destro (ad

(1) Maggiori particolari sui geometri dell'Ellàde antica (in ispecie le relative determinazioni cronologiche) si troveranno nell'opera dell'autore: *Le scienze esatte dell'antica Grecia* (II ed., Milano 1914).

Archita, Eudosso da Cnido e Dinostrato) di scoprire alcune nuove importanti linee piane e a doppia curvatura; sono di più scoperte, e da Aristeo il Vecchio coordinate, le proprietà e fatte svariate applicazioni di quelle curve — le sezioni coniche — che Menecmo scoperse e Keplero doveva più tardi ravvisare per le traiettorie degli astri; finalmente il concetto di *infinito* fa timidamente il suo ingresso nella matematica, ove era destinato a occupare più tardi una posizione di eccezionale importanza. Nello stesso tempo anche i metodi di ricerca e di esposizione delle verità geometriche vengono fatti oggetto di accurato studio: si arriva così al *metodo di riduzione* dovuto ad Ippocrate, al *metodo analitico* formulato da Platone, al *metodo di esaustione* così brillantemente applicato da Eudosso. D'altra parte coll'introdurre il diorismo Leone segnala un importante complemento che esige la soluzione di qualsia problema, mentre col determinare le condizioni d'invertibilità d'un teorema, Menecmo insegna un metodo fecondo per dedurre da una altre proposizioni. Di più la logica, che per tanti intimi legami è congiunta alla matematica, subisce potenti impulsi dalla dialettica, dalla sofistica e dall'insegnamento di Socrate; gioisce in conseguenza di così cospicui perfezionamenti che Aristotele crede giunto il momento di esporne i canoni fondamentali in un'opera che rimase poi classica per lungo volgere di secoli.

4. Da ciò emerge come tutto sembrava cospirare a che sorgesse un periodo di singolare floridezza per la geometria; esso infatti non si fece attendere; esso cade nell'epoca greco-alessandrina e, se viene paragonato ai periodi che lo precedettero e lo seguirono, merita il nome di *periodo aureo della geometria greca*, con cui a noi piace di designarlo. Farne un quadro completamente fedele è impresa oggi ineseguibile, giacchè soltanto alcuni pochi personaggi di quell'epoca possono venire ritratti con esattezza, di altri si percepisce soltanto qualche lineamento, di altri ancora conosciamo l'esistenza ma non giungiamo a discernere le fattezze e il contegno. Tuttavia quanto ne sappiamo ci abilita ad asserire, che al modo istesso che la filosofia greca nel periodo del suo più abbagliante splendore trovò in Socrate, Platone e Aristotele i suoi più cospicui rappresentanti, così nel periodo aureo della geometria greca spiccano, giganteggiando, Euclide, Archimede ed Apollonio. Per merito del primo di questi geometri il mondo civile arriva in possesso d'una raccolta sapientemente ordinata delle proprietà più essenziali dell'estensione figurata, raccolta che per secoli e secoli fu giudicata come un codice d'insuperabile valore e che tuttora impone ammirazione e rispetto anche in coloro che non ne accettano ciecamente le disposizioni ed i precetti. Il secondo — capostipite dei geometri italiani, organizzatore della geometria metrica superiore, precursore di Leibniz e Newton — ci si palesa di così meravigliosa fecondità nell'immaginare ingegno di espedienti per risolvere, evitando con minuziosa cura l'intervento del concetto d'infinito, una pleiade di questioni che oggi si riguardano come di stretta pertinenza del calcolo infinitesimale, che lo studio di essi riempie oggi ancora di stupore e induce melanconicamente a domandarci se l'invenzione di metodi generali, che tanto affaticò gli scienziati moderni, non abbia per avventura inaridita la fonte dei geniali artifici. Meno viva e spontanea sorge l'ammirazione in chi medita le opere di Apollonio, perchè noi siamo così immedesimati negli odierni procedimenti d'indagine, solleciti e generali, che ci riesce malagevole il renderci conto di quale ingente somma di lavoro esigesse il giungere al vero senza invocarne l'aiuto; sicchè a stento arriviamo a schermirci da un senso di sorpresa che indugia l'entusiasmo; ma, ove ci si pervenga, si arriva a giustificare coloro che giudicano Apollonio per la più grande mente geometrica che il mondo abbia veduto prima di Steiner.

Gli sforzi concordi di questi tre sommi matematici, dei loro contemporanei o immediati successori (fra cui ricorderemo Ipsicle d'Alessandria, Diocle, Nicomede, Perseo e Zenodoro) assicurarono fondamenti inattaccabili a tutto l'edificio geometrico, prepararono il terreno al calcolo infinitesimale e accrebbero a dismisura la sfera d'influenza della geometria col ricondurre entro i suoi confini nuove ed interessantissime forme geometriche; essi guidarono a molteplici soluzioni pei problemi (già famosi nel periodo pre-euclideo) della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, e insegnarono a contemplare quello della quadratura del circolo dall'unico punto di vista che—date le cognizioni algebriche dell'epoca — ne permettesse allora una soluzione; finalmente essi gettarono i fondamenti dello studio geometrico dei massimi e minimi, e in particolare della dottrina degli isoperimetri. Da ultimo col somministrare gli elementi più importanti della celebre raccolta didattica che va sotto il nome di *Luogo analitico*, essi s'industriarono di lastricare la via agl'investigatori dell'avvenire, epperò si sforzarono a che lo spirito d'indagine geometrica non si spegnesse con essi.

5. L'elenco dei grandi nomi che vanta la matematica greca presenterebbe una imperdonabile lacuna, ove non facesse menzione di Erone d'Alessandria e Claudio Tolomeo. L'opera scientifica del primo fu specialmente geodetica e quella del secondo astronomica; quella fa apparire Erone come il più antico scrittore greco di geodesia, ne stabilisce il legame intimo con Ahmes (v. n. 1), ma può valutarsi con non completa esattezza e con grande difficoltà per lo stato attuale dei manoscritti, i quali sono deturpati da omissioni e inquinati da aggiunte fatte da anonimi chiosatori di valore assai discutibile (1); per converso l'azione

(1) Questo giudizio è però grandemente agevolato dell'ottima edizione critica di Erone che entrò di recente a far parte della *Bibliotheca Teubneriana*.

di Tolomeo si può misurare perchè il suo lavoro più cospicuo — la *Composizione matematica* o *Almagesto* — è giunto a noi completo; fra altro esso contiene un trattato di trigonometria sferica, accompagnato da capitoli importanti di trigonometria piana e fondato in parte sulla teoria delle trasversali per triangoli piani e sferici, della quale il geometra Menelao d'Alessandria aveva dianzi gettati i fondamenti.

Spenti i grandi pensatori rammemorati in questo n. e nel precedente, per molte ragioni intrinseche ed estrinseche che non è qui il momento di descrivere, sembra fra i Greci siasi raffreddato l'amore per le ricerche geometriche o almeno scompaia la forza per compierle; comincia allora l'epoca dei commentatori, che a noi piace designare col nome di *periodo argenteo della geometria greca*. Appartengono ad esso Eutocio e Proclo, che vanno ricordati con riconoscenza per le numerose e importanti notizie che ci serbarono su l'antica geometria e gli antichi geometri, ma che non fecero compiere alcun passo in avanti alla scienza nostra; si potrebbe anzi dire che Proclo tentò di farla retrocedere, quando, nel commentare Euclide, mescolò matematica e filosofia, quasi volesse rimettere in onore un sistema che appunto Euclide, forse per primo, aveva con piena ragione vigorosamente combattuto coll'esempio. Nè stima molto maggiore merita Sereno di Antissa o di Antinoupoli (1) il quale dimostrò essere ellittica qualunque sezione piana di un cono a base circolare e. Teone d'Alessandria, editore d'Euclide e illustratore di Tolomeo. Inchiniamoci invece riverenti innanzi a Pappo Alessandrino il quale arrecò notevoli contributi alle opere che commentò nella celebre sua *Collezione matematica;* ivi sono fatti dei notevoli complementi alla geometria elementare, sono assegnate alcune nuove proprietà della spirale d'Archimede, dimostrate della quadratrice di Dinostrato due nuove costruzioni estremamente notevoli per essere fondate sopra considerazioni stereometriche, ed è definita e studiata la curva sferica analoga alla spirale d'Archimede, il che porge a Pappo l'occasione di trovare l'area di una certa porzione di sfera (prima complanazione conosciuta d'un'area non piana); sorvoliamo sulle aggiunte fatte alla teoria degli isoperimetri per ricordare il teorema, ingiustamente attribuito a Guldino (1577-1643), stabilente un legame stretto fra la posizione del baricentro d'una figura piana ed il volume che questa genera rotando attorno ad un asse; inoltre i cenni intorno alla «geometria con una sola apertura di compasso» e le numerose relazioni segmentarie che oggi si considerano come ingredienti indispensabili della teoria del rapporto anarmonico e dell'involuzione. Non basta ciò forse a dimostrare che il genio matematico greco, come la lampada che sta per ispegnersi, gitta, mentre agonizza, un raggio di splendidissima luce?

(1) Cfr. Heiberg, *Ueber den Geburtsort des Serenos* (Bibl. math., 1894).

6. Sulla scena matematica, come primo attore, al popolo greco segue il popolo romano, ma la comparsa di questo segna un indiscutibile regresso (1). Giacchè i Romani, conquistatori e legislatori del mondo intero, sembra fossero privi di qualunque tendenza alle ricerche di scienza pura (2): la loro matematica, anche nell'istante in cui maggiormente rifulse, fu essenzialmente pratica, anzi, si potrebbe dire, fu soltanto religiosa e legale (3). Se la geometria non cadde durante l'epoca romana in completo oblìo, ne va fatto merito agli agrimensori, i quali tuttavia altro intento non si proposero che di raggiungere nelle loro operazioni un'esattezza sufficiente ai quotidiani bisogni della vita civile e in particolare ad eseguire l'ordine di Augusto, il quale volle fosse attuato l'antico progetto di Giulio Cesare di misurare la superficie dell'impero (4).

L'età di mezzo non può dar materia a più lungo discorso. Le fittissime tenebre che avvolgono in quest'epoca tutta l'umanità non sono attraversate da alcuno sprazzo di luce derivante da qualche scienziato degno di tal nome; a provare quanto basso fosse allora il livello del sapere matematico è sufficiente osservare che fra tutti gli studiosi di quell'epoca appare gigante Gerberto (m. 1003) — più tardi papa Silvestro II — del quale tuttavia indarno si tenta di citare qua che scoperta nel campo delle scienze esatte. Si può però notare che i molteplici monumenti sacri eretti durante il Medio Evo — i quali, secondo la geniale congettura di un grande poeta, sono così numerosi ed arditi perchè rappresentano l'unico modo d'estrinsecazione allora concessa all'umana intel-

---

(1) A conferma di quest'asserzione ricordiamo le seguenti eloquenti parole del celebre storico delle matematiche italiane: « ....mais bientôt le Romain arrive, il saisit la science personnifiée dans Archimède, et l'étouffe. Partout où il domine, la science disparait: l'Étrurie, l'Espagne, Carthage en font foi. Si plus tard Rome n'ayant plus d'ennemi à combattre, se laisse envahir par les sciences de la Grèce, ce sont des livres seulement qu'elle recevra: elle les lira et les traduira sans y ajouter une seule découverte. Guerriers, poëtes, historiens, elle les a eus, oui; mais quelle observation astronomique, quel téhorème de géométrie, devons-nous aux Romains? ». Libri, Op. cit., I, p. 186.

(2) Lo riconobbe Cicerone medesimo scrivendo: « In summo onore apud Graecos geometria fuit; itaque nihil mathematicis illustrius: at nos ratiocinandi metiendique utilitate huius artis terminavimus modum ». *Tusc.*, l. I, c. II, 5.

(3) A mostrare come i nostri proavi comprendessero il carattere proprio delle matematiche, basti dire che essi le confondevano con l'astrologia e le arti sorelle; niuna meraviglia adunque se nel Codice di Giustiniano si trovino delle disposizioni raccolte sotto il titolo: *De maleficis et mathematicis et ceteris similibus* e fra esse la seguente: « ars autem mathematica damnabilis interdicta est omnino ». Cfr.: M. Cantor, *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle, 1863), p. 397; Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* (Leipzig, 1874 p. 301). È bene osservare anche che se, durante il periodo imperiale, si incontra qualche investigazione matematica, ne è autore un greco.

(4) E appunto alla parte pratica della geometria alludeva il legislatore romano, quando nel Codice precitato scriveva: « Artem geometriae discere atque exercere publice interest ». Cfr. Hankel, l. c.

ligenza (1) — fanno fede che quella parte di scienza teorica di cui deve disporre ogni architetto era anche in quei tempi generalmente conosciuta. Però una parola di lode riconoscente dev'essere spesa a favore del popolo Arabo, il quale fece la parte modesta, ma utile epperò non ignobile, di veicolo pel trasporto in Europa della scienza ellèna, nè mancò di arrecare alle nostre cognizioni matematiche aggiunte e modificazioni degne di venire onorevolmente ricordate nei fasti della nostra scienza (2).

7. Questo periodo, così triste per le discipline matematiche, si può dire abbia termine verso il 1200 coll'apparizione di Leonardo Fibonacci da Pisa (1180-1250 circa), abile calcolatore, fine geometra e geniale algebrista; giacchè soltanto allorquando l'algebra, trasportata in Europa da questo eminente scienziato, e i di lui eccellenti lavori esercitarono la loro influenza—e per iscorgerla in modo palese fa mestieri arrivare all'apparizione (1494) della *Summa* di frate Luca Pacioli (circa 1445-1514) — cominciò un tempo di straordinaria operosità, che noi Italiani dobbiamo ricordare con legittimo orgoglio, perchè allora la patria nostra tenne degnamente lo scettro delle matematiche. Si osservi però che questo periodo, se ha grande importanza per le ricerche analitiche, non assistette ad alcun sensibile progresso del nostro sapere geometrico; e di vero Tartaglia (1500-1557) e Cardano (1501-1576), Scipione Ferro (?-1526) e Lodovico Ferrari (1522-1565), nonchè gli altri geometri minori di questo tempo hanno la gloria d'aver efficacemente contribuito alla fondazione e allo sviluppo della teoria delle equazioni, non isdegnando di proporre ed accettare delle pubbliche disfide, caratteristica notevole di quest'epoca; ma, per converso, hanno tramandato ai posteri la geometria pressochè nelle condizioni in cui l'avevano ricevuta dai Greci pel tramite degli Arabi. Soltanto si può osservare che, fra le questioni trattate in quest'epoca fra gli scienziati italiani, alcune si riferiscono a costruzioni geometriche da eseguirsi con una sola apertura di compasso; è un concetto che si trova in embrione già in Pappo (v. n. 4), che G B. Benedetti (morto nel 1590) ha svolto nell'opera *De resolutione omnium Euclidis problematum aliorumque una tantummodo circuli data apertura* (Venezia 1553) e che diede poi origine a *La geometria del compasso* (Pavia 1797) di Lorenzo Mascheroni (1750-1800) — nella quale è dimostrata la possibilità di sciogliere senza riga tutti i problemi della geometria elementare — e, dopo essere stato modificato,

(1) Si vegga l'ammirabile capitolo intitolato « Ceci tuera cela » di *Notre Dame de Paris* ove Victor Hugo scriveva fra l'altro: « Il existe à cette époque, pour la pensée écrite en pierre, un privilège tout à fait comparable à notre liberté actuelle de la presse C'est la liberté de l'architecture ».

(2) Cfr. H. Suter (1848-1522), *Die Araber als Vermittler der Wissenschaften in deren Uebergang vom Orient in den Occident* (XXV Jahresheft des Vereins schweiz. Gymnasiallehrer, 1895).

a *Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises* (Berlin 1883) di Jacob Steiner (1796-1863) (1) — operetta (2) in cui è indiscutibilmente dimostrato un fatto (quello indicato dal titolo) che, come riconosce ed avverte questo grande geometra, era già stato segnalato dianzi (3).

Giova qui rilevare che i problemi considerati dal sommo matematico svizzero sono di 1° e 2° grado; che cosa si può dire, dal punto di vista costruttivo, riguardo a quelli di 3° e 4°? È questo il problema proposto per il premio Steiner dall'Accademia di Berlino per l'anno 1863. Ad esse servono di soddisfacente risposta le due seguenti memorie, entrambe coronate: H. J. S. Smith, (1826-1883) (4) *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques* (Ann. di mat., II, 3, 1869-70); H. Kortum (5) (1836-1904), *Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades* (Bonn, 1869).

8. Spenti i valorosi scienziati alle cui opere si deve la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado, il primato delle matematiche vien raggiunto dalla Francia specialmente per merito di Viète (1540-1603), le cui benemerenze per l'algebra non fa mestieri di qui ricordare, il cui interesse per la geometria è dimostrato dalla costruzione ch'egli immaginò pel cerchio tangente a tre altri, da lui esposto in forma di divinazione nell'opera intitolata *Apollonius Gallus seu exsuscitata Apollonii Pergaei* περὶ ἐπαφῶν *geometria* (Parigi, 1600). Non molto appresso Mydorge (1585-1647), Pascal (1623-1662) (6) e Desargues (1596-1662) raffermano l'egemonia della Francia coll'accrescere il patrimonio della geometria di vedute originali, di metodi nuovi e nuove proposizioni; infatti in *Claudii Mydorgi Conicorum operis etc.* (Parigi 1631-1639) s'incontra, a tacer d'altro, per la prima volta la trasformazione per omotetia di una conica in un'altra; dal *Traité général de la Roulette* di Pascal si apprende una folla di ammirabili proprietà della cicloide, mentre l'applicabilità del metodo di prospettiva allo studio delle sezioni coniche e il celebre teorema che reca il nome di Pascal (l'autore ebbe a designarlo con quello di «esagrammo mistico») si legga nel celebre *Essai pour les coniques*; finalmente nelle *Oeuvres de Desargues* (ed. Poudra, Paris 1864) si trovano per la prima volta trattate ad un tempo le tre sezioni coniche, introdotto il concetto d'involuzione di punti

---

(1) F. Geiser, *Commemorazione di J. Steiner*, trad. Casorati (Ann. di Mat. II, 7, 1875).

(2) Ristampata in *J. Steiner Gesammelte Werke* (Berlin, 1881-1882).

(3) Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris, 1822), nn. 351-357.

(4) Cfr. i preliminari della pubblicazione *The collected mathematical Papers of Henry John Stephen Smith edited by J. W. L. Glaisher* (Oxford, 1894).

(5) Anschütz e Study, *Hermann Kortum* (Deutsch. Math. Ver., 15, 1906).

(6) Cfr. J. Bertrand, *Blaise Pascal* (Paris, 1891).

e dimostratone l'intervento nella sezione d'un quadrilatero piano con una retta, è applicata non solo la prospettiva, ma con grande larghezza e abilità l'idea d'infinito (1) come ausiliare potente per la ricerca delle proprietà plastiche dello spazio (2).

Che anche in Inghilterra e Germania la geometria non fosse caduta in quest'epoca in un completo oblio è dimostrato dalle lezioni tenute ad Oxford da Enrico Savile (1549-1622), il quale fondò ivi due cattedre di matematica tuttora esistenti, e dalle ricerche geometriche di Giovanni Keplero (1571-1630), al quale si può (3) far risalire il concetto di punto all'infinito della retta.

9. La maggior parte delle idee geometriche esposte e applicate dai geometri testè citati rimasero per lungo volger d'anni infeconde. Esse furono quasi soffocate dalla grave atmosfera analitica di cui già avvertivasi l'esistenza. Tuttavia, nel sec. XVII la supremazia dell'analisi non è ancora così palese da far dimenticare ai geometri i problemi di cui da tanto tempo e così vivamente desideravasi la soluzione; ond'è che allora fra le tendenze dell'epoca e le aspirazioni degli scienziati nasce una lotta *sui generis;* dal cozzo di sentimenti in parte contradditori viene generata una scintilla madre d'un incendio destinato ad illuminare l'intero universo (4) e

Di cui la fama ancor nel mondo dura
E durerà quanto il moto lontana :

nasce la geometria analitica.

Benchè già in alcuni procedimenti pratici usati dai pittori e dagli astronomi Egiziani e più tardi dagli agrimensori Romani, nonchè in alcuni metodi che si vedono applicati da geometri greci di primo ordine, quali sono Erone

(1) A Desargues inspiravasi Newton scrivendo « Lineae parallelae sunt quae ad punctum infinite distans tendunt ». *Principia*, libro I, Lemma 22.

(2) Poncelet fece risalire a Desargues il metodo geometrico che consiste nel sostituire ad una curva un sistema di rette (*Propr. proj.*, 2ª ed., t. II, Parigi, 1866, p. 128); ma che questa attribuzione, benchè accettata da molti, manchi di solida base, ho rilevato colla nota intitolata *Desargues e la geometria numerativa* inserita nella *Bibl. math.*, 1895.

(3) Cfr. C. Taylor, (1840-1908) *Ancient and modern Geometry of Conics* (Cambridge, 1881), pp. LVII-LIX.

(4) Cfr. E. du Bois-Reymond, *Culturgeschichte und Naturwissenschaft* nella raccolta *Rede*, I, 1886, pp. 207-8.

Intorno alla preistoria della geometria analitica si vegga Günther. *Die Anfänge und die Entwickelungsstudien des Coordinatenprincips* (Abhandl. der Nat. Ges. zu Nürnberg, 6; v. anche Bull. Bonc., 10); le conclusioni di questo lavoro vennero confutate dallo Zeuthen con la *Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument* (Bull. de l'Acad. danoise des Sciences, 1888), a cui replicò il Günther nella *Neue philologische Rundschau*, 1888.

Sullo stesso argomento si veda: G. Loria. *Da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange. Contributo alla storia della geometria analitica* (Lincei, Mem. V, 14, 1924).

e specialmente Apollonio (1), è facile percepire qualche traccia di ciò che oggi chiamiamo sistema di coordinate cartesiane ortogonali; benchè già gli Arabi e gli algebristi italiani del Rinascimento avessero adoperate svariate considerazioni geometriche per risolvere graficamente certe equazioni; benchè Nicola Oresme (circa 1320-1382) avesse fatto uso più o meno esplicito di coordinate; sembra oggi posto fuori di discussione essere Descartes (1596-1650) (2) e Fermat (1608-1655) (3) i primi che abbiano visto in tutta la sua estensione la possibilità di rappresentare con i segni del calcolo algebrico le forme dello spazio costruite secondo una legge qualunque e abbiano percepita tutta l'utilità che l'analisi e la geometria potevano ricavare dal loro inatteso connubio (4). Fermat giunse forse prima di Descartes al nuovo ramo di matematica, ma quanto pubblicò è posteriore alla celebre *Géométrie* (1637); opera in cui è fatto esplicito cenno dell'equazione d'una curva ed esposta una soluzione del problema *ad tres aut quatuor lineas* così famoso fra gli antichi, è suggerita la distinzione fra curve algebriche e curve trascendenti, è proposta una classificazione delle algebriche, ora abbandonata, adottando la quale si collocherebbero in uno stesso *genere* le curve degli ordini $2n-1$ e $2n$, è insegnato un metodo per tracciare le tangenti alle curve piane che viene poi applicato alla concoide ed alle ovali di Cartesio, nè è taciuto della estendibilità allo spazio del metodo delle coordinate. Invece nella memoria di Fermat ***Ad locos planos et solidos*** *isagoge* (in ***Varia opera***, 1679) è fatto conoscere più chiaramente che nella

(1) Di vero chiunque studii a fondo il trattato sulle *Coniche* di Apollonio, sarà obbligato a constatare l'analogia profonda che esso presenta con una esposizione delle proprietà delle curve di second'ordine mediante coordinate cartesiane; non soltanto le proprietà fondamentali che al geometra greco servono a distinguere l'une dalle altre le tre curve, si traducono nelle equazioni canoniche delle medesime nel metodo di Descartes, ma molti dei ragionamenti esposti, quando siano tradotti nell'ordinario linguaggio algebrico, si riscontrano per equivalenti ad eliminazioni, risoluzioni di equazioni, trasformazioni di coordinate e simili. Ciò che però si cercherebbe invano nel geometra greco è il concetto di un sistema d'assi, dato *a priori*, indipendentemente dalla figura da studiare.

(2) Cfr.: Jacobi, *Ueber Descartes Leben und seine Methode, die Vernunft richtig zu leiten und die Warheit in den Wissenschaften zu suchen* (Ges. Werke, 7, 1891; v. anche Journ. de Math., 12, 1847); Arago, *Oeuvres complètes*, (3, Paris, 1855); finalmente l'estesa biografia di Descartes che occupa l'ultimo volume delle *Oeuvres de Descartes* (ed. C. Adorno e P. Tannery) Paris, 1896-1910.

(3) Cfr. *Oeuvres de Fermat* (ed. P. Tannery e C. Henry, Paris 1891-1922).

(4) Che l'*Analysis geometrica, sive nova et vera methodus resolvendi tam problemata geometrica quam arithmetica quaestiones*, di Hugo de Omerique (1634-?), di cui nel 1698 uscì a Cadice la 1ª parte, basti a far apparire il suo autore per il precursore della moderna geometria analitica (come sostenne P. A. Berenguer nell'articolo intitolato *Un geómetra español del siglo XVII* inserito in Progréso, 5, 1895) è questione non ancora risoluta, perchè a ciò sarebbe necessario conoscere la 2ª parte di quell'opera, la quale non vide mai la luce.

Géométrie il concetto d'equazione d'una curva, inoltre è adoperata l'equazione della retta, è discussa l'equazione generale di secondo grado a due indeterminate, ed è applicato il metodo delle coordinate alla soluzione delle equazioni. Se si aggiunge che Fermat seppe scoprire e correggere alcuni errori in cui era incorso Descartes, si vedrà doversi piuttosto ad un caso fortunato, che al vero merito, se la scoperta della geometria analitica, invece che al nome di Fermat, si considera come indissolubilmente collegato a quello dell'autore del *Discours de la méthode*.

La facilità colla quale il nuovo strumento matematico permette di risolvere problemi che esorbitavano le forze degli antichi, fece abbandonare alla generalità dei contemporanei e degli immediati successori di Descartes e Fermat le vie aperte da Euclide e da Apollonio; essi preferirono mettersi per la nuova strada che, da un lato, si presentava piana e facile a percorrere (1) e, d'altro lato, li tentava per gli ostacoli di cui era tuttora cosparsa e che sembrava importantissimo di eliminare. Fra questi primi cultori della geometria analitica spiccano G. Wallis (1616-1703) per il suo *Tractatus de sectionibus conicis nova methodo exposita* (1655), Florimond Debeaune (1601-1652) e Francesco van Schooten (?-1661) grazie ai loro *Commenti* a Cartesio e meglio ancora Giovanni de Witt (1625-1672) pei suoi *Elementa curvarum linearum* (1658).

10. I procedimenti d'indagine matematica fondati sull'uso metodico dell'infinito e dell'infinitesimo, applicati in un modo particolare nell'antichità da Archimede e preparati molti secoli dopo dalla *Stereometria doliorum* (1615) di Keplero e dalla *Geometria indivisibilibus etc.* (1635) di Bonaventura Cavalieri (1598-1647), dai metodi per costruire le tangenti alle curve immaginati da Descartes e da quelli che Fermat suggerì per la ricerca dei massimi e dei minimi (2), infine dalle indagini di Roberval (1602-1675) (3), di Torricelli

---

(1) « Ainsi, à certaines époques, où, après de grands efforts, les sciences mathématiques semblent avoir épuisé toutes les ressources de l'esprit humain et atteindre le terme marqué à leurs progrès, tout à coup une nouvelle méthode de calcul vient s'introduire dans ces sciences et leur donner une face nouvelle. Bientôt on les voit s'enricher rapidement par la solution d'un grand nombre de problémes importants dont les géomètres n'avaient osé s'occuper, rebutés par la difficulté », Condorcet nell'*Éloge de M. Euler*.

(2) Cfr. la nota dello Zeuthen, *Sur les quadratures avant le calcul intégral et en particulier sur celles de Fermat* (Bull. de l'Acad. danoise des Sciences, 1895).

(3) Mém. de l'Acad. des Sciences, 6, Paris, 1630.

È importante tenere presente che alcune inesattezze che si leggono nelle *Obsercâtions sur la composition des mouvements, et sur les moyns de trouver les touchantes des lignes courbes* del Roberval furono rettificate dal Duhamel (1797-1872) nella *Note sur la méthode des tangentes de Roberval* (Mém. des Sav. Étr., 5 Paris 1838).

(1608-1647) (1) (*Opera geometrica*, 1644) (2), di Gregorio a S^to^. Vincentio (1584-1667) (*Opus geometricum*, 1647), di Wallis (*Arithmetica infinitorum*, 1655), di Pascal, ecc., ed inventati, poco dopo l'apparizione della *Géométrie* di Descartes, contemporaneamente da Leibniz (1646-1716) (3) e Newton (1642-1727) (4) accentuarono l'indirizzo caratterizzato nel n. prec., facendo porre in non cale tutti quei problemi la cui soluzione non era adatta a dar risalto all'onnipotenza dei metodi che il mondo deve a queste menti immortali. Tanto che si può dire che, fatta eccezione per alcuni passi dei *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1686) di Newton e alcuni accenni di Leibniz (5) ad una « Characteristica geometrica », per alcune pagine di Huygens (1629-1695) (6) e di Maclaurin (1698-1746) (7), nonchè finalmente per alcune memorie di de La Hire (1640-1718) (8) e di Stewart 1717-1785 (9) e per alcuni tentativi intesi a far rivivere la geometria antica, ai quali fra un momento dedicheremo alcune linee, nessuna eminente produzione matematica del tempo di cui stiamo darlando appartiene alla geometria sintetica pura.

I tentativi a cui or ora alludemmo s'incontrano, si può dire, in ogni secolo a partire dal Rinascimento, e si manifestano sia sotto forma di edizioni e commenti agli antichi geometri, sia sotto quella di divinazioni di opere che non si sottrassero all'ingiuria del tempo. Delle edizioni e dei commenti non è qui luogo di tener parola, ma alle divinazioni è obbligo di consacrare qualche linea (10), in primo luogo perchè ne è indiscutibile il significato quando portano

---

(1) G. Loria, *E. Torricelli nella storia della geometria* (Lincei Rend. V, 28, 1919_1).

(2) Riprodotta in *Opere complete di E. Torricelli, ed. G. Loria e G. Vassura* (Faenza 1919).

(3) Cfr. Fontenelle, *Eloges des académiciens* (La Haye, 1740), 1; Harnack, *Leibniz', Bedeuntung in der Geschichte der Mathematik* (Dresden, 1887).

(4) Cfr.: Fontenelle, Op. cit., 2; Arago, *Oeuvres complétes*, 3 (Paris, 1855); Brewster, *The Life of Sir I. Newton* (London, 1831) e *Memoirs of the Life, Writings and Discoveries of Sir I. Newton* (Edimburgh, 1855).

(5) *Mathematische Schriften* (ed. Gerhardt) 5, p. 141-171.

(6) V. specialmente *Horologium oscillatorium* (Parigi, 1673) e *Traité de la lumiére* (Leyde, 1691).

(7) V. *A complete Systhem of Fluxions* (Edinburgh, 1742).

(8) Cfr. — oltre Fontenelle, Op. cit., 2 — E. Lehmann, *De la Hire und seine Sectiones conicae*, I Th., Leipzig, 1888; II Th., Leipzig, 1890. Del la Hire vanno ricordati qui i seguenti scritti, *Sectiones conicae in novem libros distributae*, 1685; *Mémoire sur les épicycloïdes*, in Anc. Mém. de Paris, 9; *Traité des roulettes*, in Nouv. Mém. de Paris, 1706.

(9) *General Theorems of considerable Use in the higher Parts of Mahtematics* (Edinburgh, 1746; v. l'analisi fattane dal Breton (de Champ) nel *Jurn. de Math.*, 13, 1848, nonchè un pregevole articolo su di essa di T. S. Davies, nelle *Trans. of Edinburgh*, 15, 1844); *Propositiones geometricae more veterum demostratae* (Edinburg, 1763).

(10) Maggiori particolari si troveranno nelle Appendici ai primi due libri del mio volume già citato sopra *Le scienze esatte nell'antica Grecia*.

i nomi di Maurolico (1494 1575), Viète, Fermat Schooten, Viviani (1622-1703), Halley (1656-1724), Simson (1687-1768) (1), Horseley (1733-1807), ed in secondo luogo perchè la loro comparsa è il primo indizio d'un risvegliarsi dello spirito di ricerca geometrica. E di vero è un fenomeno che ci sembra degno della più seria considerazione questo che in tale stadio di sopore che precede il risveglio, gli scienziati non riescono a sottrarsi al fascino esercitato dai più antichi investigatori e in conseguenza si sforzano di calcarne le orme e perfino d'imitarne le movenze e gli atteggiamenti. Si sarebbe perciò indotti a congetturare che nella vita intellettuale delle nazioni avvenga qualche cosa di analogo a ciò che l'embriologia insegna verificarsi nella vita fisica d'ogni vivente; nello stesso modo che ogni essere organizzato, avanti di acquistare vita autonoma ed indipendente, ripassa per tutte le fasi di sviluppo che attraversò la specie a cui egli appartiene prima di raggiungere lo stato fisico della generazione a cui egli dovrà appartenere, così parrebbe che ogni popolo prima d'acquistare la capacità d'accrescere le nostre cognizioni sui fenomeni che presenta l'estensione figurata, debba per qualche tempo assumere le parvenze ed i modi d'agire di chi prima di lui percorse il medesimo cammino. Accettata per vera questa legge di sviluppo, si evita di ascrivere fra i ruderi ciò che invece è un germe e si arriva a rendersi ragione di certi fatti che altrimenti sarebbero da giudicarsi per sorprendenti anacronismi. E fra questi nessuno ci sembra più degno di menzione di quello offerto dalla « Scuola napoletana » tanto pregiata da Chasles (2), che ebbe a duce supremo Nicola Fergola (1753-1822) e per capi secondari o gregari Vincenzo Flauti (1702-1863), Annibale Giordano (1771-1835), Felice Giannattasio (1759-1849), Giuseppe Scorza (1781-1843) ed altri i cui nomi per brevità si tacciono (3); scuola la quale sarebbe da collocarsi fra quelle che ebbero ben piccola influenza sulla geometria, ove non dovesse invece, secondo il nostro modo di vedere, ritenersi per rappresentante uno stadio che la matematica del mezzogiorno d'Italia doveva necessariamente attraversare prima di essere pronta a combattere per la conquista di nuovi veri.

11. Ma è d'uopo che noi ritorniamo indietro per determinare quale sia stata l'influenza sullo sviluppo della geometria del concetto fondamentale del-

---

(1) Riguardo agli sforzi fatti da Simson e Stewart per dar nuova vita all'antica geometria, si veggano le osservazioni del Buckle in *History of Civilisations in England*, 4. Aggiungiamo che la lotta in Inghilterra fra analisti e sintetici si è prolungata sino al sec. XIX; lo provano le due opere: *Geometrical Analysis and Geometry of curve lines by J. Leslie* (Edinburg, 1821) e *Treatise on algebraic Geometry by D. Lardner* (London, 1831).

(2) *Aperçu historique*, 2e éd. (Paris, 1875), p. 46.

(3) Per ulteriori notizie rimando al mio lavoro intitolato *Nicola Fergola e la scuola dei matematici che lo ebbe a duce* (Genova, 1892). Veggasi inoltre F. Amodeo, *Vita matematica napoletana*, P. I (Napoli, 1905), P. II (Id. 1924).

l'analisi infinitesimale, il quale da un grande filosofo e matematico è giudicato come il pensiero più sublime a cui lo spirito umano siasi fino ad oggi innalzato (1). Non si può negare che l'apparizione di esso abbia distratto dalla geometria pura la generalità dei matematici (2); ciònullameno il periodo che tenne dietro ad essa si deve senza esitazione annoverare fra i più lieti per la scienza dell' estensione, giacchè la maggior parte dei problemi proposti o risoluti da Newton e Leibniz e dai loro immediati discepoli sono da ascriversi fra i più importanti che vi si incontrano, riferendosi alle più recondite e interessanti proprietà geometriche o meccaniche delle curve e delle superficie. Vediamo in conseguenza, non soltanto aumentare straordinariamente il numero delle curve oggetto di studio (3), ma (il che è ben altrimenti importante) introdursi la considerazione di singolarità d'una curva e di nuovi elementi ad essa collegati (cfr. il Cap. seg.), e svelarsi in conseguenza dei campi di ricerca di cui dianzi non supponevasi nemmeno l'esistenza.

Le agevolazioni arrecate dal metodo cartesiano alle investigazioni attinenti alla geometria del piano, le quali apparvero in luce meridiana quando i metodi infinitesimali vennero nel dominio del pubblico, spinsero naturalmente gli scienziati a procacciarsene uno analogo per lo studio delle curve sghembe e delle superficie curve. Donde lo stimolo alla generalizzazione allo spazio del metodo delle coordinate che, come dicemmo (p. 13), non era sfuggita a Descartes, e che lo Schooten avvertì esplicitamente nell' ultimo libro delle sue celebri *Exercitationum mathematicarum* (1657); donde l'origine dell' idea del Parent (1666-1716) (4)

(1) Comte, *Cours de philosophie positive*, 1 (Paris, 1864). p. 175.

(2) Ciò reca una nuova conferma all'osservazione di Condorcet che riferimmo nella nota (1) della p. 14.

(3) Le linee che i Greci conobbero sono — a tacere della retta e della circonferenza — le tre sezioni coniche, la spirale d'Archimede e l'analoga curva sferica, la concoide, la cissoide, le spiriche e una quadratrice, inoltre una curva sghemba ideata da Archita, l'ippopeda di Eudosso e l'elica cilindrica; a cui altre se ne potranno unire quando saranno risolte in senso favorevole agli antichi alcune questioni tuttora pendenti. A queste linee i moderni aggiunsero tutte le iperboli, parabole e spirali (in particolare la spirale logaritmica) e di quadratrici (fra cui spicca quella di Tschirnhausen), poi la foglia e le ovali di Cartesio, la cicloide (cfr. Günther in Bibl. Math., 1887), la lossodromia, la curva elastica, la catenaria, la cardioide, le epicicloidi e le ipocicloidi, le ovali di Cassini (in particolare la lemniscata), la sinusoide, la logaritmica, la versiera — inventata dal Grandi, ma di consueto attribuita a Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) (*Instituzioni analitiche*, 1, p. 380) —, certe curve piane e sferiche a cui Guido Grandi (1671-1742) fu condotto tentando sciogliere il famoso enigma fiorentino (v. l'opera: *Flores geometrici, etc.*, Firenze, 1728), poi altre che Vincenzo Viviani ed un suo amico proposero come ausiliari nella risoluzione del problema di Delo (v. *Quinto Libro di Euclide, ovvero Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo da V. V.*, Firenze, 1647), la spirale parabolica (cfr. Weyer., *Ueber die parabolische Spirale*, Kiel und Leipzig, 1894), ecc. ecc.

(4) Fontenelle, op. cit., 1.

di rappresentare qualsia superficie mediante una equazione fra le tre coordinate d'un suo punto qualunque (1).

A questo momento di preparazione della geometria analitica dello spazio tien dietro il primo periodo di sviluppo, nel quale fungono da corifei Clairaut (1715-1765) ed Eulero (1707-1783) (2). Quegli nel 1731, cioè a soli sedici anni, pubblicò un *Traité des courbes à double courbure*, che fu giudicato degno di essere ammirato come un prodigio d'immaginazione e di capacità, nel quale so norisoluti con eleganza rara molti fra quei problemi relativi alle curve a doppia curvatura che trovano i loro corrispondenti nel piano ed altri ancora affatto nuovi; questi corredò di un'*Appendice de superficiebus* il secondo volume della sua celebre *Introductio in analysin infinitorum* (Lausannae, 1748), nella quale appendice, non solo espose alcune generalità intorno alla trattazione analitica della teoria delle superficie, ma ne fece un' importante applicazione allo studio e alla classificazione delle quàdriche. Nè è da tacersi che questo stesso famoso scienziato, con le memorabili *Recherches sur la courbure des surfaces* (inserite nei Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin, 16, 1760), ha gettato i fondamenti per lo studio della curvatura d'una superficie in un suo punto, legando il proprio nome ad una relazione che, per l'uso continuo che se ne fa, è conosciutissima da tutti coloro che per poco siansi occupati di matematica.

Alla seconda metà del secolo XVIII appartiene eziandio in buona parte la gigantesca opera scientifica di Monge (1746-1818) (3), il quale, dopo aver fatto prendere alla geometria analitica l'aspetto che essa in certa misura conserva tuttora, usando sistematicamente l'equazione del piano, introdusse la nozione così importante di *famiglia di superficie*, e, studiando alcune speciali famiglie (superficie rigate, sviluppabili, tubulari, modanate, ecc.), mise allo scoperto un nesso intimo e inaspettato, perchè recondito, fra la teoria delle superficie e l'integrazione delle equazioni a derivate parziali, il quale, lumeggiò così quella come questa dottrina e svelò ai geometri dei nuovi fulgenti orizzonti.

12. Il movimento intellettuale che partì dall'Italia nell'epoca del Rinascimento continuò, come testè dicemmo, sotto la direzione della Francia dapprima, dell'Inghilterra e della Germania da poi. Ma sul finire del secolo XVIII, dopo

---

(1) *Essais et recherches de mathématique et physique*, 2 (Paris, 1713).

(2) N. Fuss, *Eloge de M. Euler* (St. Pétersbourg 1783).

(3) Cito qui i lavori inseriti nei *Mém. des Sav. étrangers*, 7, 1776 e 9, 1780 e nei *Mém. de Paris*, 1784, nonchè quelli che si trovano nei *Miscellanea Taurimensia*, 5 e nei *Mém. de l'Acad. de Turin*, 1 Dell' « opus magnum » in cui sono riassunte e completate tali ricerche verrà discorso colla dovuta larghezza nel Cap. V.

che Eulero ebbe cessato di « calcolare e di vivere » (1) e che il nostro Lagrange (1736-1813) (2) ebbe trasportate le sue tende in Francia, questa ritornò a porsi alla testa del mondo matematico. Non soltanto con Clairaut, d'Alembert (3) (1716-1783), Condorcet (1743-1794) (4), Laplace (1743-1827), Legendre (1752-1833), Ampère (1775-1836) (5), Poinsot (1777-1759), Poisson (1781-1840) (6), ed altri minori essa dà l'intonazione agli studi di analisi superiore e fisica matematica, ma riconduce gli scienziati allo studio delle forme geometriche nel senso — « mutatis mutandis » — in cui l'intendevano i dotti dell'antichità, per opera di Monge (7), Carnot (8) (1753-1823) — discepolo di Monge alla scuola del genio di Mézières — e Poncelet (9) (1788-1867), splendida triade sulle cui memorabili produzioni è dover nostro arrestarci un istante.

Il primo, coll'adunare in un corpo di dottrina le poche regole di prospettiva che gli architetti ed i pittori si erano creati spinti dai bisogni che sentivano nel coltivare le loro arti, e col riempire in modo felicemente geniale le molte gravi lacune che il loro insieme presentava, collegò il proprio nome a una nuova diramazione della geometria, la geometria descrittiva (10). Non è il caso di riassumere il primo trattato conosciuto di tale scienza; noteremo soltanto che, se la pubblicazione di esso ebbe un movente pratico, quasi nazionale (11), alla nuova scienza Monge attribuiva anche un valore teorico, derivante dalla facilitazione che essa arrecava a concepire e quindi studiare le figure geometriche, scienza di cui egli ebbe cura di paragonare i procedimenti con quelli propri

---

(1) Espressione usata da Condorcet nel suo *Eloge de M. Euler.*

(2) G. Loria, *G. L. Lagrange nella vita e nelle opere* (Ann. mat. III, 20, 1913).

(3) J. Bertrand, *D'Alembert* (Paris, 1889).

(4) Arago, op. cit., 2, 1854.

(5) Arago, l. c.

(6) Arago, l. c.,

(7) Cfr.: Charles Dupin, *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge* (Paris, 1819); Arago, l. c.; K. Fink (1841-1878), *Monge* (Korresp.-Bl. f. d. Gel. und Realschule, Tübingen, 1892, pp. 263-289, 339-359).

(8) Arago, op. cit. 1, 1854; K. Fink, *Lazare Nicolas Marguerite Carnot, sein Leben und seine Werke nach den Quellen dargestellt* (Tübingen, 1894).

(9) Cfr. E. Holst, *Om Poncelet's Betydning for Geometrien* (Christiania, 1878); Bertrand, *Éloges académiques* (Paris, 1890).

(10) Chi desidera maggiori particolari intorno alla preistoria e alla storia della geometria descrittiva, ricorra alla 1ª sezione del vol. I (Leipzig, 1884) del *Lehrbuch der darstellendan Geometrie* di Chr. Wiener e a G. Loria, *Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri* (Milane, 1921). Qui basti ricordare *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois ou Traité de stéréotomie* (1738-39) del Frézier (1682-1773).

(11) Infatti il *Programme* ad essa premesso comincia con le parole: « Pour tirer la nation française de la dépendance où elle à été jusqu'à présent de l'industrie étrangère etc. » (Monge, *Géométrie descriptive*, Paris, an. VII).

all'analisi, mostrando l'identità essenziale degli uni e degli altri. Col classico libro ora ricordato e meglio ancora con le impareggiabili lezioni alla Scuola politecnica di Parigi (1), di cui egli fu uno dei primi e più splendidi ornamenti (2), egli ripose in onore lo studio della geometria fondato sulla considerazione diretta delle figure che ne sono l'oggetto e, agevolando la concezione delle figure a tre dimensioni, preparò l'applicazione di considerazioni stereometriche alla ricerca delle proprietà delle figure piane, che Pappo aveva soltanto intravveduta (v. n. 5) e che rappresenta oggi uno dei più fecondi metodi di investigazione e dimostrazione che vanti la geometria (3).

A lato della *Géométrie descriptice* di Monge va collocata la *Géométrie de position* (Paris, 1803) di Carnot, avendo questa comune con quella il fine di far acquistare alla geometria quella generalità di concetti e di metodi ed in conseguenza quel procedere svelto e disinvolto che credevansi esclusivi dell'algebra. Il lettore che conosce soltanto il titolo dello scritto geometrico più importante dell' « organizzatore della vittoria » può credere che il tema di esso coincida con quello che svolgono le opere moderne di geometria proiettiva. Nulla di più

---

(1) Cfr.: Arago, op. cit., 3, 1855, p. 70 e seg.; Jacobi, *Ueber die Pariser polytechnische Schule* (Ges. Werke, 7, Berlin, 1891, pp. 355-370).

(2) Monge ebbe per collaboratori nella sua opera riformatrice parecchi colleghi — fra gli altri Lacroix (1765-1843) e Hachette (1769-1834) — e molti allievi. Fra questi è giustizia di far qui cenno particolare di Carlo Dupin che « sopra gli altri com'aquila vola », grazie specialmente alle sue due opere *Développements de géométrie* (Paris, 1813) e *Applications de géométrie et mécanique* (Paris, 1822) di cui avremo occasione di parlare più innanzi; qui intanto ricordiamo l'elogio che di lui scrisse il Bertrand (*Éloges académiques*, Paris, 1890) e l'articolo *Dupin* di K. Fink (Korresp.-Bl. f. d. Gel. und Realsch., 1893, pp. 1-27). Nè possiamo esonerarci dal fare onorevole menzione anche del *Mémoire sur les lignes du second ordre* (Paris, 1817) e dell'*Application de la théorie des transversales* (Paris. 1818) del Brianchon (1783-1864), scritti di cui il primo contiene i fondamenti di una teoria sintetica delle sezioni coniche, con ispeciale riguardo alle loro costruzioni, fondate in parte sul teorema di Pascal e suo correlativo (che il Brianchon stesso fece conoscere nel XIII cap. del *Journ. Éc. pol.* e poi generalizzò nel t. IV delle *Ann. de Math.*), in parte sul birapporto, mentre il secondo intende mostrare di qual fecondità nelle costruzioni siano i teoremi di Menelao e di Ceva, intende cioè ad un fine analogo a quello a cui mirava il Servois (1767-1847) nel comporre le sue *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique* (Paris, 1805).

(3) L'influenza di Monge non si limitò alla Francia e ai paesi limitrofi; lo provano gli scritti di Garbinski (1796-1848) e Sapalski (1791-1838), cioè l'*Esposizione sintetica delle proprietà delle superficie rigate* (Varsavia, 1822) del primo e l'eccellente *Trattato di geometria descrittiva* (Varsavia, 1822 e 1849) del secondo. Di più tale influenza non si spense presto, giacchè la si può ravvisare anche nei metodi di insegnamento della geometria elementare; lo prova il tentativo di abbattere l'antica rigorosa separazione fra planimetria e stereometria fatto per la prima volta dal Bretschneider (1808-1878) nel 1844, ripetuto più tardi dal Frischauf e dal Méray, condotto a buon termine nel 1884 dal De-Paolis con i suoi eccellenti (e oggi troppo trascurati) *Elementi di geometria* (Torino).

inesatto; l'intento che si è prefisso Carnot è di determinare la scambievole dipendenza che esiste fra i differenti aspetti che può assumere una figura soddisfacente a certe condizioni in corrispondenza alle varie posizioni di cui sono suscettibili i dati, studio capace di esonerare dall'enumerazione minuziosa dei vari casi di figura, a cui erano astretti i geometri dell'antichità. Tale scopo viene oggi raggiunto per una strada assai più piana e luminosa, cioè mediante l'uso metodico di segni in geometria; donde la ragione per cui la *Géométrie de position* non presenti oggi che poco più d'un interesse storico e debba venir ricordata, meno per le idee che intende propugnare, che per le applicazioni ivi esposte, fra le quali ci piace qui ricordare i principî della poligonometria e della poliedrometria, la teoria dei baricentri e la teoria delle trasversali, di cui è parte cospicua la celebre proposizione che oggi designa col nome di teorema di Carnot (1). Giova ancora osservare qui che la memoria *De la corrélation des figures de la géométrie* (Paris, 1801) è un primo abbozzo della *Géométrie de position*, mentre la *Lettre du citoyen Carnot au citoyen Bossut* (Paris, 1799) ed il *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace* (Paris, 1806) hanno con questa molteplici punti di contatto; che poi di essa formino parte integrante, come taluno opina, le *Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (Paris, 1797) è opinione che non si può accettare senza maturo esame e lunga discussione.

Gli scritti di Monge e Carnot prepararono efficacemente il risorgimento della geometria pura; questo devesi far datare dall'apparizione (1822) del *Traité des propriétés projectives des figures* di Poncelet (2). A convincere il lettore di quanto sia memorabile questa data, basterà osservare che gli è nella grande opera di Poncelet che è dimostrata la potenza della proiezione centrale e del principio di continuità come strumenti di ricerca ed ausiliari nelle dimostrazioni (3): che ivi lo studio approfondito dell'omologia nel piano e nello spazio funge, non solo da preludio, ma anche da efficacissima preparazione

(1) Crediamo opportuno far anche notare che Carnot adopera la parola *equipollenza* in senso analogo a quello in cui, assai più tardi, la usò il Bellavitis.

(2) Soltanto di passaggio ricordiamo l'aspra guerra che venne mossa a quest'opera appena essa uscì, la quale in gran parte è dovuta al non essere state le idee del Poncelet abbastanza comprese.

(3) Se gli antichi sapessero sfruttare la prospettiva nelle ricerche teoriche è questione che non possiamo qui esaminare (cfr. Chasles, *Aperçu historique*, 2ª ed., p. 74, nota); la questione analoga pel principio di continuità venne studiata da C. Taylor nella nota *On the History of geometrical Continuity* (Cambridge Proc. 1880 e 1881) e nella prefazione (pp. LXXIII e segg.) dell'opera *Ancient and Modern Geometry of Conics*, ove, fra l'altro, sono descritti gli sforzi fatti dal Boscovich (1711-1787) per stabilire il principio anzidetto.

allo studio delle corrispondenze univoche fra due varietà ad egual numero di dimensioni (cfr. Cap. VIII); che ivi ancora le antiche nozioni intorno alla polarità rispetto ad una conica e quelle scoperte nella scuola di Monge intorno alla polarità rispetto ad una quadrica preparano la legge di reciprocità che, riconosciuta dal Viète (1), da Filippo van Lansberg (1561-1632) (2) e dallo Snellio (1581-1626 (3) nella geometria della sfera, era destinata a venir enunciata in tutta la sua generalità e chiamata col nome di ***principio di dualità*** quattro anni più tardi (v. *Ann. de Math.*, 17) dal Gergonne (1771-1859) (4). Mentre importanza piuttosto transitoria ebbero le considerazioni svolte da Poncelet sulle corde ideali delle sezioni coniche, su cui dovrà arrestarsi chi narrerà la storia della teoria degli immaginari in geometria, per converso grande valore si deve attribuire al *Supplément* dell'opera in discorso, dal quale fra l'altro si apprende l'esistenza di quattro coni in qualsiasi fascio di quàdriche; pure valore permanente possiedono le investigazioni intorno ai poligoni inscritti in una conica e circoscritti ad un'altra; anzi, se il posto devoluto ad una ricerca matematica devesi determinare, non tanto in base al valore intrinseco di cui sembra in possesso, quanto piuttosto per l'originalità sua e la novità e varietà delle investigazioni che da essa rampollano, all'argomento da ultimo citato spetta una posizione a ben pochi seconda. Ed è per ciò e per essere estremamente istruttivo il contemplare tutte le facce che la matematica moderna seppe scoprire in un solo ed umile soggetto, che noi vogliamo arrestarci qualche istante sui così detti *poligoni di Poncelet* (5).

13. Il problema: « Date in un piano due sezioni coniche, costruire un poligono d'un determinato numero di lati, il quale sia inscritto in una delle date curve e circoscritto all'altra », sembra determinato, e fin dal 1817 Poncelet lo annoverava (6) fra quelli a cui si potevano applicare i metodi che egli

---

(1) *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber octavus* (Tours, 1593).

(2) Cfr. K. Fink, *Kurzer Abriss der Geschichte der Elementar-Mathematik* (Thübingen, 1890) p. 196.

(3) *Doctrina triangolorum canonica* (Leyden, 1627).

(4) Altri particolari sull'origine del principio di dualità si trovano nelle *Vorlesungen über continuirliche Gruppen* del Lie redatte da G. Scheffers (Leipzig, 1893), opera in cui è anche esposta una importantissima generalizzazione della relazione dualistica. Si vegga pure: Julius Plückers *Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, 1 (Leipzig, 1895), p. 619.

(5) Per maggiori particolari si ricorra alla *Note historique, critique et philosophique*, inserita, da Poncelet nelle *Applications d'analyse et de géométrie, etc.* 1 (Paris 1862), all'opuscolo dell'autore intitolato *I poligoni di Poncelet* (Torino, 1889), e al complemento pubblicato nella *Bibliotheca mathematica*, 1889, col titolo *Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet*.

(6) *Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique en géométrie*, inserite prima nelle *Ann. de Math.*, 8, 1817, e poi nelle *Applications d'analyse et de géométrie*, 2 (Paris, 1864), p. 466.

stava allora elaborando; ove però si ricordi che, se le due coniche sono cerchi, affinchè esso sia possibile devono i dati soddisfare a un certa relazione (1), nasce il sospetto che anche nel caso generale abbia luogo qualche cosa di analogo. Ed infatti, cinque anni dopo, Poncelet dimostrò che il problema enunciato non ammette generalmente parlando alcuna soluzione, ma che, ove ne abbia una, ne possiede infinite (*Traité des prop. proj.*, nn. 530 e seg.; cfr. *Applications* citate, 1, Paris, 1862, p. 348 e seg.). Questa memorabile scoperta non passò inosservata; lo prova il fatto che non trascorsero più di sei anni dal momento in cui venne a conoscenza del pubblico, quando Jacobi (1804-1851) (2) nel corso delle sue memorande ricerche intorno alla teoria delle funzioni ellittiche osservò — nel celebre lavoro *Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementar-Geometrie* (Journ. f. Math., 3, 1828) — come questa fosse in grado di somministrare una soluzione generale completa (anzi l'unica esplicita, vale a dire non per via ricorrente, che ancor oggi si conosca) del problema che consiste nel cercare la relazione esistente tra i raggi e la distanza dei centri di due circonferenze che ammettono un poligono di Poncelet di un numero dato n di lati; e poichè, come pensava Laplace, « le scoperte consistono nel ravvicinare delle idee capaci di riunirsi e che dianzi erano disgiunte », all'osservazione di Jacobi si deve senza esitare dare il nome di scoperta. Niuna meraviglia devesi in conseguenza sentire notando come lo scritto testè citato sia stato giudicato dal Legendre meritevole di venire compendiato in uno dei supplementi alla terza edizione (1827-1832) della sua voluminosa *Théorie des fonctions elliptiques et des intégrales euleriennes*, e se il Richelot (1808-1875) abbia giudicato opportuno dedicare due memorie (3) a svolgere e completare le idee del proprio maestro, a mostrare anzi come esse potessero venire applicate a sciogliere gli analoghi problemi della geometria sferica.

Al termine della memoria dianzi ricordata Jacobi rilevò che sarebbe stato interessantissimo istituire su due coniche considerazioni analoghe a quelle da lui svolte per due circonferenze, dichiarandosi anzi disposto a ritornare lui stesso sull'argomento; ma poi, attratto probabilmente da problemi più impor-

---

(1) N. Fuss (1755-1826) (Nova Acta Petrop., 10, 1794, pubbl. 1797, e 13, 1798, pubbl. 1827; Steiner (Journ. f. Math., 2, 1827; Ges. Werke, 1, p. 159).

(2) Lejeune-Dirichlet, *Gedächtnissrede auf C. G. I. Jacobi* Berl. Abh. 1852; ristampata nel T. 1 di *Jacobi's Werke* (Berlin, 1881).

(3) *Anwendung der elliptischen Transcendenten auf die sphärischen Polygone, welche zugleich einem kleinen Kreise der Kugel eingeschrieben und einem anderen umgeschrieben sind* (Journ. f. Math., 5, 1830); *Ueber die Anwendung einiger Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen auf ein bekanntes Problem der Geometrie* (Ib., 38, 1849).

tanti, non tradusse in il atto suo progetto, il quale per quasi quarant'anni attese indarno chi lo eseguisse; finalmente nel 1865 Rosanes e Pasch diedero, nella notevole memoria *Ueber das einem Kegelschnitte umbeschriebene und einem anderen einbeschriebene Polygon* (Journ. f. Math., 64), una soluzione trascendente del problema che consiste nella ricerca della relazione cui debbono soddisfare i coefficienti di due coniche affinchè inscritto nell'una si trovi un poligono di n lati circoscritto all'altra, generalizzando all'uopo il metodo inventato da Jacobi. Inoltre gli or citati geometri adoperarono le funzioni ellittiche Jacobiane (1): che allo stesso risultato si possa pervenire adoperando le funzioni analoghe preferite da C. Weierstrass (1815-1897) (2), lo dimostrarono prima M. Simon (1844-1918) (3) e poi l'Halphen (1844-1889) (4) nel secondo volume (Paris, 1888) del suo classico *Traite des fonctions elliptiques et de leurs applications* (5).

Avendo nella nostra esposizione preferito l'ordine logico a scapito dell'ordine cronologico, fa d'uopo che ritorniamo indietro qualche decennio per far cenno dei lavori estremamente eleganti di Nicola Trudi (1811-1884) (6) e di quelli di A. Cayley (1821-1895) (7) non meno interessanti, ma assai più conosciuti e che ognor più si diffonderanno per essere adunati fra le opere di questo celebre scienziato (vedi i vol. 2, 3, 4, 5 e 8); riguardo a tali lavori ci limiteremo a far

(1) Altrettanto può ripetersi riguardo a Rogers, *Note on the Po ism of the Inscribed and Circumscribed Polygon* (Proc. L. M. S, 16, 1884-85).

(2) H. Poincaré, *L'oeuvre mathématique de Weierstrass* (Acta 22, 1898).

(3) *De relationibus inter constantes duarum linearum secundi ordinis ut sit polygonum alteri inscriptum circumscriptum alteri* (Diss. Berlin, 1867), e *Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen in Verbindung mit dem Schliessungsproblem* (Journ. f. Math., 81, 1876). Cfr. S. Gundelfinger (1846-1910), *Ueber das Schliessungsproblem bei zwei Kegelschnitte* (Ivi, 83, 1877).

(4) C. Jordan, *Georges Halphen* (Journ. de Math., IV, 5, 1889); *Liste des travaux mathématiques de Georges-Henri Halphen* (Palermo Rend., 3, 1889); *Oeuvres de G. H. Halphen* T. I-IV (Paris 1916, 1918, 1921, 1924).

(5) V. anche Vivanti, *Sull'applicazione d lla funzione ellittica* pu *alla teoria dei poligoni di Poncelet* (Palermo Rend., 7, 1893).

(6) *Sui poligoni iscritti e circoscritti alle curve coniche con date condizioni*, (Napoli, 1841); *Rappresentazione geometrica immediata dell'equazione fondamentale della teoria delle funzioni ellitiche con diverse applicazioni* (Napoli, Rend., 1843); *Studi intorno ad una singolare eliminazione con applicazione alla ricerca della relazione tra gli elementi di due coniche, l'una inscritta e l'altra circoscritta ad un poligono, ed ai corrispondenti teoremi di Poncelet* (Napoli Atti, 1863) e *Sui teoremi di Poncelet relativi ai poligoni iscritti e circoscritti alle coniche* (Giorn. di Mat., 1, 1863).

(7) Pei dati biografici intorno a questo grande geometra rimandiamo il lettore alla *Biographical Notice* di A. R. Forsyth che prelude l'VIII vol. (1895) di *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*; di più alla *Notizia sulla vita e sulle opere di Arturo Cayley* del Brioschi (Lincei Rend. V, 4, 1895), trad. in francese in Bull. Sc. math., II, 19, 1895, e finalmente all'articolo *Arthur Cayley* di M. Nöther (Math. Ann., 46, 1895).

noto come da quelli del geometra inglese si impari a scrivere sotto forma di determinante l'invariante simultaneo di due forme ternarie quadratiche, il cui annullarsi annuncia che le coniche da queste rappresentate ammettono un poligono di Poncelet di dato ordine.

Risultati analoghi ottennero: il Mention nell' *Essai sur le problème de Fuss* (Petersb. Bull., 1. 1860) utilizzando un'osservazione esposta dal Cébycef (1821-1894) (1) nell'articolo *Sur la série du problème de Fuss* (Id., ib.); il Puiseux (1820-1883) nella *Note sur les polygones qui sont à la fois inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle* (Annales de la Soc. scient. de Bruxelles. 3ᵉ ann., 1878-79, 2ᵉ partie); il Kluyver nella memoria *Over de invariante betrekking tusschen twee kegelsneden in en om denzelfden veelhoek beschreven* (Nieuw Archief voor Wiskunde, 15, 1888) e molto prima il Moutard in un lavoro (2), cui l'originalità dei concetti e l'ampiezza di vedute colloca in una posizione eminentissima fra quelli riferentisi alla teoria che ci occupa.

L'angustia dello spazio ci vieta di dilungarci sui lavori numerosissimi che si proposero il fine modesto di dimostrare, con metodi differenti da quelli usati da Poncelet e Jacobi, i risultati da questi ottenuti e su quelli più significanti che hanno per intento lo studio delle proprietà geometriche dei poligoni di Poncelet (3). Vogliamo invece rilevare come il teorema stabilito dal grande geometra francese faccia parte oggi della splendida collezione di *teoremi di chiusura*, alla costituzione della quale contribuì potentemente lo Steiner che ne scoperse nel 1832 uno relativo a cerchi del piano o della sfera (v. *Systematische Entwickelung etc.*) e uno ancora più notevole relativo ai poligoni d'un numero pari di lati inscritti in una cubica piana (Journ. f. Math., 32, 1846), a dimostrare il quale ultimo s'industriarono molti egregi geometri, fra cui basti ricordare il Clebsch (Journ. f. Math., 63, 1864), Ed. Weyr (1852-1903) (Id., 71 e 73, 1870-1871), lo Schoute (Id., 95, 1883) A. Hurwitz (1859-1920) (4) (Math. Ann., 19, 1882), C. F. Küpper (1828-1900) (5) (Id., 24, 1884), M. Disteli (1862-1923) (6): *Die Steiner'schen Schliessungsprobleme nach darstellend-geometrischer Methode*, Leipzig, 1889; cfr. anche W. Fiedler (1832-1912) (7), (*Die darstellende Geometrie*, etc., III Th., p. 352 e seg., Leipzig, 1888), Martinetti (Palermo

(1) V. la *Notice biographique* che apre il T. II delle *Oeuvres de P. L. Tchebychef publiées par Markoff et Sonin* (St. Pétersbourg, 1907).

(2) *Recherches analytiques sur les polygones simultanément inscrits et circonscrits à deux coniques*, in appendice al primo vol. delle *Applications* già citate del Poncelet.

(3) V. in particolare: Halphen, *Application de la théorie des caractéristiques pour les coniques à une question relative aux polygones de Poncelet* (Bull. Soc. phil., VII, 3, 1876).

(4) D. Hilbert, *Adolf Hurwitz* (Math. Ann. 83, 1921).

(5) E. Wälsch, *Carl Joseph Küpper* (Deutsch. Math. Ver. 14, 1905).

(6) F. Schur, *Nacruf auf Martin Distali* (Deutsch. Math. Ver. 36, 1927).

(7) M. Grozsmann, *Otto Willmelm Fiedler* (Zürich. Naturf. Ges. 57, 1912).

Rend., 5, 1891) e E. Czuber (Journ. f. Math., 114, 1892). Alcune proposizioni analoghe sono dovuti all'August (Archiv. der Math. 59, 1876), all'Harnack (1851-1888) (1) (Math. Ann., 12, 1877), al Westphal (Math. Ann., 13, 1878), al Forsyth (Proc. L. M. S. 14), al Juel (Nyt Tidss. for. Math., 1, 1890) e ad altri che per brevità si tacciono.

Giova invece osservare come l'esame della raccolta di lavori riferentesi ai teoremi di chiusura in generale metta in evidenza un intimo legame fra questi e la teoria delle funzioni ellittiche. Ora, come è stato acutamente notato (2) che, in matematica la comparsa di una contraddizione qualunque annuncia la presenza di una verità nascosta capace di comporre il momentaneo dissidio, così si può dire che un punto di contatto fra dottrine eterogenee deve trovare la propria giustificazione in qualche verità più generale; orbene, pei teoremi di chiusura questa ragione superiore consiste in ciò, che ognuno di essi dà luogo ad una relazione omogenea doppiamente quadratica fra due serie di variabili binarie, cioè ad una relazione della stessa forma di quella che intercede fra due funzioni ellittiche col medesimo argomento; gli è quello che ha dimostrato il Cayley nella memoria *On the Porism of the In-and Circumscribéd Polygon and the* (2, 2) *Correspondene of Points on a Conic* (Quart. Journ., 11, 1871) (3). E queste osservazioni ponendo allo scoperto quella parte di ragionamento che interviene in tutte le dimostrazioni dei teoremi di chiusura, diede occasione all'Hurwitz di scrivere una memoria (4) in cui non sappiamo se più ammirare la vastità di vedute o la perfezione della forma, e colla quale poniamo termine a questa digressione, alla quale invano cercheremmo chiusa più degna.

14. Le memorie di Poncelet *Sur les centres des moyennes harmoniques* (Journ. f. Math., 3, 1828) e *Sur la theorie générale des polaires reciproques* (Id. 4, 1829), nonchè la posteriore *Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et des surfaces* (Ib., 8, 1832), ci fanno appressare all'anno 1837, nel quale venne pubblicato l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* di Michele Chasles (1793-1880) (5), opera affascinante in cui l'autore, dopo aver esposto con uno

---

(1) A. Voss, *Zur Erinnerung an Axel Harnack* (Math. Ann., 32, 1888).

(2) H. J. Stephen Smith, *On the Present State and Prospects of Some Branches of Paure Mathematics* (Proc. L. M. S., 8, 1876, p. 25).

(3) Cfr. anche i cap. IX-X della seconda parte del citato *Traité* dell'Halphen.

(4) *Ueber unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben insbesondere über die Schliessungsprobleme* (Math. Ann., 15, 1879); v. anche la nota dello stesso geometra *Ueber die Anwendung der elliptischen Functionen auf ein Problem der Geometrie* (Ib., 19, 1881).

(5) Cfr. J. Bertrand, *Éloge de Michel Chasles* in Revue scientifique del 24 marzo 1892, riprodotto in *Eloges académiques*, Nouv. Série (Paris 1902).

stile, la cui bellezza potrà raggiungersi ma non superarsi, tutto quanto costituiva ai suoi tempi il patrimonio della geometria pura, gagliardamente sostenne i diritti che questa aveva alla considerazione degli scienziati e che le venivano continuamente contrastati dai ciechi adoratori dell'analisi. Non bisogna però credere che questa sia un'opera di sola polemica, e che quindi abbia, oggi che la lotta è finita, soltanto un valore storico. Infatti dal *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science*, che fa seguito alla parte storico-critica del lavoro in questione, s'imparano le proprietà generali delle trasformazioni collineari e reciproche sia in generale sia nei casi in cui sono involutorie, mentre nelle trentaquattro note che lo corredano sono consegnate importanti investigazioni storiche e scientifiche; delle prime non occorre far qui esplicita menzione, e riguardo alle altre basterà limitarci a nominare quelle sul rapporto anarmonico, sull'involuzione e sulla legge di continuità, giacchè delle rimanenti, essendo più speciali, è meglio rimandare l'esame a più opportuno momento.

Ma nell'intervallo di tempo interposto fra la comparsa degli scritti di Poncelet e la pubblicazione dell'opera di Chasles, la Germania erasi destata dal torpore in cui l'avevano immersa per mezzo secolo i soporiferi lavori della « Scuola dei combinatori », torpore dal quale non volle riscuoterla la voce possente di Gauss (1) (1777-1855), il *princeps mathematicorum*, colui che Jacobi non esitò a paragonare ad Archimede, trovando ne' suoi lavori scoperte egualmente profonde che in quelli dell'antico, esposte in forma altrettanto perfetta e con ideale rigore scientifico; colui la cui preminenza mentale si manifesta, come notà il Borchardt (1817-1880), nell'influsso decisivo che ha esercitato sulla matematica del nostro tempo, penetrando in ogni sua ricerca fino all'ultimo midollo, appurando e ampliando i concetti fondamentali delle matematiche, stringendo in fascio sotto leggi generali fatti che erano rimasti inesplicati o solitari, e congiungendo il rigore dei metodi antichi al libero atteggiarsi dell'analisi moderna.

Il ridestarsi in Germania dello spirito d'indagine è contrassegnato da un nuovo trasferimento dello scettro matematico, il quale si può considerare per avvenuto nel 1826, anno di fondazione per opera di A. L. Crelle (1780-1855) di una pubblicazione periodica a cui Abel (1802-1829) (2), Jacobi, Steiner e Plücker, Möbius e Staudt assicurarono ben presto una rinomanza non destinata a perire; ed è appunto a questi ultimi quattro scienziati che la geometria è debitrice di essere ritornata in onore all'Oriente del Reno: ad essi è pertanto dover nostro di dedicare qualche linea di questo Capitolo introduttorio.

---

(1) Cfr.: Sartorius von Walterhausen, *Gauss zum Gedächtniss* (Leipzig, 1856); Schering, *Zur Feier der hundersten Wiederkehr von Gauss' Geburtstag* (Gött. Nachr., 1877; trad. italiana in Ann. di Mat., II, 9, 1878-79).

(2) Bjerknoss, *Niels-Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique* (Paris, 1885).

15. Il più poderoso dei lavori di Möbius (1790-1868) (1) nel campo della geometria è quello avente per titolo *Der barycentrische Calcul* (Leipzig, 1827) (2); ivi le antiche nozioni sopra i baricentri d'un sistema di punti vengono poste a fondamento di un importantissimo calcolo, il quale conduce ad un nuovo sistema di coordinate, di cui l'autore dimostra l'applicabilità allo studio delle curve piane e sghembe e alla ricerca delle proprietà di nuove trasformazioni geometriche. Ulteriori applicazioni degli stessi metodi sono contenute in memorie che l'autore inserì nei vol. 5 (1830), 24 (1842), 26 (1843) e 37 (1844) del Journ. f. Math., mentre nuove specie di trasformazioni (affinità circolare, involuzione, simmetria, trasformazioni elementari) furono da lui esposte in altri scritti i cui titoli noi ci dispensiamo dal citare qui per esteso, nulla di più agevole essendo del rintracciarli ora che è compiuta la stampa delle sue *Opere complete*. Altre sue ricerche di genere differente verranno ricordate più avanti; qui facciamo un'eccezione soltanto a favore di quelle sopra i segni delle figure piane e solide (esse fra l'altro condussero alle nozioni di poliedri senza volume e di superficie unilaterali), sui poliedri, sull'*Ausdehnungslehre* di H. Grassmann (1809-1877) e sui quaternioni di W. R. Hamilton (1805-1865), non potendo esse trovare più opportuna menzione nella nostra storia.

Möbius contribuì anche al progresso della meccanica, dell'ottica, dell'astronomia, nonchè dell'analisi, ma questi suoi lavori escono dalla cornice del nostro quadro; se li ricordiamo è per rilevare come essi palesino una sostanziale differenza fra lui e l'altra delle stelle di prima grandezza che illuminavano in quell'epoca il cielo della matematica tedesca, cioè J. Steiner, il quale fu così esclusivamente geometra, che coll'analisi non volle mai scendere palesemente a patti (3). Tutti sanno come nella sua *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Berlin, 1832) « viene rivelata l'organizzazione in forza della quale i più svariati fenomeni dello spazio sono fra loro connessi », come ivi siano rigorosamente stabiliti i principi mediante i quali quel grande geometra potè compiere le meravigliose scoperte che verranno partitamente citate nel corso del nostro racconto; qui soltanto vogliamo

(1) Cfr. lo schizzo bio-bibliografico premesso dal Baltzer a *August Ferdinand Möbius Gesammelte Werke* (Leipzig, 1885-1887).

(2) Notisi come un lavoro precedente sopra *Zwei geometrische Aufgaben* (inserito in un volume di *Beobactungen auf der K. Univ.-Sternwarte zu Leipzig*) dimostri che fino dal 1823 il Möbius conosceva e sapeva adoperare maestrevolmente il calcolo baricentrico.

(3) Come è noto nelle opere di Steiner s'incontrano innumerevoli proposizioni soltanto enunciate; nella I ed. di quest'opera si osservò che « un catalogo completo dei lavori intesi a dimostrarle riuscirebbe estremamente utile ed è pertanto desiderato »; tale voto fu soddisfatto da R. Sturm con la memoria *Zusammenstellung von Arbeiten, welche sich mit Steinerschen Aufgaben beschäftigen* (Bibl. math. III, 4, 1903).

ricordare, in primo luogo come la possibilità di fondare sopra di essi una completa trattazione delle sezioni coniche emerga dalle *Vorlesungen über synthetische Geometrie* (2ª ed., Leipzig, 1875-1876) che due egregi discepoli di Steiner (il Geiser e lo Schröter) pubblicarono col nome di lui, ed in secondo luogo com'egli abbia in più occasioni dimostrato che il ragionamento puro, indipendente dal calcolo, possa venire adattato anche alla misura od al paragone di aree e volumi, e ne abbia offerto il più memorabile esempio nelle memorie *Sui massimi e i minimi*, a dimostrare il valore delle quali basti dire che il calcolo delle variazioni non seppe trovare che, lungo tempo dopo Steiner e per la via da lui aperta, i mezzi di tener dietro alla sintesi nella risoluzione di siffatte questioni (1).

Meno esclusivista di Steiner fu C. G. v. Staudt (1798-1867) (2), il quale non seppe completamente sottrarsi all'influenza del suo grande maestro Gauss e dedicò una parte della propria attività intellettuale a ricerche sulla teoria dei numeri. Una parte, ma non la più elevata e decisiva, chè questa venne assorbita dalla soluzione del grande problema di trattare la geometria di posizione senza introdurre alcun concetto metrico: la *Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1847), ed i *Beitrage*, di cui egli la corredò negli anni 1856, 1857 e 1860, fanno fede del risultato completo che ebbero gli assidui e geniali suoi sforzi per depurare da qualsiasi elemento estraneo quella geometria proiettiva di cui poco dianzi avevano gettate le basi Poncelet e Chasles in Francia, Steiner e Möbius in Germania. Non è in poche parole che si può delineare il contenuto di questi scritti che meritarono a Staudt l'invidiabile epiteto di « Euclide del secolo XIX »;

---

(1) Le memorie originali di Steiner sui massimi e sui minimi vennero pubblicate completamente soltanto dopo la di lui morte fra le sue Opere complete; prima ne erano stati stampati alcuni frammenti, in francese, nel *Journ. f Math.* et nel *Journ. de Math.* In tale genere di ricerche Steiner fu seguito da L. L. Lindelöf (*Propriété générales des polyédres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume*, Math. Ann., 2, 1870, e Petersb. Bull., 14, 1870; *Quelques problèmes relatifs à l'éllipse et à l'éllipsoïde*, Nouv. Ann., II, 10, 1871), dal Bauer (*Ueber Maximum und Minimum geometrischer Figuren*, Zeitschr. f. Math., 11, 1866), da R. Sturm (*Bemerkungen und Zusätze zu Steiner's Aufsätzen über Maximum und Minimum*, Journ. f. Math., 96, 1884; *Würfel und reguläres Tetraeder als Maximum und Minimum*, Ib. 97, 1884); *Maxima und Minima in der elementaren Geometrie*, Leipzig 1910); da Sturm e Lampe (*Ueber das Minimum des Inhaltes eines Vierecks bei gegebenen Seiten*, Ib., id.), da Schwarz (*Beweis des Sätzes, dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere Körper gleichen Volumens*); Götting. Nachr., 1884) e da E. Kötter (*Ueber diejenigen Polyeder die bei gegebenen Gattung und gegebenen Volumen die kleinste Oberfläche besitzen*, Jorn. f. Math., 110, 1892).

(2) Cfr. lo studio di C. Segre premesso a *Geometria di posizione di C. G. C. von Staudt, trad. dal tedesco a cura del* D.r M. Pieri (Torino, 1888); inoltre M. Noether, *Zur Erinnerung an K. G. C. von Staudt* (Deutsch. Math. Ver., 32, 1923), R. C. Archibald. *Note on the editions of von Staudt's Geometrie der Lage* (Bull. A. M. S. II, 25, 1918), e C. Juel, *Eine Studie über v. Staudt's Geometrie der Lage* (Congrès des math., Helsinfors 1922).

ricorderemo soltanto la nuova definizione di proiettività ivi esposta, la quale non contiene se non quanto è necessario e sufficiente, e quelle di conica e di quàdrica, le quali, abbracciando anche curve e superficie immaginarie, possono gareggiare con quelle analitiche e al pari di queste sono suscettibili di essere estese a curve e superficie d'ordine qualsivoglia; aggiungeremo che le ricerche sull' immaginario in geometria valsero a fugare lo « spettro » che aveva perseguitato lo Steiner negli ultimi anni della sua vita, e a rendere superfluo il « principio di continuità » che aveva fatto pullulare gli oppositori alle dottrine di Poncelet (1). Altri lavori minori di Staudt contengono applicazioni delle dottrine anzidette, e, dimostrando com' egli sapesse debitamente apprezzare e magistralmente trattare le questioni metriche, fanno rimpiangere che non gli sia stato concesso di dare alla *Geometr e der Lage* una sorella colla *Geometrie des Masses* ch' egli aveva progettata.

Gli è ispirandosi ai concetti di Staudt, anzi svolgendoli egregiamente, che il Juel (nella dissertazione *Bildrag til den imaginaere Linies og den imaginaere Planis Geometri,* Kopenhagen, 1885, e nell'articolo *Ueber einige Grundgebilde der projectiven Geometrie,* Acta, 14, 1889) e il Segre (nel fondamentale gruppo di note sopra *Un nuovo campo di ricerche geometriche,* inserite in Torino Atti, t. 25 e 26, 1890 e 1891) scoprirono nuove corrispondenze e nuove figure che è necessario considerare per esaurire la geometria proiettiva del piano completo (cioè con punti reali e complessi) (2).

Indirizzo completamente differente dalle indagini di Staudt hanno le pubblicazioni di Giulio Plücker (1801-1868) (3), al quale la geometria analitica è debitrice di decisivi progressi; a lui infatti si deve lo sviluppo delle coordinate

(1) Fra tutte le investigazioni di Staudt sono queste indubbiamente le più astruse; perciò i risultati di esse si diffusero più difficilmente pel mondo matematico; a facilitarne l' intelligenza s' industriarono in vario modo il Lüroth (Math. Annalen, 8, 1875 e 11, 1877), l'August (Programm per Friedrichs-Realscule, Berlin, 1872), lo Stolz (1842-1905; cfr. la necrologia scrittane da J. Gmeiner in Monatshefte, 17, 196) (Math. Ann., 4, 1871); Henri J. Stephen Smith (Ann. di Mat., II, 3, 1869-70), H. Wiener (*Rein geometrische Theorie der Darstellung binären Formen durch Punktgruppen auf den Geraden,* Darmstadt 1885) e il Segre (Torino Mem., II, 38, 1886, e Journ. f. Math., 100, 1886). Alla teoria dagli immaginarii di Staudt si collega la « Rechnung mit Würfen » a cui il Lüroth (Mem. citate), lo Sturm (Math. Ann., 9, 1876) e lo Schröder (Id., 10, 1876) dedicarono delle ricerche speciali.

(2) Nella stessa direzione procedettero lo Sforza scrivendo il *Contributo alla geometria complessa* (Giorn. di Mat., 30, 1892).

(3) Cfr. A. Clebsch, *Zum Gedächtniss an Julius Plücker* (Götting. Abh., 15, 1872). Nota a questo proposito giustamente il Beltrami, che « il miglior elogio che si possa fare a Plücker, considerato come geometra, è questo che Clebsch non ha potuto tessere il racconto dei suoi lavori, senza rifare in gran parte la storia della moderna geometria analitica » (Giorn. di Mat., 11, 1873, p. 153). Oltre a numerose memorie pubblicate in massima parte nel *Journal f. Math.*, a Plücker

omogenee e di quelle poliedriche (1), delle coordinate della retta nel piano (2) e del piano nello spazio (3); a lui, tacendo pel momento della geometria della retta nello spazio, di cui tratteremo *ex professo* nel Cap. VII, si devono finalmente svariate ed importantissime applicazioni del « metodo della notazione abbreviata » (4) di cui egli è uno dei creatori (5), e di quello della « numerazione delle costanti » che, spesso ma non sempre, egli seppe adoperare a dovere (6). Se noi ci dispensiamo dall'enumerare in questo momento i nuovi risultati di cui la nostra scienza è a lui debitrice, gli è che riteniamo assai più conveniente il farne cenno descrivendo l'evoluzione successiva delle singole teorie che costituiscono la geometria moderna, teorie alle quali è ormai tempo che ci volgiamo, avendo compiuto lo schizzo del movimento intellettuale che preparò l'epoca attuale. Vedremo così come i grandi di cui ora apprendemmo l'esistenza siano stati seguìti da una numerosa e brillante coorte di discepoli, i quali, spigolando nei campi dissodati dai maestri, mostrarono la fecondità dei semi che questi vi avevano gittati.

---

siamo debitori di cinque grandi opere geometriche; sono: *Analytisch-geometrische Entwickelungen* (Essen, 1828-1831), *System der analytischen Geometrie* (Berlin, 1835; cfr. l' *Anzeige* datane da Plücker stesso Journ. f. Math., 10, 1833), *Theorie der algebraischen Curven* (Bonn, 1839), *System der Geometrie des Raumes* (Düsseldorf, 1846) e *Neue Geometrie des Raumes* (Leipzig, 1868-1869).

(1) *Ueber ein neues Coordinatensysthem* (Journ. f. Math., 5, 1829).

(2) *Ueber eine neue Art, in den analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen* (Ib., 6, 1829).

(3) *Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes* (Ib., 9, 1831); una inesattezza ivi commessa fu rilevata da chi scrive nell'articolo *En relisant une Mémoire de Plücher* (Ens. math. 25, 1926).

(4) *Ueber ein neues Princip der Geometrie und den Gebruch unbestimmter Symbole und Coefficienten* (Ib., 5, 1829); *Analytisch-geometrische Aphorismen* (Ib., 10 e 11, 1831); *Ueber Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung* (Ib. 34, 1847).

(5) Di questo procedimento (immaginato anche dal Bobillier) il Plücker rileva le qualità più pregevoli con le parole seguenti: « Meine Gleichungs-formen sind vollständige Darstellungen graphischer Constructionen in den nichts fremdartiges sich findet; es sind ideale mit analytischen Symbolen hingezeichneten Figuren » (Journ. f. Math., 34, 1847, p. 332).

(6) Niuno ignora quanto sia pericoloso questo artificio del resto fecondissimo (cfr. ad es. la memoria pubblicata dal Küpper nei Math. Ann. 22, 1888); il Plücker che ne conosceva e vantava le qualità, ne conosceva pure gli inconvenienti e spesso riuscì ad evitarli con espedienti descritti dal Clebsch nella Commemorazione dianzi citata.

CAPITOLO II.

Teoria delle curve piane algebriche.

1. La teoria generale delle curve piane nacque dalla geometria cartesiana. È facile rendersi ragione dell'avere tardato sino a questo momento a sorgere una dottrina di così capitale importanza; infatti, la distinzione delle curve algebriche e trascendenti, la nozione d'ordine d'una curva algebrica, l'esatta definizione di curva generale nel proprio ordine, sono tutti concetti che l'analisi non incontra alcuna difficoltà a caratterizzare con pieno rigore, mentre la pura geometria degli antichi non vi riusciva e la pura geometria dei moderni dovette e deve tuttora faticare non poco per gareggiare con la propria sorella.

Che la geometria analitica corazzata con i procedimenti infinitesimali fosse veicolo più di qualunque altro rapido e sicuro per arrivare a conoscere le proprietà comuni a tutte le linee algebriche, è dimostrato dalla facilità (relativa almeno) con cui queste vennero scoperte. Infatti il primo lavoro che si riferisce a questo argomento, l'*Enumeratio linearum tertii ordinis* di Newton, benchè pubblicato nel 1701, sembra stato scritto prima del 1678 (1); ivi sono enunciate tre proposizioni generali assai importanti sulle curve algebriche, le quali sono estensioni di altrettanti teoremi sulle coniche (2). Si dovrebbe, con Chasles, far eco alle parole di G. Cramer (1704-1852), il quale dice essere « da lamentare che Newton siasi contentato di esporre le proprie scoperte, senza corredarle delle relative dimostrazioni, e che abbia preferito il piacere di farsi ammirare a quello di istruire » (3), ove non si riflettesse essere stato il suo silenzio uno stimolo potente a nuove indagini intese a sopperirvi, sicchè l'influenza dell'*Enumeratio* fu quale ogni opera può desiderare. A provarlo ricorderemo il lavoro di Stirling (1692-1770) (4) intitolato *Lineae tertii ordinis Newtonianae sive Il-*

(1) W. Rouse Ball, *A short Account on the History of Mathematics* (Cambridge, 1888) pag. 321.

(2) Il lettore ne troverà gli enunciati in Chasles, *Ap. hist.* (2ª ed., 1875), pp. 144-145. A questo grande geometra siamo debitori di un'elegante applicazione dei teoremi di Newton alla *Construction graphique des tangentes et des rayons de courbure de courbes géométriques* (Bull. de Férussac, 13, 1830), completata più tardi da H. J. Stephen Smith (*On some Geometrical Constructions*, Cambridge Journ., 7, 1852).

(3) V. la prefazione (p. VIII) dell'*Introduction* citata più innanzi.

(4) C. F. Tweedie, *James Stirling, a sketch of his life and works, along with his scientific correspondence* (Oxford, 1922).

lustratio tractatus Newtoni de enumeratione linearum tertii ordinis (Oxoniae, 1717) ed il *Traité des lignes du troisième ordre* (Mém. de l'Acad. pour l'année 1731, Paris, 1733) di Nicole (1683-1758), nei quali, a tacer d'altro, si trova determinato il numero dei punti arbitrari pei quali si può far passare una curva generale di dato ordine e sono dimostrate alcune proposizioni (1) intorno al numero ed alla situazione degli asintoti dalle quali emerge l'identità di comportamento fra essi e le tangenti. Troviamo nuove conferme all'influenza esercitata da Newton nei tentativi di due suoi discepoli, R. Cotes (1682-1716) e C. Maclaurin (1698-1746), di accrescere il numero delle proprietà comuni a tutte le curve algebriche: l'*Harmonia mensurarum* (Cambridge, 1722) del primo e il *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus* (Londra, 1720) (2) del secondo testificano a sufficienza quanto questi tentativi siano stati coronati da buon successo. Di altre proposizioni analoghe siamo debitori a Waring (1736 circa-1798) (3); ma già prima di lui Maclaurin (4) e Braikenridge (✣ 1762) (5), sviluppando alcune idee schizzate da Newton nell'*Enumeratio* (6), arrivarono ad assegnare per le curve d'ordine superiore generazioni organiche assai notevoli, analoghe a quello che questo grande aveva scoperte per le coniche.

2. I teoremi generali testè nominati sono d'indole metrica; malgrado la tendenza verso il campo proiettivo che da circa un secolo domina la geometria, i matematici vollero e seppero aggiungere a quelle nuove proposizioni analoghe, non prive d'importanza e valore. Citeremo fra queste anzitutto il seguente: « il centro delle medie distanze dei punti di contatto delle tangenti d'una curva algebrica aventi una stessa direzione, non muta al variare di questa », che Chasles fece conoscere nei due *Mémoires sur la transformation des figures* inseriti nella *Correspondance mathématique* (5 e 6, 1829 e 1830). Va poi ricordato il *Mémoire sur la théorie des diamètres rectilignes des courbes*

(1) Sono riprodotte nell'*Introduction* di Cramer, pp. 342-351.

(2) Tradotto in francese da E. de Jonquières ed inserito in appendice al *Mélanges de géométrie pure* (Paris, 1856).

(3) *Miscellanea analytica de aequitatibus algebraicis et curvarum proprietibus* (Cambridge, 1762); *Proprietates algebricarum curvarum* (Ib., 1772; Phil. Trans., 1763 e 1764). Nel primo di questi scritti in particolare è osservato (p. 100) essere la classe di una curva di ordine n inferiore a n^2, e altrettanto potersi dire pel numero delle normali uscenti da un punto qualunque.

(4) *Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis* (London, 1720; cfr. Phil. Trans., 1719, e de Jonquières, *Note sur la géométrie organique de Maclaurin contenant diverses applications des théories de la géométrie moderne*, Journ. de Math., II, 2, 1857).

(5) Mancano dati biografici precisi su questo geometra; lo osserviamo sperando che qualcuno vorrà occuparsi di cercarli. L'opera a cui alludiamo nel testo è l'*Exercitatio geometriae de descriptione linearum curvarum* (1733, cfr. Phil. Trans., 1735).

(6) Cfr. C. Taylor *On Newton's organic Description of Curves* (Cambridge Proc. 3, 1880).

quelconques (Journ. f. Math., 14, 1849) di P. L. Wantzel (1814-1848), la grande memoria di Steiner *Ueber solche algebraische Curven welche einen Mittelpudkt haben* ecc. (Journ. f. Math., 47, 1854), le note di Chasles intitolate *Propriétés des diamètres des courbes géométriques* (C. R., 72, 1871), *Propriétés générales des courbes géométriques relatives à leurs axes harmoniques* e *Théorèmes relatifs aux axes harmoniques des courbes géométriques* (C. R., 73, 1871) (1), ed il più recente scritto di E. Ciani *Le linee diametrali delle curve algebriche piane e in particolare i loro assi di simmetria* (Pisa Ann., 6, 1889). Al primo dei citati scritti di Chasles si collega il notevole scritto di J. Liouville (1807-1882) *Sur quelques propositions générales de géométrie et sur la théorie de l'élimination dans les équations algébriques* (Journ. de Math., 6, 1841; cfr. Fouret *Démostration et application d'un théorème de Liouville sur l'élimination;* Nouv. Ann., III, 9, 1890), la continuazione di esso intitolata *Développements sur un théorème de géométrie* (Journ. de Math., 9, 1844), e i complementi che esso ricevette per opera di J. Duhamel (1797-1872) e di O. Terquem (1782-1862), e che quest' ultimo espose nell'articolo *Démonstration du théorème de M. Chasles sur les tangentes parallèles et les plans tangents parallèles* (Nouv. Ann., 4, 1845). Invece alcune delle proposizioni che sono enunciate nella memoria di Steiner furono dimostrate (dopo d'averle sottoposte ad una trasformazione proiettiva) dal Güssfeldt nel lavoro *Ueber Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen, und darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner algebraischer Curven, mit besonderer Berücksichtigung der Curven dritter Ordnung* (Math. Ann., 2, 1870) e da C. J. Bobek (1855-1899) nella nota *Ueber die Steinerschen Mittelpunktscurven* Wiener Ber., 98, 1889). Nè vanno dimenticati l'altro scritto di Steiner *Von dem Krümmungs-Schwerpunkt ebener Curven* (Journ. f. Math., 21, 1840; cfr. C. Neumann (1832-1922) (2) *Sul baricentro di curvatura delle curve algebriche*, Ann. di Mat., II, 1, 1868), l'*Indication de quelques théorèmes de géométrie* (C. R., 20, 1845) e la *Note sur les centres des lignes et des surfaces algébriques* (Journ. de Math., 11, 1846) del Bréton (de Champ) (1814-1885), (3) la nota *Di alcune proprietà generali delle curve algebriche* (Giorn. di Mat., 4, 1866) di E. Beltrami (1835-1900) (3) nonchè le memorie di F. Minding (1806-

(1) Altre proposizioni congeneri del medesimo autore verranno citate nel n. 9 del cap. IX.

(2) O. Hölder, *C. Neumann* (Math. Ann. 96, 1926): H. Liebmann, *Zur Grimerung an Carl Neumann* (Deutsch Math.—Ver. 36, 1927).

(3) L. Cremona, *Commemorazione di E. Beltrami* (Lincei Atti 1900; riprodotta nel T. I. Milano 1902, delle *Opere matematiche di E. Beltrami*); G. Loria, *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche* (Bibl. matem. III, 2, 1901); E. Pascal, *Commemorazione di Beltrami* (Rend. Ist. Lomb. II, 34, 1901); ecc.

1885) (1) *Sur la somme des carrés de toutes les droites qui à partir d'un point donné coupent sous un angle donné une courbe algébrique* (Journ. f. Math., 11, 1834), di G. Fouret *Sur quelques propriétés relatives aux points d'incidence des droites issues d'un même point et rencontrant une courbe algébrique sous un même angle* (Palermo Rend., 5, 1891) e del Birkeland *Ein Satz über algebraische Curven* (Monatsheft, 1, 1890); nè si possono passare sotto silenzio il *Mémoire sur les polaires inclinées* (Nouv. Ann., 18 e 19, 1859 e 1860) del Dewulf e le geniali ricerche dell'Hurwitz *Ueber Tangentencostructionen* (Math. Ann., 22, 1883), aventi lo scopo di generalizzare l'*Einfache Construction der Tangenten an die allgemeine Lemniscate* inventata da Steiner (Journ. f. Math., 14, 1835).

Malgrado il valore di questi scritti, si può ritenere che la chiave per impadronirsi delle più interessanti e riposte proprietà metriche delle curve sia stata somministrata ai geometri da Plücker con la generalizzazione che egli — inspirandosi senza dubbio a Poncelet—propose per l'antica nozione di fuoco d'una conica, nella celebre memoria *Ueber solche Punkte, die bei Curven einen höheren Ordnung als der zweiten den Brennpunkten der Kegelschnitte entsprechen* (Journ. f. Math., 10, 1833; cfr. Siebeck *Ueber eine neue Behandlungsweise der Brennpunkte*, Ib., 64, 1865). Chi voglia convincersi della verità di quest'asserzione non ha che da consultare le memorie che da essa derivano e di cui le seguenti sono forse le più importanti (2): E. Laguerre (1834-1886) (3) *Théorèmes généraux sur les courbes planes algébriques* (C. R., 60, 1865), *Sur quelques propriétés des courbes algébriques* (Id., 70, 1875) e *Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques* (Bull. S. M. F., 3, 1875); W. K. Clifford (1845-1879) (4) *On the Theory of Distances* (Brit. Ass. 1869; cfr. Mathematical Papers, London, 1882, p. 147-151 e 612); E. Holst, *Ein paar allgemein metrische Sätz für algebraische Curven* (Math. Ann., 11, 1877) e *Ein Paar synthetisches Methoden in der metrischen Geometrie mit Anwendungen* (Lie Arch., 7, 1882); C. Stéphanos (1857-1917), *Sur*

(1) A. Kneser, *Übersicht der wissenschaftlichen Arbeiten F. Mindings, nebst biographischen Notizen* (Zeit. f. Math. 45, 1900).

(2) Chiediamo venia al lettore per questo ed altri aridi elenchi di lavori, che non possiamo omettere, e confidiamo che il perdono non ci verrà negato da chi rifletta essere l' opera presente, piuttosto che una *guida*, un *orario ferroviario* in cui pertanto si troveranno meno descrizioni, che enumerazioni di poesi; possa esser dessa di giovamento a chi sta per tracciare il proprio itinerario scientifico !

(3) E. Rouché, *Edmond Laguerre, sa vie et ses travaix* (Journ. Sc. pol., 56 arch., 1887; H. Poincaré, l'refazione al T. I delle *Oevres de Laguerre*, (Paris, 1898).

(4) V. la prefazione di R. Tucker e l'introduzione di H. J. S. Smith in *Mathematical Papers by W. K. Clifford* (London, 1882).

certaines directions de transversales des courbes algébriques qui correspondent aux directions des axes de coniques (Bull. S. M. F., 9, 1881); M. Pieri (1860-1913) (1), *Sopra alcuni problemi riguardanti i fasci di curve e di superficie algebriche* (Giorn. di Math., 24, 1886); G. Humbert (1859-1921), *Sur quelques propriétés métriques des courbes* (Nouv. Ann. III, 6, 1887); Fouret, *Sur quelques propriétés involutives des courbes algébriques* (Palermo Rend. 3, 1889); Amigues, *Théorème sur les foyers d'une courbe quelconque* (Nouv. Ann., III, 11, 1892); P. H. Schoute (1846-1913). *Sur une relation générale dans la théorie des courbes planes* (Acad. d'Amsterdam, Verslagen, 1892-93); Gob, *Extension et application du théorèm de Newton* (Belgique Bull. III, 28, 1894).

3. Mentre le verità ricordate nel n. 1 furono in massima parte scoperte coll'aiuto delle coordinate cartesiane, all'analisi infinitesimale siamo debitori della conoscenza della esistenza e delle proprietà di punti speciali sulle curve. Tacendo dei *flessi*, che vennero studiati per la prima volta metodicamente nell'appendice alla seconda edizione (1668) del *Mesolabium* di R. F. de Sluse (1622-1685), il quale considerò anche le curve che tagliano una data nei propri punti d'inflessione, ricorderemo che nel carteggio di Giovanni Bernoull (1667-1748) con Leibniz (*Leibnizisens Math. Schriften*, ed. Gerhardt, 3, p. 185) del luglio 1695 è discorso delle *cuspidi*, la cui presenza è segnalata nella parabola semicubica. Che un punto di tal natura sia caso speciale di un punto doppio avvertì più tardi il Saurin (1659-1737) nella memoria intitolata *Remarques sur un cas singulier du problème des tangentes* (Paris, 1723); che, oltre alle cuspidi dell'anzidetta specie, altre ne esistano, osservò il marchese de l'Hôpital (1661-1704) nella sua ben nota *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Parigi, 1696) (2) e la nuova singolarità apparve ad Eulero abbastanza importante per dedicarvi un lavoro speciale (3). Nè sfuggì l'esistenza di punti in cui la tangente ha con la curva un contatto ancor più intimo d'una tangente d'inflessione; infatti il Maupertuis (1698-1759) nella memoria *Sur quelques affections des courbes* (Mém. de Paris, 1729) considerò il caso del contatto di terzo ordine, mentre del caso generale trattò più tardi il Cramer nella grande opera che esamineremo fra breve. Aggiungiamo

(1) B. Levi, *Mario Pieri* (Boll. di bibl. e st. 15, 1913).

(2) Cfr. Eneström *Sur la parte de Jean Bernoulli dans la publication de l'« Analyse des infiniment petits »* (Bibl. math. 1894).

(3) *Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le marquis de l'Hôpital* (Mém. de Berlin, 5, 1749); vedi anche Cayley, *On the Cusp. of the second Kind or Nodecusp* (Quart. Journ., 6, 1864, o Collected Papers, T. V).

che ad uno dei più abili commentatori di Cartesio, cioè l'abate de Gua de Malves (1714-1785), siamo debitori (1) dei criteri analitici per riconoscere i punti multipli delle curve piane e quindi di un metodo per assegnarne le coordinate.

4. I lavori citati nei nn. 1 e 3 portarono ad un numero considerevole le cognizioni intorno alle curve piane in generale, sicchè verso la metà del secolo XVIII a due eminenti geometri parve giunto l'istante di raccoglierle, coordinandole: alludiamo a Leonardo Eulero e Gabriele Cramer, al secondo volume dell'*Introductio in analysin infinitorum* (Lausannae, 1748) di quello, all'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève, 1750) di questo, opere che per ineluttabile necessità dovevano avere ed effettivamente presentano molti punti di contatto. Alcune delle investigazioni ivi esposte — per esempio quelle su i diametri, gli asintoti (2) ed i centri (quando esistono) — perdettero buona parte del loro valore dopo che si apprese a considerare le proprietà metriche come casi particolari delle proiettive (v. Cap. X); ma altre meritano un posto eminente essendo state il punto di partenza per ulteriori ricerche importanti. Rileveremo anzitutto l'uso della rappresentazione parametrica delle coordinate dei punti d'una curva (Cramer, p. 33; cfr. *Introductio*, I, p. 39-46), poi le osservazioni di Cramer (l. c., p. 78-79) e di Eulero (*Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes*, Mém. de Berlin, 4, 1748) intorno alla possibilità di far passare una curva d'ordine n per più di $\frac{n(n+3)}{2}$ punti, osservazioni importantissime, che diedero origine al così detto « paradosso di Cramer », proposizione che scienziati posteriori si sforzarono di depurare da ogni traccia d'eccezionalità. Ricorderemo anche il teorema « se degli $\frac{n(n+3)}{2}$ punti per cui deve passare una curva d'ordine n, più di mn si trovano su una curva dell'ordine $m < n$, la curva d'ordine n è composta » (Cramer, l. c., p. 78), il quale può riguardarsi come la prima pietra di quel grandioso monumento costruito con una folla di bei teoremi di Gergonne (3), di

(1) *Usage de l'analyse des Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés des lignes géométriques de tous les ordres* (Paris, 1740). Che quest'opera, malgrado i suoi pregi, non sia esente da gravi imperfezioni, è detto senza reticenze da Cramer nella prefazione all'*Introduction* già menzionata.

(2) Notiamo a questo proposito con S. Günther (*Albrecht Dürer, einer der Begründer der neueren Curventheorie*, Bibl. math. 1886) che la nozione di asintoto curvilineo si può far risalire ad Alberto Dürer (1471-1528) che vi alluse nel 1525.

(3) *Sur quelques lois qui régissent les lignes et les surfaces algébriques* (Ann. de Math. 17, 1826-27).

Plücker (1), di Jacobi (2), di Cayley (3) ed in cima al quale si trova l'interpretazione geometrica del celebre teorema di Abel (4).

E giacchè l'ordine cronologico ci costrinse a considerare simultaneamente le due opere congeneri di Cramer e di Eulero, non possiamo esimerci dal paragonarle fra loro e constatare come la prima sia discutibilmente superiore alla seconda: donde la ragione per cui essa trova oggi assai più lettori di questa. Anche tacendo del fatto che nell'*Introduction* si trova determinato il numero delle intersezioni di due curve piane algebriche qualisivogliano, perchè la stessa questione venne da Eulero trattata nella memoria intitolata *Démonstration sur le nombre des points où deux lignes d'un ordre quelconque peuvent se couper* (Mém. de Berlin, 4, 1748), importa per converso ricordare l'esame minuzioso (p. 562-568) di tutte le complicazioni che possono presentare i punti multipli d'una curva d'ordine < 7, e le osservazioni (p. 455-59) intorno al numero ed alla molteplicità dei punti singolari che può avere una curva di dato ordine: e queste fanno riscontro all'errore grave commesso da Eulero (op. cit., n. 300, p. 164), asserendo che una curva del quart'ordine non può avere più di due punti doppi e una del quinto più di tre, errore del quale vi è tanta maggior ragione di meravigliarsi in quanto che sembra dovesse impedirgli di commetterlo l'enumerazione da lui fatta (p. 31-32) delle curve degeneri d'un dato ordine.

5. Altri risultati particolari conseguiti da Eulero e Cramer per l'esiguità di spazio debbono venir qui passati sotto silenzio. Ma altrettanto non è per-

---

(1) *Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés* (Ivi, 19, 1828, 1829) e *Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues* (Journ. f. Math. 16, 1837; alcune inesattezze che vi si trovano furono segnalate da A. Schönflies a p. 608 di *Julius Plückers Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, 1, Leipzig 1895).

(2) *De relation, quae locum habere debent inter puncta intersectionis*, ecc. (Journ. f. Math., 15, 1836).

(3) *On the Intersections of Curves* (Cambridge Journ., 3 1845), *On the Theory of Algebraic Curves* (Ivi, 4, 1845), *On the Theory of Involution in Geometry* (Cambridge and Dubl. math. Journ. 2, 1847) e *On the Intersection of Curves* (Math. Ann., 30, 1887); quest'ultima nota in risposta alle osservazioni contenute nell'articolo del Bacharach *Ueber den Cayley'sche Schnittpunctsatz*, Ib., 26, 1886). Si veda anche l'articolo dello Zeuthen *Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés* (Ib., 31, 1888).

(4) Nei tre articoli di F. Woepcke (1826-1864) intitolati: *Nouveaux théorèmes relatifs aux intersections de certains systèmes de courbes ou de surfaces* (Journ. de Math. 20, 1855), *Propriétés générales des courbes algébriques et théorèmes sur les coniques homothétiques* (Journ. f. Math. 53, 1856) e *Propriétés d'un systhème de courbes algébriques ayant en commun un certain nombre de points* (Id., 54, 1857), sono esposte alcune ovvie conseguenze di teoremi noti sui punti d'intersezione di curve.

messo di fare riguardo ad un progresso assai notevole di cui la teoria delle curve piane (anzi, più generalmente, quella dei luoghi rappresentati ciascuno da un'equazione fra le coordinate d' un punto) è debitrice ad uno studente della Scuola delle miniere di Parigi, Gabriele Lamé (1795-1870) (1), il quale inaugurò la propria carriera di scienziato coll' *Examen des différentes méthodes emploées pour résoudre les problèmes de géométrie* (Paris, 1818), ov' è dimostrata, mediante molteplici applicazioni, la fecondità della osservazione (designata oggi col nome di « principio di Lamé ») che l' equazione $\lambda U + \mu V + ... = 0$ rappresenta la totalità dei luoghi passanti pei punti comuni ai luoghi $U = 0$, $V = 0$,...

Una trasformazione radicale subì la teoria che ci occupa per merito di Plücker. Infatti nel *System der analytischen Geometrie* (1835) (2) è per la prima volta considerata metodicamente una curva piana ad un tempo come luogo di punti e come inviluppo di rette ed è mostrato come sia conveniente questo doppio modo di studiare una medesima figura; inoltre è ivi ampliato il concetto di coordinate sì da abbracciare anche coordinate omogenee e poligonali (3), sì da includere anche le rette. L'importanza di queste innovazioni è visibile già nell'opera ora citata, ma si manifesta in modo ancora meno discutibile nella posteriore *Theorie der algebraischen Curven* (1839), nella cui introduzione si ritrovano quei teoremi sulle intersezioni di curve citati nel n. prec. e delle cui due parti dobbiamo ora dire qualche parola. La prima tratta un tema oggi fuor di moda, la teoria degli asintoti: se si paragona il modo in cui lo considera Plücker con le trattazioni anteriori, si ravviserà senza stento come questi abbia ampliata e approfondita tale teoria col considerare, non solo gli ordinari asintoti curvilinei, ma ancora quelli che hanno colla curva un contatto d'ordine superiore e sia per tal modo riuscito a correggere alcuni errori concernenti le curve piane di quart'ordine che Eulero aveva divulgati con la sua

---

(1) J. Bertrand, *Eloges académiques* (Paris, 1890).

(2) In questo anno medesimo apparvero altre due opere sulla teoria che stiamo trattando; una postuma di K. C. F. Krause (1781-1832) (*Novae theoriae linearum curvarum originariae et verae scientificae specimina quinque prima*; edidit H Schröder, Monachii), l'altra di A. Peters (1803-1876) (*Neue Curvenlehre*, Dresden); entrambe si proposero di sostituire alla geometria cartesiana un metodo meno artificioso (tale intento è dichiarato nel proemio della seconda di queste opere); lo scopo non è certamente ragionevole, ma il tentativo è fallito; ed è il caso di tenerne conto soltanto come di un avviamento allo studio delle curve e superficie con *elementi intrinseci*, indipendenti cioè da uno speciale sistema di coordinate, benchè chi più tardi immaginò tali importantissime rappresentazioni non abbia tratto certamente la propria ispirazione dai due scritti or citati, nè gli autori di questi siansi avveduti della portata delle loro idee.

(3) Cfr. la chiusa del Cap. I. Idee analoghe s' incontrano in Bobilier (*Essai d' un nouveau mode de recherche des propriétés de l' étendue*, Ann. de Math., 18, 1827-28).

Introductio (1). Nella seconda parte della *Theorie* trattò a fondo delle proprietà dei punti singolari delle curve piane, teoria di cui egli si può considerare per il vero creatore (2); ivi infatti egli, non soltanto ha insegnato a distinguere chiaramente le singolarità dei luoghi dalle singolarità degl' inviluppi ed a caratterizzare senza ambiguità le singolarità ordinarie degli uni e degli altri, ma ha stabilite le relazioni che intercedono fra le sei caratteristiche di una curva piana esente da singolarità eccezionali (3). Sono queste le celebri « formole di di Plücker », mediante le quali venne definitivamente sciolto il così detto « paradosso di Poncelet », cioè quell'apparente contraddizione (4) che s'incontra se si applica, senza riguardo ai punti singolari, la formola che dà il numero delle tangenti d' una curva algebrica uscenti da un punto e poi, servendosi della formola correlativa, si vuol ritrovare l'ordine della curva data (5). Le sei caratteristiche con cui Plücker definì una curva piana con sole singolarità ordinarie sono a due a due correlative; ora si presenta il fatto notevole che, tranne per quattro curve speciali, l' uguaglianza di due caratteristiche fra loro correlative, trae seco che la curva sia correlativa a sè stessa, cioè che anche le caratteristiche correlative delle altre due coppie siano fra loro identiche (6).

6. Alle formole di Plücker sono collegate parecchie questioni, di cui due si presentano spontaneamente.

La prima riguarda la loro invertibilità, vale a dire il problema: « a sei numeri arbitrarî che le soddisfino corrisponda sempre una curva piana? »;

---

(1) Queste investigazioni di Plücker vennero recentemente riprese e condotte a perfezione dallo Stolz nella memoria *Allgemeine Theorie der Asymptoten der algebraischen Curven* (Math. Ann., 11, 1877).

(2) Per convincersene si confrontino colla trattazione del Plücker quelle del Lacroix, nel 3° vol. del suo grande *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797-1800), e del Poisson nella nota *Sur les points singuliers des courbes* (Jorn. Ès. pol., 14° cah., 1808).

(3) Cfr. anche la chiusa al *Systh. der an. Geom.* e gli articoli: *Solution d' une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes* (Journ. f. Math., 12, 1834) e *Note sur les points singuliers des courbes* (Journ. de Math., 2, 1837).

(4) Cfr. Poncelet, *Solutions de problèmes de géométrie, suivies d' une théorie des polaires réciproques et de réflexions sur l' élimination* (Ann. de Math., 8, 1818, oppure *Applications d'analyse et de géométrie*, 2, Paris, 1864).

(5) Fra le dimostrazioni più recenti delle formule di Plücker ricorderemo quella che si legge nell'articolo del Beck, *Eine elementare Herleitung der Plücker'schen Formeln* (Wolf Zeitschr.; 30, 1889) e quella che, con una lieve aggiunta che ho indicato nella recensione d' un' opera di R. Sturm (Bull. Sc. math., II, 17, 1893 p. 259), si desume da una osservazione del Bischoff (*Extrait de deux lettres à M. Cremona*, Ann. di Mat., II, 6, 1873-75).

(6) Plücker, a pag. 212 della citata *Theorie*; e più completamente Bioche, *Sur les singularités des courbes algébriques planes* (Bull. S. M. F., 20, 1892).

riserbandoci di tornare più avanti su tale questione, limitiamoci per ora a osservare che tutti questi numeri non si possono certamente scegliere completamente ad arbitrio, dal momento che il numero delle cuspidi non può oltrepassare un certo limite (1).

La seconda questione invece si riferisce all'estensione delle formole di Plücker a curve piane dotate di singolarità qualunque e può oggi considerarsi per risoluta; e noi non possiamo far meglio che rimandare il lettore alla VI sezione dell'importante scritto di A. von Brill (2) e M. Nöther (1844-1922) (3) intitolato *Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit* (Deutsch. Math.-Ver., 3. 1892-93) ove sono luminosamente esposti i più cospicui risultati consegnati nei lavori a cui si deve la fondazione e lo sviluppo di tale teoria e dei quali, per mancanza di spazio, noi siamo forzati a ricordare qui i soli titoli: Cayley, *Note sur les singularités supérieures des courbes planes* (Journ. f. Math., 64, 1865), *On the higher Singularities of a Plane Curve* (Quart. Journ., 7, 1866), *Nouvelles recherches sur l'élimination et la théorie des courbes* (Journ. f. Math., 63, 1864) e *Suite des recherches sur l'élimination et la théorie des courbes* (Ib., 64. 1865); Nöther, *Ueber die algebraischen Functionen*, II Nota (Götting. Nachr., 1871), *Ueber die singulären Werthsysteme einer alg. Functione und die singulä en Punkte einer algebraische Curve* (Math. Ann., 9, 1875), *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der alg. Functionen* (Ib., 23, 1883), *Zum Fundamentalsatz aus der Theorie der alg. Functionen* (Ib., 34, 1889), e *Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier* (Palermo Rend., 4. 1890); Stolz, *Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven* (Math. Ann., 8, 1874) e *Die Multiplicität der Schnittpunkte zweier algebraischen Curven* (Ib., 15, 1879); de la Gournerie (1814-1883) (4), *Note sur les singularités élevées des courbes planes* (Jorn. de Math., II, 14 e 15, 1869-70) e *Note sur le nombre des points d'intersection qui*

(1) Lo dimostrò F. Padula (1815-1881) nel notevole scritto che tratta *De' punti multipli delle curve algebriche* (Tortolini Ann., 3, 1832), scritto ricco di altri risultati originali. Pel caso di curve razionali il limite corrispondente fu trovato da Clebsch nella sua memoria sulle curve di genere 0, di cui parleremo nel n. 13 (cfr.: anche *Vorlesungen über Geometrie*, I Bd., Leipzig, 1876, p. 352); di più: J. C. Malet, *On a Limit to the Number of Cusps belonging to a Plane Curve of any Order* (Hermathema, 1880) e A. Pellet, *Sur le nombre des points multiples d'une courbe algébrique et les courbes unicursales* (Nouv. Ann., II, 20, 1881).

(2) F. Severi, *Alexander v. Brill zum achzigsten Geburtstage am 20 September 1922* (Deutsch. Math. Ver. 31, 1922).

(3) A. Brill, *M. Noether* (Deutsch. Math. Ver. 32, 1923); G. Castelnuovo, F. Enriques, F. Severi, *M. Noether* Math. Ann. 93, 1925).

(4) J. Bertrand, *Éloges accadémiques* (Paris 1890).

représente un point multiple commun à deux courbes planes (C. R., 77, 1873); L. Painvin (1826-1875), *Sur l'abaissement de la classe d'une courbe produit par la présence d'un point de rebroussement* (Bull. Sc. math., 4, 1873), e *Note sur l'intersection de deux courbes* (Ib., 5, 1874); Halphen, *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre* (Bull. S M.. F., 1, 1873), *Sur les points singuliers de courbes algébriques planes* (Mém. prés., 26, 1877), *Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier* (Bull. S. M. F., 3, 1875), e *Étude sur les points singuliers* (Paris, 1884); H. J. Stephen Smith (1826-1883) (1), *On the higher Singularities of Plane Curve* (Proc. L. M. S., 6, 1876); H. G. Zeuthen (1839-1919) (2) *Note sur les singularités des courbes planes* (Math. Ann., 10, 1876), e *Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative* (Acta 1, 1883); A. von Brill, *Ueber Singularitäten ebener algebraischen Curven und eine neue Curvenspecies* (Math. Ann., 16, 1889), *Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven* (Münchener Ber., 1888), *Ueber das Verhalten einer Function von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nellstelle* (Ib., 1891) e *Ueber die Auflösung höherer Singularitäten einer algebraischen Curve in elementare* (Katalog der math. Ausstell., München, 1892); Kronecker (1823-1891) (3) *Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabel* (Journ. f. Math., 91, 1881); G. B. Guccia (1855-1914) (4) *Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes* (C. R., 103, 1886) e *Sulle singolarità composte delle curve algebriche piane* (Palermo Rend., 3, 1889); Cosserat, *Sur l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points* (Toulouse Ann., 4, 1890); Bertini, *Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve algebriche piane* (Rend. Ist. Lomb., II, 21, 1888), *Sul numero dei punti di diramazione di una singolarità qualunque di una curva piana algebrica* (Ib., 23, 1890), *Zum Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen* (Math. Ann., 34, 1889), *Sopra un teorema del sig. Netto* (Ib., 35, 1890) *Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre* (Rend. Ist. Lomb., II, 24, 1891) e *Trasformazione di una curva algebrica in un'altra con soli punti doppii* (Riv. di Mat., 1, 1891, oppure Math. Ann., 44, 1894); Pieri, articolo dallo stesso titolo

---

(1) Cfr. i preliminari della pubblicazione *The collected Mathematical Papers of Henry John Stephen Smith edited by* J. W. L. Glaisher (Oxford, 1894).

(2) M. Nöther, *Hieronymus George Zeuthen* (Math. Ann. 83, 1921).

(3) Cfr. H. Weber *Leopold Kronecker* (Math. Ann., 43, 1893, A. Kneser, *L. Kronecker* (Deutsch. Math. Ver. 33, 1924).

(4) M. de Franchis, *G. B. Guccia* (Palermo Rend. 39, 1915).

(Riv. di Mat., 4, 1894) (1); Miss C. A. Scott, *On the higher Singularities of Plane Curves* (Am. Journ., 14, 1892 e 15, 1893); A. Voss, *Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der alg. Functionen* (Math. Ann., 27, 1886); H. F. Baker, *Examples of the Applications of Newton's Polygon to Theory of Singular Points of Algebraic Functions* (Cambridge Trans., 15, 1894; cfr. Math. Ann., 45, 1894); H. W. E. Jung, *Singuläre Punkte ebener algebraischen Kurven* (Math. Ann. 84, 1921) (2).

Riguardo a queste ricerche ci limiteremo ad osservare che esse rivelarono la possibilità di applicare le formole di Plücker a curve comunque specializzate mostrando come ogni singolarità superiore equivalga (almeno per ciò che concerne quelle formole) a un certo numero di punti doppi e di cuspidi, di tangenti doppie e di flessi; esse inoltre obbligarono a determinare esattamente quante intersezioni di due curve sono assorbite da un punto comune singolare per entrambe, nonchè le condizioni di rappresentabilità di una forma ternaria con una combinazione lineare di due altre.

7. Il largo uso fatto da Plücker del principio di dualità non sembra fosse ritenuto sufficientemente legittimo dai suoi contemporanei; lo prova il fatto che un suo eminente compatriota credette opportuno, fors'anche necessario, di confermare con un calcolo diretto l'esistenza di $\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$ tangenti doppie e $3n(n-2)$ flessi in una curva generale d'ordine n; noi, benchè non possiamo dividere quei dubbi, dobbiamo essere riconoscenti a quegli scrupoli, perchè ad essi siamo debitori di una memoria di Jacobi estremamente notevole (3), ove è insegnato a trovare mediante il calcolo i punti di contatto delle tangenti doppie ed i punti d'inflessione di una curva qualunque.

Nelle indagini di tal fatta Jacobi venne seguito dal suo celebre discepolo Otto Hesse (1811-1874) (4), il valente geometra che seppe per primo metodica-

(1) Allo stesso teorema si riferisce la nota del Simart, *Sur un théorème relatif à la transformation des courbes algébriques* (C. R., 116, 1893).

(2) Se fra i lavori citati non si trova l'*Étude de la courbure en un point multiple d'une courbe plane* del Painvin (Ann. di Mat., II, 4, 1870-71), è perchè questo si riferisce a una questione metrica. Per converso ad essi vanno uniti due lavori dello Zeuthen, che trattano problemi affini a quelli ora considerati; cioè la *Détermination des nombres plückeriens des enveloppes* (C. R., 78, 1874) — ove, fra l'altro, si trova la nozione di « genere d'un sistema di curve piane » — e la memoria *Sur un groupe de théorèmes et de formules de la géométrie énumérative* (Acta 1, 1882-83).

(3) *Beweis des Satzes, dass eine Curve* n^{ten} *Ordnung im Allgemeinen* $\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$ *Doppeltangenten hat* (Journ. f. Math., 40, 1850).

(4) Cfr. G. Bauer, *Gedächtnissrede an Otto Hesse* (München, 1882); inoltre *O. Hessés Lebenslauf* stampato in fine di *L. O. Hesse's Gesammelte Werke* (München, 1897).

mente applicare i risultati della teoria delle equazioni algebriche alla ricerca delle proprietà delle curve e superficie di ordine qualsivoglia (1). In analoga direzione procedette Hesse medesimo della memoria *Ueber die Wendepunkte der algebraischen ebenen Curven und die Schmiegungsebenen der Curven von doppelter Krummung welche durch den Schnitt zweier algebraischen Oberflächen entstehen* (Journ. f. Math., 41, 1851), G. Salmon (1819-1904) (2) nell'articolo *On the Double Tangents to Plane Curves* (Phil. Mag., ottobre 1858) ed il Cayley nella nota *On the Double Tangents of a Plane Curve* (Phil. Trans., 149, 1859), il quale ultimo allargò ancora ed approfondì tale campo di indagini nelle grandi memorie *On the Conic of five-pointic Contact at any point of a Plane Curve* (Phil. Trans., 149, 1859) e *On the sextactic Points of a Plane Curve* (Ib., 155, 1865 (3): cfr. W. Spottiswoode (1825-1883) *On the sextactic Points of a Plane Curve*, lvi); la ben nota scrittura di A. R. F. Clebsch (1833-1872) (4) *Ueber eine Classe von Eliminationsproblemen und über einige Punkte der Theorie der Polaren* (Journ. f. Math., 58, 1861) si accosta a queste, perchè mostra nuove eleganti applicazioni dell'algebra moderna alla geometria; lo stesso dicasi riguardo alla nota del Pasch, *Ueber eine Eigenschaft der reciproken Curven* (Ib., 74, 1872).

Delle questioni su cui testè c'intrattenemmo e di tutte le altre attinenti alla teoria analitica delle curve piane, è agevole prendere oggi esatta cognizione grazie ad uno dei pregevolissimi trattati che fecero di Giorgio Salmon uno dei più efficaci cooperatori alla diffusione dei recenti metodi algebrici e geometrici (5). In particolare si apprende da esso almeno il primo stadio dell'applicazione alla

---

(1) Si veggano le memorie sulle curve di quarto ordine che saranno citate nel n. 12 del presente capitolo; inoltre *Auszug dreier Schreiben von Herrn Prof. Hesse und eines Schreibens an Herrn Prof. Hesse* (Journ. f. Math., 40, 1850).

(2) M. Noether, *G. Salmon* (Math. Ann. 61, 1905).

(3) Riguardo a quest' ultima osserveremo in primo luogo, come il Battaglini opinasse che il numero, trovato da Cayley, pei punti (sestatici) in cui una curva generale ha con una conica un contatto di 5° ordine, potesse determinarsi colla ben nota « teoria dei reciprocanti » di Sylvester (cfr. Am. Journ., 8, 1886); ma delle ricerche istituite in proposito soltanto un frammento ha visto la luce (v. la nota *Sui punti sestatici di una curva qualunque*, Lincei Rend., IV, 4_2); e in secondo luogo che le modificazioni subite da quel numero per l' intervento di singolarità della curva vennero determinate dall' Halphen nella memoria *Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré* (Bull. S. M. F., 4, 1876) e verificate poi dal Gerbaldi nella nota *Sui punti sestatici delle curve algebriche piane* (Palermo Rend., 4, 1890).

(4) Cfr.: *Zum andenken an Rudolf Friedrich Alfred Clebsch* (Math. Ann. 6, 1873); *Rudolf Friedrich Alfred Clebsch. Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leitungen, von enigen seiner Freunden* (Ib., 7, 1874).

(5) Alludo qui al *Treatise on Higher Plane Curves*, pubblicato per la prima volta 1852, ristampato in seguito e tradotto in parecchie lingue.

geometria della teoria delle funzioni dotate di carattere invariantivo, la quale fin d'allora si palesò come il metodo naturale per esprimere e studiare le relazioni fra curve che non si perdono per trasformazioni omografiche, in particolare per trattare le curve covarianti che portano il nome di Steiner, di Hesse, di Cayley (1) e di altri (2). Quella teoria si dimostrò poi ancora più ubertosa di risultati geometrici quando venne svolta coll'uso metodico della notazione simbolica: lo pose in luce forse per primo il Clebsch — al quale, com'è noto, l'algebra moderna deve moltissimo — valendosene per esporre il metodo di Jacobi per determinare le tangenti doppie nell'articolo modestamente intitolato *Bemerkung zu Jacobi's Beweis für die Anzahl der Doppeltangenten* (Journ. f. Math., 63, 1864; cfr. Dersch, *Doppeltangenten einer Curven* n^{ter} *Ordnung*, Math. Ann., 7, 1874), lo dimostrò più largamente, ispirandosi appunto a Clebsch, F. Lindemann con le ben note *Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch* I. Bd., Leipzig, 1876) (3).

8. Ma da queste *Vorlesungen* si apprende eziandio con facilità tutta la luce che sui fenomeni dello spazio projettò la teoria delle funzioni ellittiche e abeliane, la cui metodica applicazione alla geometria è pel Clebsch uno dei più solidi titoli di gloria imperitura. Tale applicazione venne da lui indicata in un caso particolarissimo (estensione allo spazio del problema di Malfatti) nella memoria intitolata *Anwendung der elliptischen Functionen auf ein Problem der Geometrie des Raumes* (Journ. f. Math., 53, 1857), ma è fatta conoscere in tutta la sua ampiezza in una collana di memorie, dei cui anelli ricorderemo pel momento soltanto gli scritti pubblicati nel vol. 63 (1864) del Journ. f. Math., e che portano i titoli: *Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung*, *Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie*, *Ueber die Singularitäten algebraischer Curven* e *Ueber einige von Steiner behandelte Curven* (4). La tirannia dello spazio ci

---

(1) Delle Hessiane, Steineriane e Cayleyane successive si occupò il Maisano in una breve nota intitolata *Ricerche intorno a certe curve covarianti analoghe alle curve Hessiane, Steineriane e Cayleyane di una curva fondamentale d'ordine* n (Palermo Rend., 1, 1887).

(2) Le singolarità di queste curve vennero studiate di recente con metodo algebrico uniforme da E. Wölffing nella nota *Das Verhalten der Steiner'schen Cayley'schen und anderer Covarianter Curven in singulär n Punkten der Grundcurve* (Zeitschr. f. Math., 40, 1893).

(3) Va qui ricordato anche il *Mémoire sur l'application des formes binaires à la géométrie* (Journ. de Math., III, 1, 1875) del Laguerre, benchè abbia un indirizzo differente da quello dei lavori di Clebsch.

(4) Sullo stesso tema si veggano le lettere del Lindemann e dell'Hermite (Journ. f. Math., 84, 1878), e il pregevole scritto di A. Bucheim, *On the Extension of certains Theories relating to Plane Cubics to Curves of any Deficiency* (Proc. L. M. S., 13, 1882).

vieta di riassumere queste splendide memorie e la *Theorie der Abel'schen Functionen* (Leipzig, 1866), redatta in collaborazione con P. Gordan (1837-1912) (1) e ad esse strettamente collegata. Soltanto osserveremo che da esse emerge la capitale importanza per tutta la geometria delle curve piane della considerazione di quel numero, in cui i celebri analisti Abel (2) e B. Riemann (3) (1827-1866) (4) eransi imbattuti, e che Clebsch introdusse come settima caratteristica di una curva e designò col nome di *Geschlecht*, mentre Cayley, nella sua nota *On the Transformations of Plane Curves* (Proc. L. M. S., 1, 1865-66), preferì quello di *Deficiency*; gli italiani lo chiamano *genere* e i francesi *genre*.

Come l'ordine di una curva è un carattere invariantivo rispetto a trasformazioni projettive, il genere lo è rispetto a trasformazioni univoche qualunque: tale proprietà, a cui il genere deve principalmente la sua importanza, venne dimostrata per via trascendente nei lavori citati di Abel e Riemann, algebricamente nell' opera dianzi ricordata di Clebsch e Gordan, e geometricamente da L. Cremona (1830-1903) (5) (nel § 58 dei *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*), dal Voss (nella *Note betreffend die eindeutige Transformation ebener Curven* Götting. Nachr., 1873), dal Bertini (nell' articolo intitolato *Nuova dimostrazione del teorema: Due curve punteggiate projettivamente sono dello stesso genere* p, Giorn. di Mat., 6, 1870), dallo Zeuthen (*Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes* e *Addition*, Math. Ann. 3, 1871) — al quale ultimo geometra anzi si deve una generalizzazione estremamente notevole di quel teorema, espressa da un' equazione che lega i generi di due curve, fra cui passa

(1) Cfr. Math. Ann. 73, 1912.

(2) *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes* in (*Oeuvres complètes, éd. Sylow et Lie* (Christiania, 1881) 1.

(3) *Theorie der Abel'schen Functionen* (Journ. f. Math., 54, 1857).

(4) V.: *Bernhard Riemann's Lebenslauf* in fine di *Bernhard Riemann's Ges. math. Werke* (Leipzig, 1876) e Klein, *Riemann und seine Bedeutung für die Entwickelung der modernen Mathematik* (Verhand. der Gesell. deutscher Naturf. und Aerzte, Leipzig, 1894).

(5) G. Veronese, *Commemorazione del Socio L. Cremona* Lincei Roma V, 2, 1903; G. Loria, *L. Cremona et son oeuvre mathématique* Bibl. Math. III, 5. 1904); E. Bertini, *Della vita delle opere di L. Cremona* (Giorn. di mat., 42, 1904; riprodotta nel T. III, Milano 1917, delle *Opere matematiche di L. Cremona*; M. Noether, *L. Cremona* (Math. Ann. 59, 1904); R. Sturm, *L. Cremona* (Archiv. der Math. III, 7, 1904; L. Berzolari, *Della vita e delle opere di L. Cremona* (Rend. Ist. Lomb. II, 39, 1905); ecc.

A breve distanza del Cremona si spense M. Curtze (1837-1903), che con ottime traduzioni tesche tanto contribuì a diffonderne e farne apprezzare i lavori.

una corrispondenza algebrica qualunque (1) — e dallo H. Schubert (1848-1911) *Ueber die Erhaltung des Geschlechts bei zwei ein-eindeutig auf einander bezogenen Plancurven*, Math. Ann. 16, 1880). Aggiungiamo che, accanto al genere, si sogliono considerare certi numeri invarianti per trasformazioni univoche, cioè i « moduli » di una curva algebrica (2), collocando in una stessa « classe » le curve aventi eguali i generi e i moduli, e che la determinazione del genere di una curva dotata di singolarità qualunque è fatta nei lavori già citati (n. 5) sulle singolarità superiori ed in altri ancora (3).

Due cose devono ancor notarsi riguardo ai lavori di Clebsch di cui poco fa ci occupammo. La prima è che essi servirono di stimolo ai tentativi di sfruttare a pro della geometria le trascendenti abeliane ed altre ancora (4). La seconda è che, siccome molti dei risultati conseguiti in quei lavori si riferiscono a funzioni algebriche, così era supponibile poter essi venire raggiunti senza ricorrere a considerazioni trascendenti; questa previsione venne splendidamente confermata dalla omai celebre memoria di Brill e Nöther *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (Math. Ann., 7, 1874) e dai lavori che da essa rampollano (5), di cui i più cospicui sono riassunti nell'eccellente *Bericht* compilato da questi egregi geometri e che abbiamo citato nel n. 5. Però all'acuta analisi dei due citati scrittori, per deficienza di tempo, non poterono venire sottoposti alcuni lavori importanti del Segre, del Bertini, del Castelnuovo e d'altri che ne seguirono le orme; parecchi di essi verranno da noi citati nel seguire l'evoluzione della geometria a più dimensioni (v. Cap. XI), qui però segnaliamo subito due memorie riassuntive, dallo studio dalle quali è agevole formarsi un concetto della direzione comune in cui procedettero dei risultati che conseguirono i geometri sopra ricordati; sono: E. Bertini, *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo*

(1) Una dimostrazione stereometrica della formola di Zeuthen, analoga a quella già citata del Cremona per la conservazione del genere, si legge nella nota *Ueber einen Beweis der Zeuthen'schen Verallgemeinerung des Satzes von der Erhaltung des Geschlechts* (Math. Ann., 29, 1887) di W. Weiss.

(2) V. fra altre la memoria di Casorati e Cremona *Intorno al numero dei moduli delle equazioni o delle curve algebriche di dato genere* (Rend. Ist. Lomb., II, 2, 1869).

(3) Halphen, *Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans le transformations uniformes* (Bull. S. M. F., 4, 1875); Raffy, *Détermination du genre d'une courbe algébrique* (Math. Ann., 23, 1884); Baker, *The practical determination of the Deficiency (Geschlecht) and adjoint φ-curves for a Riemann surface* (Id., 45, 1894).

(4) Humbert, *Application géométrique d'un théorème de Jacobi* (Journ. de Math. IV, 1, 1885); *Application de la théorie des fonction fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques* (Id., 2, 1886); *Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques* (Id., 3, 1887; 5, 1889, e 6, 1890).

(5) Molti furono già citati nel n. 6 perchè concernono i punti multipli.

il metodo algebrico (Ann. di Math. II, 22, 1894); C. Segre (1863-1924) (1). *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Id. Ib, (2).

9. Le investigazioni fin qui ricordate nel presente Cap. si riferiscono di regola ad una curva unica, benchè incidentalmente in molte siano trattate delle questioni relative a gruppi di curve; in particolare, in quante di esse non sono considerati sistemi lineari di curve semplicemente (fasci) o doppiamente infiniti (reti)! D'altronde la teoria delle trasformazioni piane univoche conduce ad un'importante classe di reti, cioè le reti omaloidiche (v. Cap. VIII, n. 4), mentre lo studio della rappresentazione di una superficie su un piano (v. Cap. VIII, n. 8) impone la considerazione dei sistemi analoghi ∞^3, il cui studio diretto venne fatto da E. Caporali (1855-1886)(3) nella memoria *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve piane algebriche* (Coll. math., 1881). Nulla di più naturale adunque dell'essere in questi ultimi anni nata e fiorita la teoria generale dei sistemi lineari a quante si vogliano dimensioni, di curve algebriche d'ordine qualunque, della quale ora daremo qualche notizia.

Un grande numero di ricerche che vi si riferiscono trattano della riduzione dei sistemi lineari a certi determinati tipi mediante trasformazioni univoche, ed hanno come loro punto di partenza un teorema di Nöther, di cui parleremo altrove (v. il n. 4 del Cap. VIII), che si legge dimostrato una prima volta nel t. 3 (pag. 165) dei Math. Ann. e più completamente nel t. 5 (p. 635) della medesima raccolta. Come prime sue derivazioni sono da considerarsi alcune delle *Ricerche* del Bertini *sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* (Ann. di Mat., II, 8, 1877), ove le argomentazioni del Nöther, opportunamente generalizzate, conducono a nuove ed importanti conseguenze: a questo scritto tengon dietro, dopo un lungo intervallo, quelli del Guccia (*Generalizzazione d'un teorema di Nöther* e *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche*, Palermo Rend., 1, 1887), e del Martinetti (*Sui sistemi lineari di genere uno*, Rend. Ist. Lomb., II, 20, 1887; *Sopra una classe di sistemi li-*

(1) G. Castelnuovo, *Corrado Segre* (Lincei Rend. V, 33, 1924); G. Loria, *L'opera geometrica di Corrado Segre* (Ann. mat. IV, 2, 1925); A. Terracini, *Corrado Segre* (Deutsch. Math. Ver. 35, 1926, ecc.

(2) Vanno qui ancora ricordate le seguenti memorie del Küpper, che pel tema si collegano a quelle or nominate: *Zur Theorie der ebenen und Raumcurven. Die Curven* C^{2n}, C^{2n+1} *vom Maximalgeschlecht mit. bez.* $(n-1)^2$, $n(n-1)$ *Doppel* (Prager Ber., 1888); *Ueber die auf einer Curven* m^{ter} *Ordnung* C^m_p *vom Geschlecht* p *von den* ∞^2 *Geraden* G *der Ebene ausgeschnittene lineare Schaar* g^2_m (Math. Ann., 31, 1888); *Geometrische Betrachtungen auf Grundlagen der Functionentheorie* (Prager Ber., 1892); e *Bestimmung der Minimalgruppen für* C^m (Ivi).

(3) Cfr.: G. Loria, *L'opera scientifica di Ettore Caporali* (Giorn. di Mat., 27, 1889).

neari di curve piane algebriche, Palermo Rend., 1, 1887; e *Sopra alcuni sistemi lineari di curve piane algebriche di genere due*, Ib. id.), nonchè quelli assai più estesi di G. Juńg (1845-1925) (*Ricerche sui sistemi lineari di genere qualunque*, Ann. di Mat., II, 15 e 16, 1888 e 1889; cfr. anche Ib. 18, 1890, p. 129; *Delle famiglie associate di sistemi lineari*, ecc., Palermo Rend., 4, 1890).

Un teorema fondamentale di natura differente era già stato molto prima scoperto dal Bertini (*Sui sistemi lineari*, Rend. Ist. Lomb., II, 15, 1882; cfr. J. Lürot (1844-1910) (1) *Beweis eines Satzes von Bertini über lineare Systeme ganzer Functionen*, Math. Ann., 42, 1893, e 44, 1894), geometra al quale si devono anche delle ricerche *Sulle curve fondamentali dei sistemi lineari di curve piane algebriche* (Palermo Rend., 3, 1889)

Una *istauratio ab imis fundamentis* nell'indirizzo delle indagini sopra i sistemi lineari si è manifestata quando si pensò di ricorrere per studiarli alle proposizioni della « geometria su una curva algebrica » ch'erano state scoperte in gran parte col mezzo della teoria delle funzioni algebriche; il vantaggio di tale applicazione fu segnalato dal Segre in una breve nota *Sui sistemi lineari* (Palermo Rend., 1) e confermato dal Castelnuovo in due lavori *Sulle superficie le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (Palermo Rend., 4, 1890) e sulla *Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere* (Ann. di Math., II, 18, 1890) (2); ma essa fu dimostrata inconfutabilmente dall'altro lavoro di quest'ultimo geometra intitolato: *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (Torino Mem., II, 42, 1891; cfr. Ciani *Sopra i sistemi lineari di curve piane algebriche*, Giorn. di Mat., 33,1895), ricco di concetti importanti e originali, che sono continuamente sfruttati dai cultori della geometria; esso viene a saldare per sempre il legame fra la teoria dei sistemi lineari e le ricerche inaugurate da Brill e Nöther.

Con i lavori del Castelnuovo non hanno dipendenza nè la memoria di K. Doehleman *Ueber lineare Systeme in der Ebene und im Raum und über deren Jacobi'sche Curve beziehungsweise Jacobi'sche Fläche* (Math. Ann., 41, 1893), nè le *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità qualunque* (Palermo Rend., 7, 1893, e 9, 1895) del Guccia — com-

(1) A. Brill und M. Nöther *Jakob Lüroth* (Deutsch Math. Ver. 20, 1911).

(2) Più generalmente: si chiami « lineare » un sistema di curve determinato su una superficie da un sistema lineare di superficie; allora la questione sciolta dal Castelnuovo in questa nota è inclusa in altra più generale, alla risoluzione della quale è dedicata la nota dell'Enriques *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica* (Torino Atti, 29 1894); v. anche l'articolo dello stesso autore intorno a *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Lincei Rend., V, 2. 1893_4).

pletate nella memoria *Sui vincoli esistenti fra i punti di contatto delle tangenti condotte da un punto a k curve algebriche piane* (Ivi 9,1875) — giacchè l'uno e l'altro scritto trattano di preferenza curve generabili con sistemi lineari proiettivi e di sistemi di dimensioni particolari, con speciale riguardo a certe loro figure covarianti. Alla prima parte delle *Ricerche* testè ricordate si può allacciare il lavoro del Gerbaldi *Sulle singolarità della Jacobiana di tre curve piane* (Palermo Rend., 8, 1894), il quale, fra l'altro, conferma che l'Hessiana d'una curva generale è esente da singolarità, proposizione questa che fu ammessa come postulato dal Cremona e dimostrata per le curve di 4° ordine dal Geiser (*Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado*, Ann. di Mat., II, 9, 1878) ed in generale, una prima volta dal Del Pezzo (*Sulla curva Hessiana*. Napoli Rend., 22,1883) e poi da H. Valentiner (1850-1913) (*Bevis for at den Hesseske Curve i Almindelighed ikke har noget Dobbeltpunkt*, Tidsskrift, V, 6, 1888). A tal proposito osserveremo che il modo di comportarsi dell'Hessiana di una curva in un punto singolare venne studiato dal Brill nella memoria *Ueber die Hesse'sche Curve* (Math. Ann., 13, 1878; cfr. anche Elliot, *Sur les points d'inflexion des courbes algébriques*, Bull. Sc. Math., II, 2, 1878, e dal Segre nella nota *Sulla forma Hessiana* (Lincei Rend., V. 4 1895_2) (1).

Alle investigazioni intorno ai sistemi lineari si può, da un certo punto di vista, riattaccare la generalizzazione che, circa mezzo secolo fà, ricevette l'antica teoria della polarità rispetto a una curva (od a una superficie) d'ordine qualunque; di essa si occuparono il Clifford (*On a Generalizatio of the Theory of Polars*, Proc. L. M. S., 2, 1868), il Grassman (*Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren und den Zusammenhang algebraischer Gebilde*, Journ. f. Math., 84 1878), P. Serret (1827-1898) (2) (*Sur un principe unique contenant toute la théorie des courbes et des surfaces d'ordre ou de classe quelconque* (C. R., 86, 1878), e R. De Paolis (1854-1892) (3) (*Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari*, Lincei Mem., IV, 3, 1885-1886).

10. Gli studi intorno alle curve piane, di cui sin qui additammo i vari indirizzi e i risultati di maggior rilievo, sono tutti derivazioni più o meno evi-

---

(1) Su molte ricerche intorno a speciali sistemi di curve ci è forza stendere il velo del silenzio. Facciamo un'eccezione pel teorema di Lie « Se le curve di una schiera continua di curve piane si possono accoppiare in modo che le curve corrispondenti determino su qualunque trasversale delle coppie di punti in involuzione, esse curve sono le coniche di un fascio », teorema che G. Scheffers dimostrò nella nota intitolata: *Curvenschaaren, die auf jeder Geraden eine Involution bestimmen* (Leipziger Ber., 44, 1892).

(2) G. Darboux, *Notice su la vie et les travaux de Paul Serret* (C. R. 127, 1898).

(3) C. Segre, *Riccardo de Paolis* Palermo Rend., 6, 1892).

denti del concetto di sfruttare la scienza del numero a profitto della scienza della estensione. Tuttavia non è a credere che l'uso costante di coordinate sia indispensabile a chi voglia emulare Eulero e Cramer, Plücker e Salmon nell'esporre metodicamente la teoria delle curve piane. Ha tentato per primo di dimostrarlo Steiner, il quale, in una comunicazione giustamente celebre fatta nel 1848 all'Accademia di Berlino (riprodotta nel t. 47, 1854, del Journ. f. Math., sotto il titolo di *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven*) riprese la teoria delle polari d'un punto rispetto ad una curva — che il Bobillier (1797-1832) aveva già da tempo fondata (1) come estensione della teoria delle curve diametrali (o diametri curvilinei) di Newton e Cramer, e di cui il Grassmann stesso erasi dinanzi occupato designandola, col nome di *Theorie der Centralen* (Journ. f. Math., 24, 1842, e 25,1843) — e dimostrò come essa potesse fungere da fondamento ad una trattazione metodica delle curve algebriche. Fra i concetti nuovi introdotti da Steiner basta qui ricordare le notevoli curve covarianti ad una data che oggi si designano coi nomi di Steiner stesso, di Hesse e di Cayley. Questi brevi cenni, assieme alle indagini del medesimo Steiner, dello Chasles (2) e di E. de Jonquières (1820-1901) (3) (4) intorno alla

---

(1) *Démonstration de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous lés ordres, Recherches sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres, Recherches sur les lois génerales qui régissent les lignes et les surfaces algébriques* (Ann. de Math., 18, 1827-28); *Recherches sur les lois générales qui régissent les courbes algebriques* e *Théorèmes sur les polaires successives* (Id., 19, 1828-29) Cfr. anche De Jonquières, *Mémoire sur la théorie des pôles et des polaires dans les courbes d'ordre quelconque* (Journ. de Math., II, 2, 1857).

(2) *Détermination du nombre des points qu'on peut prendre arbitrairement sur une courbe donnée d'ordre* n *pour former la base d'un faisceau decourbes d'ordre* $m < n$ (C. R., 45, 1857); *Deux théorèmes généreaux sur les courbes et les surfaces géométriques des tous les ordres* (Id ib,; cfr. anche i *Théorèmes concernant la détermination sur une courbe géométrique, d'une série de groupes de points en nombre déterminé*, Id. 73, 1871).

(3) G. Loria, *L'oeuvre mathematique de E. de Ionquières* (Bibl. mat. (3), III, 1902)

(4) *Essai sur la génération des courbes géométriques, et en particulier sur celle de la courbe du quatrième ordre* (Mém. prés., 16, 1856); *Note relative à la costruction de diverses courbes à trois points multiples de dégres supérieurs et théorèmes relatifs à ces courbes.* (Ann. di Mat., 1, 1858). Sullo stesso argomento si vegga: Härtenberg., *Ueber die Erzeugung geometrischer Curven* (Jour. f. Math., 58, 1861); A. Olivier, *Ueber einige allg. Eigenscaften der geometriscer Curven* (Id., 70, 1869), *Zur Theorie der Erzeugung geometrischer Curven* (Id., 71, 1870), *Ueber die Methode, die Ordnungszahl einer Curve zu finden, welche durch zwei projektivischel Curvenbüschel erzeugt wird* ib.) e Joerres, *Einige allgemeine Sätze über ebene Curven und über Flächen mit Anwedungen auf Curven und Flächen zweiter und dritter Ordung* (Id., 77, 1870); Bobek, *Ueber projectivische Erzeugung von Curven* (Math. Ann., 25, 1885); Study, *Ueber Schnittpunktfiguren ebener algebraischer Curven* (Id., 36, 1890). Più tardi il De Joqueres è ritornato sulla generazione con fasci projettivi occupandosi delle curve con punti doppi (C. R., 105 1887); ma alcune conclusioni a cui egli giunse vennero confutate dal Küpper nella nota *Diè Abzählung als Fehlerquelle in der modernen Geometrie*

generazione delle curve algebriche col mezzo di fasci proiettivi di curve d'ordine inferiori, costituiscono i materiali primi di cui si giovò il Cremona nel comporre la sua famosa *Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* (Bologna Mem., 12, 1862; tradotta in tedesco da M. Curtze, Greifswald, 1865), nella quale sono esposte con metodo uniforme, assieme a molti nuovi e importanti risultati, tutte le proprietà delle curve piane scoperte dai geometri analisti antecedenii (1).

Che però il lavoro del Cremona non possa soddisfare i geometri sintetici intransigenti è dimostrato fra l'altro, dal fatto che la proposizione fondamentale da lui designata col nome di « porisma di Chasles » (nn. 36-37) non è altro che l'equazione d'una curva algebrica in coordinate trilineari. Non si deve adunque stupire se nel 1882 l'Accademia di Berlino abbia scelto come tema del premio Steiner l'estensione alle curve e superficie algebriche d'ordine qualunque delle ricerche di geometria pura che Staudt condusse a buon termine per le curve e superficie di secondo ordine. Una prima volta tale questione non ricevette alcuna risposta soddisfacente, ma nel 1886 E. Kötter (1859-1922) venne premiato grazie alla memoria intitolata *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraische Curvenn*, stampata più tardi in Berl. Abh., 1887, ed alla quale serve da proseguimento l'altro lavoro del medesimo autore *Die Hesse'sche Curve in rein geometrischen Behandlung*, Math. Ann., 34, 1889). Il procedimento di soluzione scelto dall'autore non si può compendiare in poche sentenze e (notiamo di passaggio) ha bisogno di venire ancora elaborato prima di poter penetrare nell'insegnamento; esso si accosta di preferenza alle ricerche di Steiner, inquantochè le curve dei differenti ordini vengono generate col mezzo di fasci proiettivi di curve d'ordini inferiori.

Sembra invece che alle ricerche di Staudt (definizione di una conica col mezzo di sistemi polari) divisasse avvicinarsi il De Paolis nella soluzione da lui immaginata pel problema proposto dall'Accademia di Berlino; sventuratamente

(Matth. Ann., 31, 1888). Un'altra generazione analoga venne indicata da Em. Wery nell' interessante nota *Erzeugun algebraischer Curven durch projectivischen Involutionen* (Math. Ann., 3, 1871). Di natura differente invece è quella di Grassmann esposta nei *Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Curven, mit Anwendung einer rein-geometrischen Analyse* (Iourn. f. Math., 31, 1846) e nell'altro lavoro sopra *Der allgemeine Satz über die Erzeugung aller algebraischen Curven durhr Bewegung gerader Linien* (Id., 42, 1851) e commentato da V. Schlegel nella nota *Ueber die mechanische Erzeugung von Curven* (Math. Ann., 6, 1873).

(1) Quali complementi all'*Introduzione* possono considerarsi le note: Cremona, *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane* (Ann. di Mat., 6, 1864); Köhler, *Sur les réseaux des courbes planes* (Bull, S. M. F., 1, 1875); Kohn, *Ueber die Satellitcurven und Satellitflächen* (Wiener Ber., 89, 1884).

tale soluzione rimarrà per sempre sconosciuta (1), perchè la morte colse l'inventore quando egli aveva pubblicato due lavori sulla questione (2) di non piccola importanza, ma che sono da ritenersi soltanto quali preliminari remoti della soluzione stessa.

Aggiungeremo che, prima e dopo dei geometri citati, di questioni collegate alla teoria rigorosamente sintetica delle curve piane (e delle superficie) algebriche, molti altri si occuparono; dei loro lavori ricordiamo i seguenti: F. Schur, *Eine geometrische Ableitung der Polareigenscaft ender ebenen Curven* (Zeitschr. f. Math., 22, 1877); J. Thieme, *Die Definition der geometrischen Gebilde durch Costruction ihrer Polar-systeme* (Id., 24, 1879); G. Kohn (1859-1922 (3) *Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte* (Wiener Ber., 1883) e *Eine Definition der Polaren* (Palermo Rend., 7, 1893); R. Schumacher, *Die Punktysteme auf der Geraden und ihre Anwedung zur Erzeugung der algebraischen ebenen Curven* (Journ. f. Math., 110, 1892, e 111, 1893); Guccia, *Una definizione sintetica delle curve polari* (Palermo Rend., 7, 1893).

11. Accanto alla collezione di scritti derivanti dal desiderio di scoprire quali siano le proprietà comuni a tutte le curve algebriche qualunque ne sia l'ordine e dei quali tentammo nelle pagine precedenti di porgere un'idea al lettore, un'altra ne esiste non meno ricca, ma più variopinta e che, trattando di curve caratterizzate da qualche specialità, dovrebbe giudicarsi per meno importante ove non si riflettesse che lo spirito umano procede dal particolare all'universale e che quindi molte investigazioni non dotate di grande generalità devono giudicarsi di gran valore se non altro per essere state, o perchè presumibilmente diverranno, il primo passo verso proposizioni estese. Gli è di questo secondo gruppo di lavori che ora ci occuperemo.

Per porre un po' d'ordine nelle svariatissime ricerche sulle curve speciali, tratteremo dapprima delle curve *d'ordine particolare*, poi di quelle di *genere particolare* e finalmente di quelle, non tutte necessariamente algebriche, soddisfacenti ad una o più condizione comuni.

Fra le curve d'ordine determinato spetta il primo posto alle sezioni coniche; ma chi mai potrebbe illudersi di dare un concetto almeno approssimato

---

(1) Cfr. la nota del Segre in calce allo scritto postumo del De Paolis intitolato *Teoria generale delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi nelle forme fondamentali a due dimensioni* (Lincei Rend., V, 2, 1894.)

(2) *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi* (Mem. Soc. XL, III, 7, 1890) e *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie* (Torino Mem. II, 42, 1892).

(3) E. Müller, *Gustav Kohn* (Monatshefte, 32, 1922).

delle innumerevoli ricerche che su di esse vennero compiuti nei venti secoli in cui venneso studiate, delle innumerevoli qualità che in esse vennero segnalate e che ogni dì crescono, dei differenti punti di vista da cui vennero considerate? Una semplice raccolta dei teoremi che ora possediamo su quelle celebri curve riempirebbe più di un grosso volume: sia lecito a noi di non accordare la preferenza ad alcuno, rimandando il lettore alle molte pregevoli esposizioni geometriche ed analitiche che ne possediamo (1).

E passiamo a dire qualche cosa delle curve di terz'ordine, su cui pure la letteratura è tanto estesa che, nell'accingerci a render conto delle produzioni più cospicue in essa contenute, noi sentiamo il bisogno (più che in qualunque altra occasione) d'invocare l'indulgenza del lettore per le lacune e le involontarie ingiustizie che per fermo non riusciremo ad evitare.

Molte rilevanti ricerche di varia natura sulle cubiche piane si apprendono dalle opere d'Eulero, di Cramer e di Plüker citate nelle pagine precedenti, nonchè, dall'*E umeratio* di Newton e dal *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus* (London, 1720) del Maclaurin. In Inghilterra queste curve continuarono a venir studiate anche in tempi a noi vicini; al Salmon infatti si deve la scoperta dell'importante proposizione che afferma la costanza del rapporto anarmonico delle quattro tangenti condotte alla curva da un punto arbitrario di essa (*Théorèmes sur les courbes de troisième degré*, Journ. f. Math., 42, 1851; cfr. R. Sturm (1841-1919) (2) *Ueber die ebenen Curven dritter Ordung*, Id., 90, 1881 e V. Jamet, *Sur le rapport anharmonique d'une courbe du troisième ordre*, Bull. S. M. F, 15, 1887), proposizione assai notevole che venne utilizzata più tardi dal Cremona per classificare le curve in questione (*Considerazioni sulle curve piane del terz'ordine*, Giorn. di Mat., 2, 1864); d'altronde al Cayley si devono interessanti ricerche sui punti corrispondenti d'una cubica (*Mémoire sur les courbes du troisième ordre*, Journ. de Math., 9, 1844; *Nouvelles remarques sur les courbes du troisième ordre*, Id., 10, 1845), nonchè importanti investigazioni analitiche che condussero alla scoperta di parecchie curve covariante ad una cubica (*A Memoir on Curves of the Third Order*, Phil Trans., 147, 1857; *On the Tangential of a Cubic*, Id., 148, 1858), ed altre, di cui pel momento ricordiamo soltanto quelle *On a Case of the Involution of Cubic Curves* (Cambridge Trans., 11, Part. I, 1866; cfr. i due articoli *On the Cubic Centres of a Line with respect to Three Lines and a Line*, Phil. Mag., 20, 1860 e 22, 1861), e quelle *On the mechanical Description*

(1) Un quadro d'insieme della proprietà delle sezioni coniche si legge nell'articolo di F. Dingeldey, *Kegelschnitte und Kegelschnittesysteme* (Encikl. math. 3, II Tl., I Heft).

(2) W. Ludwigi *R. Sturm* (Deutsch. Math. Ver. 34, 1925).

of a Cubic Curve (Proc. L. M. S., 4, 1871-73); finalmente a Sylvester (1814-1897) (1) dobbiamo l'elegante teoria dei punti residui che tutti conoscono grazie al Cap. V del *Treatise on Higher Plane Curves* del Salmon (2).

Speciali modi per generare una curva di terz'ordine si apprendono dagli scritti di Cayley testè ricordati e da altri che saranno citati poi; di tale questione si occuparono anche Chasles (*Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points* C. R., 36, 1853) e poi *ex-professo* il Grassmann (*Ueber die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien und über geometrische Definitionen dieser Curven*, Journ. f. Math., 36, 1838; *Die lineale Erzeugung von Curven dritter Ordnung*, Id., 52, 1856), il Clebsch (*Ueber zwei Erzeugungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung*, Math. Ann., 5, 1872), H. Schröter (1829-1892) (3) (*Ueber eine besonder Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curven dritter Ordnung*, Id., ib.; *Ueber Curven dritter Ordnung*, Math. Ann., 6, 1873; *Zurückführung der Grassmannschen Definition der Curve dritter Ordnung auf die von Chasles, Cayley und Hesse angegebenen Erzeugungsweisen*, Journ. f. Math., 104, 1889), il Durège (1821-1893 (*Ueber die Curven dritter Ordnung welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet*, Math. Ann., 5, 1872 e l'Heger (*Eine Costruction von Curven dritter Ordnung aus coniugerten Punkten*, Zeitschr. f. Math., 25, 1880). Alle due prime fra le or nominate memorie dello Schröter ed a quella del Durège sono collegate quella dell'Hanarek *Ueber lineare Constructionen von ebenen Curven dritter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 22, 1877), di T. Walter *Ueber den Zusammenhang der ebenen Curven dritter Ordnung mit Kegelscnittschaaren* (Diss. Giessen, 1878), dell'Hurwitz *Ueber die Schröter'sche Construction der ebenen Curven dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 107, 1891) e del Bobek sopra *Die Brennpunktscurven des Kegelschnittsbüschel* (Monatshefte, 3, 1892).

Sui punti d'inflesso e più generalmente sulle linee aventi con una data cubica contatti assegnati, Steiner enunciò parecchie eleganti proposizioni (*Sätze über Curven zweiter undritter Ordnung*, Journ. f. Math., 32, 1846) che vennero poi dimostrati da F. August (*Ein Steiner'scher Satz über Krummungskreise bei Kegelschnitten und ein allgemeinerer Steiner'scher Satz über osculirende Kegelschnitte bei Curven dritten Grades*, Journ. f. Math., 68, 1868),

---

(1) M. Noether, *J. J. Sylvester* (Math. Ann. 50, 1897); v. inoltre il cenno biografico inserito ne T. IV di *The collected math. Papers of J. J. Sylvester* (Cambridge 1904-12)

(2) Fra le applicazioni recenti della teoria di Sylvester ricorderemo quelle che si leggono nella nota del Valentiner, *Om Konstruktionen af Curver af 3die og 4de Orden, bestemte ved at skulle gaae gjennem hendholdsvis 9 og 14 Punkter* (Nyt Tidsskrift for Math., 3, 1892).

(3) R. Sturm, *Heinrich Schröter* (Deutschi Math. Ver. 2, 1893).

dal Durège (*Ueber die Kegelschnitte welche eine Curve dritter Ordnung osculieren*, Prager Ber., 1871) e dal Gent (*Ueber den Zusammenhang der Systeme derjenigen Punkte, in welchen Kegelschnitte eine allgemeine Curve dritter Ordnung osculiren*, Zeitschr. f. Math., 17, 1872); di questioni affini si occuparono con successo anche O. Hesse (*Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung*, Journ. f. Math., 28, 1844; *Ueber die Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Punkte berühren*, Id., 36, 1848; *Ueber Curven dritter Klasse und Curven dritter Ordnung*, Id., 38, 1849; *Eigenschaften der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung und der Rükkehrtangenten der Curven dritter Klasse*, Id ib.), A. Clebsch (*Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung*, Id., 58, 1861), G. Battaglini (1826-1894) (1) (*Sulle cubiche ternarie sizigetiche*, Coll. math.), il Servais (*Sur les coniques osculatrices dans les courbes du troisième ordre*, Belgique Bull. III, 23, 1892), W. Wirtinger (*Ueber eine Eingeschaft der Wendetangenten der Curven dritter Ordnung*, Monatshefte, 4, 1893), G. Kohn (*Benmerkung über die Kegelschinitte welche sechs Wendetangenten einer C^3 berühren*, Ivi), A. Wiman (*Om inflexionspunkterna til plana kurror of tredje ordningen*. Nyt Tidsskrift for Math., 5, 1894) e Ferrers (*On the Inflexional Tangents of a Cubic and the Conics touched by them*, Mess., 24, 1894-95).

Su certe classi di poligoni inscritti in una cubica piana vertono alcuni *Geometrische Lehrsätez* di Steiner (Journ. f. Math., 32, 1846) ed i lavori intesi a dimostrarli e che citammo altrove (Cap. I, n. 13), nonchè la nota di Grassmann *Zur Theorie der Curven dritter Ordnung* (Götting. Nachr., 1872), i *Teoremi sui poligoni di Steiner iscritti in una curva di terzo ordine* (Palermo Rend., 5, 1891) del Martinetti e le due note di Em. Weyr (1848 - 1894) (2) *Ueber Fünfecke, welche einer C_3 gleichzeitig ein- und umgeschrieben sindn* e *Ueber Vierecke, welche einer C^3 gleichzeitig ein und umgeschrieben sind* (Monatshefte, 4, 1893).

Col solo sussidio della geometria sintetica le cubiche piane furono studiate dal Küpper (*Ueber Curven dritter Ordnung als Einhüllenden von Kegelschnitte*, Prager Ber., 1871, *Beiträge zur Theorie der Curven dritter und vierter Ordnung*, Prager Abh., VI. 5, 1871), da R. Slawyk (*Die Polareigenschaften der allgemeinen ebenen C.*, Diss. Breslau, 1872), dal Milinowski (*Zur Geometrie der ebenen Curven dritter Ordnung*, Journ. f. Math., 78, 1874 (3); *Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven dritter Ordnung*, Zeitschr. f.

(1) Cfr. E. d'Ovidio, *Commemorazione del Socio Giuseppe Battaglini* (Lincei Mem., V, 1, 1895).

(2) G. Kohn, *Emil Wayr* (Monatshefte, 6, 1895).

(3) Ivi si leggono le dimostrazioni pei teoremi sulle cubiche che Steiner enunciò nella sua grande memoria sulle curve a centro.

Math. 21, 1876; *Synthetischer Beweis, dass jede ebene Curve dritter Ordnung durch einen Kegelschnittbüschel und einen ihm projectiven Strahlenbüschel erzeugt werden kann* Id., 23, 1878; *Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung*, Journ. f. Math., 89, 1880), da F. Schur (*Synthetischer Beweis der Identität einer Tripelcurve mit dem Erzeugniss eines Kegelschnittsbüschels und eines ihm projectiven Strahlbüschels*, Zeitschr. f. Math., 24, 1879), da S. Kantor (1857-1902) (*Una semplice generazione della curva Jacobiana di una rete di curve di 3° ordine*, Lincei, Rend., III, 3, 1879), dall'Ameseder (1858-1891) (*Notiz über Tripel einer Curve dritter Ordnung welche denselbe Höhenschninttpunkt haben*, Zeitschr. f. Math., 28, 1883), da T. Reye (1838-1919) (1) (*Die Geometrie der Lage*, 3° Aufl. I Abth., Leipzig 1886, p. 237, e segg.), da F. London (1873-1917) (*Ueber die Polarfiguren der ebenen Curven dritter Ordnung*, Math. Ann., 36, 1890) e da E. Kötter (*Einige Hauptsätze aus der Lehre von den Curven dritter Ordnung*, Id., 38, 1891, e *Note über ebene Curven dritter Ordnung*, Journ. f. Math., 114, 1894 (2). A queste memorie si possono riavvicinare le ricerche di M. Disteli (1862-1923) (3) *Zur Configuration der Wendepunkte der allgemeinen ebenen Curven dritter Ordnung* (Wolf Zeitschr., 24, 1890), ove la cubica viene considerata come la proiezione di una quartica gobba di prima specie fatta da un suo punto, e le numerose costruzioni pel nono punto comune a tutte le cubiche passanti per gli stessi otto punti, di cui le più notevoli sono forse quelle che si leggono nei lavori seguenti: Weddle e Hart, *Con truction by the Rule alone to determine the ninth Point of Intersection of two Curves of the Third Order* (Cambridge Journ., 6, 1851); Hart, *On the Intersection of Plane Curves of the Third Order* (Dublin. Trans. 1878); Chasles, *Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en géométrie* e *Note sur les courbes du troisième ordre, concernant les points d'intersection de ces courbes entre elles ou par des lignes d'ordre inférieur* (C. R., 41, 1855); Cayley, *On the Construction of the Ninth Point of Intersection of the Cubic which pass through eight given Points* (Quart. Journ., 5, 1862); H. Müller (1855-1915) *Ueber eine geometrische Verwandschaft fünften Grades* (Math. Ann., 2, 1870); London, *Lineare Constructionen des neunten Schnittpunktes zweier Curven dritter Ordnung* (Id., 36, 1890); Russell, *Rule Constructions in connexion with Cubic Curves* (Irish Trans., 30, 1892); Beyel, *Construction der Curven dritter Ordnung aus neun gegebenenen Punkten und Construction der neunten Punktes*

(1) F. Schur, *Theodor Reye* (Math. Ann. 82, 1921).

(2) In quest'ultimo lavoro sono esposte alcune semplicissime considerazioni geometriche che abilitano concludere la rappresentazione parametrica dei punti di una cubica, di cui parliamo più innanzi.

(3) F. Schur, *Nachruf auf Martin Disteli* (Deutsch. Math-Ver. 36, 1927).

zu acht Grundpunkten eines Büschels von Curven dritter Ordnung (Zeitschr. f. Math., 40, 1895); E. Lange (1846-1903) *Zeichnung des neunten Schnittpunktes zweier Kurven 3. Ordnung* (Wismar, 1895).

In campi contigui a quelli finora considerati si aggirano alcune indagini su poligoni polari e su altre figure collegate ad una cubica piana; nell'impossibilità di descriverne a parte il contenuto ci limitiamo far menzione dei lavori in cui furono pubblicate: Geiser, *Ueber zwei geometrische Probleme* (Journ. f. Math., 67, 1867) (1); Siebeck, *De triangulo, cuius latera continent polos respectu quatuor sectionum conicarum coniugatos* (Ann. di Mat., 2, 1868-69); H. J. S. Smith. *Observatio geometrica* (Id., ib.) e *On some Geometrical Constructions* (Proc. L. M. S., 2, 1868); Em. Weyr, *Zur Erzeugung der Curven dritter Ordnung* (Wiener Ber., 1868), *Die Erzeugung der Curven dritter Ordnung mittelst symmetrischer Elementarsysteme zweiten Grades* (Id., 1874), *Die Curven dritter Ordnung als Involutionscurven* (Prager Ber., 1877) e *Ueber eindeutige Beziehungen auf eine allgemeinen ebenen Curven dritter Ordnung* (Wiener Ber., 1883); Grassmann, *Ueber zusammengehörige Pole* (Götting. Nachr., 1872); Caporali, *Teoremi sulle curve e sui fasci di curve del terz'ordine* (Lincei Trans., III, 1, 1877), *Alcuni teoremi sui fasci sizigetici di curve del terzo ordine* e *Sulla figura costituita dai punti di contatto delle tangenti condotte ad una cubica da tre suoi punti in linea retta* (scritti postumi pubblicati fra le *Memorie di Geometria di Ettore Caporali*, Napoli, 1888) (2); Laguerre *Sur les courbes de la troisième classe* (Journ. de Math., III, 4, 1878); Clifford, *The polar Theory of Cubics* (frammento inserito fra i *Mathematical Papers by W. K. Clifford*, London, 1882); F. Folie (3) e Le Paige, *Mémoire sur les courbes du troisième ordre* (Belgique Mém., 43, 1880 e 45, 1882); Le Paige, *Sur les courbes du troisième ordre* (Belgique Bull., III, 4, 1882) e *Sur une propriété des cubiques planes* (Prager Ber., 1882); Martinetti, *Ricerche sulle curve piane del terzo ordine* (Giorn. di Mat., 23, 1885); R. A. Roberts, *On Triangles of Maximum and Minimum Area inscribed in a Plane Cubic* (Mess., 15, 1885); O. Schlesinger, *Ueber conjugierte Curven, insbesondere über die geometrische Relation zwischen einer Curve dritter Ordnung und einer zu ihr conjugierten Curve dritter Classe* (Math. Ann., 31, 1887; cfr. 33, 1889); P. Serret, *Sur une série récurrrente de pentagones, inscriptibles à une même courbe générale du troisième ordre, et que l'on peut con-*

(1) Una generalizzazione di tali problemi venne indicata dal Milinowski nella *Bemerkung zu der Geiser'sche die Curve dritter Ordnung betreffende Abhandlung*, ecc. (Journ. f. Math., 77, 1874).

(2) I teoremi ivi enunciati si trovano dimostrati e completati nell'articolo di G. Genoino, *Intorno alla teoria della polarità rispetto ad una cubica piana* (Giorn. di Mat., 63, 1925).

(3) Le Paige, *F. Folie (1833-1905)* (Rev. quest. scient. III, 7, 1905).

struire par le seul emploi de la règle (C. R., 115, 1892); J. de Vries, *Polygones cycliques sur courbes cubiques planes* (Archives Néerlandaises, 25, 1893); Miss C. A. Scott, *On plane Cubics* (Proc. R. S., 44, 1894, e Phil. Trans. 185, 1895).

Le coordinate dei punti di una curva generale del terzo ordine sono esprimibili mediante funzioni ellittiche di un parametro; di tale rappresentazione e delle conseguenze geometriche che se ne possono dedurre si occuparono: Durège, *Ueber Curven dritter Ordnung und ihre Abbildung auf einem Kreise* (Zeitschr. f. Math., 17, 1872); Harnack, *Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades* (Math. Ann., 9, 1876); C. Hermite (1822-1901) (1) *Extrait d'une lettre adressée à M. Fuchs* (Journ. f Math., 83, 1877); Halphen, *Recherches sur les courbes planes du troisième degré* (Math. Ann. 15, 1879) e *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* (II partie, Paris, 1888, XI chap.); Picquet, *Applications de la représentation des courbes du troisième degré à l'aide des fonctions elliptiques* (Journ. Éc. pol., 44ᵉ cah., 1885); O. Schlesinger, *Ueber die Verwerthung der Θ-Functionen für die Curven dritter Ordnung nebst einer Anwendung auf die zu einer Curve dritter Ordnung apolaren Curven* (Math. Ann., 31, 1888); Valyi, *Zur Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung und sechster Classe* (Math. und naturwiss. Ber. aus Ungarn, 9, 1892 e 10, 1893).

Fra un altro ramo d'analisi e le curve generali del terz' ordine esiste una parentela assai stretta; intendiamo alludere alla teoria delle forme ternarie cubiche di cui ogni formola può interpretarsi come un teorema sulle cubiche piane, di cui ogni progresso corrisponde ad una nuova cognizione intorno a queste figure geometriche; esce dal nostro tema il seguire l' evoluzione e ritrarre lo stato attuale di quella importante teoria, ma vogliamo almeno ricordare le memorie di Aronhold (1819-1884) (Journ. f. Math., 39, 1850, e 55, 1858), e Clebsch e Gordan (Math. Ann., 6, 1873) (2) le quali a buon diritto meritano l' epiteto di fondamentali su tale argomento.

Una curva del terzo ordine non può specializzarsi proiettivamente che per la presenza di un punto doppio o di una cuspide; la curva allora acquista proprietà particolari assai notevoli, di cui basti qui ricordare l' esprimibilità delle sue coordinate mediante forme binarie cubiche, la quale fa apparire per identiche la ricerca delle proprietà delle cubiche razionali e quella delle proprietà di una terna di forme binarie cubiche. Sia sfruttando questo legame, sia con considerazioni dirette, le curve in discorso furono studiate in molti la-

(1) U. Dini, *Commemorazione del socio straniero C. Hermite* (Lincei Rend. V, 20, 1902_1); M. Noether, *C. Hermite* (Math. Ann. 55, 1901); E. Picard, *L'oeuvre scientifique de C. Hermite* (Ann. Ec. norm. II, 18, 1901; o Prefazione al T. I delle *Oeuvres de C. Hermite*, Paris 1905).

(2) V. anche F. Gerbaldi, *Sulle curve piane del terz' ordine* (Palermo Rend. 7, 1893).

vori di cui ricorderemo i seguenti: Durège, *Ueber fortgesetzes Tangentenziehen an Curven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Ruckkerpunkt* (Math. Ann., I, 1869); Rosenow. *Die C_3 mit einem Doppelpunkt* (Diss. Breslau, 1873); Em. Weyr, *Ueber Punktsysteme auf Curven 3ter Ordnung* (Zeitschr. f. Math. 15, 1870), *Ueber die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt* (Math. Ann., 3, 1870). *Zur Geometrie des Curven 3ter Ordnung* (Zeitschr. f. Math. 15, 1870), *Sulle curve piane razionali del terz' ordine* (Giorn. di Mat., 9, 1871), *Ueber Projectivitäten und Involu ionen auf ebenen rationalen Curven dritter Ordnung* (Wiener Ber., 1880), *Ueber dreifach-berührend Kegelschnitte einer ebenen Curven dritter Ordnung und vierter Classe* (Id., 1879), *Ueber die Abbildung einer rationalen ebenen Curve dritter Ordnung auf einen Kegelschnitt* (Id., ib.); Ed. Weyr, *Ueber die Doppelelemente projectivischer Gebilde und deren Bedeutung für Curven dritter Ordnung und Classe* (Prager Ber., 1869); Igel, *Ueber ebene Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt* (Math. Ann. 6, 1873); Juel, *Geometrische Beviser for nogle Sätninger om kurver af tredie Orden med et, og kurver of fjerde Orden med tre Dobbeltpunkter* (Tidsskrift, IV, 1, 1877); Pittarelli, *Sulle curve del terz' ordine con un punto doppio* (Napoli Rend., 24, 1885), *Le curve di terz'ordine e di 4ª classe* (Id., ib.) e *Le cubiche con un punto doppio e la corrispondenza* (1, 2) (Lincei Mem., IV, 3, 1886; questo scritto fa seguito allo *Studio algebrico-geometrico intorno alla corrispondenza* (1, 2) inserito nello stesso vol.); Dingeldey, *Ueber Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt* (Math. Ann., 27,1886) e *Zur Construction der Hesse'schen Curve der rationalen Curven dritter Ordnung* (Id., 28, 1887); Berzolari, *Sulla curva del terzo ordine dotata di punto doppio* (Rend. Ist. Lomb., II, 25, 1892); Drasch, *Ueber einige Eigenschaften der ebenen Curven III O. mit Rückkehrpunkt* (Monatshefte, 4, 1893); Stiner, *Metrische Eigenschaften der Curven dritter Ordnung mit einen Doppelpunkt* (Ivi).

Alcune curve di terz'ordine specializzate dal punto di vista metrico erano note agli antichi (serva d'esempio la cissoide di Diocle); anche alcuni moderni se ne occuparono, come si apprende dagli scritti seguenti: Bjerkeness, *Sur une certaine classe de courbes de troisième degré rapportées à lignes droites qui dépendent de paramètres donnés* (Journ. f. Math., 55, 1858); O. Hermes (1826-1909) *Ueber eine gewisse Curve des dritten Grades* (Id., 97, 1884) (1); Schoute, *Bemerkung anlässlich des Aufasatzes von Herrn O. Hermes*, ecc. (Ib., 99, 1886) e Disteli, *Die Metrik der circulären ebenen Curven dritter Ordnung in Zusammenhang mit geometrischen Lehrsätzen Jacob Steiner's* (Wolf Zeitschr., 36, 1891).

Prima di abbandonare le curve piane di terzo ordine ricorderemo le espo-

(1) Cfr. Steiner in Journ. f. Math., 45, 1853, p. 375 La curva studiata è la strofoide obliqua.

sizioni metodiche delle loro principali proprietà; sono: Durège, *Die ebenen Curven dritter Ordnung* (Leipizig, 1871); Schröter, *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig, 1888); White, *Plane Curves of the third Order* (Cambridge, 1926).

12. Fra i molti studî che vennero compiuti sulle proprietà delle curve generali di quarto ordine, spetta il posto d'onore a quelle che si aggirano intorno alla distribuzione delle 28 tangenti doppie di una tale curva e che, essendo state compiute in parte applicando i risultati ottenuti intorno a funzioni trascendenti notevoli, meritano, in certa misura almeno, un posto nella storia dell'analisi. Come prime indagini sul detto argomento dovrebbero considerarsi quelle di Plücker (*Theorie der alg. Curven*, 1839, p. 228 e segg.), ove parecchie delle proposizioni che ne compendiano i risultati non fossero erronee, perchè ottenute col mezzo di una numerazione di costanti non conclusiva. Meglio è dunque farle cominciare con la memoria di Steiner intitolata *Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksictlich ihrer Doppeltangenten* (Journ. f. Math., 49, 1855) e la contemporanea di essa di Hesse *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierten Grades* (Id., ib.). Con questa fanno sistema due altre di quest'ultimo autore: *Transformation der Gleichung der Curven 14ten Grades, welche eine gegebene Curve 4ten Grades in den Berührungspunkten ihrer Doppeltan gente shneiden* (Id., 52, 1856) e *Zu den Doppeltangenten der Curven vierten Grades* (Id., 55, 1858).

A dimostrare le proposizioni enunciate da Steiner, ad aggiungerne altre o a stabilire altrimenti i teoremi di Hesse lavorarono: il Geiser adoperando la geometria a tre dimensioni (*Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierGten rades*, Math. Ann., 1, 1869; *Ueber die Steiner'schen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades*, Jour. f. Math., 72, 1870)(1), l'Ameseder (*Geometrische Untersuchungen der ebenen Curven vierten Ordnung, insbesondere ihrer Berührungskegelschnitte*, Wiener Ber., 85, 1882 e 87, 1883) ed il Kohn (*Ueber die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierten Ordnung*, Journ. f. Math., 107, 1890; *Ueber die Relationen, welche zwischen den verschiedenen Systemen von Berührungskegelschnitten einer allgemeinen Curve vierter Ordnung bestehen*, Monatsheft, 1, 1890) con mezzi planimetrici; con procedimenti analitici (algebrici o trascendenti), oppure con metodi misti l'Aronhold (*Ueber den gegenseitigen Zusammenhang der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve vierten Grades*, Berliner Ber., 1864), il Roch (*Ueber die Doppeltangenten an Curven vierter Ordnung*,

(1) Cfr.: Frahm, *Bemerkungen über das Flächennetz zweiter Ordnung* (Math. Ann., 7, 1874 e Toeplitz, *Ueber ein Flächennetz zweiter Ordnung* (Ib., 11, 1873).

Journ. f. Math., 66. 1866), il Riemann (*Zur Theorie der Abel'schen Functionen für den Fall* p = 3, in *Ges. Math. Werke*, Leipzig, 1876), il Cayley (*Note sur l'algorithme des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre*, Journ. f. Math., 68, 1868; *On the Bitangents of a Plane Quartic.*, Id., 94, 1883; e *On the Double Tangents of a Curve of te Fourth Order*, Phil. Trans., 151, 1861), il Nöther (*Ueber die Gleichung achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung*, Math. Ann., 15, 1879; *Zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curven vierter Ordnung,* Münchener Abh., 17, 1889, e *Note über die Siebensysteme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangen en einer ebenen Curve vierter Ordnung gehen*, Math. Ann., 46, 1895), il Freyberg (*Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung*, Id., 17, 1880), H. Weber (1842-1913) (1) (*Ueber die Galois, schen Gruppen der Gleichung 28ten Grades, von welcher die Doppeltanyenten einer Curve vierter Ordnung abhangen*, Id., 23, 1884) ed il Frobenius (1850-1917) (*Ueber die Beziehungen zwischen den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung*, Journ. f. Math., 99, 1886, e *Ueber den Jacobischen Covarianten der Systeme von Berührungskegelschnitten einer Curve vierter Ordnung*, Id., 103, 1888).

Incomparabilmente meno estese e profonde sono le nostre cognizioni intorno alla distribuzione dei flessi delle curve di quart' ordine; la configurazione cui essi dànno luogo fu scopo di lunghe e perseveranti indagini da parte del Caporali, il quale però non giunse a risultati decisivi; a tali investigazioni siamo debitori di una nota *Sopra una certa curva del 4° ordine* (2) Napoli Rend., 21, 1882), di alcuni frammenti postumi *Sulla teoria delle curve piane del quarto ordine* pubblicati nelle sue *Memorie di Geometria* (Napoli, 1888) e di altri *aperçus* fatti conoscere dal Segre nella nota concernente *Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane* (Ann. di Mat. II, 20, 1892): aggiungiamo che *L'equazione di 24° grado da cui dipende la ricerca dei flessi nella curva generale di 4° ordine* è stata studiata da F. Gerbaldi (Palermo, Rend., 7, 1893).

Una *Énumeration des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies*, fu fatta da Plücker (Journ. de Math., 1,

(1) A. Voss, *Heinriche Weber* (Deutsch. Math. Ver., 23, 1914).

(2) Questa curva, benchè speciale, è esente da punti multipli; come tale è analoga a due studiate una dal Lüroth (*Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung*, Math. Ann., I, 1869, e *Neuer Beweis des Satzes, dass nicht jeder Curve vierter Ordnung ein Fünfseit eingschrieben werden kann*, Id. 13 1878) e l'altra dal Geiser (*Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado*, Ann. di Mat. II, 9, 1879); quest' ultima curva gode la proprietà di avere per Hessiana una curva con punto doppio.

1836). Di proprietà comuni a tutte le quartiche trattarono sinteticamente Grassmann (*Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien*, Journ. f. Math., 44, 1852), Chasles (*Sur les courbes du quatrième et du troisième ordre. Développement des conséquences du théorème général concernant la description des courbes du quatrième ordre au moyen de deux faisceaux de coniques*, C. R., 37, 1853), il de Jonquières (*Mode de construction et de description de la courbe du quatrième ordre determinée par quatorze points*, Journ. de Math., II, 1, 1856), il Milinowski (*Zur synthetischen Behandllung der ebenen Curven vierter Ordnung*, Zeitschr. f. Math., 23, 1878) e J. Cardinaal (*Zur Geometrischen Theorie der ebenen Curven vierter Ordnung*, Journ. f. Math., 102, 1888). Con altri metodi studiarono le quartiche piane: Hesse (*Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung*, Journ. f. Math., 49, 1855), Clebsch (*Ueber Curven vierten Grades*, Id., 59, 1861; cfr. Ciani, *Sopra due curve invariantive di una quartica piana*, Ann. di Mat., II, 20, 1892-93, *Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana*, Rendic. Istit. Lomb., II, 28, 1895, e *Sopra la corrispondenza polare fra coniche inviluppo e coniche luogo stabilita da una quartica piana*, Lincei Rend., V, 5, 1895_2), il Laguerre (*Sur les singularités des courbes de quatrième classe*, Journ. de Math., III, 1, 1875), il Le Paige (*Sur les courbes du quatrième ordre*, C. R., 98, 1884, e *Sur quelques questions relatives aux quartiques planes*, Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles, 8, 1884), J. De Vries (*Involutions cubiques sur les courbes biquadratiques*, Archives Neerlandaises, 23, 1889) e E. Pascal (*Sulle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine*, Lincei Rend., V, 1, 1892_1, *Ricerche sugli aggruppamenti formati colle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine*, Ivi e *Sugli aggruppamenti tripli di coniche coordinate alla quartica piana*, Id., 2, 1893_1).

Tacendo dei lavori che trattano delle proprietà invariantive delle forme ternarie biquadratiche, perchè sono di diretta pertinenza dell'algebra moderna, ci occuperemo delle memorie riferentisi a quartiche particolari.

Alle quartiche di genere 2 (con un punto doppio od una cuspide) sono dedicate le seguenti: F. Brioschi (1824-1897) (1) *Les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre avec un point double* (Math. Ann. 4, 1871); Cremona, *Observations géométriques à propos de la note de M. Brioschi* (Ivi); Brill, *Note über die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt* (Id., 6, 1873) e *Ueber die Wendepunkte der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten* (Id., 17, 1880); Brioschi, *Sopra una classe di*

(1) C. Hermite, *Notice sur M. F. Brioschi* (C. R. 125, 1897); M. Noether, *F. Brioschi* (Math. Ann. 50, 1898); E. Beltrami, *Commemorazione di F. Brioschi*, (Lincei, Atti 1898), ecc.

curve del 4° ordine (Lincei Rend., III, 8, 1884) (1); Björling, *Construction mittelst Lineals und Cirkel der Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 2* (Stockh. Oefv., 1887); Bobek, *Ueber Curven vierter Ordnung von Geschlechte Zwei, ihre Systheme berührender Kegelschnitte und Doppeltangenten* (Wiener Abh., 53, 1887).

Le quartiche di genere 1 possono studiarsi comodamente riguardandole per proiezioni di quartiche gobbe di prima specie: in tal modo esse furono considerate dal Fiedler (*Die darstellende Geometrie*, III Aufl., II Thl., Leipzig, 1885, p. 180 e seg.) e dallo Zeuthen (*Nogle Egenskaber ved Kurver af fjerde Orden med to Dobbelspunkter*, Bull. de l'Acad. danoise des Sciences, 1879); mentre l'Humbert le studiò esprimendone le coordinate mediante funzioni ellittiche di un parametro (*Sur la courbe du 4° ordre à deux points doubles*, C. R., 97, 1883).

Assai più copiosa è la letteratura sulle quartiche razionali, le quali somministrarono eleganti applicazioni alla teoria delle forme binarie; fra gli scritti di tale categoria ricorderemo i seguenti: J. Grassmann, *Zur Theorie der Wendepunkte, besonders der C_4* (Diss. Berlin 1875); A. Brill, *Ueber rationale Curven vierter Ordnung* (Math. Ann., 12, 1877) (2); Nagel, *Bestimmung der Doppelpunkte einer rationalen Curve vierter Ordnung* (Id., 19, 1882), R. A. Robert, *On certain Conics connected with a Plane Unicursal Quartic* e *Notes on the Plane Unicursal Quartic* (Proc. L. M. S., 16, 1884), Le Paige, *Sur les courbes de la quatrième classe à trois tangentes doubles* (Prager Ber., 1884), W. Stahl (1846 - 1893) (3), *Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung* (Journ. f. Math., 101, 1887 e 104, 1889), G. Kohn, *Zur Theorie der rationalen Curven vierter Ordnung* (Wiener Ber., 95, 1887), Fr. Meyer, *Zur algebraischen Erzeugung sämmtlicher, auch der zerfalle den ebenen rationalen Curven vierter Ordnung* (Math. Ann., 31, 1888), E. Meyer (1871-1909), *Die rationalen ebenen Curven 4^er Ordnung und die binäre Form 6^r Ordnung* (Diss. Königsberg, 1888) e W. Binder, *Ueber das System der Tangentialpunkte einer unicursalen Planecurve vierter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 34, 1889). Ad essi può unirsi la memoria di Cayley, *On the mechanical Description of certain Quartic Curves by a modifiel oval Chuck* (Proc. L. M. S., 4, 1871-73). Pure razionali sono le curve a cui sono consacrati i lavori seguenti: Laguerre, *Sur les courbes du quatrième degré qui on trois points doubles à inflexion*,

(1) Le curve ivi studiate sono rappresentate in coordinate omogenee da equazioni della forma seguente: $x^3_2 x_3 + x^3_3 x_1 + x^3_1 x_2 = 0$.

(2) In questi due lavori è fra l'altro dimostrato che i sei flessi di una quartica razionale stanno sulla medesima conica.

(3) Reye, *Wilhelm Stahl* (Journ. f. Math., 114).

et en particulier sur la lemniscate (Nouv. Ann., II. 17, 1878), Schoute, *Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten* (Arch. der Math., II, 2 e 3, 1885, 4, 1886, 6, 1888); Beyel, *Die Curven vierter Ordnung mit drei doppelten Inflexionsknoten* (Zeitschr. f. Math., 30, 1885), e *Ueber die Curven IV Ordnung mit einem doppelten Berührungsknoten und einem Doppelpunkt* (Wolf Zeitschr., 31, 1886); Balitrand, *Sur les courbes du quatrième ordre qui on trois points doubles à inflexion* (Mathésis, II, 3, 1893).

A queste curve specializzate dal punto di vista della geometria proiettiva, ne fanno riscontro altre godenti di particolarità metriche e che furono variamente studiate in parecchi scritti (1), di cui ci limitiamo a ricordare i seguenti: Chasles, *Aperçu hist.* (1837), note XXI; Hart, *An Ac ount of some Transformation of Curves* (Cambridge Journ., 8, 1853); Siebeck, *Ueber einer Gattung von Curven vierten Grades welche mit den elliptischen Functionem zusammenhängen* (Journ. f. Math., 57, 1860, e 59. 1861); Sylvester, Cayley e Crofton in *Educational Times*. 1866: Crofton, *On certain Properties of the Cartesians Ovals* (Proc. L. M. S., 1, 1866); La Gournerie, *Mémoire sur les lignes spiriques* (Journ. de Math., II, 14, 1868); Casey (1820-1891), *On bicircular Quartics* (Dublin. Trans., 24, 1869), G. Darboux (1842-1917) (2) *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris, 1873), Crone, *Elementärgeometriske Beriser for nogle Sätninger vedrörende bicirkuläre Kurve af 4e Orden* (Tidsskrift, IV, 3, 1879); G. Loria, *Remarques sur la géométrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du 4e ordre* (Quart. Journ., 22, 1887); O. Richter, *Ueber die Systeme derjenigen Kegelschnitte, die eine bicirculare Curve vierter Ordnung viermal berühren* (Zeitschr. f. Math., 35, 1890).

Ma fra le particolari curve di quart'ordine nessuna gode di tante proprietà eleganti, nessuna fu scopo di tante acute investigazioni, nessuna interviene in così svariate questioni, nessuna è suscettibile di tante generazioni differenti quanto l'ipocicloide tricuspide, su cui Steiner attirò l'attenzione del mondo dei geometri con la breve nota *Ueber eine besondere Curve dritter Klasse (und vierter Ordnung)* (Journ. f. Math., 53, 1857). A provare la verità delle proposizioni enunciate dal grande geometra tedesco ed aggiungerne delle nuove o a studiare le figure collineari alla curva anzidetta sono dedicati gli scritti seguenti (3):

---

(1) Alcune erano conosciute dagli antichi, cioè la concoide di Nicomede e le spiriche di Perseo.

(2) E. Picard, *La vie et l'œuvre de G. Darboux* (Bull. Sc. math. II, 40, 1916); D. Hilbert, *Gaston Darboux* (Gött. Nachr. 1917); ecc.

(3) Non figura in questo gruppo la bella memoria del Padula, *Intorno alle curve di quarto grado che hanno tre punti di regresso di prima specie* (Tortolini Ann., 3, 1852 e Napoli Mem., 1, 1856), essendo indipendente da quella di Steiner.

Schröter, *Ueber die Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde* (Journ. f. Math., 54, 1857); Cremona, *Sur l'hypocicloïde à trois rebroussements* (Id., 64, 1865); Clebsch, *Note zu vorstehenden Abhandlung* (Ivi), Battaglini, *Sopra una curva di 3ª classe e 4ª ordine* (Giorn. di Mat., 4, 1866); Siebeck, *Ueber die Erzeugung der Curven dritter Klasse und vierter Ordnung durch Bewegung eines Punktes* (Jour. f. Math., 66, 1866); E. F. Eckhardt, *Einige Sätze über Epicycloide und Hypocycloide* (Zeitschr. f. Math., 15, 1870), Painvin, *Note sur l'hypocicloïde à trois rebroussements* (Nouv. Ann., II, 9, 1870); Kiepert, *Ueber Epycicloiden, Hypocycloiden und daraus abgeleitete Curven* (Zeitschr. f. Math., 17 1872); Frahm, *Ueber die Erzeugung der Curven 3ᵉʳ Classe und 4ᵉʳ Ordnung* (Id., 18, 1873); Milinowski, *Ueber die Steiner'sche Hypocicloide mit drei Rückkehlpunkte* (Id., 19, 1874); Laguerre, *Extrait d'une lettre adressée à M. Bourget* (Ivi), *Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnée*, ecc. (Id., 18, 1879), e *Sur quelques propriétés de l'hypocicloïde à trois points de rebroussement* (Bull. S. M. F., 7, 1879); S. Kantor, *Die Tangentengeometrie an der Steiner'schen Hypocicloide* (Wiener Ber., 1878) e *Quelques théorèmes nouveaux sur l'hypocicloïde à trois rebroussements* (Bull. Sc. math., II, 3, 1879); Mac Mahon, *The three-cusped Hypocycloid* (Mess., II, 12, 1883); C. Intriglia, *Studio geometrico dell'ipocicloide tricuspide* (Giorn. di Mat., 23, 1883); R. A. Roberts, *On Polygons circumscribed about a tricuspidal Quartic* (Proc. L. M. S. 14, 1883).

13. La teoria generale delle curve di 5° ordine *(a fortiori* altrettanto dicasi per gli ordini più elevati) è ancora tutta da fare; soltanto per la classe più semplice di esse venne indicato un modo di generazione (v.: K. Rohn, (1855-1921) (1), *Eine einfache lineare Construction der ebenen rationalem Curven fünfter Ordnung*, Math. Ann., 25, 1885, e Eberle, *Ueber rationale Curven fünfter Ordnung, insbesondere derjenigen vierter und funfter Klasse*, München, 1892); mentre per quelle generali si è cominciato a trattare analiticamente la questione delle tangenti doppie (Maisano, *Gleichung der Curve, welche die Berührungspunkte der doppelten Tangenten der allg. Curve des fünften Grades ausschneidet*, Math. Ann., 29, 1887) e delle ellittiche J. de Vries scoperse alcune eleganti proprietà (*Ueber Curven funfter Ordnung mit vier Doppelpunkten*, Wiener Ber., 104, 1895; cfr. anche le note dello stesso autore *Ueber eine gewisse Gruppe ebener Curve*, Amsterdam Akad. Wetens. Versl., 1894-95). Noi quindi, dopo avere ricordati alcuni studi del Cayley *On the mechanical Description of certain Sextic Curves* (Proc. L. M. S., 4, 1871-

(1) F. Schur, *K. Rohn* (Deutsch. Math. Ver. 32, 1923).

73), abbandoneremo le curve piane d'ordine particolare per rivolgere la nostra attenzione a quelle di genere particolare.

Cominceremo da quelle di genere zero, caratterizzate geometricamente dal possedere il massimo numero di punti doppi e cuspidi e analiticamente dall'essere le coordinate dei loro punti esprimibili con funzioni razionali di un parametro; il cui posto notevole che esse occupano nella geometria venne avvertito, indipendentemente l'uno da gli altri e con considerazioni differenti, sin dal 1827 da Möbius nel *Barycentrischer Calcul*, poi da Clebsch nella memoria *Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinatem rationale Functionen eines Parameters sind* (Journ. f. Math., 64, 1864) e da Chasles nelle due note *Sur les courbes dont les points se déterminent individuellement* (C. R., 62, 1862). Fra coloro che in seguito si occuparono di curve razionali meritano un posto speciale, prima Em. Weyr — pei molteplici lavori che scrisse su di esse e di cui citeremo i seguenti: *Ueber algebraische Curven, deren Punkte sich mit einer Variabeln in eindeutige Beziehung setzen lassen* (Zeitschr. f. Math., 16, 1871); *Ueber die Singularitäten des zweiten Ordnung bei rationalen ebenen Curven* (Prager Ber., 1872), *Ueber rationale Curven* (Ivi); *Ueber Punktsysteme auf rationalem Curven* (Id., 1873 e 1874), *Lineale Erzeugung der Curve n^{ter} Ordnung mit einem* (n — 1)-*fachen Punkt und der Curve n^{ter} Klasse mit einer* (n — 1)-*fachen Tangente* (Id., 1874); *Beiträge zur Curvenlhere* (Wien, 1880) — e poi W. Fr. Meyer per l'opera intitolata *Apolarität und rationale Curven* (Tübingen, 1883).

Bisogna anche ricordare le altre memorie seguenti: Haase, *Zur Theorie ves ebenen Curven n^{ter} Ordnung mit* $\frac{1}{2}$ (n — 1) (n — 2) *Doppelund Rückkerpunkten* (Math. Ann., 2, 1870); Lüroth *Beweis eines Satzes über rationale Curven* (Id., 9, 1876); Garbieri, *Nuovo teorema algebrico* (1) *e sua speciale applicazione ad una maniera di studiare le curve razionali* (Giorn. di Mat., 16, 1878); Beltrami, *Ricerche di geometria analitica* (Bologna, Mem., III, 10, 1879); Pasch, *Ueber die rationalen Curven* (Math. Ann., 18, 1881); R. A. Roberts, *On Unicursal Curves* (Proc. L. M. S., 17, 1885); Weltzien, *Zur Theorie der Doppelpunkt und Doppeltangenten der ebenen rationalen Curven* (Math. Ann., 26, 1886); Schoute, *Sur la construction de courbes unicursales par points et tangentes* (Archives Néerlandaises, 20, 1886); Gross, *Ueber die Combinanten binärer Formensysteme, welche ebenen rationalen Curven zugeordnet sind* (Id., 32, 1888); de Jonquières, *Construction géométrique de courbes unicursales, notamment de celle de 5° ordre douée de six points doubles* (Palermo Rend., 2, 1888); W. Stahl, *Ueber die Fundamentalinvolutionen auf*

(1) Comunicato all'autore da E. Beltrami.

rationale Curven (Journ. f. Math., 104, 1889) e *Zur Erzeugung der ebenen rationalen Curven* (Math. Ann., 38, 1891). Noteremo da ultimo le interessanti ricerche del Bertini, *Sulle curve razionali per le quali si possono assegnare arbitrariamente i punti multipli* (Giorn. di Mat., 15, 1877), e del Darboux, *Sur une classe de courbes unicursales et sur une propriété du cercle* (Ann. de l'Éc. norm., III, 7, 1890), destinate queste a mettere in luce alcune proprietà metriche comuni a tutte le curve di classe n aventi la retta all'infinito per tangente $(n-1)$-pla.

14. Le curve di cui nel n. prec. ci occupammo hanno comune con le curve (ellittiche, ossia) di genere 1 e con queste soltanto la proprietà di ammettere infinite trasformazioni univoche in se stesse: è questa un'importante proposizione scoperta e dimostrata da H. A. Schwarz (1843 - 1922) (1) nella memoria *Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler, eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen* (Journ. f. Math., 87, 1879; cfr. G. Hettner (1854-1914) *Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen welche eine Schaar rationaler eindeutig umkerbarer Transformationen in sich zulassen*, Götting. Nachr., 1880, Nöther, *Note über die algebraische Curven welche eine Schaar eindeutiger Transformationen in sich zulassen*, Math. Ann., 20, 1882, e *Nachtrag*. Id., 21, 1883, e Picard, *Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques en elles - mêmes*; Bull. S. M. F., 21, 1893). Tolto questo punto di contatto, le curve ellittiche godono di proprietà specifiche affatto differenti da quelle possedute dalle curve razionali; esse furono studiate da molti autori, fra questi spicca il Clebsch per la famosa memoria *Ueber diejenigen Curven deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen* (Journ. f. Math., 64, 1865; cfr. anche *Sur une propriété des courbes d'ordre* n *à* $\frac{1}{2}n(n-3)$ *points doubles*, C. R., 1865), il Brioschi per le ricerche *Sulla equazione che dà i punti di flesso delle curve ellittiche* (Rend. Ist. Lomb., II, 2, 1869), il Cayley per la nota, *On bicursal Curves* (Proc. L. M. S., 4, 1871-73), l'Humbert per quella *Sur les courbes de genre un* (C. R., 97, 1883), il Bertini per la scoperta di *Una nuova proprietà delle curve d'ordine* n *con un punto* $(n-2)$*-plo* (Lincei Rend., III, 1, 1877), la quale suggerì al Caporali alcune notevolissime osservazioni *Sulle tangenti condotte ad una curva algebrica piana da un suo punto multiplo* (Napoli Rend., 20, 1881); Em. Weyr

(1) L. Bieberbach, *Hermann Amandus Schwarz* (Sitz. Berl. Math. Ges. 21, 1922); G. Hamel, *Zum Gedächtniss an H. A. Schwarz* (Deutsch. Math., Ver. 32, 1923).

per le note *Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins* (Wiener Ber., 1883), *Ueber Vervollständigung von Involutionen auf Trägern von Geschlechte Eins und über Steiner'sche Polygone* (Id., 1892), *Ueber abgeleitete* J^{n}_{n-1} *auf Trägern von Geschlechte Eins* (Ivi) e *Ueber einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Geschlechte Eins und seine Anwendung* (Id., 1894); O. Schlesinger per la sua memoria *Ueber elliptische Curven in der Ebene* (Math. Ann., 33 e 34, 1889; C. Segre pei due lavori *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes* (Math. Ann., 27, 1886) e *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche* (Torino Atti, 24, 1889); G. Castelnuovo per la sua *Geometria sulle curve ellittiche* (Ivi); S. Kantor per la nota intorno a *Les correspondances dans les courbes elliptiques, déduites géométriquement* (Id., 29, 1894).

Delle curve iperellittiche si occuparono il Brill (*Ueber diejenigen Curven, deren Coordinate, sich als hyperelliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen*, Journ. f. Math., 65, 1866), il Cremona (*Sulla trasformazione delle curve iperellittiche*, Rend. Ist. Lomb., II, 2, 1869), il Clebsch (*Ueber die Curven, für welche die Classe der zugehörigen Abel'schen Functionen* $p = 2$ *ist*, Math. Ann., 1, 1869), il Bobek (*Ueber hyperelliptischen Curven*, Wiener Ber., 93, 1886; 94, 1887. Math. Ann., 29, 1887; cfr. anche *Ueber Dreischarcurven*, Wiener Ber., 98, 1889), il Küpper (*Hyperelliptische Cⁿ. Hierzu ein Anhang von* K. Bobek, Prager Abh., 7, 1887, e S. Kantor (*Sur les courbes hyperelliptiques portant des correspondances univoques*, Palermo Rend., 9, 1895).

15. Chiuderemo questa rassegna delle varie direzioni in cui procedettero le indagini intorno alle proprietà delle curve piane accennando ad alcune categorie di curve definite da proprietà speciali, categorie che non sempre includono esclusivamente curve algebriche, come le classi fino ad ora considerate. Non ci arresteremo alle caustiche e alle podarie che per ricordare, riguardo alle prime, le investigazioni istituite su di esse da C. Sturm (1803 - 1855) (*Recherches sur les caustiques*, Ann. de Math., 15, 1824 - 25) e A. Quetelet (1796 - 1874) (*Mémoire sur une nouvelle manière de considérer les caustiques*, Belgique Mém., 3, 1926; v. anche id. 4 e 5) e più recentemente dal Cayley (*A Memoir upon Caustics*, Phil. Trans., 147, 1856, e *A supplementary Memoir upon Caustics*, Id., 157, 1867; cfr. *On a Property of the Caustic by Refraction of the Circle*, Phil. Mag., 6, 1853), e da Em. Weyr (*Ueber die Identität der Brennlinien mit den Fusspunktcurven*, Zeitschr. f. Math. 14, 1867), la *Construction des Krümmungskreises für Fusspunktcurven* (Wiener Ber., 1869) dello stesso autore, e, riguardo alle seconde, la determinazione delle caratteristiche plückeriane delle podarie successive (positive e negative) di una curva algebrica compiuta da A. Rosen (*Om fotpunktkurvors karakterer*, Doctordissertation, Lund 1884). Ci piace ricordare qui ancora lo studio fatto da Haton de la Goupillière (1833 - 1927) delle evolute successive (*Mémoire sur les centres successifs de courbure des lignes planes*, Journ. de Math., II, 4, 1858), e la determinazione dovuta al Binet (1786 - 1856) (*Remarque sur une courbe qui est sa propre développée*, ecc., Id., 6, 1841) e dal Puiseux (*Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes*, Id., 9, 1844), delle curve che sono eguali o simili alle loro evolute; i risultati così ottenuti sono estensioni delle elegantissime proprietà che Giacomo Bernoulli (1654 - 1705) avvertì per primo nella spirale logaritmica. A tali curve si possono avvicinare quelle con cui A. Serret (1819 - 1885) rappresentò gl' integrali euleriani di 2ª specie (*Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce*, Jour. de Math., 7, 1842), le quali godono della proprietà seguente: Il luogo delle proiezioni dei centri di curvatura sopra i raggi vettori è una curva simile alla curva primitiva.

D'altra parte la teoria delle funzioni ellittiche condusse H. J. S. Smith a considerare certe curve (*On the Singularities of the Modular Equations and Curves*, Proc. L. M. S., 9, 1878), che fissarono più tardi l'attenzione del Cayley (v. *A Memoir on the Transformation of El ipt c Functions*, Phil. Trans., 164, 1874). A questo poi si deve un interessante lavoro *On Polyzomal Curves, otherwise the Curves* $\sqrt{U}+\sqrt{V}+etc. = 0$ (Cambridge Trans., 25, 1868), ed a F. Klein (1849 - 1925) (1) e S. Lie (1842 - 1899) (2) un' elegante memoria *Ueber diejenigen ebenen Curven welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlichvielen vertauschbaren Trasformation in sich übergehen* (Math. Ann., 4, 1871 (3), il cui significato dipende in parte dal rappresentare il primo passo che il Lie mosse in una strada ch' egli doveva per correre raccogliendo larga messe di risultati e di gloria.

Al Fouret siamo poi debitori di uno scritto *Sur les courbes planes, ou surfaces, qui sont leurs propres polaires réciproques, par rapport à une infinité de coniques ou surfaces du second ordre* (Bull. Soc. Phil., VII, 1, 1878), ed al Weltizien di uno *Zur Theorie derjenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich rational und ganz durch zwei lineare Functionen und zwei Quadratwurzeln aus ganzen Functionen eines Parameters sich darstellen lassen*

---

(1) R. Courant, *F. Klein* (Deutsch. Math. Ver. 34, 1925) Tutte le memorie del Klein furono ristampate, con aggiunte e commenti dell'autore, col titolo: F. Klein *Gerammelte mathematische Abhadlung*, tre vol. (Berlin 1921 - 23).

(2) L. Bianchi, *Notizia sull'opera matematica di S. Lie* (Lincei Rend. V, 8, 1898 I); G. Darboux, *Notice sur M. S. Lie* (C. R., 128, 1899) F. Engel, *S. Lie* (Bibl. math. III, 1, 1900); ecc.

(3) Queste curve furono incontrate già prima dal Battaglini nelle sue ricerche *Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di seconda specie* (Napoli Atti, 2, 1865) e poi dal Clebsch e Gordan nel loro ben noto studio *Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln* (Math. Ann., 1, 1869).

(Math. Ann., 30, 1887), colla quale egli ascese il primo gradino verso un campo di ricerche che sembra ubertosissimo.

Da ultimo non vanno dimenticate le curve piane triangolari (analoghe alle curve sghembe tetraedriche), il cui studio fu intrapreso dal Lamé e poi proseguito dal de la Gournerie in un capitolo delle sue *Recherches sur les surfaces réglées tetraédrales symétriques* (Paris, 1867), dal Jamet (*Sur les surface et les courbes tetraédrales symétriques*, Ann. Éc. norm., III, 4, 1887) e dal Fouret (*Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques*, Bull. S. M. F., 20, 1892).

E qui ci arrestiamo attratti da altre ricerche dotate di più decisiva importanza, molte delle quali, è bene notarlo, sono generalizzazioni di quelle ora discorse.

CAPITOLO III.

Teoria delle superficie algebriche.

1. Lo spirito di generalizzazione che informa le ricerche geometriche dopo che esse subirono più o meno palesamente l'influenza dell'analisi, spinse gli scienziati a cercare nello spazio proposizioni analoghe a quelle che aveva rivelato lo studio della geometria piana; ond'è che la teoria generale delle superficie segue da presso quella delle curve piane e ha pertanto origini moderne. Essa può dirsi abbia quasi due secoli di vita, giacchè l'Appendice alla seconda parte dell'*Introductio in analysin infinitorum* (Lausannae, 1748) di Eulero è il primo scritto in cui si trovi applicata l'idea del Parent (Cap. I, n. 11), di rappresentare una superficie col mezzo di un'equazione fra le tre coordinate cartesiane di un punto dello spazio; ivi è di più dimostrato quanto convenga lo studiare le sezioni piane di una superficie a chi voglia conoscerne la natura e quanto riesca utile la trasformazione delle coordinate per raggiungere il medesimo intento, il tutto illustrato coll'applicazione alle superficie di secondo ordine.

Lo sviluppo ulteriore che la teoria delle superficie ricevette dopo Eulero manifestò nei cultori di essa due tendenze distinte: quelli che seguirono l'una si occuparono delle proposizioni in cui il concetto d'infinito o d'infinitesimo non rappresenta di regola una parte fondamentale; gli altri invece studiarono esclusivamente le proprietà infinitesimali delle superficie; fra gli uni, come fra gli altri vi sono dei geometri puri, come vi sono di quelli che metodicamente usufruirono dell'aiuto offerto dalla analisi; dei secondi ci occuperemo nel Cap. V, appunto dedicato alla Geometria differenziale, dei primi nel Cap. attuale, ed entreremo in materia avvertendo come chi voglia oggi imparare questa parte della geometria abbia a propria disposizione due eccellenti trattati, cioè il *Treatise on Analytic Geometry of three Dimensions* del Salmon (di cui esistono non meno di sei edizioni e traduzioni in tedesco ed in francese) ed i *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* del Cremona (Bologna, Mem., II, 6 e 7; tradotta in tedesco da M. Curtze, Berlin 1870) (1); riguardo a queste due opere noteremo che la prima per metodo di esposizione può dirsi informata ad

(1) Una terza è da augurare venga un giorno ad arricchire la letteratura matematica, cioè il 2° volume delle *Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch*, del quale il Lindemann ha pubblicato una prima parte (Leipzig, 1891).

un ben intenso eclettismo, benchè nell'autore sia indiscutibile una tendenza verso i procedimenti analitici, la seconda invece è preponderantemente sintetica, come lo è l'*Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* (v. Cap. II, n. 10) dello stesso autore, della quale è un naturale proseguimento; l'esporre con metodo geometrico puro la teoria che ci occupa è compito riserbato ai geometri dell'avvenire.

2. I teoremi generali che sin verso al tramonto del secolo XIX conoscevansi intorno alle superficie algebriche non sono così numerosi come quelli noti per le curve piane algebriche e che noi citammo nei n. 1 e 2 del Capitolo precedente; fra essi basterà qui ricordare le relazioni scoperte da Plücker (*Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés*, Journ. de Math., 19, 1828, e *Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues*, Journ. f. Math., 16, 1836 (1) e Jacobi (v. la memoria citata nel Cap. II, n. 4) fra i punti d'intersezione di tre superficie, le quali furono il punto di partenza delle investigazioni del Reye intorno a *Die algebraischen Flächen, ihre Durchdringungscurven, Schnittpunkte und projectivische Erzeugung* (Math. Ann, 2, 1870), e le proposizioni ottenute applicando la teoria delle funzioni algebriche, fra cui vi è l'*Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques* (C. R., 103, 1886) scoperta dal Nöther.

Più larga fu la messe raccolta dai geometri che si occuparono dei punti singolari delle superficie; fra i lavori che trattano generalmente dei punti d'una superficie per qualche ragione degni di tal nome scegliamo i seguenti: Umpfenbach, *Von den vie fachen Punkten einer krummen Fläche* (Journ. f. Mat. 28, 1844, Amiot, *Sur les points singuliers des surfaces* (Belgique Mém., 21, 1846) (2), Cayley, *On the Singularities of Surfaces* (Cambridge Journ, 7, 1852), de Jonquières, *Étude sur les singularités des surfaces algébriques* (Nouv. Ann., 23, 1863), Halphen, *Sur les lignes singulières des surfaces algébriques* (Ann. di Mat., II, 2, 1879, memoria singolarmente importante), Rohn *Ueber die Entstehung eines beliebigen* k-*fachen Punktes einer Fläche aus dem gewöhnlichen* k-*fachen Punkte* (Leipziger Ber., 1884), del Pezzo, *Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche* (Palermo Rend., 6, 1892) e G. Kobb, *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Journ. de Math., IV,

(1) Alcune inesattezze ivi contenute furono rettificate dal Schönflies a p. 607-610 della edizione da lui curata e da noi già citata delle *Opere* di Plücker.

(2) Memoria scritta per rispondere ad una questione proposta dall'Accademia del Belgio e da questa premiata.

8, 1893) e *Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Bull. S. M. F., 21, 1893).

Vertono invece su le proprietà di alcuni speciali punti singolari gli scritti: Cayley, *On a Singularity of Surfaces* (Quart. Journ., 9, 1868; sono ivi considerati i « pinch-points », cioè quei punti della linea doppia d'una superficie in cui i due relativi piani tangenti di questa coincidono), e *On the Flecnodal Places of a Surface* (Id., 15, 1877; è ivi trattato di quei punti di una superficie in cui la sezione col relativo piano tangente presenta una inflessione), Zeuthen, *Recherches des singularités qui on rapport à une droite multiple* (Math. Ann., 4, 1871), et *Sur une classe de points singuliers des surfaces* (Id., 9, 1876; sono ivi studiati i « pinch-points » di Cayley), Rohn, *Ein Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte* (Id., 22, 1883), Korteweg, *Ueber Faltenpunkte* (Wiener Ber., 98, 1889), *Sur les points de plissement* (Archives Néerlandaises, 24, 1889) e *La théorie génerale des plis et la surface ψ de van der Waals dans les cas de symétrie* (Ivi) (1). Si possono riavvicinare a queste la *Recherche des points à l'infini sur les surfaces algébriques* (Journ. f. Math., 65, 1866) del Painvin e le indagini del Rohn intorno a *Das Verhalten der Hesse'schen Flächen in den vielfachen Punkten und vielfachen Curven einer gegebenen Fläche* (Math. Ann., 23, 1884) (2).

Oltre al determinare quali siano le singolarità da ritenersi per ordinarie in una superficie algebrica e lo studiare le proprietà di questi punti e di altri più speciali, è di grande importanza la questione di trovare relazioni (analoghe alle formole di Plücker) fra i numeri dei punti singolari e dei piani singolari delle varie specie, sì da poter determinare la classe d'una data superficie o, se meglio piace, l'ordine della superficie correlativa ad una superficie data. Questo problema, al pari dei due anzidetti, non si può considerare come definitivamente risoluto, ma ricerche importanti su di esso vennero istituite e diedero dei risultati degni della massima considerazione; dei quali il più antico è rappresentato dal teorema di Poncelet che insegna essere $n(n-1)^2$ la classe di una superficie d'ordine n, di cui tutti i punti sono ordinari (*Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*, Journ. f. Math., 4, 1829; cfr. Beck, *Zur allgemeinen Theorie der Curven und Flächen*, Math. Ann., 14,

(1) In questi scritti del Korteweg sono studiati i punti di contatto di quei piani bitangenti i cui punti di contatto coincidono, punti i quali sono in certo modo analoghi ai punti d'inflessione delle curve piane, giacchè questi possono riguardarsi come punti di contatto di tangenti doppie i cui due punti di contatto coincidono; la sezione della superficie con uno di tali piani presenta nel relativo punto di tangenza un contratto di due rami.

(2) Cfr. anche la nota del Segre citata nel n. 9 del I. Cap.

1879); esso dà origine ad una contraddizione apparente analoga a quella che nella teoria delle curve piane chiamammo « paradosso di Poncelet » (v. Cap. II, n. 5), a togliere la quale più o meno direttamente contribuirono gli scritti seguenti: Salmon, *On the Degree of a Surface Reciprocal to a Given one* (Irish Trans., 21, 1857); Cayley, *On the Theory of Reciprocal Surfaces* (Irish Proc., 7, 1862), *A Memoir on the Theory of Reciprocal Surfaces* (Phil. Trans., 159, 1869), e *On the Theory of Reciprocal Surfaces* (appendice alla 4ª ed., Dublin 1882, del *Treatise on the analytic geometry of three dimensions* del Salmon, riprodotta nel sesto vol. dei *Collected Papers*); Zeuthen, *Note sur la théorie des surfaces réciproques* (Math. Ann., 4, 1871) e *Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques* (Id., 10, 1876)— memorie queste di altissimo valore; — e Fouret, *Sur le nombre des plans tangents que l'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface* (Palermo Rend., 8, 1894).

3. Queste investigazioni sono fra loro affini e connesse a quelle aventi per intento la determinazione d'un numero invariabile per trasformazioni univoche analogo al genere delle curve; ne è punto di partenza la nota di Clebsch, *Sur les surfaces algébriques* (C. R., 67, 1868), nella quale è definito come « genere superficiale » (*Flächengeschlecht*) d'una superficie d'ordine n dotata soltanto di linee doppie e di regresso il numero p delle superficie d'ordine $n-4$ linearmente indipendenti che si possono far passare per tutte le linee singolari della superficie data (sono queste le così dette « superficie aggiunte »). Una dimostrazione dei teoremi enunciati da Clebsch, nonchè una definizione trascendente di p (che conduce a una estensione della nozione di genere a superficie dotate di singolarità qualunque, anzi a varietà a quante si vogliano dimensioni) si apprendono dall'importante memoria del Nöther, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen* (Math. Ann., 2, 1876; cfr. *Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexen Variabeln*, Götting, Nachr. 1869); dell'influenza esercitata sul genere dai punti multipli delle superficie si occupò lo stesso Nöther in uno scritto posteriore (*Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln*, Götting, Nachr., 1871); egli poi, essendo stato avvertito che l'eguaglianza del genere è condizione necessaria ma non sufficiente per la trasformabilità d'una superficie in un'altra, stabilì *Zwei neue Kriterien des eindeutigen Entsprechens algebraischer Flächen* (Götting. Nach., 1873), dando così posto stabile nella geometria al « Curvengeschlecht » di una superficie, cioè al genere delle curve in cui questa è tagliata dalle superficie aggiunte. Notisi che per calcolare il genere p di una superficie d'ordine n bi-

sognerebbe saper determinare il numero dei coefficienti arbitrari che entrano nell' equazione generale delle superficie d' ordine $n - 4$ passanti colle molteplicità volute per le linee multiple ed i punti multipli della superficie data: orbene, dati che siano questi elementi, si può trovare una tale formola per una superficie d' ordine m abbastanza grande, ma s' ignora qual sia il valore di m al disopra del quale la formola è applicabile, sicchè è possibile che facendo ivi $m = n - 4$ si trovi pel genere un valore diverso da quello p corrispondente alla definizione trascendente; questo fatto — segnalato dal Cayley — mena alla considerazione di un genere *geometrico* e di uno *numerico* che talora (ad esempio per le rigate) non coincidono, di cui il primo è sempre positivo, mentre il secondo può essere negativo (v. ad es. Nöther, *Ueber eine Fläche sechster Ordnung von Flächengeschlecht — 1*, Math. Ann., 21, 1883). Sviluppi e importanti complementi ai lavori del Clabsch e suoi seguaci sono contenuti in scritti dello Zeuthen (*Sur les points fondamentaux de deux surfaces dont les points se correspondent un à un*, C. R., 70, 1870; *Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un à un*, Math. Ann., 4, 1871), del Cayley (*On the Transformation of certain Surfaces*, Id., 3, 1871 e *On the Deficiency of Certain Surfaces*. Ivi), del Nöther (*Sulle curve multiple delle superficie algebriche*, Ann. di Mat. II, 5, 1871-73), del Picard (*Sur un nombre invariant dans la théorie des surfaces algébriques*, C. R., 116, 1893 e *Sur deux nombres invariates deus le théorie des surfaces algébriques* Id., 119, 1894) e del Castelnuovo (*Intorno alla geometria sopra una superficie algebrica*. Rend. Ist. Lomb., II, 24, 1891).

Queste nozioni permisero al Picard di estendere allo spazio un teorema di Schwarz che già conosciamo (v. Cap. II, n. 14), di mostrare, cioè, che soltanto le superficie di genere 0 o 1 ammettono una schiera doppiamente infinita di trasformazione univoche in sè stesse (*Sur la transformation des surfaces algébriques en elles-mêmes*; C. R., 103, 1886); in tal caso le coordinate dei punti della superficie sono esprimibili mediante funzione abeliane di due parametri: lo notò H. Poincaré (1854 - 1912) (1) (*Sur les transformations des surfaces en elles - mêmes*; cfr. Picard, *Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles les coordonnés d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres*, Math. Ann., 19, 1882).

Alle questioni relative ai *moduli di una superficie algebrica* (cfr. la nozione analoga per le curve piane nel n. 8 del Cap. II), si riferisce la breve ma

(1) Innumerevoli sono le necrologie di questo grande scienziato; limitiamoci a citare: V. Volterra, *H. Poincaré, L'oeuvre mathématique* e P. Boutroux, *H. Poincaré, L'oeuvre pilosophique* (Revue du mois, 15, 1912).

fondamentale memoria del Nöther, *Anzahl der Moduln einer Klasse algebraischer Flächen* (Berliner Ber., 1888).

4. Tutte le rette che toccano una superficie in un punto stanno in un piano che è il relativo *piano tangente*: questo, come notò il Bedetti (? - 1845) (*De plano tangente*, Nov. Comm. Bonon., 5, 1842), taglia la superficie in una curva che possiede un punto doppio nel relativo punto di contatto e, generalmente parlando, altri punti singolari soltanto nelle intersezioni di quel piano con le linee singolari delle superficie: vi è però una semplice infinità di piani *bi*tangenti ed un numero finito di piani *tri*tangenti, quelli dànno luogo ad una sviluppabile che fu studiata dal Bischoff (1827 1893) (*Ueber den Grad der abwickelbaren Fläche, die einer Fälche m*^{ter} *Ordnung doppelt umscrieben ist*, Journ. f. Math., 57, 1860), mentre la determinazione del numero di questi si legge nelle *Études* del de Jonquères citate nel n. 2 del presente Cap.

Similmente: per ogni punto della superficie passano due tangenti notevoli in quanto hanno con la superficie un contatto di secondo ordine (sono le *tangenti principali*, i cui inviluppi sono le *linee asintotiche* delle superficie); ma esiste una curva luogo di punti, in ognuno dei quali la superficie ammette una tangente quadripunta; di essa trattarono Clebsch nelle due memorie *Zur Theorie der algebraischen Flächen* (Journ. f. Math., 68, 1861, e 63, 1864), e Voss nello scritto sopra *Die Curve vierpunktiger Berührung auf einer algebraischen Fläche* (Math. Ann., 19, 1876), mentre le questioni relative alle tangenti singolari in genere furono metodicamente studiati da H. Schubert nel lavoro *Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche* (Math. Ann., 11, 1877) e più tardi dal Krey in una memoria *Ueber singuläre Tangenten algebraischer Flächen* (Id., 15, 1879).

Ricorderemo ancora qui le ricerche sui contatti delle superficie di cui siam debitori a Plücker (*Ueber die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contakt der verschiedenen Ordnungen haben*; Journ. f. Math., 4, 1829), a Chasles (*Théorèmes sur les contacts des lignes et des surfaces courbes*. Journ. de Math., 2, 1837), al Moutard (v. una nota inserita nel secondo vol. delle *Applications d'analyse et de géométrie* di Poncelet, Paris 1864) e all'Halpen (*Sur le contact des surfaces*, Bull. S. M. F., 3, 1876, e *Sur un point de la théorie du contact*, Id., 2, 1875); altre ricerche analoghe più complicate verranno nominate a proposito della geometria numerativa (Cap. IX, n. 4).

5. Passando ad un altro ordine di idee, vanno menzionate le ricerche aventi per iscopo la costruzione o la generazione delle superficie algebriche d'ordine qualunque, fra cui spiccano quelle del Grassman (*Allgemeiner Satz über die* *lineale Erzeugung aller algebraischen Oberflächen, Ueber die verschiedenen Arten der linealen Erzeugung algebraischer Oberflächen*, Journ. f, Math., 49, 1855), quelle di Chasles (*Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres*, C. R., 1857), e di de Jonquières (*Génération des surfaces algébriques d'ordre quelconque*, C. R., 105, 1887) relative alla generazione con fasci proiettivi (cfr. anche J.-S. e M.-N. Vaněcek, *Sur la génération des surfaces et des courbes gauches par les faisceaux de surfaces*, Lincei Rend. IV, 1, 1884-85, e Ann. di Mat., II, 14, 1886-87), quelle del Reye (*Projectivische Erzeugung der allgemeinen Flächen dritter, vierter und beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung*, Math. Ann., 1, 1869) e di G. von'Escherich (*Die reciproken linearen Flächensysteme* Wiener Ber., 75, 1877) e *Die Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte mittelst reciproker Flächenbündl*, e *Die Construction der algebraiscen Flächen und curven aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkten mittelst reciproker linearer Systeme höherer Stufe* (Id., 85, 1882), alle quali ultime è strettamente legato l'interessante scritto dello Schur *Ueber die Construction der Flächen* m-*ter Ordnung* (Math. Ann., 23, 1884).

Della teoria delle polari e della generalizzazione che ricevette nello spazio (analoga a quella che ebbe nel piano) trattarono oltre agli scritti che citammo (Cap. II, n. 9) parlando della polarità rispetto a curve piane: Mainardi (1800-1897) *Su le polari delle supeficie algebriche* (Atti del R. Ist. Lomb., 1, 1858), R. del Grosso (1813-1873) *Nota su alcune generali proprietà riguardanti i poli e le superficie polari delle superficie* (Accademia Pontaniana, Rend., 7, 1859 ed il Reye (*Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen* Journ. f. Math., 78, 1874; *Ueber die algebraische Flächen, die zu einander apolar sind*. Id., 79, 1875; *Ueber Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen* Id., 82, 1877).

Ad altre proprietà proiettive si riferiscono la importante memoria di Clebsch *Ueber die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung* (Id., 59, 1861), i *Beiträge* del Voss *zur Theorie der algebraischen Flächen* (I, *Zur Theorie der Steiner'schen Kernflächen*, Math. Ann., 27, 1886; II, *Ueber die zu zwei eindeuting auf einander bezogenen Flächen gehörigen Strahlensysteme*, Id., 30, 1887), le ricerche del medesimo autore *Ueber die projective Centralfläche einer algebraischen Fläche* n[ter] *Ordnung* (Münchener Abh., 16, 1887), quelle del Moutard consacrate alla *Détermination du degré de l'équation de certaines surfaces enveloppes* (Nouv. Ann., 19, 1860). finalmente la *Note* del Cayley *on a Theorem relating to Surfaces* (Phil. Mag., 25, 1863).

Invece alle proprietà metriche sono dedicate, oltre alcune delle memorie citate nel n. 2 del Cap. I (1), le ricerche sulle normali inaugurate dal Terquem (*Sur le nombre de normales qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique*, Journ. de Math., 4, 1839) e da Steiner (*Ueber algebraische Curven und Flächen*, Journ. f. Math., 49, 1855), e proseguite con successo da R. Sturm (*Ueber Normalen an algebraischen Flächen*, Math. Ann., 7, 1874, *Zur Theorie der algebraischen Flächen*, Id., 9, 1876), nonchè quelle del Fouret *Sur le nombre des normales communes à deux courbes, à deux surfaces, à une courbe et une surface* (Bull. S. M. F., 6, 1878; cfr. anche Rindi, *Sulle normali comuni a due superficie*, Palermo, Rend., 5, 1891) di R. Sturm *Ueber Fusspunkt-Curven und Flächen, Normalen und Normalebenen* (Math. Ann., 6, 1873), del Pieri *Sulle normali doppie di una superficie algebrica* (Lincei Rend., IV, 2, 1886,), e del Darboux *Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique*, C. R., 70, 1870); inoltre quelle di L. Marcks (?-1870) (*Bestimmung der Ordnung und Classe der Krümmungsmittelpunktsfläche einer Fläche n-ter Ordnung*, Math. Ann., 5, 1872), del Roberts (*On parallel Surfaces* e *Note on Normals and the Surface of Centres of an algebraical Surface*, Proc. L. M. S., 4, 1873), di C. Neumann (*Sul baricentro di curvatura delle superficie algebriche*, Ann. di Math. II, 1, 1868), di S. Rindi (*Les surfaces polaires inclinées*, Bull. Sc. math., II, 9, 1885, e *Alcune proprietà delle superficie e dei sistemi di superficie*, Giorn. di Mat., 24, 1886), e del Voss (*Zur Untersuchung der Fläche der Centra*, Math. Ann., 16, 1880); di quest'ultimo va ancora ricordata l'esatta determinazione del numero degli ombelichi di una superficie (*Ueber die Zahl der Kreispunkte einer allgemeinen Fläche* n^{ter} *Ordnung*, Math. Ann., 9, 1876), questione importante che il Berzolari estese nella nota *Sopra un problema che comprende quello di trovare il numero degli ombelichi di una superficie generale d'ordine* (Torino Atti, 30, 1895) (2).

Finiremo richiamando l'attenzione del lettore sui lavori compiuti verso il tramonto del Secolo XIX intorno ai sistemi lineari di superficie, non senza osservare dapprima che il numero esiguo di essi non corrisponde all'importanza del tema che trattano, ma probabilmente ne rispecchia le difficoltà; sono, oltre quello già citato (Cap. II, n. 9), del Doehlemann, quelli del Pieri, *Sui sistemi*

---

(1) Notiamo in esse il teorema « il centro delle medie distanze dei punti di contatto di una superficie con i suoi piani tangenti paralleli ad una data giacitura, non dipende da questa giacitura »; reso noto da Chasles prima nel *Mémoire sur la transformation parabolique des relations métriques des figures* Correspondance matématique, 6, 1830) e poi in *Ap. hist.* (2ᵉ éd., Paris, 1875, p. 624) fu commentato dal Liouville in una memoria che già menzionammo nel l. c.

(2) Si tratta qui di stabilire quanti punti di una superficie godano la proprietà che le relative tangenti principali incontrino una data curva algebrica.

lineari di coni (Riv. di Mat.; 3, 1893) e *Sui sistemi lineari di monoidi* (Giorn. di Mat., 31, 1893) e quelli dell' Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche* (Lincei Rend., V, 2, 1893₂) e *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche* (Id., 3, 1894₁; v. anche Math. Ann., 46, 1895). Per affinità di tema nomineremo qui le due seguenti memorie: W. End, *Algebraische Untersuchungen über Flächen mit gemeinschaftlicher Kurve* (Math. Ann., 35, 1890); Guccia, *Sur les points doubles d'un faisceau de surfaces algébriques* (C. R. 120, 1895).

6. Compiuta così la sommaria esposizione delle ricerche intraprese intorno alle proprietà generali delle superficie algebriche, osserviamo che, appunto le evidenti lacune esistenti nella totalità dei risultati ottenuti, spinsero gli scienziati immediatamente posteriori a quelli sinora citati a ricerche importanti di cui parleremo nel Libre seguenti. Ora passeremo a dir qualche cosa degli studi che vennero fatti intorno alle superficie di ordine determinato o che sono specializzate per qualche proprietà comune.

Anzitutto ci si presentano le superficie di secondo ordine (1). Di queste gli antichi conoscevano tutte le rotonde, ad eccezione dell' iperboloide ad una falda (v. specialmente i due libri di Archimede *Sopra i conoidi e gli sferoidi*), il quale venne segnalato da Wren (1632-1723) nella memoria intitolata *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici, elaborandis lentibus hyperbolici accomodati* (Phil. Trans. 1669) e poi dal Parent in una nota *Sur les surfaces courbes égales en surface courbe et en solidité* (Mém. de Paris 1709, stampati nel 1733), la quale fu il punto di partenza di numerosi studi da parte dei discepoli di N. Fergola (2).

Il primo accenno alle quàdriche in generale si trova, per quanto ci consta, nel *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plane* (Paris, 1639) di Desargues, ove questo autore, dopo di avere esposto i teoremi fondamentali delle polarità rispetto ad una sfera, osserva: « Et semblables propriétés se trouvent à l'égard d'autres solides qui sont relativement à la sphère, ce que les coniques sont au cercle » (*Oeuvres de Desargues*, I, p. 291). La verità di questa asserzione venne dimostrata assai più tardi da Monge e dai suoi discepoli, ai quali si può dire che la teoria delle superficie di second'ordine debba la propria esistenza. A provarlo osserve-

(1) Cfr. l'articolo di O. Staude, *Flächen 2 Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven* (Encykl. math. 5, II, Tl., 1 Hälfte).

(2) Cfr. G. Loria, *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce* (Genova 1892), p. 55-61.

remo come nella Scuola politecnica le varie specie di quàdriche abbiano ricevuto i nomi (diversi da quelli suggeriti da Eulero nella tante volte citata *Introductio* e, a vero dire, mediocremente felici) che dovevano poi conservare; che è nel secondo volume della Corr. Éc. pol. (Paris, 1813) che Chasles fece conoscere la doppia generazione, mediante il movimento di una retta, dell'iperboloide ad una falda, la conoscenza della quale si diffuse poi grazie agli *Élémens de géométrie à trois dimensions* (Paris 1817) dell'Hachette (1769-1834), ove di più s'impara la generabilità di tutte le quàdriche, tranne i paraboloidi iperbolici, mediante un circolo mobile (1); inoltre, già prima, il Livet (1783-1812) (2) nello stabilire le *Formules pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques* (Journ. Éc. pol., 13° cah., 1806) ed il Binet nel compiere alcune ricerche *Sur les trois axes rectangulaires des surfaces du second degré qui ont un centre* (Corr. Éc. pol., 2, 1809-1813) avevano incontrati i teoremi per le quàdriche analoghi a quelli di Apollonio per le coniche (3); ed il Brianchon in un *Mémoire sur les surfaces courbes du second degré* (Journ. Éc. pol., 13° cah., 1806) dimostrava essere la figura polare reciproca di una quàdrica una superficie della stessa specie; poco dopo C. Dupin (1784-1873) (4) in un *Essai sur la description des lignes et des surfaces du second degré* (Id., 14° cah., 1808) generalizzava in due modi allo spazio il teorema che dice: « quando un segmento di lunghezza costante scorre coi suoi estremi su due rette di un piano, ogni punto di esso o del suo prolungamento descrive un'ellisse ». A Monge dobbiamo poi la conoscenza della sfera luogo dei vertici dei triedri trirettangoli le cui faccie toccano una quàdrica (v. *Des surfaces du second degré*, Corr. Éc. pol., 2, 1809-13) e a Bobillier quella del luogo dei vertici dei triedri trirettangoli i cui spigoli sono tangenti di una tale superficie (*Recherche de quelques lieux géométriques dans l'espace*, Ann. de Math., 18, 1827-28). Altre proposizioni intorno alle superficie di second'ordine furono indicate da Chasles (*Théorèmes sur le paradoloïde hyperbolique et l'hyperboloïde à une nappe*, Corr. math., 11, 1839; *Propriétés nouvelles de l'hyperboloïde à une nappe*, Journ. de Math., 4, 1839; *Théorèmes sur les surfaces du second dégre*, Id., 8, 1843), il quale in particolare si propose e riuscì a trovare teoremi relativi alle quàdriche analoghi a quelli di Pascal e

---

(1) Questa proprietà, nota agli antichi pel cono (v. il I libro delle *Coniche* di Apollonio), venne estesa all'ellissoide dal d'Alembert (*Opuscules mathématiques*, 7, Paris 1767).

(2) Questo matematico — che dal 1809 fu a Varsavia professore nella Scuola di artiglieria e d'ingegneria — introdusse la geometria descrittiva in Polonia.

(3) Cfr. Staudt, *Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen II Ordnung* (Nürnberg, 1867).

(4) J. Bertrand, *Eloges académiques* (Paris, 1890).

Brianchon (*Aperçu hist.*, note 32) e a generalizzare la teoria dei fuochi (Ivi, note 31): va notato che quest'ultima questione fu studiata. indipendentemente da Chasles, da B. Amiot, (*Mémoire sur une nouvelle méthode de génération et de discussion der surfaces du deuxième ordre*, Journ. de Math., 8, 1843; *Mémoire sur diverses propriétés des surfaces du deuxième ordre déduites de la théorie des focales*, Id. 10, 1845), e, pel caso di coni quàdrici, molto tempo prima dal Magnus in una memoria che fa parte del volume XVI delle Ann. de Math. (1826). A cominciare da questo momento la teoria delle linee focali delle superficie di second'ordine e quelle delle quàdriche omofocali fu studiata in varî modi in molti scritti, fra cui ricorderemo: Plücker, *Sur la réflexion de la lumière, dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom* (Journ. f. Math., 35, 1847); Chasles, *Résumé d'une théorie des surfaces du second ordre homofocales* (C. R., 50, 1860, oppure Journ. de Math., II, 5, 1860); Heilermann, *Ueber die Fokalpunkte der Flächen zweiten Grades* (Journ. f. Math., 56, 1859).

A queste si possono riavvicinare le numerose ricerche che, a partire da Monge (*Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde*, Journ. Ec. pol., 1, 1794; cfr. Cremona, *Sulle linee di curvatura delle superficie di secondo grado*, Bologna Mem., III, 1, 1871), vennero fatte sulle linee di curvatura delle quàdriche, poi su le geodetiche ed altre curve: i molti punti di contatto esistenti fra tutti questi temi ci inducono a citare qui insieme i lavori che vi si riferiscono: Jacobi, *Auszug aus einem Schreiben an Herrn Steiner* (Journ. f. Math., 12, 1834) e *Geometrische Theoreme* (Id., 73, 1871; cfr. Hermes, *Die Jacobi'sche Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades*, Ivi); MacCullagh (1809-1847), *On the Surfaces of the Second Order* (Irish. Proc., 2, 1843) e *Note on Surfaces of the Second Order* (Id., 3, 1847); Townsend, *On a principle in the Theory of Surface of the second Order and its Application to M. Jacobi's Method of generating t e Ellipsoid* (Cambridge Jour., 3, 1848) e *On a Theorem in Confocal Surfaces of the second Order* (Id., 5, 1850); Chasles, *Sur les lignes geodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré*, *Nouvelle démonstration de deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second ordre homofocales et propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de ces surfaces* (Journ. de Math., 11, 1846); Liouville, *Démonstration géométrique relative à l'équation des lignes géodésiques sur les surfaces du second ordre* (Ivi) e *Expression simple du rayon de courbure géodésique d'une ligne tracée sur un ellipsoïde* (Id., 19, 1854); M. Roberts, *Sur quelques propriétés des lignes geodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde* (Id., 11, 1846), *Nouvelles propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde* (Id., 13, 1848), *Mémoire sur la géométrie des courbes tracées sur la* *surface d' un ellipsoïde* (Id., 15, 1850), *Sur l' application du théorème d'Abel à la comparaison des lignes de courbure d' un ellipsoïde* (Ann. di Mat., II, 2, 1868-69), *Sur les lignes de courbure d' un ellipsoïde* (Ivi) e *Sur la rectification des lignes de courbure d' un ellipsoïde* (Id., II, 5, 1871-73); Staude, *Ueber Fadenconstruction des Ellipsoides* (Math. Ann., 20, 1882), *Ueber geodätische Bogenstücke von algebraischen Längendifferenz auf dem Ellipsoid* (Ivi), *Ueber geodätische Polygone auf den Flächen zweiten Grades* (Id., 21, 1883), *Geometrische Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen erster Ordnung in System der confocalen Flächen zweiten Grades* (Id., 22, 1883), *Ueber neue Focaleigenschaften des Flächen zweiten Grades*, e *Eine katoptrische Eigenschaft der Ellipsoids* (Id., 27, 1886); Finsterwalder, *Ueber die Fadenconstruction des Ellipsoides* (Id., 26, 1886).

Al pari di questi lavori sono di indole metrica i seguenti intorno alle normali delle quàdriche: F. Joachimsthal (1818 - 1861), *De aequationibus quarti et sexti gradus quae in theoria linearum et superficierum secundi gradus occurrunt* (Journ. f. Math., 53, 1857); Clebsch, *Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen des zweiten Grades* (Id., 62, 1863) e Geiser, *Sulle normali all' ellissoide* (Ann. di Mat., II, 1, 1867-68).

Nel campo projettivo si aggirano per converso le memorabili ricerche di Hesse, *Ueber Oberflächen zweiter Ordnung* (Journ. f. Math., 18, 1838) e *De curvis et superficiebus secundi ordinis* (Id., 20, 1840); al medesimo geometra dobbiamo anche degli studi *Ueber die lineäre Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, wenn sieben Schnittpunkte derselben gegeben sind* (Id., 26, 1843; v. anche dello stesso autore: *Note über die acht Schnittpunkte dreier Oberfläche zweiter Ordnung*, Id., 72, 1871, e *Ueber Sechsecke im Raume*, Id., 85, 1878 (1)), che vennero completati o proseguiti da F. Caspary (1853-1901) (2) (*Zur Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung*, Id., 99, 1886), da H. Schröter, (*Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, von denen sieben gemeinschaftliche Punkte willkürlich und unabhängig von einander gegeben sind*, Ivi, e *Ueber die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung*, Acta, 14, 1890), da R. Sturm (*Ueber den achten Schnittpunkt dreier Fläche zweiter Ordnung*, Journ. f. Math., 99, 1886), da H. G. Zeuthen (*Construction du huitième point commun aux surfaces du second ordre qui passent par sept points donnés*, Ivi), da T. Reye (*Lineare Con-*

(1) Cfr. altresì le *Recherches nouvelles sur les sections du cône et sur les hexagones inscrits et circonscrits à ces sections* (Ann. de Math., 15, 1824-25) del Dandelin (1794-1847).

(2) E. Jahnke, *Nachruf auf F. Caspary* (Deutsch. Math. Ver. 12, 1903).

struction des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiter Ordnung, Id., 100, 1887), dal Dobriner (*Ueber das raumliche Achteck, welche die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung bilden,* Acta, 12, 1889) e dallo Zeuthen (*Note sur les huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre* (lvi).

Aggiungiamo che molte belle pagine della *Geometrie der Lage* dello Staudt e dei seguenti *Beiträge* si riferiscono alle superficie di cui ci stiamo occupando (1).

Alla geometria costruttiva appartengono eziandio le indagini di F. Seydewitz (1807-1852) (*Leichtfassliche Construction einer Fläche des zweiten Grades von welcher neun Punkte beliebig gegeben sind,* Arch. der Math., 17 1851), di Chasles (*Principe de correspondance entre deux objets variables qui peut être d'un grand usage en géométrie,* C. R., 41, 1855; cfr. Heger, *Zur Construction einer Flächen zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten,* Zeitschr. f. Math., 25, 1880), dello Schröter (*Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova,* Journ. f. Math., 62, 1863) e di Steiner (*Construction der Fläche zweiten Grades durch neun Punkte,* Id., 68, 1868; memoria postuma), di J. Thomae (1840-1921) (*Lineare Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neuen Punkten,* Leipziger Ber., 44, 1892), del Ravier (*Construction du dixième point d'une quadrique,* Nouv. Ann., III, 11, 1892) e del Rohn (*Die Construction der Fläche zweiter Grades durch neun gegebene Punkte*, Leipziger Ber., 1894), sulla costruzione della quàdrica determinata da nove punti; altrettanto dicasi delle memorie di Picquet: *Solutions de quelques problèmes relatifs aux surfaces du second ordre* (Journ. f. Math., 73, 1871), *Su trois problèmes fondamentaux relatifs aux surfaces du second ordre* (Id., 99, 1886) e *Nouvelle contribution au problème du huitième point commun à trois quadratiques* (Bull. S. M. F., 22, 1894), di quelle dello Sturm, *Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades* (Math. Ann., 1, 1869), del London, *Ueber constructive Probleme aus der Theorie der reciproken Verwandschaft und der Flächen 2ᵉʳ Ordnung* (Id., 38, 1891) e del Cardinaal, *Application des principes de la géométrie synthétique à la solution des problèmes de la géométrie descriptive* (Annales de l'Éc. pol. de Delft, 3, 1888).

A Plücker appartiene una breve nota *Ueber eine neue mechanische Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Classe* (Journ. f. Math., 34, 1847), mentre la generazione delle quàdriche mediante stelle reciproche è un ritrovato del Seydewitz, come appare dall'articolo intitolato *Construction und Classifi-*

---

(1) A queste pagine sono ispirate le *Untersuchungen über das raumliche Polarsystem* (Breslau, 1868) di G. Beyer.

cation der Flächen zweiten Grades mittelst projectivischen Gebilde (Arch. der Math., 9, 1847).

Di alcuni poligoni collegati alle superficie di second' ordine parlano: Battaglini, *Iscrivere in una superficie di 2° grado un poligono, in modo che i lati passino per punti dati* (Tortolini Ann., 2, 1851); Zeuthen, *Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre* (Math. Ann., 18, 1881 e 26, 1886); G. Bruno (1828-1893), *Sui quadrilateri sghembi circoscritti ad una quadrica* (Torino Atti, 17, 1881); Voss, *Ueber Polygone welche einem Gebilde zweiten Grades umschrieben sind* (Math. Ann., 26, 1885) e *Ueber Poncelet-Zeuthen'schen Polygone welche einem Gebilde zweiten Grades eingeschrieben sind* (Id., 27, 1886); Campbell (*On the shortest Path consisting of straight Lines between two Points on a ruled Quadric,* Mess., 23, 1893-94). Più antiche sono le osservazioni intorno alle curve situate sopra una quàdrica fatte indipententemente dal Plücker (*Die analytische Geometrie des Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Klasse;* Journ. f. Math. 34, 1847) e da Chasles (*Théorie analytique des courbes à double courbure de tous les ordres tracées sur l'hyperboloïde à une nappe,* C. R., 53, 1861) e Cremona (*Courbes gauches décrites sur la surface d' un hyperboloïde à une nappe,* Ivi).

Di sistemi infiniti di quàdriche trattarono, oltre lo Staudt (nei suoi *Beiträge*) e il Reye (in una serie di lavori compendiati poi in *Die Geometrie der Lage*): Cayley, *On the Cones which pass through a given Curve of the Third Order* (Phil. Mag., 12, 1856); H. Müller (*Der Flächenbüschel zweiter Ordnung in synthetisch Behandlung,* Math. Ann., 1, 1869); R. Sturm (*Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung,* Journ. f. Math., 70, 1869); E. D'Ovidio, *Teoremi sui sistemi di superficie di secondo grado* (Torino Atti, 14, 1879); Cardinaal, *Ueber einen besonderen Fall des F^2-Gebüsches und das dazu projectivische räumliche System* (Journ. f. Math., 111, 1893). Invece ad alcuni sistemi finiti si riferiscono le due note: Montesano, *Su certi gruppi di superficie di secondo grado* (Ann. di Mat., II, 14, 1886-87), e Kober, *Zur Gruppe der acht harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades* (Math. Ann., 33 1889 e 40, 1892). Ad altri guida la ricerca delle quàdriche rispetto a cui due date sono polari reciproche, alla quale sono consacrate le memorie seguenti: E. d'Ovidio, *Sulle linee e superficie di second'ordine* (Giorn. di Mat., 10, 1872), G. Battaglini, *Nota intorno alla quadrica rispetto alla quale due quadriche date sono polari reciproche* (Lincei Atti, 25, 1872) e H. Thieme, *Ueber die Flächen II Grades, für welche zwei Fläche zweiten Grades zu einander polar sind* (Diss. Breslau, 1877); mentre alle proprietà delle quàdriche autopolari rispetto ad un'altra sono dedicate la nota di R. Sturm, *Ueber Flächen zweiten Grades welche zu sich selbst polar sind* (Math. Ann., 25, 1885) e l'altra di P. Del Pezzo, *Sulle quadriche polari reciproche di sè stesse rispetto ad un'altra* (Napoli Rend., 24, 1885).

Altre proposizioni valide per tutte le superficie di secondo grado si apprendono dai lavori seguenti: Brassine, *Sur quelques propriétés des courbes et des surfaces du second degré* (Journ. de Math., 7, 1842); Cremona, *Sulle coniche e le superficie di secondo ordine congiunte* (Ann. di Mat., 3, 1860); C. Méray (1835-1911) (1), *Mémoire sur la théorie géométrique des surfaces du second ordre* (Ivi); Rosanes, *Bemerkungen zur Theorie der Flächen zweiter Ordnung* (Math. Ann., 23, 1884); e in molti scritti di P. Serret, fra cui sceglieremo l'articolo intitolato *De quelques propositions réciproques relatives à la théorie des courbes et des surfaces du second degré* (Journ. de Math., II, 6, 1861) e l'opera *Géométrie de direction* (Paris, 1869).

Una quàdrica non può specializzarsi projettivamente se non degenerando in un cono o in una conica; ma dal punto di vista della geometria metrica essa può offrire delle particolarizzazioni che vennero più volte studiate. Tacendo dei coni che presentano delle particolarità metriche, i quali sono stati considerati da Binet (Corr. Èc. pol., 2, 1809-1813), da Steiner (Journ. f. Math., 2, 1827) e più recentemente da Th. Meyer (*Ueber die Kegel des Pappus und des Hachette*, Diss. Strassburg, 1884), e limitandoci per le quàdriche di rivoluzione a ricordare l'interessante lavoro del Schönflies, *Ueber diejnigen Flächen zweiten Grades, welche durch gleichwinkelige reciproke Strahlenbündel erzeugt werden* (Journ. f. Math., 99, 1886); rileveremo nella *Systematische Entwickelung* la presenza del «paraboloide iperbolico equilatero» (v. Schönflies, *Ueber das gleiseitige hyperbolische Paraboloid und ein aus ihm abgeleitetes Strahlensystem*, Zeitschr. f. Math., 23, 1878), nella memoria del Vogt, *Ueber ein besonderes Hyperboloid* (Journ. f. Math., 86, 1879) uno studio metodico dell' «iperboloide equilatero» (di cui già Hesse e Joachimstal avevano parlato in memorie dianzi ricordate), mentre all' «iperboloide ortogonale» — che, dopo essere stato studiato da Chasles sin dal 1836 nella memoria intitolata *Analogie entre des propositions de géométrie plane et de géométrie à trois dimensions* (Journ. de Math., 1), soltanto ai dì nostri ricevette dallo Schöter il nome che porta attualmente — sono consacrati gli scritti seguenti: Schönflies, *Synthetisch-geometrische Untersuchungen über Flächen II Grades* (Diss. Berlin, 1877) e *Ueber ein specielles Hyperboloid und andere mit ihm zusammenhängende Regelflächen* (Zeitschr. f. Math., 23, 1878 e 24, 1879); Schröter, *Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art* (Journ. f. Math., 85, 1878); Ruth, *Ueber eine besondere Erzeugungsweise des orthogonalen Hyperboloides und über Büschel orthogonalen Kegel und Hyperboloide* (Wiener Ber., 1879).

(1) J. Pionchon, *Notice sur la vie et les travaux de Ch.* Méray (Revue de l'Univ. de Lyon, 1912).

E finiremo osservando che chi voglia apprendere la teoria delle superficie di secondo grado può ricorrere ai numerosi trattati di geometria analitica e geometria descrittiva (fra questi ultimi emerge *Die darstellende Geometrie* del Fiedler, ricca di osservazioni originali sulle superficie di cui ci occupiamo), ai trattati sintetici già citati di Staudt e Reye ed ancora alla *Theorie der Oberflachen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugniss projektivischer Gebilde* (Leipzig, 1880) di H. Schröter.

7. La dottrina delle superficie di terz' ordine ebbe due sorgenti fra loro indipendenti, in Inghilterra ed in Germania. Da un lato Cayley e Salmon, in due memorie *On the triple Tangent Planes of Surfaces of the third Order* (Cambridge Journ., 4, 1849; cfr. Kohn, *Beweis eines Satzes von Cayley*, Monatshefte, 2, 1891), scoprivano le 27 rette ed i 45 piani tritangenti posseduti da qualsiasi superficie cubica; dall'altro Steiner, in una lettura fatta all'Accademia di Berlino il 31 gennaio 1856 *Ueber die Flächen dritten Grades* (Journ. f. Math., 53, 1857), giungeva ai medesimi risultati e di più dava gli elementi per una completa teoria sintetica di queste importanti forme geometriche. Mentre i due geometri inglesi sembra non trovassero imitatori che nello Schläfli (1814-1895) — del quale citeremo pel momento la nota intitolata *An Attempt to determine the Twenty-seven Lines upon a Surface of the Third Order* (Quart. Journ., 2, 1858), ove fra l'altro è introdotta la nozione di « bisestupla » (cfr. Cayly, *On the Double-sixers of a Cubic Surface*, Id., 10, 1870, e *On D.r Wiener's Model of a Cubic Surface: and on the Construction of a Double-sixer*, Cambridge Trans, 12, I Part, 1873) — numerosissimi sono i geometri che si proposero di dimostrare prima e di completare poi le asserzioni del grande geometra tedesco. Ricorderemo anzitutto lo Schröter per la memoria del titolo: *Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung* (Journ. f. Math, 62, 1863) e la Diss. di R. Sturm, *De superficiebus III ord. disquisitiones syntheticae* (Breslau, 1863), e poi i due grandi lavori di Cremona e Sturm ricompensati nel 1866 dall'Accademia di Berlino col premio Steiner: il primo apparve due anni dopo sotto il titolo di *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (Journ. f. Math., 68, 1868), mentre il secondo formò il nucleo dell'opera *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung* (Leipzig, 1867), libro a cui serve di complemento la memoria *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 88, 1880).

Ma nel frattempo altri due grandi geometri avevano fatto compiere dei passi importanti alla teoria che ci occupa, cioè il Grassman coll' indicare la generazione delle superficie cubiche mediante tre stelle di piani fra loro projettive (*Die stereometrische Gleichung dritten Grades, und die dadurch erzeugten Oberflächen*, Journ. f. Math., 49, 1855) ed il Sylvester scoprendo il celebre

« pentaedro » (*On Elimination, Transformations and Canonical Forms*, Cambridge Journ., 6, 1851). Al primo tennero dietro molti scrittori (1), dei cui lavori ricorderemo i seguenti: August, *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis* (Diss. Berlin, 1862); Affolter, *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung* (Arch. der Math., 56, 1874); Picquet, *Sur un nouveau mode de génération des surfaces du troisième degré* (Bull. S. M. F., 4, 1876; v. anche l'articolo dello stesso autore che tratta *Des sections paraboliques et equilatères dans les surfaces du troisième degré*, Ivi); Schröter, *Lineare Constructionen zur Erzeugung der kubischen Fläche* (Journ. f. Math., 96, 1884); G. Kohn, *Ueber eine neue Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung* (Wiener Ber., 99, 1890), ai quali può avvicinarsi la posteriore memoria del Panelli, *Sulla costruzione della superficie del 3° ordine individuata da 19 punti* (Ann. di Mat., II, 22, 1894). Alla memoria del secondo fanno seguito: Gordan, *Ueber das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung* (Math. Ann., 5, 1872); Reye, *Geometrischer Beweis des Sylvester'schen Satzes « Jede quaternäre kubische Form ist darstellbar als Summe von fünf Kuben linearer Formen »* (Journ. f. Math., 78, 1874; Cremona, *Ueber die Polar-Hexaeder bei den Flächen dritter Ordnung* (Math. Ann., 13, 1878; cfr. Caporali, *Sull'esaedro completo*, Napoli, Rend., 20, 1881); Beltrami, *Sull'equazione pentaedrale della superficie di terzo ordine* (Rend. Ist. Lomb., II, 12, 1879).

La configurazione formata dalle rette di una superficie di terzo ordine e dai suoi piani tritangenti (2), venne fatta segno di ricerche così vaste e perseveranti che meriterebbero il nome di esaurienti; i più significanti scritti che ne contengono i risultati sono: Cremona, *Sulle ventisette rette d'una superficie del terzo ordine* (Rend. Ist. Lomb., II, 3, 1870); R. Sturm, *Ueber die 27 Geraden einer kubischen Fläche* (Math. Ann., 23, 1884); E. Bertini, *Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti di una superficie di 3° ordine* (Ann. di Mat., II, 12, 1884); G. Kohn, *Ueber die Sextupel von geraden Linien, welche von sämmtlichen Punkten einer cubischen Fläche als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden* (Monatshefte, 2, 1891); E. Pascal, *Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3° ordine, e sui gruppi ad esso isomorfi* (Ann. di Mat., II, 20 e 21, 1892-23), *sui poliedri circolari che si possono formare coi 45 piani tritangenti della superficie di 3° ordine; Configurazione delle 30 bisestuple gobbe formate colle 27 rette della superficie di 3° ordine; Configurazione*

(1) Si trovano citati da R. Sturm in Math. Ann., 23, p. 308-310 e 599.

(2) Notiamo che questi possono definirsi come piani tangenti comuni a tre certe superficie di decima classe; lo dimostrò il Brioschi nella nota *Sopra una proprietà dei piani tritangenti ad una superficie cubica* (Lincei Rend., II, 3, 1876).

delle 216 quintuple gobbe di 2ª specie formate colle 27 rette della superficie di 3º ordine (Rend. Ist. Lomb., 25, II, 1892); P. H. Schoute, *Recherche de la position des 27 droites d'une surface cubique les unes par rapport aux autres à l'aide de la représentation sur un plan* (Amsterdam Versl., 1892-93). Come estensione delle ricerche sulle rette di una superficie cubica sono da riguardarsi quelle sulle altre curve in essa situate che si leggono nei seguenti scritti: Clebsch, *Sur la géométrie des courbes gauches tracées sur une surface générale du troisième ordre* (C. R., 62, 1866); R. Sturm, *Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung* (Math. Ann., 21, 1883); G. Humbert, *Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième ordre* (Journ. Éc. pol., 64, 1894); K. Rohn, *Die Raumcurven auf den Flächen dritter Ordnung* (Leipziger Ber., 1894).

Della Hessiana d'una superficie cubica tratta la memoria di Clebsch, *Über die Knotenpunkte der Hesse'sche Flächen insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 59, 1861) e della intersezione di essa con la superficie fondamentale quella di G. Bauer (1820-1906) (1), *Die Hesse'sche Determinanten der Hesse'schen Fläche einer Flächen dritter Ordnung* (Münchener Abh., 14, 1883), ove è dimostrata analiticamente la proprietà, già osservata da R. Sturm nel 1867, che consiste nell'essere l'intersezione di una superficie di 3º ordine con la propria Hessiana la curva parabolica di entrambe, proprietà questa analoga a quella a cui devono l'esistenza i fasci sizigetici di curve di terzo ordine.

Coll'aiuto della teoria delle forme le superficie cubiche trovansi studiate nelle memorie seguenti: Salmon, *On Quaternary Cubics* (Phil. Trans., 150, 1860); Clebsch, *Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Varänderlichen* (Journ. f. Math., 58, 1861); De Paolis, *Ricerche sulle superficie del 3º ordine* (Lincei Mem., III, 10, 1881) e Bobek, *Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung* (Wiener Ber., 103, 1894); mentre dell'applicazione ad esse superficie della teoria delle sostituzioni si occuparono C. Jordan (1838-1922) (2), in parecchi lavori che vennero compendiati nel grande *Traité des substitutions et des equations algébriques* (Paris, 1870), e più recentemente F. Klein nella memoria *Sur la résolution par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique* (Journ. de Math., IV, 4, 1888) e H. Burkhardt (1861-1914) (3) nella nota *Zur Reduc-*

---

(1) A. Voss, *Zur Erinnerung an Gustav Bauer* (Deutsch. Math., Ver., 16, 1907).

(2) L. Bianchi, *Commemorazione del socio straniero prof. C. Jordan* (Lincei, Rend. (5) 31, 1922₁).

(3) H. Liebmann, *Zur Erinnerung an Heinrich Burckhardt* (Deutsch. Math. Ver. 24, 1515).

tion des Problems der 27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf das Transformationsproblem der hyperelliptischen Functionen p = 2 (Gött. Nachr., 1892). Invece col solo sussidio della pura geometria le superficie di 3° ordine furono studiate dal Milinowski nel lavoro *Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 89, 1880), e dal Thieme nei due: *Zur Construction des Polarystems einer Fläche 3ter Ordnung* (Math. Ann., 20, 1882) e *Die Flächen dritter Ordnung als Ordnungsfläche won Polarystemen* (Id., 28, 1887).

Metodi diversi per ottenere svariati risultati concernenti le superficie cubiche si trovano adoperati in una memoria del Geiser precedentemente citata (n. 6) e nei seguenti scritti: Brioschi, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie del terzo ordine* (Tortolini Ann., 6, 1855); Caporali, *Teoremi sulle superficie del 3° ordine* (Napoli Rend., 20, 1881); S. Kantor, *Ueber eine ein-dreideutige Abbildung der Flächen 3ter Ordnung* (Journ. f. Math., 95, 1883); Schur, *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung* (Ivi); Le Paige, *Sur les surfaces du troisième ordre* (Acta, 3, 1883-84; cfr. C. R., 97, 1883) e *Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre* (Id., 5, 1884-85, cfr. C. R., 98, 1884); Zeuthen, *Sur les pentaèdres complets inscrits à une surface cubique* (Acta, 5, 1884-85); Ciani, *Sul pentaedro completo* (Lincei Rend., 7, 1891); Ascione, *Alcune considerazioni sul pentaedro completo* (Napoli Rend., II, 6, 1892); e H. M. Taylor, *On a special Form of the General Equation of a Cubic Surface and on a Diagram representing the Twenty-seven Lines on the Surface* (Phil. Trans. 185, 1895).

Sulla classificazione delle superficie cubiche i principali lavori a noi noti sono i seguenti: Schläfli, *On the Distribution of Surfaces of the Third order into Species* (Phil. Trans. 153, 1863); Cayley, *A Memoir on Cubic Surfaces* (Id., 159, 1869); Rodenberg, *Zur Classification der Flächen dritter Ordnung* (Math. Ann., 14, 1879; cfr. anche la Diss. dello stesso autore sopra *Das Pentaeder der Fläche 3. Ordnung beim Auftreten von Singularitäten*, Göttingen, 1874), e Bobek, *Zur Klassification der Flächen dritter Ordnung* (Wiener Ber., 96, 1887).

Ad alcune speciali superficie di terzo ordine sono consacrate la *Note on the Theory of Cubic Surfaces* (Phil. Mag., 27, 1864) del Cayley, e le memorie seguenti: Clebsch, *Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits* (Math. Ann., 4, 1871; cfr. *Mittheilung über eine Fläche dritter Ordnung*, (1) Gött. Nachr., 1872); Eckardt, *Beiträge zur analytischen Geo-*

(1) Fa ivi il suo ingresso nella scienza la notevole « superficie diagonale ».

metrie des Raumes, insbesonder zur Theorie der Flächen 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten und der Steinerschen Flächen, sowie zur Lehre von Raumcurven (Math. Ann., 5, 1871) e *Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei geraden Linien in einem Punkte schneiden* (Id., 10, 1876); G. Kohn, *Ueber Flächen dritter Ordnung mit Knotenpunkten* (Wiener Ber., 96, 1887); E. Ciani, *Sulle superficie cubiche la cui Hessiana si spezza* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1), *Sulla superficie diagonale di Clebsch* (Id., 7, 1891_1), *Sopra le Hessiane delle superficie cubiche* (Rend. Ist. Lomb., II, 26, 1893) e *Sopra quelle superficie cubiche le quali si possono riguardare come parti della Hessiana di un'altra superficie cubica* (Id., 27, 1894); Ascione, *Sulle superficie di 3° ordine* (Napoli Rend., II, 6, 1893). Una speciale superficie cubica è il soggetto della dissertazione di J. Borgmeyer, *Geometrische Untersuchungen über den Ort des Fusspunkte der Lote, welche von einem Punkte auf die Strahlen einer linearen Congruenz gefällt werden* (Münster, 1893) ed un'altra della nota del Thieme *Ueber ein besondere Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten* (Zeitschr. f. Math., 40, 1895).

Nè si può tacere della memoria del Cremona intitolata: *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal* (Lincei Mem., III, 1, 1876-77), ove l'autore, concretando gli accenni fatti nel 1847 dal Cayley nella seconda parte della memoria *Sur quelques théorèmes de la géométrie de position* (inserita in Journ. f. Math., 31) sull'applicabilità di considerazioni stereometriche allo studio dell'esagrammo di Pascal, dedusse le più eleganti proprietà di quella celebre figura da quelle note proprietà nella configurazione delle rette e dei piani tritangenti di una superficie cubica con un punto doppio, deduzione che si ritrova nel più recente scritto del Richmond: *A symmetrical System of Equations of the Lines of a Cubic Surface, which has a Conical Point* (Quart. Journ., 23, 1888).

Finiremo coll'additare alcuni scritti riferentisi alle superficie di terzo ordine rigate, dopo avere notato come esse si distribuiscano in due categorie, una delle quali fu rilevata da Cayley nel 1864 (v. Phil. Trans., 154): Cayley, *On the Skew Surface of the Third Order* (Phil. Mag., 24, 1862). *On the Delineation of a Cubic Scroll* (Id., 25, 1863); Cremona, *Sulle superficie gobbe del terzo ordine* (Atti Ist. Lomb., 2, 1860) e *Sur les surfaces gauches du troisième degré* (Journ. f. Math., 60, 1862); Em. Weyr, *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse* (Leipzig, 1869) e *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde inbesondere der Regelflächen dritter Ordnung* (Id., 1870); B. Klein (1846-1891), *Ueber die geradlinige Fläche dritter Ordnung und deren Abbildung auf einer Ebene* (Diss. Strassburg, 1876); Pittarelli, *Studio analitico-proiettivo delle superficie gobbe del 3° grado* (Giorn. di Math., 32, 1894).

8. Alla ricca collezione di ricerche e di proposizioni concernenti la teoria generale delle superficie cubiche fa tristo riscontro la totale assenza di nozioni intorno alle superficie generali di quarto ordine, di cui si può dire non si sappia altro se non che il primo membro dell'equazione di una di esse in coordinate omogenee è esprimibile sempre come somma di quarte potenze di dieci forme lineari (v. Reye, *Darstellung quaternären biquadratischer Formen als Summen von zehn Biquadraten*, Journ. f. Math., 78, 1874), proposizione questa che non è stata ancora sfruttata a prò della geometria e che d'altronde non è certo sia feconda di conseguenze geometriche numerose e importanti. Per converso molte notevoli classi di superficie di 4° ordine vennero studiate a fondo; quali siano e quali proprietà godano emergerà da quanto ora diremo (1).

Accenneremo di sfuggita alle sviluppabili circoscritte a due quàdriche, che Poncelet considerò come figure polari reciproche delle quartiche gobbe di prima specie, scoprendone in tal maniera sin dal 1822 alcune notevoli proprietà e di cui in seguito si occuparono Cayley, nei due articoli *On the Developable Surfaces which arises from two Surfaces of the Second Order* (Cambridge Journ., 5, 1850) e *On a Property of the Torsus circumscribed abouth two Quadric Surfaces* (Mess., 1, 1872), e Chasles nella nota dal titolo *Propriétés de la surface développable circonscrite à deux surfaces du second ordre* (C. R., 54, 1862); aggiungeremo che dell'altra specie di sviluppabili di quart'ordine (cioè di quelle razionali), trattò il Cayley nei tre lavori: *Note on the Nodal Curve of the Developable derived from the Quartic Equation* (a, b, c, d, e $\chi t, 1)^4 = 0$ (Phil. Mag., 27, 1864), *On certain Developable Surfaces* (Quart. Journ., 6, 1864), e *On the Reciprocation of a Quartic Developable* (Id., 7, 1866).

Più numerose ed importanti sono le nostre cognizioni intorno alle rigate di quarto grado, la cui classificazione completa si apprende dai seguenti scritti (fra cui il più eminente è quello del Cremona): Chasles, *Descriptions des courbes de tous les ordres situées sur les surfaces réglées du troisième et du quatrième ordre* (C. R., 53, 1861); Cayley, *A second Memoir on skew Surfaces otherwise Scrolls* (Phil. Trans., 154, 1864), *A third Memoir, etc.* (Id., 159, 1869); Cremona, *Sulle superficie gobbe di 4° grado* (Bologna Mem., II, 8, 1868); Harnack, *Bemerkungen zur Geometrie auf den Linienflächen vierter Ordnung* (Math. Ann., 13, 1878); Rohn, *Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung* (Id., 28, 1887); Cardinaal, *Meetkundige theorie der scheeve opper-*

(1) Cfr. Cayley, *Sketch of Recent Researches upon Quartic and Quintic Surfaces* (Proc. L. M. S., 3, 1869-71).

vlakken van de vierd orde (Amsterdam Versl. III, 5, 1888); R. Sturm, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*, 1 (Leipzig, 1892), pp. 52-61; Segen, *Ueber windschiefe Flächen vierten Grades mit drei Doppelgeraden* (Journ. f. Math., 112, 1893), e Holgate, *On certain Ruled Surfaces* (Am. Journ., 15, 1893, e 22, 1900).

Alla teoria delle superficie di 4° ordine contenenti infinite rette (cioè rigate) di cui testè ci occupammo, forma un proseguimento naturale quella delle superficie dello stesso ordine contenenti infinite coniche; la loro determinazione completa venne fatta con sagacia straordinaria da Kummer (1810-1893) (1) nella memoria *Ueber die Flächen vierten Grades auf welche Schaaren von Kegelschnitten liegen* (Berliner Ber., 1863, oppure Journ. f. Math., 66, 1864). Ivi è anzitutto dimostrato non esistere alcuna superficie di 4° ordine semplice le cui sezioni prodotte da tutti i piani dello spazio o di una stella constino ciascuna di due coniche; sono poi considerati a parte i casi in cui i piani seganti la superficie in coniche sono non tangenti, tangenti semplicemente o bitagenti: nel primo caso la superficie di 4° ordine ha una conica doppia e due punti doppi, oppure una retta doppia (2), oppure ha due punti di contatto di due falde; nel secondo caso la superficie è una « superficie di Steiner », oppure ha una conica doppia ed un punto doppio; nell' ultimo caso la superficie o è rigata o possiede una conica doppia. Da ciò emerge che le superficie determinate da Kummer o sono le rigate di 4° grado già discorse, o possiedono due punti di contatto di due falde, o hanno una conica doppia (ed eventualmente altre singolarità) o sono superficie di Steiner. Queste ultime furono oggetto di molteplici investigazioni, come ora diremo.

9. Le superficie di 4° ordine a conica doppia godono della notevolissima proprietà di avere la sviluppabile bitangente costituita da cinque coni quàdrici; lo rilevarono contemporaneamente il Kummer nella precitata memoria e il Moutard nella *Note sur la tranformation par rayons vecteurs réciproques* e nell' altra *Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre* (Nouv. Ann., II, 3, 1864) per il caso in cui la linea doppia della superficie sia il cerchio immaginario

(1) Cfr. E. Lampe, *Nachruf für Ernst Eduard Kummer* (Deutsch. Math. — Ver., 3, 1894).

(2) Riguardo alle superficie quartiche con retta doppia si veda anche: Cayley, *On the Quartic Surfaces which are represented by the Equation, Symmetrical Determinant* = 0 (Quart. Journ., 14, 1875); J. Cardinaal, *Génération des surfaces du quatrième ordre avec une droit double à l'aide de faisceaux projectifs de quadriques* (Amsterdam Versl., 1892).

Il caso particolare in cui si abbia una « superficie del complesso » di Plücker fu studiato da Cayley (*On Plücker's Models of certains Quartic Surfaces*, Proc. L. M. S., 3, 1869-71) e F. Klein (*Ueber die Abbildung der Complexflächen vierter Ordnung und vierter Classe*, Math. Ann., 2, 1870; e *Ueber die Plücker'sche Complexfläche*, Id., 7, 1873).

all' infinito; di più questo geometra, assieme al Darboux, osservò (C. R., 59, 1864), che tali superficie possono formar parte di un sistema triplo ortogonale. A cominciare da questo momento le superficie di 4° ordine aventi per linea doppia il cerchio immaginario all' infinito vennero studiate a più riprese dal Darboux (i risultati da lui ottenuti sono compendiati nell'opera già citata (Cap III, n. 12) *Sur une classe remarquable* ecc.), dal Laguerre (*Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques*, e *Sur les sections circulairers des surfaces anallagmatiques*, Bull. soc. phil., 1868), dal Casey (1820-1891) (*On Cyclides and Sphero-quartics*, Phil. Trans., 161, 1871), da G. Loria (*Ricerche sulla geometria della sfera e loro applicazione allo studio e alla classificazione delle superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario all' infinito*, Torino Mem., II, 36, 1884), da G. Humbert (*Sur les surfaces cyclides*, Journ. Èc. pol., 55° cah., 1885), da R. Lachlan (*On Systems of Circles and Spheres*, Phil. Trans., 177, 1886) e W. Wolseley Johnson (*Some Theorems relating to Groups of Circles and Spheres*, Am. Journ., 14, 1892).

D'altronde le superficie di quarto ordine aventi per linea doppia una conica situata comunque nello spazio sono il tema di altri lavori, fra cui spiccano: Clebsch, *Ueber die Flächen vierter Ordnung welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen* (Journ. f. Math., 69, 1868); Geiser, *Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen* (Id., 70, 1869); Cremona, *Sulle superficie di quarto ordine dotate di una conica doppia* (Rend. Ist. Lomb., II, 4, 1871); Zeuthen, *Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit* (Kopenhagen, 1879; una versione italiana se ne trova in Ann. di Mat., II, 14); C. Juel, *En geometrisk Fremstilling af Hovedegenskaber ved Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit* (Tidsskr., IV, 4, 1880); G. Veronese (1854-1917) (1), *Di una costruzione della superficie del quarto ordine dotata di una conica doppia* (Atti Ist. Ven., VI, 2, 1884); C. Segre, *Étude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions* (Math. Ann., 24, 1884) (2); K. Bobek, *Ueber Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt* (Wiener Berg., 90, 1855); Berzolari, *Sulla superficie del quarto ordine avente una conica doppia* (Ann. di Mat., II, 13, 1885); A. Weiler 1851-1916), *Ueber Flächen vierter Ordnung mit Doppel-und mit Cuspidal-Kegelschnitt* (Zeitschr. f. Math., 30, 1885); Domsch, *Ueber die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische*

(1) C. Segre, *Giuseppe Veronese* (Rend. Lincei, V, 26, 1917 II).

(2) Questo modo di considerare le superficie in discorso si trova accennato anche nella nota testè nominata del Veronese.

Functionem (Diss. Leipzig, 1885); Küpper, *Ueber die Flächen dritter Ordnung und vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, insbesondere über deren Geraden* (Zeitschr. f. Math., 34, 1889); Cardinaal, *Constructie der oppervlakken van den vierden graad met dubbelkeglesnede door middel van projectivische bundels oppervlakken van den tweeden graad* (Amsterdam Versl., III, 8, 1891); Pereno, *Alcune ricerche sul gruppo delle sostituzioni e sulla configurazione delle 16 rette delle superficie di quarto ordine a conica doppia* (Ann. di Mat., II, 21, 1893); A. del Re (1859-1921) (1), *Sulla superficie di 4º ordine a conica doppia* (Lincei Rend., V, 2, 1893₁).

I casi in cui esistano sulla superficie dei punti doppi isolati o in cui la conica doppia degeneri in una coppia di rette vennero minutamente esaminati dal Korndörfer in alcune memorie complementari a quelle precitate di Clebsch; *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einen oder mehreren Knotenpunkten* (Mat. Ann., 1, 1869, e 2, 1870); *Die Abbildung einer Flächen vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden* (Id., 3, 1871); *Die Abbildung einer Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche aus zwei sich schneidenden unendlichd nahen Geraden besteht* (Id., 4, 1871); altre speciali superficie dell'anzidetta specie sono studiate nelle memorie: Cayley, *On a Surface of the Fourth Order* (Phil. Mag., 21, 1861) e *Note on a Quartic Surface* (Id., 29, 1865), e Rudio, *Ueber eine specielle Fläche vierter Ordnung* (Journ. f. Math., 104, 1889); mentre della superficie di 4ª ordine a conica cuspidale trattò Béla Tötössy nel lavoro *Ueber die Flächen vierter Ordnung mit Cuspidalkelgelschnitt* (Math. Ann., 19, 1882).

Del resto le più antiche superficie di quarto ordine a conica doppia sono il toro e la ciclide di Dupin. Riguardo a quello in primo luogo noteremo che esso era noto agli antichi (2), che fin dal 1848 Yvon Villarceau (1813 - 1883) (3) scoperse esistere in esso, oltre ai paralleli ed ai meridiani, una terza serie di sezioni circolari (C. R., 27; cfr. Breton de Champ, *Sur les sections circulaires du tore et des surfaces de révolution algébriques d'ordre quelconque*, Nouv, Ann., 15, 1856), che il Cayley vi dedicò una nota speciale (*On the conic Torus*, Quart. Journ., 13, 1875), e che la sua definizione, convenientemente estesa, mena alle superficie che il de la Gournerie considerò nel *Mémoire sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située*

---

(1) D. Montesano, *A. del Re* (Napoli Rend. III, 28, 1922).

(2) V. la soluzione del problema di Delo dovuta ad Archita Tarantino e riferita da Eutocio Ascalonita.

(3) Cfr. Bertrand, *Éloges académiques* (Paris 1890).

d' une manière quelconque dans l'espace (Journ. Éc. pol., 40ᵉ cah., 1863) (1) e nella *Note sur la surface enveloppe des positions d' une surface du second ordre qui tourne autour d' une droite* (Journ. de Math., II, 10, 1865) (2). — Riguardo alla ciclide rileveremo che Dupin la scoperse cercando le superficie di cui tutte le linee di curvature sono circolari e che egli la riconobbe per l' inviluppo di una sfera mobile colla condizione di rimanere tangente a tre sfere fisse (*Applications de géométrie et de méchanique*, Paris, 1822). Oltre alla proprietà di avere quattro punti doppi, la ciclide ne possiede altre notevoli, che si apprendono dai seguenti lavori: A. Mannheim (1831-1906) (3), *Application de la transformation par rayons vecteures réciproques à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données* (Nouv. Ann., 19, 1860); Laguerre, *Recherches géométriques sur la cyclide* (Bull. Soc. phil., 1871); Cayley, *On the Cyclide* (Quart. Journ., 12, 1873); Saltel, *Sur la génération des cyclides* (Bull. S. M. F., 3, 1875); Liebheit, *Ueber die Dupin'sche Cyclide* (Diss. Halle, 1886) (4), Cosserat, *Sur la cyclide de Dupin* (Toulose Ann., 6, 1892); ecc. Notisi finalmente che dal punto di vista projettivo sono ciclidi anche le superficie studiate da A. Sucharda (1854-1906) nella nota *Ueber die Singularitäten einer Gattung von Rückungsflächen vierter Ordnung* (Wiener Ber., 97, 1888).

10. Quella che oggi si chiama « superficie di Steiner » occupò questo grande geometra durante il suo soggiorno a Roma (1844), epperò veniva da lui chiamata « superficie romana ». Egli non scrisse mai nulla su di essa e il pubblico la conobbe in occasione delle ricerche di Kummer di cui parlammo nella chiusa del n. 8 (cfr. una nota di Weieretrass in *J. Steiner's Ges. Werke*, 2, Berlin 1882, pp. 723 e 741). La proprietà più saliente di essa è quella di essere tagliata in una coppia di coniche da qualunque suo piano tangente; di più essa è di 4° ordine e 3ª classe: cose che non isfuggirono a Steiner, mentre Weierstrass (l. c.) osservò che le coordinate omogenee de' suoi punti sono esprimibili mediante quattro forme ternarie quadratiche arbitrarie. Cremona (*Sur la surface*

(1) Nel caso in cui la conica generatrice sia una circonferenza la superficie s' incontra nella tecnica, ove porta il nome di *globoide;* v. F. Reuleaux, *Des Konstrukteur*, IV, Aufl. p. 569.

(2) Cfr. anche Cayley, *On te Quartic Surface* (* U, V, W)$^2 = 0$ (Quart. Journ., 11, 1871). È qui il caso di notare che le superficie quartiche definibili come inviluppi di quadriche sono il tema della nota di Kummer, *Ueber einige besondere Arten von Flächen vierten Grades* (Berliner, Ber., 1872).

(3) G Loria, *L'opera geometrica di A. Mannheim* (Palermo Rend. 26, 1908).

(4) Ivi, mediante una speciale rappresentazione delle coordinate di un punto della ciclide in funzione di due parametri, sono determinate le sue linee di curvatura, espressa la sua curvatura integra in un punto qualunque, determinata l'area, ecc.

du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de se plans tangens, Journ. f. Math., 63, 1864, e *Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie rigate di terzo grado sopra un piano*, Rend, Ist. Lomb., 4, 1867) e Clebsch (*Über die Steiner'sche Fläche*, Journ. f. Math. 67, 1867) scoprirono poi che le assintotiche delle superficie in discorso sono quartiche gobbe razionali. Come notò il Darboux (*Sur le contact des courbes et des surfaces*, Bull. Sc, math., II, 4, 1880) essa è l'unica superficie, oltre le quàdriche e le rigate cubiche, per ogni punto della quale passino infinite coniche; inoltre, come scoprì il Picard (*Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales*, Journ. f. Math., 100, 1887; cfr. Guccia, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali*, Palermo Rend., 1, 1884-87), essa è l'unica superficie non rigata le cui sezioni piane siano tutte curve razionali; essa è dello stesso «tipo» del piano, cioè suscettibile di essere rappresentata sul piano univocamente senza punti eccezionali (Clebsch, Math. Ann., 5, 1872, p. 19); da ultimo, se si cerca il luogo dei poli di un piano rispetto a tutte le coniche contenute in una superficie di Steiner, si trova un'altra superficie analoga (Lie, *Petite contribution à la théorie de la surface steinérienne*, Arch. f. Math. og Natuw., 3, 1878).

Nell'impossibilità in cui ci troviamo di enumerare tutte le altre proprietà possedute dalla superficie di cui parliamo, citiamo gli scritti principali che, oltre la *Geometrie der Lage* del Reye, trattano di essa: Beltrami, *Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche dei nove punti* (Giorn. di Mat., 1. 1863) e *Ricerche di geometria analitica* (Bologna Mem., III, 10, 1879); Cayley, *Note sur la surface du quatrième ordre de Steiner* (Journ. f. Math., 64, 1865) e *On Steiner's Surface* (Proc. L. M. S., 5, 1873-74); Moutard, *Sur la surface de Steiner* (Bull. Soc. phil., 2, 1865); Schröter, *Ueber die Steiner'sche Fläche vierten Grades* (Journ. f. Math., 65, 1865); R. Sturm, *Ueber die römische Fläche von Steiner* (Math. Ann., 4, 1871); Eckardt, *Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes* (Math. Ann. 5, 1872); Laguerre, *Recherches analytiques sur la surface réciproque de la surface de Steiner* (Nouv. Ann., II, 11, 1872) e *Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner* (Bull. S. M. F., 1, 1872); Rosanes, *Ueber Systeme von Kegelschnitten* (Math. Ann. 6, 1873); Gerbaldi, *La superficie di Steiner studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche* (Torino, 1881); Vahlen, *Ueber die Steiner'sche Fläche* (Acta, 19, 1895).

11. Oltre che la determinazione delle superficie di quarto ordine contenenti infinite còniche, noi dobbiamo a Kummer la conoscenza di un'altra importantissima superficie che, come vedremo meglio nel Cap. VII, egli scoprì occupandosi di geometria della retta: parliamo della così detta « superficie di Kummer » con sedici punti doppî (1) e sedici piani tangenti singolari (v. la nota *Ueber die Flächen vierten Grades mit sechszehn singulären Punkten*, Berliner Ber., 1864; cfr. Cayley, *Note sur la surface du quatrième ordre douée de seize points singuliers et de seize plans singuliers*, Journ. f. Math., 73, 1871). Questa superficie è assai importante per le applicazioni che porge alla teoria delle funzioni iperellittiche: lo rilevò incidentalmente il Klein (Math. Ann., 5, 1872, p. 302) e poi più chiaramente il Cayley (*On the double Θ-functions in Connection with a 16-nodal Quartic Surface*, Journ. f. Math., 83, 1877; *On the 16-nodal Quartic Surface*, Id., 84, 1878, e 94, 1883); tale legame si trova sfruttato magistralmente nelle seguenti memorie: Borchardt, *Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten durch die Göpel'sche biquadratische Relation zwischen vier Thetafunctionen mit zwei Variabeln* (Id., 83, 1877); H. Weber, *Ueber die Kummer'schen Fläche vierten Ordnung mit sechszen Knoten punkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit zwei Veränderlichen* (Id., 84, 1878); K. Rohn, *Transformation der hyperelliptischen Functionen $p=2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche* (Math. Ann., 15, 1879) e *Die verschieden Gestalten der Kummer'sche Fläche* (Id., 18, 1881). Alle quali servono di complemento i seguenti scritti: Darboux, *Sur la surface à seize points singuliers et les fonctions Θ à deux variables* e *Sur la surface à seize points singuliers* (C. R., 92, 1881); Brioschi, *Sur la surface de Kummer à seize points singuliers* (Ivi); Klein, *Ueber Configurationen welche der Kummer'schen Flächen zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind* (Math. Ann., 27, 1886); Reichardt, *Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen* (Nova Acta Leop.-Car., 50, 1887); Study, *Zur Theorie der Kummer'schen Configuration und der orthogonale Substitutionen* (Leipziger Ber. 33, 1892); E. Pascal, *L'equazione razionale della superficie di Kummer* (Ann. di Mat., II, 18, 1890) e *Sulle sestiche di contatto della superficie di Kummer* (Id., 19, 1891).

Le assintotiche della superficie di Kummer furono determinate da Klein e Lie (*Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'sche Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten*, Berliner Ber., 1870; v. anche Math. Ann., 23, 1884); sono curve di 16° ordine, ognuna delle quali, come dimostrò il Reye (*Ueber die Hauptarten der allgemeinen quadratischen Strahlencomplexe und Complexengewebe*, Journ. f. Math., 98. 1885; cfr. Segre, *Sur les courbes des*

(1) È questo il massimo numero di punti doppî isolati che può avere una superficie di 4° ordine.

tangentes principales des surfaces de Kummer, Ivi), è la base di un fascio di superficie di quart'ordine.

La superficie in discorso venne studiata sinteticamente dal Reye in alcune pagine della *Geometrie der Lage*, dal Caporali nel lavoro, *Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di Kummer* (Lincei Mem., III, 5, 1878), dallo Schröter in una memoria *Ueber das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummer'sche Configuration* (Journ. f. Math., 100, 1887) e, mediante una speciale trasformazione doppia di spazio dal de Paolis nella nota intitolata *Alcune proprietà della superficie di Kummer* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_2). Finalmente dal punto di vista della teoria delle sostituzioni la superficie di cui ci occupiamo venne considerata dal Jordan nella memoria *Sur une équation du 16ième degré* (Journ. f. Math, 70, 1869).

Fra i casi speciali che può presentare la superficie di Kummer il più importante è indiscutibilmente quello offerto dalla « superficie delle onde », la quale ha una storia ed una letteratura a sè. Essa incontrasi per la prima volta nei *Mémoires sur la double réfraction* di Fresnel (1788-1827) (1) presentati nel 1821 all'Accademia delle scienze di Parigi e pubblicati sei anni dopo nel t. 7 dei *Mémoires* di detto sodalizio; ivi ne è costruita l'equazione, quasi sperimentalmente, basandosi sulle proprietà di cui i dati fisici insegnavano che doveva godere e di più è data la seguente notevole generazione: « Si seghi un ellissoide con un piano passante pel centro e sulla perpendicolare condotta da questo a quello si portino delle lunghezze eguali ai semidiametri della relativa sezione; il luogo degli estremi è la superficie d'onda ». La deduzione diretta e rigorosa della equazione superficie fu fatta poco dopo da Ampère (1775-1836) (2) (*Sur la détermination de la surface courbe des ondes lumineuses dans un milieu dont l'élasticité est différente suivant les directions principales*, Ann. de Chim. et de Phys., 39, 1828), in seguito da Cauchy (1789-1857) (3), prima nell'*Application des formules qui représentent le mouvement d'un système de molècules sollécitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles* (Exercices de mathématiques 5, Paris, 1830) e poi meglio nella nota *Sur la polarisation rectiligne et la double réfraction* (Mém. de l'Acad. des Sciences, 18, 1842; v. anche C. R., 11 e 12) e, circa nello stesso tempo, da sir John F. W. Herschel (1792-1871) (*Traité de la lumière*, trad. par Verhultst e Quetelet, Paris, 1829 e 1833).

Non molto dopo (1830) W. R. Hamilton (in uno scritto che fa parte del vol. 16 di Irish Trans., 16, 1830) e Mac Cullagh (*On the Double Refrac-*

(1) Cfr. Arago, *Euvres complètes*, 1 (Paris, 1854).

(2) Id., 2 (Paris, 1854).

(3) A. Valson, *Le vie et les travaux du Baron Cauchy* (Paris, 1868).

tion of Light in a crystallized Medium, according to the Principles of Fresnel, Ivi, *Geometrical Propositions applied to the Wave Surface of Light*, Id., 18, 1833; *On the Laws of crystalline Reflexion and Refraction*, Id., 18, 1837) si occupavano della stessa teoria (1), giungendo teoricamente alla scoperta della « rifrazione conica », fenomeno che era sfuggito ai fisici e che ben presto H. Lloyd (1800 - 1881) verificò sperimentalmente. Ad essi tennero dietro il Sylvester (*Analytical Development of Fresnel's optical Theory of Chrystals*, Phil. Mag., 11, 1837 e 12, 1838), Archimbald Smith (*Investigation of the Equation of the Equation to Fresnel's Wave Surface*, Cambridge Trans., 6, 1838) e Plücker (*Discussion de la forme générale des ondes lumineuses*, Journ. f. Math., 19, 1839), al quale ultimo è dovuta l'importante osservazione dell'essere la superficie d'onda la propria polare reciproca rispetto ad un certo ellissoide. Essa risolve un bel problema relativo alle quadriche immaginato da Steiner, come dimostrarono E. Lampe (1840 - 1918) (2), (*Sur quelques problèmes relatifs eun surfaces des ondes*; Jahresber. der Luisenstädt. Gowerbeschude in Berlin 1890) e poi Weierstrass (*Steiner's Werke* II, p. 742).

Se ne occuparono anche il Lamé nelle *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (Paris, 1852), poi J. Bertrand (1822-1900) (3) (*Note sur la surface des ondes*, C. R., 47, 1858), P. Zech (*Die Eigenschaften der Wellenflächen der zweiaxiger Krystall. mittelst der höheren Geometrie abgeleitet*, Journ. f. Math., 52, 1856, e *Die Krümmungslinien der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle*, Id., 54, 1857 e 55, 1858), H. Durande (*Recherches su la surface des ondes*, Nouv. Ann., II, 2, 1863), il Cayley (*On the Wave Surface*, Quart. Journ., 3, 1860, *Note on the Wave Surface*, Ivi, *Equaiion of the Wave Surface in Elliptic Coordinates*, Mess., II, 8, 1879, e *Sur la surface des ondes*, Ann. di Mat., II, 20, 1892, l'ultima delle quali è un commento agli scritti del Brioschi, *Sulle linee di curvatura della superficie delle onde*, Ann. di Mat., 2, 1859, e del Combescure, *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes*, Ivi), W. Roberts (*Cubature de la surface des ondes*, Id., 4, 1861), il Mathieu (*Note sur la surface de l'onde*, Journ. de Math., II, 11, 1866), ed il Niven (*On some Theorems connected with the Wave-Surface*, Quart. Journ., 9, 1868).

Ma chi la studiò più d'ogni altro con assiduità e buon successo è il Mannheim, del quale vanno citati i seguenti scritti: *Construction géométrique pour*

---

(1) Cfr. R. P. Graves, *Life of Sir R W. Hamilton*, 1 (Dublin, 1882), p. 623-638 e 685-692.

(2) V. la necrologia a firma di A. Korn nel *Jahrb. ü. die Fort. der Mathematik*, 45).

(3) G. Darboux, *Eloge historique de J. Bertrand* (Mém. de l'Institut, 47, 1904 o il volume di *Eloges académiques et discours*, Paris, 1912).

un point de la surface des ondes, des centres de courbure principaux et des directions des lignes de courbure (C. R., 64, 1867); *Deux théorèmes nouveaux sur la surface de l'onde* (Id., 78, 1874); *Sur la surface de l'onde* (Ass. fr., 1874); *Propriétés des diamètres de la surface de l'onde et interprétation physique de ces propriétés* (C. R., 81, 1875); *Sur la surface de l'onde* (Ass. fr., 1875); *Nouvelles propriétés géométriques de la surface de l'onde, qui s'interprètent en optique* (C. R., 85, 1876); *Communication sur la surface de l'onde* (Ass. fr., 1877); *On the Wave Surface* (Mess., 7, 1877); *Sur la surface de l'onde* (Ass. fr., 1878); *Détermination géométrique des ombilics de la surface de l'onde* (C. R., 88, 1879); *Sur la surface de l'onde et sur la trasformation d'un pinceau* (Ivi); *La surface de l'onde considérée comme surface limite* (Id, 90, 1880); *Nouvelle génération de la surface de l'onde et constructions diverses* (Ivi); *Sur la surface de l'onde et théorèmes relatifs au lignes de courbure des surfaces du second ordre* (Proc. R. S., 32, 1881); *Construction plane des éléments de courbure de la surface de l'onde* (Coll. math., 1881); *On the Wave Surface* (Mess., 14 e 15, 1885).

Ricorderemo ancora le seguenti memorie: E. Catalan (1814-1894) (1), *Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes* (Belgique Mém., 38, 1871); Böklen, *Ueber die Wellenflächen zweiaxiger Krystalle* (Zeitschr. f. Math., 25, 1880); S. Roberts (1827-1913), *On some Forms of the Equation of the Wave Surface* (Quart. Journ., 17, 1881); Darboux, *Sur une nouvelle définition de la surface des ondes* (C. R., 92, 1881), *Sur les lignes asymptotiques de la surface des ondes* (Id., 97, 1885), *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes* (Ib., id.) e *Sur la surface des ondes* (Ann. Éc. Norm., III, 6, 1889); J. Knoblauch (1855 1915) (2), *Ueber die allgemeine Wellenfläche* (Diss. Berlin, 1882); e A. Brill, *Bestimmung der optischen Wellenfläche aus einem ebenen Centrals-hnitte derselben* (Math. Ann., 34, 1889).

Dal punto di vista della geometria proiettiva la superficie delle onde non differisce dal « tetraedroide », di Cayley, il quale s'incontra per la prima volta nella nota di questo grande geometra *Sur la surface des ondes* (Journ. de Math., 11, 1846) e poi nuovamente nelle memorie *Sur un cas particulier de la surface du quatrième ordre avec seize points singuliers* (Journ. f. Math., 65, 1866) e *On the Tetrahedroid as a particular Case of the 16-nodal Quartic Surface* (Id., 87, 1879). Ad esso si riferiscono la memoria del Segre, *Su una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del*

---

(1) P. Mansion, *Notice sur les travaux mathématiques de E. C. Catalan* (Belgique. Ann. 1896).

(2) R. Rothe, *Zur Einnerung an Johannes Knoblauch* (Deutsch. Math.-Ver., 34, 1915).

complesso quadratico di Battaglini e di un complesso lineare di coniche iscritte in un tetraedro (Giorn. di Mat., 21, 1883) e la nota di J. Hofmann, *Reduction der Gleichung des Tetrahedroids auf die Form* $\sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta}=0$ (Journ. f. Math., 98, 1885). Vi sono poi certe superficie di Kummer che in più modi possono considerarsi come tetraedroidi; esse vennero scoperte dal Rohn (*Einige specielle Fälle der Kummer'schen Fläche*, Leipziger Ber., 1884) e dal Segre (*Sur un cas particulier de la surface de Kummer*, Ivi). Altre ve ne sono che, come il tetraedroide, godono la proprietà che le coordinate dei loro punti sono esprimibili mediante funzioni biperiodiche di due parametri; esse furono studiate da G. Humbert nella memoria *Sur les surfaces de Kummer* (Am. Journ., 16, 1894).

La proprietà della superficie di Kummer di essere correlativa a sè stessa diede origine alla ricerca delle superficie aventi il medesimo carattere; di essa si occuparono Kummer (*Ueber diejenigen Flächen, welche mit ihren reciprok polaren Flächen von gleicher Ordnung sind und dieselben Singularitäten besitzen*, Berliner Ber., 1878) e Cayley (*On a Sibi-reciprocal Surface*, Ivi), mentre il legame di essa con le funzioni iperellittiche condusse a classi più generali di superficie che furono studiate da W. Wirtinger nella memoria *Ueber eine Verallgemeinerung der Theorie der Kummer'schen Fläche und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen zweier Variabeln* (Monatshefte, 1, 1890) e da G. Humbert nella *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (Journ. de Math., IV, 9, 1893).

12. Il Kummer, oltre alla superficie che porta il suo nome, si occupò di altre superficie di quart' ordine con punti singolari, nelle quali egli s' imbattè nel corso delle celebri sue investigazioni intorno ai sistemi di raggi rettilinei (v. Cap. VII, n. 6); in seguito lo studio metodico di esse venne fatto, prima da Cayley in tre memorie: *On Quartic Surfaces* (Proc. L. M. S., 3, 1869-71)— alle quali si possono riunire le altre due del medesimo autore, *On the Quartic Surfaces* (*) $(U, V, W)^2 = 0$ (Quart. Journ., 10, 1869 e 11, 1870) e la nota dell' Eckardt sopra *Eine Eigenschaft der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 19, 1874) — e poi dal Rohn nella memoria *Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihre Gestaltung* (Gekrönte Preisschrift der Jablonowski'schen Gesellschaft, Leipzig, 1886; cfr. Math. Ann., 29, 1887). A questo geometra devesi poi uno scritto, *Ueber die Flächen vierter Ordnung mit dreifachen Punkte* (Math. Ann., 24, 1884) ove è trattato in modo più completo il tema toccato nella dissertazione del Lampe, *De superficiebus quarti ordinis, quibus puncta triplicia insunt* (Berlin, 1864).

Una notevole superficie di 4° ordine è il luogo dei vertici dei coni quàdrici passanti per sei punti dati: è la « superficie di Weddle » così denominata perchè la s'incontra per la prima volta nella memoria di T. Weddle (1817-1853) *On the Theorems in Space analogous to those of Pascal and Brianchon in a Plane* (Cambridge Journ., 5, 1850). Essa è stata poi studiata dal Cayley (*Sur les cônes du second ordre qui passent par six points donnés*, C. R., 52, 1861), da C. Hierholzer (1840-1871) (*Ueber eine Fläche der vierten Ordnung*, Math. Ann., 4, 1871) e dall'Hunyady (1830-1887) (*Ueber den geometrischen Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelflächen zweiten Grades*, Journ. f. Math., 92, 1882). In tempi a noi più vicini essa somministrò importanti applicazioni delle funzioni iperellittiche allo Schottky (*Ueber die Beziehungen zwischen den 16 Thetafunctionen von zwei Variabeln*, Id., 105, 1889) ed al Caspary (*Sur les deux formes sous lesquelles s'expriment, au moyen des fonctions théta de deux arguments, les coordonnées de la surface du quatrième dégre, décrite par les sommets des cônes du second ordre qui passent par six points donnés*, C. R., 112, 1891; *Nouvelle manière d'exprimer, au moyen des fonctions hyperelliptiques de première espèce, les cordonnées etc.*, Bull. Sc. Math., II, 15, 1891). Tale superficie fa parte della collezione di figure geometriche a cui condusse lo studio della teoria delle caratteristiche per le coniche nello spazio, della quale ci occuperemo in altro momento (v. Cap. IX, n. 5).

Vanno ancor ricordate alcune superficie di 4° ordine che non sono rigate, ma contengono un certo numero di rette; ciascuna è il luogo dei punti in cui si tagliano gli elementi corrispondenti di quattro spazî di piani fra loro collineari; l'ordine ne fu determinato da Chasles; poi ne fe' cenno lo Schur nella memoria *Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen* (Math. Ann., 18, 1881); lo stesso geometra ne fece più tardi uno studio approfondito, nell'altro lavoro *Ueber eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung* (Id., 20, 1882). Aggiungasi che *Sulla superficie del quarto ordine generata da due stelle di piani e da una rete di quadriche projettive fra loro* abbiamo una memoria di M. Pannelli (Giorn. di Mat., 29, 1891), e *Sur la surface desmique du quatrième ordre* una dell'Humbert (Journ. de Math., IV, 3, 1891). Nè si deve condannare alla dimenticanza una classe importante di superficie quartiche, la quale venne studiata in modo esauriente da L. Heffter nella nota *Ueber gewisse Flächen vierter Ordnung* (*Isogonalflächen*) (Journ. f. Math., 115, 1895).

Chiuderemo questa rassegna delle ricerche intorno a speciali superficie di 4° ordine coll'osservare che molte delle superficie finora studiate sono razionali, cioè rappresentabili univocamente su un piano; tali sono: la superficie a conica doppia, la superficie con retta doppia, la superficie con un punto triplo (in particolare la superficie di Steiner), e quella di cui il Cremona si occupò nella nota *Sopra una certa superficie di quart' ordine* (Coll. Math., 1881). Ma la determinazione completa di tali superficie venne fatta dal Nöther nell' importante memoria *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung* (Math. Ann., 33, 1889), ove sono metodicamente trattate, non solo l'or citata superficie che il Cremona studiò, ma ancora due altre, dianzi ignote e non meno notevoli.

13. Intorno a superficie di ordine superiore al 4° esistono poche ricerche e fra loro non collegate. Fra quelle di 5° ordine finora studiate spicca una che diede materia alla memoria di Caporali *Sulla superficie del 5° ordine dotata di una curva doppia del 5° ordine* (Ann. di Mat., II, 7, 1875) e di cui il del Re trovò una generazione col mezzo di forme fondamentali projettive (*Nuova costruzione della superficie del quint' ordine, dotata di curva doppia del quint' ordine*, Napoli, Rend., 25, 1886; *Sulla superficie del 5° ordine, dotata di curva doppia del 5° ordine*, Lincei Rend., IV, 6, 1890_{1}); quest'ultimo geometra studiò poi altre particolari superficie di 5° ordine nei seguenti suoi scritti: *Di cinque superficie del 5° ordine con rette semplici e doppie ed una retta tripla* (Lincei Rend., IV, 7, 1891_{2}), *Su una superficie del 5° ordine dotata di una retta tripla, di rette doppie e di rette semplici* (Ivi). *Sulla superficie del 5° ordine dotata di cubica doppia e punto triplo* (Id., V, 1, 1892_{2}); *Altre proprietà relative alle superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo* (Ivi); *Sopra alcune varietà delle superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo* (Ivi); *Sopra cinque modi diversi di produrre per forme projettive la superficie del 5° ordine a quintica doppia* (Torino, Atti, 28, 1892-93), *Sulle superficie del 5° ordine con cinque punti tripli ed una cubica doppia* (Lincei Rend., V, 2. 1893_{2} e 3, 1894_{1})

Riguardano pure superficie di ordine maggiore di quattro le memorie seguenti: E. Pascal, *Su di un'estensione della configurazione delle dieci rette della superficie di 5° ordine a quintica doppia* (Id., 2, 1893_{1}); S. Kantor, *Ueber zwei besondere Flächen sechster Klasse* (Wiener Ber., 1879); Em. Weyr, *Ueber die Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve* (Id., 85, 1882); M. Pieri, *Sulle tangenti triple di alcune superficie del sesto ordine* (Torino Atti, 24, 1889); G. Humbert, *Sur une surface du sixième ordre, liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (C. R., 120, 1895) e *Sur une surface du sixième ordre qui se rattache à la surface de Kummer* (Ivi); Cayley, *On a Surface of Eight Order* (Math. Ann., 4, 1871) (1); G. Battaglini, *Intorno ad una superficie di 8° ordine* (Giorn. di Mat., 13, 1875).

---

(1) Questa superficie è il luogo dei vertici dei coni quàdraci tangenti a sei rette date.

Altre indagini analoghe passiamo sotto silenzio per la loro indole troppo speciale. E preferiamo volgerci a certe notevoli categorie di superficie di ordine qualesivoglia. Meriterebbero fra esse il primo posto le sviluppabili, il cui studio fu iniziato da Eulero (*De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet*, Nov. Comm. Petrop., 16, 1772). Ma ci consideriamo esonerati dall' estenderci su di esse perchè, in forza della legge di dualità nello spazio, le loro proprietà scaturiscono da quelle delle curve a doppia curvatura, di cui ci occuperemo nel prossimo Cap.; basti far qui cenno della memoria di V. Peterson, *Om Developpablers Medelpunktsytor* (Lund Akadem. Afhandling, 1886) — ove sono determinate le caratteristiche del luogo dei centri di curvatura di una sviluppabile algebrica — e dei più cospicui scritti a noi noti concernenti certe sviluppabili particolari; sono i seguenti: Cremona, *Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile del quarto ordine* (*e terza classe* (Ann. di Mat., 2, 1859), *Sur les surfaces développables du cinquième ordre* (C. R., 54, 1862; cfr.: d' Ovidio, *Dimostrazione di alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili di 5º ordine*, Giorn. di Mat., 3, 1865; N. Salvatore - Dino (1846-1920), *Sulla sviluppabile di 5º ordine*, Ivi); Cayley, *On the Developable derived from an Equation of the Fifth Order* (Cambridge Journ., 5, 1860), *On certain Developable Surfaces* (Quart. Journ., 6, 1864), *On a special Sextic Developable* (Id., 7, 1866), *On a certain Sextic Developable, and Sextic Surface connected therewith* (Id., 9, 1868), *Note sur quelques torses sextiques* (Ann. di Mat., II, 2, 1868), *Addition à la Note etc.* (Ivi), e *On a Certain Sextic Torse* (Cambridge Trans., 11, P. 3ª, 1871); Schwarz, *De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum* (Jour. f. Math., 64, 1865).

Dopo aver date queste poche indicazioni, lasciamo in disparte tali particolari superficie con infinite rette e passiamo a dire qualche cosa delle rigate in generale (1). Di esse si occuparono già Monge nelle *Additions* alla sua *Géométrie descriptive* (Paris, an. VII = 1798) e il suo discepolo Hachette (*Note sur les surfaces réglées*, Journ. f. Math., 8, 1832; cfr. anche Corr. Éc. pol., 2, 1809-1813); ma si può dire che la teoria geometrica di esse sia stata inaugurata da Chasles con due lavori (*Sur quelques propriétés générales des surfaces gauches*, Journ. de Math., 2, 1837; *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*, Corr. Math., 11, 1839) dai quali si apprende la projettività fra il fascio dei piani tangenti a una rigata nei punti di una generatrice e la punteggiata dei punti di contatto, nonchè l' esistenza del punto

(1) Di esse trattano diffusamente le migliori opere di geometria descrittiva, fra cui basti qui ricordare, oltre quella del Fiedler, il *Traité de géométrie descriptive* del de la Gournerie (Paris, 1860, 1862 e 1864).

centrale su ogni generatrice e della linea di stringimento in ogni rigata; l'essere per una rigata l'ordine eguale alla classe e l'ordine della linea doppia eguale alla classe della sviluppabile bitangente venne osservato non molto più tardi dal Cayley (*On the Theory of Skew Surfaces*, Cambridge, Journ., 7, 1852), il quale poi, coll'aiuto del Salmon (cfr. *On a Classe of Ruled Surfaces*, Cambridge Juorn., 8, 1853), determinò le proprietà caratteristiche delle rigate ciascuna delle quali è il luogo delle rette secanti tre curve date, oppure bisecanti una e secanti un'altra, o trisecanti di una curva (*On Skew Surfaces, otherwise Scrolls*, Phil. Trans. 153, 1863, cfr. Rupp. *Ueber die Abhängigkeit der Charaktere einer durch Leitcurven bestimmten Regelfläche von den Charakteren dieser Leitcurven*, Math. Ann., 18, 1881).

Altre questioni particolari, più o meno importanti, relative alle medesime superficie si trovano risolte nelle memorie seguenti: Plücker, *Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction* (Ann. di Mat., II, 1, 1867); Lüroth, *Zur Theorie der windschiefen Flächen* (Journ. f. Math., 67, 1867); Clebsch, *Ueber die Curven der Haupttangenten bei windschiefen Flächen* (Id., 68, 1868); Voss, *Zur Theorie der windschiefen Flächen* (Math. Ann., 8, 1875) e *Ueber die Haupttangentcurven der windschiefen Flächen* (Id.. 12, 1877); H. Schubert, *Bemerkung zu der Bestimmung der Anzahl der Torsallinien einer Regelfläche* (Id., 17, 1880); Pittarelli, *Le assintotiche delle rigate algebriche di genere qualunque che fanno parte di una congruenza lineare* (Lincei Rend., V, 3, 1894,); Björling, *Singuläre Generatricen in algebraischen Regelflächen* (Stockh. Ofv., 1888) e *Die singulären Generatricen der Binormalen - und Hauptnormalen - Flächen* (Stockh. Vetensk. Bihang., 15, 1889); Wiman, *Ueber die Doppelcurve auf den geradlinigen Flächen* (Acta, 19, 1895).

Scendendo alle rigate di ordini particolari ricorderemo quanto già dicemmo (nn. 7 e 8) intorno a quelle degli ordini 3° e 4°; a quelle del 5° ordine è consacrata la memoria dello Schwarz, *Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades* (Journ. f. Math., 67, 1867), ed a quelle del 6° il lavoro del Bergstedt *Om Regelytor of sjette Graden. I. Unikursala Ytor* (Lund Akad. Afh., 1886) e la *Klassification af regelytorna af 6. graden* del Wiman (Lund, 1892); di altre speciali, benchè di ordine qualunque, si occuparono il Catalan nel *Mémoire sur les surfaces gauches à plan directeur* (Journ. Éc. pol., 19° cah., 1843) ed il de la Gournerie nell'opera *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques avec des notes par M. Arthur Cayley* (Paris, 1867). Da questa il Cayley ebbe lo stimolo a studiare le rigate generate dalle congiungenti i punti omologhi di due curve algebriche in corrispondenza algebrica (*On certain Skew Surfaces, otherwise Scrolls*, Cambridge Trans., 11, P. 2ª, 1869), le quali sono più generali di quelle di cui tratta la memoria di Em. Weyr intitolata *Erzeugniss mehrdeutiger Elementargebilde im Raume* (Prager Abh., VI, 5, 1872), essendo qui le linee direttrici rette, ed anche di quelle a cui è consacrata quella di F. Chizzoni (1848-1904) *Sulle superficie e sulle linee che si ottengono come inviluppo delle rette congiungenti i punti corrispondenti di due curve omografiche* (Lincei Mem., III, 3, 1878-79); allo stesso Weyr poi devesi una *Notiz über Regelflächen mit rationalen Doppelcurven* (Wiener Ber., 84, 1881). Va da ultimo notato che le rigate razionali vennero studiate, non senza ottimi risultati, da A. Armenante (1844-1878) (*Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p=0$ sopra un piano*, Ann. di Mat., II, 4, 1870-71), dal Clebsch (*Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p=0$*, Math. Ann., 5, 1872), e dal Brill (*Ueber rationale Curven und Regelflächen*, Id., 36, 1890).

14. Alle superficie rigate si possono far seguire, da un certo punto di vista, le superficie contenenti un numero finito di rette, da un altro le superficie contenenti infinite coniche. Quelle furono studiate dallo Sturm (*Ueber die Flächen mit einer endlichen Zhal von (einfachen) Geraden, vorzugweise der vierten und fünften Ordnung,* Math, Ann., 4, 1871) e dall'Affolter (*Ueber Gruppen gerader Linien auf Flächen höheren Ordnung* Id., 27, 1886 e 29, 1887), queste da Ed. Weyr (*Sur l'arrangement des plans tangents de certaines surfaces*, Bordeaux Mém., II, 3, 1879, e *Zur Theorie der Flächen, welche eine Schar von Kegelschnitte enthalten*, Monatshefte, 2, 1891), da A. Weiler (*Ueber einige Flächen welche Schaaren von Kegelschnitten enthalten*, Zeitschr. f. Math., 30, 1885), da G. Koenigs (*Recherches sur les surfaces par chaque point desquelles passent deux ou plusieurs coniques tracées sur la surface*, C. R. 105, 1887, e *Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques*, Ann. Éc. norm., III, 5, 1888) e da E. Blutel, *Recherches sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes* (Ann. Éc. norm., III, 7, 1890).

Di natura differente sono le superficie che ammettono infinite trasformazioni infinitesime in sè stesse; di esse si occuparono nel 1870 Klein e Lie (*Sur une certaine famille de courbes et de surfaces*, C. R., 70) e più tardi il Lie stesso (*Bestimmung aller Flächen. die eine Schaar von projectiven Transformationen gestatten*, Leipziger Ber., 47, 1895), nonchè F. Enriques (*Le superficie con infinite trasformazioni infinitesime in sè stesse*, Atti Ist. Ven., VII, 4, 1893) e G. Fano (*Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in sè stesse*, Lincei Rend., V, 4, 1825_1, e *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè*, Palermo Rend., 10, 1896).

Alla geometria metrica appartiene il *Beitrag zur Kenntniss der algebraischen Flächen mit Mittelpunkt* di K. Stoltz (Zeitschr. f. Math., 36, 1891) e il *Mémoire sur la surfaces enveloppes de sphères* (Journ. Éc. pol., 53 cah., 1883) del Lecornu. Altrettanto dicasi delle indagini intorno a superficie che (al pari della superficie delle onde) sono deducibili da una quàdrica e che vennero studiate dal Cayley nei lavori seguenti: *Sur la surface qui est l'enveloppe des plans conduits par les points d'un ellipsoïde perpendiculièrement aux rayons menés par le centre* (Ann. di Mat., 1, 1859), *Sur la surface parallèle à l'ellipsoïde* (Id., 2, 1860), *On the Centro-surface of an ellipsoid* (Proc. L. M. S., 3, 1869-71 e Cambridge Trans., 12, P. I. 1873), e *Note on the Theory of Apsidal Surfaces* (Quart. Journ., 16, 1879). Argomento simile hanno le le due note di T. Craig, *The Counter-pedal Surface of the Ellipsoid* (Am. Jorn., 4 e 5, 1882).

Della stessa indole sono gli scritti intesi a rispondere alla questione proposta nel 1886 dall'Accademia delle Scienze di Parigi come tema pel concorso al Gran Premio delle scienze matematiche: « Studiare le superficie che ammettono tutti i piani di simmetria di uno dei poliedri regolari ». Il premio fu conferito al lavoro del Lecornu *Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symetrie de l'un des polyédres réguliers* (Acta, 10, 1887); ma va anche ricordato con onore l'*Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyédre régulier* (Ann. Èc. norm., III, 4, 1887) del Goursat; sono legate a queste memorie le note di E. Lebon, *Sur les surfaces admettant les plans de symétrie du tétraèdre régulier et du cube* (Journ. de math. spéc., 1889) e *Sulla determinazione degli ombelichi delle superficie tetraedriche* (Palermo Rend., 4, 1890) e di E. Ciani, *Sulle superficie algebriche simmetriche* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1).

Di indole proiettiva sono invece gli studi intorno alle superficie generabili con forme fondamentali in corrispondenza algebrica e che si trovano consegnati nei lavori seguenti: G. Jung, *Sulle superficie generate da due sistemi Cremoniani reciproci di grado* m (Lincei Rend., IV, 1, 1885), *Sui sistemi cremoniani reciproci di grado* m (Ivi), *Sulle superficie generate da tre sistemi deducibili l'uno dall'altro mediante trasformazioni birazionali* (Id., IV, 2, 1886_1); P. Visalli, *Sopra una serie di superficie rappresentabili punto per punto sopra un piano* (Ivi); G. Loria, *Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica* (Giorn. della Soc. di Lett. e Conv. scientifiche, Genova. 1887; oppure Giorn. di Mat., 34, 1896); Doehlemmann, *Untersuchung der Flächen welche sich durch eindeutig aufeinander bezogene Strahlenbündel erzeugen lassen* (Diss. München 1889).

Di importanza maggiore sono ricche le indagini (cominciate appunto nell'ultimo decennio del Secolo XIX) intorno alle superficie algebriche che sono di dato genere, oppure le cui sezioni piane sono di genere assegnato; fra le prime vanno ricordate quelle dell'Humbert *Sur la théorie générale des surfaces unicursales* (Math. Ann., 45, 1894) e *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques* (Journ. de Math., IV, 10, 1894) e quelle del Castelnuovo *Sulle superficie di genere zero* (Mem. Soc. XL, III, 1896); fra le seconde—che hanno per loro punto di partenza un teorema di Picard che citammo occupandoci della superficie di Steiner (v. n. 8)—quelle che si trovano esposte nei seguenti scritti: Castelnuovo. *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (Palermo Rend., 4, 1890), *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* (Torino Atti , 25, 1890), *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche* (Lincei Rend., V, 3 1894_1) e *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riducibili* (Ivi; è qui dimostrata una proposizione che il Kronecker comunicò senza dimostrazione il 2 maggio 1886 all'Accademia dei Lincei; v. Rend., IV, 2) (1); Humbert: *Sur une classe de surfaces à génératrices rationnelles* (C. R., 116, 1893) e *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques* (Ivi); Enriques, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* (Torino Mem., II, 44, 1894). A tali investigazioni si collegano quelle del Castelnuovo *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche* (Lincei Rend., V, 3, 1894_1), nonchè le altre compiute in comune dal Castelnuovo e dall'Enriques *Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes* (C. R. 121, 1895), nota a cui seguì l'altra del Painlevé, *Sur les surfaces algébriques qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles* (Ivi).

Molte altre classi di superficie furono considerate dai geometri; nell'impossibilità di menzionarle tutte, ci limitiamo a ricordare quelle di cui occupossi il Fouret (cfr. il n. 15 del Cap. prec.), quelle algebriche di area minima di cui parleremo più innanzi (Cap. V, n. 9), e quelle esaminate dall'Eckardt nelle note *Ueber die Flächen, deren Gleichungen aus denen ebener Curven durch eine bestimmte Substitution hervorgehen* (Math. Ann., 7, 1874) e *Ueber eine allgemeine Classe von Flächen und die Fläche dritter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 20, 1875).

(1) Cfr. anche le *Osservazioni* del Castelnuovo *intorno alla geometria sopra una superficie algebrica* (Rend. Ist. Lomb., II, 24, 1891) e la posteriore memoria dello stesso geometra intitolata *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Mem. Soc. XL, III, 10, 1896).

E qui ci arrestiamo, non per la illusione di avere percorso tutto il campo d'indagine a cui è consacrato il presente Capitolo, ma per la persuasione di non poterne mai raggiungere i confini (1).

---

(1) Ad es. non potemmo far cenno dell'applicazione dei sistemi articolati, alla quale è dovuto un metodo di costruzione estremamente notevole di qualsivoglia superficie algebrica, che il Sylvestrer ha immaginato e G. Koenigs ha dimostrato nella nota dal titolo *Toute surface algébrique peut être décrite par le moyen d'un système articulé* (C. R., 120, 1895).

CAPITOLO IV.

Teoria delle curve algebriche a doppia curvatura.

1. La teoria delle curve piane è suscettibile di venire generalizzata in due direzioni differenti; se si bada all'essere una di tali curve rappresentabile analiticamente col mezzo di *una* equazione unica fra le coordinate di un punto *del piano*, come analoga di essa si presenta la teoria delle figure rappresentabili con *una* equazione unica fra le coordinate di un punto *dello spazio*, cioè la teoria delle superficie della quale, almeno in parte, ci occupammo nel Capitolo precedente; se invece si osserva essere una curva piana una serie semplicemente infinita di punti, è naturale togliere la condizione che questi appartengano ad un piano, e si può o surrogarla con quella che essi appartengano ad una superficie determinata, oppure, più generalmente, sopprimerla completamente; nasce allora la teoria delle « curve a doppia curvatura » (1).

Che tali notevoli enti geometrici non siano rimasti sconosciuti agli antichi è dimostrato da una soluzione (che già menzionammo) del problema di Delo, suggerita da Archita di Taranto, fondata sull'uso della curva sezione di un toro con un cilindro (2) ed è confermato da alcune pagine di Pappo ove sono dimostrate alcune notevoli proprietà della curva che è l'analoga sulla sfera della spirale d'Archimede nel piano (3). Che anche i moderni abbiano rivolta ad essi la propria attenzione è provato ad esempio dal trattato *De sectione superficiei sphaericae per superficiem sphaericam, cylindricae per cylindricam et conicae per conicam* (Divionae, 1662) di P. Courcier (1604-1692).

Ma lo studio metodico delle curve gobbe venne inaugurato soltanto nel 1731 da Clairaut; esso fu validamente continuato da molti geometri di cui ci occuperemo nel Cap. seg., nel quale tratteremo delle proprietà infinitesimali dello spazio; nell'attuale invece esamineremo le principali ricerche istituite (salvo poche eccezioni) in base all'ipotesi che le curve considerate siano alge-

---

(1) Questo nome s'incontra per la prima volta nella memoria del Pilot (1695 - 1771) *Sur la quadrature de la moitié des arcs d'une courbe appelée le compagne de la cicloide* (Mém. de Paris, 1724).

(2) V. *Archimedis Opera omnia*, ed. Heiberg, 3 (Lipsiae, 1881), p. 98 e segg.

(3) *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*, ed. Hultsch (Berolini, 1876), p. 264 e segg. Si tratta di una curva algebrica di decimo ordine: v. G. Loria, *La spirale da Pappus* (Arch. S. Math. u. Phys. III, 12, 1907).

briche, campo questo che solo in quest'ultimo mezzo secolo venne coltivato con risultati degni di prendere posto nei fasti della storia della matematica.

2. La teoria che imprendiamo a trattare non presenta nel proprio andamento molte analogie sostanziali con alcuna delle discipline anteriormente studiate: donde la ragione per cui le difficoltà che essa offre non furono affrontate e vinte che ai tempi nostri. Si opinò per lungo volger d'anni (1) che ogni curva dello spazio si potesse considerare per intersezione di due superficie e quindi rappresentare analiticamente mediante due equazioni; ma non si tardò a riconoscere (coll'esempio delle cubiche gobbe alla mano) l'esistenza di curve intersezioni incomplete di due superficie, epperò la mancanza di generalità di cui era affetta quella rappresentazione analitica (2). A surrogarla provvide il Cayley in due modi: uno consiste nel considerare una curva come complesso (cfr. Cap. VII) delle rette che la incontrano (*On a New Analytical Representation of Curves in Space*, Quart. Journ., 3, 1860, e 5, 1862) e venne sfruttato dal Voss nella memoria *Ueber Raumcurven und Developpabele* (Math. Ann., 13, 1878; l'altro si apprende dalle importantissime *Considérations générales sur les courbes en espace* (C. R., 54, 1862 e 58, 1864) e si riduce a considerare ogni curva gobba come l'intersezione di un cono con una « superficie monoide » (cioè dell'ordine μ con un punto $\mu - 1$-plo), segante ancora il cono in un certo numero di rette (3) e venne, fosse per la prima volta, applicato da Ed. Weyer nella memoria *Ueber algebraische Raumcurven* (Prager Abh., 6, 1874). Prescindendo da questi artifici, si credette che, col mezzo delle equazioni di tre superficie passanti per una curva, questa potesse venire completamente rappresentata; ma la teoria delle funzioni algebriche, insegnando che una varietà a $\nu < n$ dimensioni di uno spazio a n dimensioni, è in generale rappresentabile completamente soltanto mediante $n+1$ equazioni (4), fece nascere dei dubbî sulla giustezza di tale opinione: ed infatti venne addotto un esempio (5) di una curva per rappresentar la quale sono indispensabili quattro equazioni.

(1) Cfr.: Euler, *Introductio in analysin infinitorum* (Losana, 1748), 2, p. 390; Magnus, *Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes* (Berlin, 1837), p. 160; ecc.

(2) Il primo, per quanto ci consta, a segnalare la questione « come si può rappresentare analiticamente una curva che non sia completa intersezione di due superficie? » fu il Cayley (v. la fine della *Note sur les hyperdéterminantes*, Journ. f. Math., 24, 1847).

(3) Cfr. a questo proposito L. Autonne, *Sur les représentations des courbes gauches algébriques et sur une formule d'Halphen* (C. R., 119, 1894).

(4) Kronecker, *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, § 10 (Journ. f. Math., 92, 1882).

(5) K. T. Vahlen, *Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischen Raumcurven* (Journ. f. Math., 108, 1891).

A questa complicazione della rappresentazione analitica completa di una curva gobba algebrica corrisponde la difficoltà che presenta il caratterizzare pienamente una tale curva. Infatti si suppose un tempo che la nozione di ordine fosse sufficiente per classificare le curve gobbe; ma, dopo che Salmon (*On the Classification of Curves of Double Curvature*, Cambridge Journ., 5, 1850), e Steiner (nella memoria *Ueber die Flächen dritten Grades*, Journ. f. Math., 53, 1856) avvertirono l'esistenza di due quartiche gobbe completamente differenti, si riconobbe che quel concetto non basta. Si credette che l'ordine insieme al numero dei punti doppi apparenti fosse sufficiente a caratterizzare una curva gobba; ma giunti al nono ordine si vide di avere errato. E un terzo numero — che Halphen indicò con la lettera n e che rappresenta l'ordine minimo dei coni passanti per le corde della curva che escono da un punto arbitrario dello spazio — potè servire allo scopo soltanto per le curve di ordine inferiore al quindicesimo. Allora si venne alla sconfortante conclusione di essere impossibile caratterizzare una curva gobba col mezzo di un complesso determinato di numeri, assegnabili *a priori*.

A queste conclusioni, in gran parte negative, fa riscontro uno splendido risultato positivo, che mezzo secolo fa ottenne il Cayley (*Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables*, Journ. de Math., 10, 1845; pubblicato in inglese col titolo *On Curves of double Curvature and Developable Surfaces* nel t. 5, 1850, di Cambridge Journ.; inoltre la nota *On the Theory of the Curves and Torses*, Quart. Journ., 11, 1871), coll'estendere alle linee gobbe le relazioni che Plücher (Cap. II, n. 5) scoprì fra le caratteristiche di una curva piana (1). Questa memorabile scoperta si può avvicinare alle ricerche sulla singolarità delle curve gobbe che si leggono negli scritti seguenti: Spottinswoode, *Mémoire sur les points singuliers d'une courbe à double courbure* (Journ., f. Math., 42, 1851); Zeuthen, *Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable* (Ann. di Mat., II, 3, 1869-70); Halphen, *Sur les singularités des courbes gauches algébriques* (Bull. S. M. F., 6, 1878); C. F. E. Björling, *Om algebraiska rymdkurvors singularitater och polardeveloppabelns karakterer* (Stockh. Oefv., 1881); H. B. Fine, *On the Singularities of Curves of Double Curvature* (Am. ourn., 8, 1886); Poincaré, *Sur les transformations birationnelles des cour-*

(1) Dalle formole di Cayley emerge che la figura polare reciproca della sviluppabile osculatrice alla curva d'intersezione di due superficie algebriche non è la completa intersezione di due superficie algebriche (Hossfeld, *Zur Theorie der Raumcurven*, Zeitschr. f. Math., 29, 1884) e che se di una curva gobba sono fra loro eguali una coppia di caratteristiche fra loro correlative, altrettando accadrà in generale per le altre coppie (G. Loria, *Sur les courbes gauches algébriques auto-corrélatives*, Bull. S. M. F. 22, 1895).

bes algébriques (C. R., 107, 1888) (1); Kluyver, *Kenmerkend getallen der algebraische ruimte-kromme* (Amsterdam Versl. en Meded., III, 7, 1890); W. Fr. Meyer, *Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für Singularitäten von algebraischen Raumcurven, mit Anwendungen Gleichungen auf Realitätsverhältnisse* (Monatshefte, 4, 1893). In particolare, dei punti stazionari trattano, oltre la memoria di Hesse citata nel n. 7 del Cap. II: Bischoff *Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven* (Journ. f. Math. 58, 1861); Clebsch, *Sur la surface qui coupe la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques données dans les points de contact des plans osculateurs stationnaires* (Journ. de Math., II, 8, 1863), e *Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven* (Journ. f. Math., 63, 1864).

Delle rette secanti più volte una curva gobba parlò incidentalmente il Cayley nel primo dei lavori *On Skew Surfaces otherwise Scrolls* (cfr. Cap. III, n. 9); di esse è trattato *ex-professo* nelle due memorie del Picquet (*Sur les courbes gauches algébriques*, C. R., 77, 1873, e Bull. S. M. F., 1, 1875), e del Geiser (*Ueber die dreifachen Secanten einer algebraischen Raumcurve*, Coll. math., 1881; cfr. Berzolari, *Sulle secanti multiple di una curva algebrica dello spazio a tre od a quattro dimensioni*, Palermo, Rend., 9, 1895); ad esse uniamo, benchè tratti una questione metrica, la nota del Pieri, *Sulle normali doppie di una curva gobba algebrica* (Lincei Rend., IV, 2, 1886,).

3. A curve sghembe in generale si riferiscono anche le *Études sur les courbes à double courbure tracées sur une surface algébrique d'ordre quelconque* (Ann. di Mat., 5, 1863) del de Jonquières, nonchè certe osservazioni intorno alla determinazione del genere delle curve fatte dal Cremona (v. N. Salvatore-Dino, *Sul genere delle curve gobbe*, Napoli, Rend., 18, 1879) e da R. Sturm (*Ueber das Geschlecht von Curven auf Kegeln*, Math. Ann. 19, 1882), ed ancora l'interessante lavoro dell'Hurwitz intitolato: *Einige allgemeine Sätze über Raumcurven* (Math. Ann., 25, 1885; cfr. anche 27, 1886, ove sono citati dei lavori anteriori contenenti le medesime proposizioni), il *Teorema sulle curve gobbe* (Giorn. di Mat., 25, 1887) di A. Cantone, la memoria di F. Caspary, *Ueber die Erzeugung algebraischer Raumcurven durch veränderliche Figuren* (Journ. f. Math., 100, 1887) e quella di J. Sobotka intitolata *Beitrag zur Construction von Krümmungskugeln an Raumcurven* (Wiener Ber., 104, 1895).

Ma questi scritti, per quanto degni di onorevole menzione, non produssero

---

(1) È ivi provata la trasformabilità di ogni curva piana in altra sghemba senza alcuna singolarità, il che trovasi anche dimostrato in due note del Bertini e del Pieri che citammo nel n. 6 del Cap. II, e nella più recente del Pannelli, *Sulla riduzione delle singolarità di una curva gobba*. Rend. Ist. Lomb., II, 26, 1893.

un decisivo progresso nella teoria che ci occupa; potere che ebbero invece due memorie che nel 1882 giudicate degne del premio Steiner dall' Accademia di Berlino; e ben la meritarono, chè trattando essi i problemi di determinare tutte le curve di dato ordine fra loro distinte, di assegnare quali curve algebriche si trovino su una data superficie algebrica, e altri ancora di importanza non molto minore, devono considerarsi come i fondamenti di una teoria generale delle curve non trascendenti dello spazio. Sono il ***Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques*** dell' Halphen (Journ. Éc. pol., 52e cah., 1882), e il lavoro ***Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven*** del Nöther (Berliner Abh., 1883; un lungo sunto se ne trova nel t. 93, 1882, del Journ. f. Math.).

Questi due lavori si intrecciano fra loro così strettamente, si compenetrano così intimamente, da rendere assai malagevole il discernere la parte che spetta ad ognuno dei citati geometri nella produzione dei risultati a cui entrambi pervennero; infatti, se da un lato il Nöther potè far tesoro dei teoremi che negli anni 1870-73 l' Halphen fece conoscere in parecchie occasioni (***Mémoire sur les courbes gauches algébriques, Extrait***, C. R., 70, 1870; ***Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre,*** Bull. S. M. F., 1, 1872; ***Recherches de géométrie à n dimensions***, Id., 2, 1873; ***Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques,*** Ivi); dall'altro all' Halphen fu dato di usufruire della teoria delle funzioni algebriche di cui il Nöther fu uno dei fondatori e dei più fortunati cultori (cfr. Cap. II, n. 6). Nè si creda che le vie percorse dai due chiari geometri siano molto differenti, giacchè entrambi imitarono il Cayley nel rappresentare analiticamente le curve mediante superficie monoidi e, se uno di essi adoperò di preferenza formole e proposizioni della dottrina delle funzioni abeliane, l'altro applicò quei teoremi delle funzioni algebriche che esprimono in sostanza le medesime proprietà (1).

Gli scritti che seguirono le memorie coronate dall' Accademia di Berlino non sono molto numerosi; i più importanti sono forse quelli del Nöther ***Ueber die reducibeln algebraischen Curven*** (Acta, 8, 1886), del Bobek, ***Ueber das Maximalgeschlecht von algebraischen Raumcurven gegebener Ordnung*** (Wiener Ber., 93, 1886), e del Cayley, ***On Halphen's Characteristic* n *in the Theory of Curves in Space*** (Journ. f. Math., 111, 1893).

Giustizia vuole che venga qui fatto cenno delle ricerche di H. Valentiner che hanno colle precedenti molteplici punti di contatto, ma ne sono completa-

(1) Però le superficie monoidi rappresentano nel metodo di Halphen una parte più importante che in quello di Nöther; in particolare gli è la considerazione di esse che guidò l'illustre geometra francese alla scoperta di un procedimento ingegnoso quanto originale per determinare l'ordine minimo delle superficie passanti per una data curva algebrica.

mente indipendenti; esse vennero esposte nella dissertazione intitolata: ***Bidrag til Rumcurvernes Theori*** (Kjöbenhavn, 1881), e poi nella memoria ***Zur Theorie der Raumcurven*** (Acta, 2, 1883).

Nè va dimenticata una nota ***Intorno alla geometria su una rigata algebrica*** (Lincei Rend., IV, 3, 1887$_2$) del Segre destinata, fra l'altro, a dimostrare una formola da cui ricevono una notevole ed assai ampia generalizzazione i risultati ottenuti dallo Sturm in un articolo menzionato poco fa e dallo Story nella nota: ***On the Number of Intersections of Curves Traced on a Scroll of any Order*** (Hopkins Circ., 2, 1883). Da ultimo vanno citate due note, una del Guccia, ***Sur une question concernant les points singuliers des courbes gauches algébriques*** (C. R., 120, 1895$_1$) — ove è determinata la diminuzione che produce nel rango dell'intersezione di due superficie la presenza di un punto singolare per entrambe — l'altra del Krüpper avente per iscopo la ***Bestimmung des Maximalbasis B für eine irreducible μ-fache Mannigfaltigkeit von Curven n^{ter} Ordnung C^n*** (Monatshefte, 6, 1895).

4. Da quanto precede risulta ad evidenza come, quando il Secolo XIX volgeva all'occaso, la teoria generale delle curve sghembe si presentasse come un campo non ancora sufficientemente coltivato, epperò ben lungi dall'essere esaurito. Non esauriti ma assai più coltivati apparivano i campi di più modeste proporzioni rappresentati dalle indagini intorno a curve speciali; noi ora li percorreremo regolandoci nel nostro viaggio su criteri analoghi a quelli che abbiamo scelti occupandoci delle curve piane (v. Cap. II, n. 11). Laonde comincieremo parlando delle cubiche gobbe, cioè di quelle notevoli curve che rappresentano nella geometria dello spazio una parte analoga a quella delle coniche nella geometria del piano.

La teoria di queste curve raggiunse ai dì nostri un'invidiabile perfezione, frutto dei perseveranti sforzi dei più chiari geometri del secolo passato. Primo fra questi Möbius che, nella grande sua opera ***Der barycentrische Calcul*** (Leipzig, 1827), applicando il metodo di geometria analitica che gli è proprio, riconobbe essere una conica il luogo delle traccie delle tangenti alla curva sopra un piano osculatore qualunque. A lui segue Chasles che alle curve di cui trattiamo dedicò la Nota XXXIII dell'***Aperçu historique*** e vent'anni dopo lo scritto: ***Propriétés des courbes à double courbure du troisième ordre*** (C. R., 45, 1857; Journ. de Math., II, 2). Viene poi il Seydewitz, il quale colla memoria ***Linear Construction einer Curve doppelter Krümmung*** (Arch. der Math., 10, 1847) fece conoscere la generazione delle cubiche gobbe mediante stelle proiettive di raggi e propose una classificazione di esse che venne tosto accettata ed è tuttora adoperata. Intanto il Cayley aveva dimostrato che per ogni punto dello spazio passa una sola corda di una data cubica gobba (v. la nota intitolata: *Démonstration d' un théorème de M. Chasles*, Journ. de Math., 10, 1845). Nel 1859 apparve la memoria di Schröter, *Ueber die Raumcurven dritter Klasse und dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 56) accompagnata da una *Bemerkung* del Joachimsthal; l'anno seguente le cubiche gobbe entrarono a far parte di una trattazione metodica della geometria proiettiva, venendo studiate a fondo nel terzo dei *Beiträge zur Geometrie der Lage* di Staudt. Già prima il Cremona aveva cominciato a pubblicare i risultati delle memorabili sue investigazioni sul soggetto che ci occupa, come emerge dal seguente elenco di memorie a lui dovute: *Sulle linee di terzo ordine a doppia curvatura* (Ann. di Mat., 1, 1858, e 2, 1859), *Sulla proiezione iperboloidica di una cubica gobba* (Id., 5, 1863, e Giorn. di Mat., 2, 1864). *Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe* (Journ. f. Math., 58, 1861), *Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubique gauche donnée* (Id., 63, 1864). *Propriétés de la cubique gauche* (Nouv. Ann., 19, 1860), *Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches* (Id., II, 1, 1862). *Un teorema sulle cubiche gobbe* (Giorn. di Mat., 1, 1863), *Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola gobba* (Bologna Mem., 3, 1863 e Giorn. di Mat., 2, 1864), *Sulle superficie e le curve che passano pei vertici d' infiniti poliedri formati da piani osculatori di una cubica gobba* (Rend. Ist. Lomb., II, 12, 1879); E. Beltrami, *Annotazioni sulla teoria delle cubiche gobbe* (Id., II, 1, 1868) (1).

Una esposizione delle principali proprietà delle curve in discorso si legge, oltrechè in *Die Geometrie der Lage* del Reye (2), in un manuale già nominato (Cap. III, n. 6) dello Schröter, mentre molti importanti complementi alla teoria proiettiva delle medesime recarono i seguenti scritti: Em. Weyr, *Ueber den perspectivischen Zusammenhang der Raumcurven dritter Ordnung mit den ebenen Curven dritter Ordnung vierter Classe, und jener dritter Classe vierter Ordnung* (Prager Ber., 1869), e *Intorno alle cubiche gobbe* (Rend. Ist. Lomb., II, 4, 1871); H. Müller, *Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung* (Math. Ann., 1, 1869); Sturm, *Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches?* (Ann. di Mat., II, 3, 1869-70), *Erzeugnisse, Elementarsysteme und Carackteristiken von cubischen Raumcurven* (Journ. f. Math., 79, 1875), e *Weitere Untersuchungen über kubische Raumkurven* (Id.,

(1) Sono ivi fatte alcune critiche al lavoro di C. A. von Drach (1839-1915) *Einleitung in die Theorie der Kubischen Kegelschnitte* (Zeitschr f. Math 12, 1867), a cui l'autore rispose in parte (Ivi 13, 1868).

(2) V. anche Reye, *Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnis der kubischen Raumcurven, übersichtlich dargestellt* (Hamburger Mitth., 2, 1890).

80, 1875); Voss, *Ueber vier Tangenten einer Raumcurven dritter Ordnung* (Math. Ann., 13, 1878); Hurwitz, *Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumcurven dritter Ordnung* (Id., 20, 1882); C. Guichard (1861 - 1924), *Application de la théorie des cubiques gauches* (Ann. Éc. norm., III, 3, 1886); Cantone, *Teoremi sulla cubica gobba* (Palermo Rend., 1, 1884-87), *Teoremi sulla cubica gobba, dedotti dallo studio di una trasformazione involutoria nello spazio* (Napoli Rend., 15, 1886), *Un teorema sopra la cubica gobba* (Giorn. di Mat., 25, 1887); Servais, *Sur le système focal* (Belgique Mém., 52, 1895).

Di alcune proprietà metriche delle cubiche gobbe è discorso in una memoria già citata dal Cremona (Journ. f. Math., 63) e in un'altra di Em. Weyr (Rend. Ist. Lomb., 1871) pure dianzi nominata; altre sono esposte nelle note di L. Geisenheimer, *Ueber den Mittelpunkt der Raumcurven dritter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 27, 1882) e in quella posteriore del Valeri, *Proprietà metriche delle cubiche gobbe* (Mem. dell' Acc. di Modena, II, 8, 1893); ma le più numerose ed importanti si apprendono dalle due dissertazioni: H. Krüger, *Die Focaleigenschaften der cubischen Raumcurve* (Breslau, 1885), e E. Timerding, *Ueber die Kugeln, welche eine cubische Raumcurve mehrfach oder mehrpunktig berühren* (Strassburg, 1894), e dagli articoli seguenti: J. Sobotka *Construction der hyperosculierenden Kugeln der cubischen Raumcurven* (Monatshefte, 5, 1894); R. Mehmke, *Metrische Strahlencongruenzen bei einer cubischen Raumcurven* (Zeitschr. f. Math., 40, 1895) e R. Sturm, *Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurven* (lvi).

La teoria delle cubiche gobbe in due modi si può collegare alla teoria delle forme binarie; o coll' esprimere le coordinate omogenee de' suoi punti col mezzo di quattro forme binarie cubiche o col rappresentare su di esse una forma binaria di ordine assegnato ma arbitrario. Gli scritti principali in cui tali concetti sono esposti e sviluppati sono: Laguerre, *Sur la représentation des formes binaires dans le plan et dans l'espace* (Institut, 40, 1872); Appell, *Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide* (Ann. Éc. norm., II, 5, 1876); J. Tannery (1848-1910), *Sur le plan osculateur aux cubiques gauches* (Bull. Sc. math., 11, 1876); d'Ovidio, *Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie* (Torino Mem., II, 32, 1879; di questo lavoro, che è il più esteso e completo sull' argomento, il vol. 17 del Giorn. di Mat. contiene un sunto e la Coll. math. un complemento dal titolo *Nota sopra alcuni iperboloidi annessi alla cubica gobba*); Pittarelli, *La cubica gobba e le forme binarie quadratiche e cubiche* (Giorn. di Mat., 17, 1879); R. Sturm, *Darstellung binärer Formen auf der kubischen Raumcurve* (Journ. f. Math., 86, 1879); W. R. W. Roberts, *Geometrical Representation of a System of two Binary Cubics and their As-*

sociated Forms (Proc. L. M. S., 13, 1883); W. Fr. Meyer, *Apolarität und rationale Curven* (Tübingen, 1883); Waelsch, *Ueber Formen 5ᵉʳ Ordnung auf der kubischen Raumcurven* (Wiener Ber., 100. 1891); L. Berzolari, *Intorno alla rappresentazione delle forme binarie cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba* (Palermo Rend., 5, 1891).

All' anzidetta memoria del d' Ovidio è strettamente collegata quella del Gerbaldi, *Sui sistemi di cubiche gobbe o di sviluppabili di terza classe stabiliti col mezzo di due cubiche punteggiate projettivamente* (Torino Mem., II, 32, 1879); al pari di essa trattano di sistemi di cubiche le seguenti: Montesano, *Su alcuni sistemi di cubiche gobbe* (Napoli, 1886); Cardinaal, *Ein specieller F^2 - Bündel und der dazu gehörige Bündel Raumcurven dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 101, 1887); Heinrichs, *Ueber den Bündel derjenigen kubischen Raumkurven welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Art zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben* (Diss Münster, 1887); Lelieuvre, *Sur certaines familles de cubiques gauches* (C. R., 117, 1893); K. Döhlemann, *Zur Theorie des Nullsystem* (Deutsch.-Math.-Ber., 3, 1892-93).

Da ultimo rileveremo che a cubiche gobbe metricamente specializzate (dal punto di vista projettivo sono tutte identiche tranne quelle degeneri (1)) si riferiscono le memorie seguenti: Cosentius, *Der kubische Kreis* (Zeitschr. f. Math., 25, 1880); W. Fr. Meyer, *Wann besitzet die kubische Parabel eine Directrix?* (Böklen Mitth., 1, 1884); Böklen, *Ueber die kubische Parabel mit Directrix* (Zeitschr. f. Math., 29, 1884); Schröter *Metriche Eigenschaften der cubischen Parabel* (*Raumcurve dritter Ordnung*) (Math. Ann., 25, 1885; cfr. G. Loria, *Su alcune proprietà metriche della cubica gobba osculatrice al piano all' infinito*, Napoli Rend., 24, 1885); Wirtinger, *Ueber die Brennpunktscurve der räumlichen Parabel* (Wiener Ber., 94, 1886); Hurwitz, *Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung* (Math. Ann., 30, 1887) (2); Bioche, *Sur les cubiques gauches équilatères* (Proc. L. M. S., 13, 1884-95) (3).

5. Passiamo alle quartiche gobbe. Come si è già detto (n. 2) sono di due specie; per una curva di I specie passano infinite superficie di second'ordine che costituiscono un fascio di cui la curva è la base, per una di II specie passa invece un' unica quàdrica; quelle di prima specie sono ellittiche, quelle

---

(1) H. Schubert, *Beschreiburg der Ausartungen der Raumcurven dritter Ordnung* (Math. Ann., 15, 1879).

(2) Questa curva ha due punti sul cerchio immaginario all' infinito; perciò viene da molti detta *cerchio sghembo*.

(3) Sono cubiche gobbe aventi tre asintoti reali a due a due ortogonali.

di seconda razionali. Il possedere le due specie di quartiche delle proprietà completamente diverse esige che le consideriamo a parte.

Delle quartiche di prima specie si può dire che si cominciò ad occuparsi sulla fine del secolo scorso quando il Fuss (*Problemata quorundam sphaericorum solutio*, Nova Acta Petrop., 2, 1788; *De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae*, Id., 3, 1788) e F. T. Schuber (1758-1825) (*Problemata ex doctrina sphaerica*, Id., 12, 1801) studiarono le intersezioni di una sfera con un cono quàdrico concentrico: sono queste le « coniche sferiche » le cui proprietà scaturiscono da quelle dei coni quàdrici e che vennero stabilite ed esposte per la maggior parte, oltrechè dal Magnus (*Théorèmes sur l' hiperboloïde à une nappe et sur les surfaces coniques du second ordre*. Ann. de Math., 16, 1825-26), da Chasles (*Mémoire sur les propriétés générales des coniques sphériques*, Belgique Mém., 6, 1831; *Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales*, C. R., 50, 1860), dal Gudermann (1798-1852) (*Ueber die analytische Sphärik*, Journ. f. Math., 6, 1830), dal Cremona (*Sur les coniques sghériques*, Nouv. Ann., 19, 1860), dal Cayley (*On a Theorem rela ting to Spherical Conics*, Quart. Journ., 3, 1860; *On the Stereographic Projection of the Spherical Conics*, Phil. Mag., 25, 1863) e dal Vogt (*Der sphärische Kegelschnitt*, Breslau, 1873).

Ma la teoria generale delle curve di 4° ordine e 1ª specie si può ritenere che cominci dalla scoperta fatta da Poncelet dei quattro coni quadrici che passano per la curva (v. Cap. I, n. 12). Ad essa ne tennero dietro altre per opera di coloro che si occuparono di sistemi di quàdriche, in particolare per merito di Chasles (*Description par points, d'une manière uniforme, des deux courbes gauches du quatrième ordre, de la courbe à nœud et de la courbe du troisième ordre*, C. R., 52, 1861, e *Propriétés des courbes gauches du quatrième ordre de première espèce*, Id., 54, 1864), di Staudt e Reye (si veggano i trattati che tante volte citammo), di P. Serret (*Géométrie de direction*, Paris, 1869, e *Note sur les courbes gauches du quatrième ordre*, C. R., 82, 1876), del Laguerre (*Sur les courbes gauches résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre*, L'Institut, 36, 1868, e *Sur un problème de géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre*, Journ. de Math., II, 15, 1870), del Milinowski (*Zur Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Art*, Journ. f. Math., 97, 1884), dell'Ameseder (*Ueber Configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Speciés*, Wiener Ber., 87, 1883), dell'Eberhard (*Die Raumkurven vierter Ordnung erster und zweiter Species in ihrem Zusammenhang mit den Steiners'schen Schliessungsproblemen bei den ebenen Kurven dritter Ordnung*, Zeitschr. f. Math., 32, 1887), e del Toeplitz, *Zur Theorie der Wendeberührungspunkte der Raumkurve vierter Ordnung erster Species* (Breslau, 1895).

Le curve in discorso somministrarono applicazioni eleganti e di grande valore alla teoria delle funzioni uniformi con due periodi, come si apprende da molti lavori, di cui ci limiteremo a rammentare i seguenti: W. Killing (1851-1923) *Der Flächenbüschel zweiter Ordnung* (Diss. Berlin, 1872); Harnack, *Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppeltperiodische Functionen* (Math. Ann., 12, 1877), e *Notiz über die algebraische Parameterdarstellung der Schnittcurve zweier Flächen 2ᵉʳ Ordnung* (Id., 15, 1879); Westphal, *Ueber das simultane System zweier quaternären Formen 2ᵉⁿ Grades und eine allgemeine Parameterdarstellung der Raumcurve 4ᵗᵉʳ Ordnuny* $p = 1$ (Id., 13, 1878); Lange, *Die sechszehn Wendeberührungspunkte einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species* (Zeitschr. f. Math., 28, 1883); Cayley, *On the Quadriquadric Curve in Connexion with the Theory of Elliptic Functions* (Math. Ann., 25, 1885); Léauté, *Représentation des fonctions elliptiques de première espèce à l'aide des biquadratiques gauches* (C. R., 82, 1876), e *Études géométriques sur les fonctions elliptiques de première espèce* (Journ. Éc. pol., 66, 1879); G. Loria, *Sull' applicazione delle funzioni Jacobiane allo studio delle linee sghembe di quarto ordine e prima specie* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1), e *Le funzioni σ di Weierstrass e le curve di genere 1* (Giorn. di Mat., 31, 1893); Kluyver, *Over de buigraaklijnen eener ruinte kromme van den vierden graad en de eerste soort* (Amsterdam Verst., III, 8. 1891); Valyi, *Ueber die Raumcurven vierter Ordnung von ersten Geschlechte* (Math. und naturwiss. Ber. aus Ungarn, 10, 1893).

Alcune quartiche gobbe ellittiche che, al pari delle coniche sferiche, sono specializzate dal punto di vista della geometria metrica, fornirono l'argomento a pregevoli memorie, delle quali dobbiamo scriver qui almeno i titoli: Darboux, *Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré* (Nouv. Ann., II, 3, 1864); Laguerre, *Sur la courbe résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré* (Bull. Sc. math., 4, 1867) e *Sur les cassiniennes planes et sphériques* (Id., 5, 1868); Schröter, *Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species* (Journ. f. Math., 93, 1882). Una esposizione sintetica metodica delle proprietà comuni a tutte le curve in questione è contenuta, oltrechè nelle opere di Staudt e del Reye sopra *Die Geometrie der Lage*, nel pregevole volume dello Schröter intitolato *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Species* (Leipzig, 1890).

6. Una fisonomia spiccatamente differente da quella che ha la collezione di memorie intorno alle quartiche di I specie possiede l'insieme degli studî intorno alle quartiche di II specie; come anello di congiunzione fra le due serie fungono le scritture sulle quartiche sghembe con punto doppio o cuspide, curve che l'analista preferisce di considerare come appartenenti alla seconda specie per trarre profitto dalla circostanza che esse sono razionali.

Prescindendo dalle memorie di Steiner e Salmon (v. n. 2), la letteratura intorno alle quartiche generali di seconda specie si apre, se non erriamo, con la memoria di Cremona *Intorno alla curva gobba del quart' ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado* (Ann. di Mat., 4, 1861). Essa abbraccia, oltre ad uno scritto di Chasles inserito t. 52 dei C. R. e che nominammo nel n. prec., molti lavori di Em. Weyr, cioè i seguenti: *Ueber rationale Raumcurven vierter Ordnung* (Wiener Ber., 63, 1871, e Math. Ann., 4, 1871), *Ueber Raumcurven vierter Ordnung mit einem Cuspidalpunkt* (Wiener Ber., 71, 1875), *Ueber die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einem Kegelschnitt* (Id., 72, 1875), *Weitere Bemerkungen über die Abbildung etc.* (Id., 73, 1876), *Ueber die Abbildung einer mit einem Cuspidalpunkt versehenen Raumcurve vierter Ordnung auf einem Kegelschnitt* (Id., 78, 1878), *Ueber die Abbildung einer Raumcurve vierter Ordnung mit enim Doppelpunkt auf einen Kegelschnitt* (Ivi), *Ueber Curven vierter Ordnung* (Prager Ber., 1875). Nella collezione di lavori sulle quartiche gobbe razionali, incontriamo ancora quello importantissimo del Bertini *Sulla curva gobba di 4ª ordine e di 2ª specie* (Rend. Ist. Lomb., II, 5, 1872), ove va notato il concetto di « corda principale », cioè di retta che è ad un tempo congiungente di due punti di una curva ed intersezione dei piani osculatori negli estremi, e l'altro di A. Armenante *Sulle curve razionali gobbe del quarto ordine* (Giorn. di Mat., 11, 1873, e 12, 1874); poi, in ordine cronologico, i seguenti: R. Sturm, *Sur la surface enveloppée par les plans qui coupent une courbe gauche du 4ᵉ ordre et de la 2ᵉ espèce en quatre points d' un cercle* (Ann. di Mat., II, 4, 1870-71); Adler, *Ueber Raumcurven vierter Ordnung zweiter Species* (Wiener Ber., 86, 1882); R. A. Roberts, *On Unicursal Twisted Quartics* (Proc. L. M. S., 14, 1883); Jolles, *Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species synthetisch behandelt* (Diss. Strassburg, 1883) e *Die Theorie der Osculanten und des Sehnensystems der Raumcurve IV Ordnung II Species* (Aachen, 1886); A. Brambilla (1857-1908) *Sulle curve gobbe del quarto ordine dotate di punto doppio* (Rend. Ist. Lomb., II, 17, 1884), *Le omografie che mutano in sè stessa una curva gobba razionale del quarto ordine* (Id., 20, 1887) e *Ricerche analitiche intorno alle curve gobbe razionali del 4º ordine* (Atti Ist. Ven., VI, 3, 1885); E. Study, *Ueber die Raumcurven vierter Ordnung, zweiter Art* (Leipziger Ber., 38, 1886); W. Stahl, *Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art und die desmische Fläche zwölfter Ordnung vierter Klasse* (Journ. f. Math., 101, 1887); W. Fr. Meyer, *Ueber* *die mit der Erzeugung der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species verknüpften algebraischen Processe* (Math. Ann., 29, 1887); Rohn, *Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species* (Leipziger Ber., 42, 1890, e 43, 1891); Berzolari, *Sulla curva gobba razionale del quarto ordine* (Rend. Ist. Lomb., II, 23, 1890), *Sopra alcuni iperboloidi annessi alla curva gobba razionale del quart' ordine* (Id., 25, 1892) e *Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quarto ordine* (Ann. di Mat., II, 20, 1892); Forsyth, *On Twisted Quartics of the Second Species* (Quart. Journ., 27, 1895).

Fra le quartiche di II specie ve n'ha una che attrasse in particolar modo l'attenzione dei geometri: è quella che possiede due tangenti stazionarie; essa trovasi studiata nei lavori seguenti: Cremona, *Sopra una certa curva gobba di quart'ordine* (Rend. Ist. Lomb., II, 1, 1868); Em. Weyr, *Sopra una certa curva gobba di quart' ordine* (Ivi); Appell, *Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre* (C. R., 83, 1876); A. Brambilla, *Sopra alcuni casi particolari della curva gobba razionale del quarto ordine* (Napoli Rend., 24, 1885); A. del Re, *Omografie che mutano in sè stessa una certa curva gobba del 4° ordine e 2ª specie e correlazioni che la mutano nella sviluppabile dei suoi piani osculatori* (Torino, Atti, 22, 1887), *Correlazioni che mutano la quartica gobba con due flessi nella sviluppabile dei suoi piani bitangenti* (Napoli Rend., II, 1, 1887), e *Su certi sistemi di quartiche e sestiche sviluppabili che si presentano a proposito delle trasformazioni lineari di una certa quartica gobba in sè stessa* (Id., 2, 1885).

7. Le nozioni che avevansi alla fine del Sec. XIX intorno alle curve gobbe di ordine determinato superiore al quarto erano frammentarie e non molto numerose.

Fra le curve di 5° ordine fu iniziato lo studio delle razionali dal Bertini (*Sulle curve gobbe razionali del 5° ordine*, Coll. math., 1881) e dal Berzolari (*Sulla curva gobba razionale del quint'ordine*, Lincei Mem., IV, 7, 1893); altrettanto fu fatto per le ellitticche da Em. Weyr (*Ueber Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins*, Wiener Ber., 90, 1884; 92, 1885; 97, 1888) e D. Montesano (*Su la curva gobba di 5° ordine e di genere 1*, Napoli Rend., II, 2, 1888).

Di curve di 6° ordine si occuparono in generale A. Baule nella Diss. *Ueber Raumcurven sechster Ordnung* (Göttingen, 1872) ed Ed. Weyr nella sua *Classification des courbes du sixième ordre dans l' espace* (C. R., 76, 1873), ed in particolare il London nell'articolo *Die Raumcurve sechster Ordnung von Geschlechte 1 als Erzeugniss trilinearer Grundgebilde* (Math. Ann., 45, 1894), A. Petot in quello intitolato *Construction de la courbe gauche du sixième ordre et du premier genre* (C. R., 102, 1886) ed E. Pascal nelle note

Sulla configurazione dei 120 piani tritangenti della sestica storta di genere 4 (Lincei Rend., V, 2, 1893,) e *Sui piani tritangenti della sestica storta in genere* 4 (Ivi).

Quanto alle curve di 7° ordine, la loro classificazione si legge nella nota di Ed. Weyr *Ueber Raumcurven siebenter Ordnung* (Wiener Ber., 69, 1874).

Ci sembra opportuno di richiamare qui ancora i già citati studî intorno alle curve simmetriche rispetto ad un tetraedro (v. Cap. II, n. 15) e quelli dell'Eckardt sopra altre curve speciali (v. Cap. III, n. 7), e ancora di rilevare come la considerazione di quelle curve particolari i cui punti stanno su una superficie di secondo ordine ed i cui piani osculatori toccano una superficie di seconda classe sia stata introdotta nella scienza nel notevole articolo di W. Stahl, *Ueber eine gewisse Gattung von Raumcurven* (Journ. f. Math., 99, 1886). Ad una nuova categoria è consacrato quello di K. Bobek *Ueber Raumcurven* m^{ter} *Ordnung mit* (m — 2) - *fachen Secanten* (Wiener Ber., 95, 1887); ad un'altra quello dello Steinmetz *On the Curves which are Selfreciprocal in a Linear Nulsystem, and their Configuration in Space* (Am. Journ., 14, 1892); a quella composta delle curve che ammettono infinite trasformazioni infinitesime in sè stesse, si riferiscono l'articolo di Klein e Lie, *Sur une certaine classe de courbes et de surfaces algébriques* (C. R., 70, 1870) e la memoria del Pittarelli sopra *I gruppi continui projettivi semplicemente infiniti nello spazio ordinario* (Ann. di Mat., II, 22, 1894).

8. Chiuderemo questo Cap. coll'indicare i principali lavori in cui sono studiate le curve razionali, non senza osservare come di molti degli scritti che citammo parlando delle curve piane di genere determinato (Cap. II, n. 13) debba tener conto anche chi si occupa delle curve a doppia curvatura, la nozione di genere essendo una di quelle che affratellano le linee piane alle linee sghembe (anzi a quelle situate in uno spazio lineare qualunque).

Chi forse più di qualunque altro studiò le proprietà projettive e metriche delle curve gobbe razionali è Em. Weyr, di cui vanno qui ricordati i lavori seguenti: *Intorno alle curve gobbe razionali* (Giorn. di Mat., 9, 1871), *Nota sopra alcune singolarità di second'ordine delle curve gobbe razionali* (Ann. di Mat., II, 4, 1870-71), *Ueber rationale Raumcurven* (Zeitschr. f. Math., 16, 1871), *Ueber die Anzahl der Doppelnormalen einer rationalen Raumcurve* (Journ. f. Math., 74, 1872), *Ueber Normalen rationaler Raumcurven* (Ivi), *Sulle curve gobbe razionali* (Rend. Ist. Lomb., II, 15, 1882), e *Ueber rationalen Raumcurven* (Prager Ber., 1883) (1). A lui si uniscono A. Brill per le

(1) A questi va aggiunto il lavoro dello stesso geometra, redatto da E. Czuber e pubblicato nei Wiener Ber., 103, 1894, col titolo *Ueber einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Geschlechte Eins und seine Anwendung.*

due memorie *Ueber die Doppelpunkte von Curven in Raume, deren Geschlecht Null ist* (Math. Ann., 3, 1871) e *Ueber rationale Curve und Regelflä che* (Id., 36, 1890), il Korndörfer per l'articolo *Ueber diejenigen Raumcurven, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen* (Id., 3, 1871) e W. Stahl pei due lavori di capitale importanza *Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven* (Journ. f. Math., 104, 1889) e *Zur Theorie der rationalen Raumcurven* (Math. Ann., 40, 1892). Citeremo da ultimo i tre lavori seguenti: Saltel, *Sur les courbes gauches du genre zéro* (C. R., 80, 1875); Genty, *Sur les courbes gauches unicursales* (Bull. S. M. F., 9, 1881), R. A. Roberts, *On Unicursal Curves* (Proc. L. M. S., 17, 1885), nei quali sono considerate da vari punti di vista le curve in discorso.

CAPITOLO V.

Geometria differenziale.

1. Le ricerche di pertinenza della Geometria differenziale differiscono da quelle su cui c'intrattenemmo nei tre Capitoli precedenti tanto pel continuo intervento di considerazioni infinitesimali, quanto per avere i loro risultati, generalmente parlando, quale campo di applicabilità, non un'intera curva od un'intera superficie, ma soltanto l'insieme de' punti situati nelle vicinanze di quello su cui si ragiona, onde a fondamento di tali investigazioni non vi è, come negli studî esaminati nelle pagine antecedenti, l'ipotesi che l'ente geometrico considerato sia algebrico.

La Geometria differenziale viene comunemente studiata col sussidio delle coordinate, ma può anche svolgersi indipendentemente da tale strumento. Essa ha diramazioni in ogni capitolo della geometria generale; per ciò penetra nella teoria delle curve piane quanto in quella delle curve gobbe e delle superficie, nè le è precluso l'adito nel dominio della geometria della retta e nel regno delle trasformazioni geometriche, come vedremo nei capitoli seguenti. All'analisi essa suggerì una miriade di problemi, la cui soluzione fu tormento e gloria di molti eminenti scienziati.

Scendendo ora a qualche maggiore particolare, osserveremo che la Geometria differenziale delle curve piane, non essendo in gran parte costituita che dalle più immediate applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, è conosciuta a chiunque abbia varcati i confini della matematica elementare, onde ci crediamo in diritto di non arrestarci a descriverne la struttura e di rimandare il lettore alle molte buone esposizioni che ne possediamo (1); ma alla planimetria differenziale appartengono eziandio le indagini assai più ardue intorno alle curve il cui arco si può esprimere col mezzo di funzioni di natura prestabilita (razionali, circolari, ellittiche, ecc.) (2), nonchè quelle che s'informano ai concetti esposti nel *Mémoire sur les courbes définies par une équa-*

---

(1) V. ad es.: Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris, 1873); G. Scheffers, *Einführung in die Theorie des Kurven in der Ebene und im Raume* (III ed:, Leipzig. 1923); ecc.

(2) Cfr. ad es.: Serret, *Mémoire sur les courbes algébriques dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle* (Journ. Éc. pol., 35ª cah., 1853); Allégret, *Mémoire sur la représentation des transcendants par des arcs de courbes* (Ann. Éc. norm. II, 2, 1873); ecc.

tion différentielle del Poincaré (Journ. de Math., III, 6 1881, e 7, 1882 (1); e noi stimiamo opportuno di escluderle dal nostro racconto perchè esse, nei mezzi e nel fine, si accostano piuttosto a quelle che somministrano agli analisti il loro quotidiano lavoro. Volgiamoci piuttosto a dir qualche cosa delle curve sghembe, per poi passare alle superficie.

2. Già due volte si è detto (Cap. I, n. 11 e Cap. IV, n. 1) come, ammessa la possibilità di far risalire ad un sol uomo la creazione di un' intera teoria, alle origini della dottrina delle curve sghembe sia forza associare il nome di Clairaut, il quale a tale teoria dedicò nel 1731 un eccellente lavoro. Questo celebre geometra fu seguito a qualche distanza da parecchi suoi valorosi conterranei di cui dobbiamo far qui menzione.

Primo fra questi è Monge, autore di un *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure* (Mém. Sav. Étr., 10, 1785) e di uno scritto posteriore intitolato *Des courbes à double courbure* (Journ. Éc. pol., 2, 1799). Incontriamo circa nella stessa epoca il Tinseau, il quale nella memoria intitolata *Solutions de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes* (Mém. Sav. Étr., 9, 1781) ha, fra l'altro, introdotte le fondamentali nozioni di « piano osculatore » di una linea gobba e di « sviluppabile osculatrice » di essa. Come terzo in ordine di tempo ci si presenta il Lancret (1774-1807), al quale siamo debitori di un *Mémoire sur les courbes à double courbure* (Mém. prés., 1, 1806) e di un *Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables* (Id., 2, 1811) (2) nelle quali vanno notati il concetto ed il nome di « piano rettificante », mentre il concetto ed il nome di « binormale » si apprendono dal *Mémoire sur les lignes courbes non planes* (Journ. Éc. pol., 30° cah., 1845) del Saint-Venant (1797-1886). Finalmente il nome di torsione sembra (v. E. Rath., *Über die Geschichte der Termes « Torsion »*; Bibl. math.; III, 5, 1904) dovuto al Vallée (1784-1864) che lo usò nel suo *Traité de géometrie descriptive* (Paris 1819) (3).

Un importante progresso nella teoria che ci occupa è rappresentato dalla

(1) V. anche Picard, *Traité d'analyse*, T. 3 (Paris, 1895), Chap. IX e X.

(2) Cfr.: Brioschi. *Intorno le sviluppoidi e le sviluppate* (Tortolini Ann., 4, 1853); Beltrami, *Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti* (Ann. di Mat., 4, 1861).

(3) Notiamo qui di passaggio che, per misurare la curvatura di una linea gobba in un suo punto, l'Olivier (1793-1853) suggerì l'uso di un'elica osculatrice (*Sur la courbure et la flexion d'une courbe à double courbure*, Journ. Éc. pol., 24° cah., 1835), mentre W. R. Hamilton sostenne doversi accordare la preferenza ad una cubica gobba avente colla data curva nel punto considerato un contatto di quint'ordine (*Elements of Quaternions*, Dublin, 1866).

scoperta delle espressioni delle derivate rispetto all'arco di una curva gobba dei nove coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale, in funzione, dei coseni stessi, dell'arco della curva, nonchè dei raggi di prima e seconda curvatura. A tali relazioni arrivarono, indipendentemente l'uno dall'altro, F. Frenet (v. la tesi, presentata per la laurea alla Facoltà delle Scienze di Tolosa il 10 luglio 1847, *Sur les courbes à double courbure*, ed inserita nel Jour. de Math., 17, 1852), e A. Serret, (*Mémoire sur quelques formules relatives à la théorie des courbes a double courbure*, Id., 16, 1851, a cui fa seguito il *Mémoire sur une classe d'équations différentielles qui se rattachent à la théorie des lignes à double courbure*, (Id., 18, 1853), epperò è giustizia chiamarle, come ora è costume, « formole di Frenet-Serret » (1).

Senza abbandonare la Francia, troviamo ancora fra i cultori della teoria che attualmente ci occupa Ossian Bonnet (1819-1892), che va qui ricordato per la *Note sur quelques propriétés des courbes gauches* (Nouv. Ann. 12, 1853) (2), il Bouquet (1819-1885) per la *Note sur la distance de deux tangentes infiniment voisines à une courbe gauche* (Ivi), ed il Bertrand pel *Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure* (Journ. de Math., 15, 1850), dal quale ultimo scritto, insieme ad altre cose, si apprende l'esistenza di una classe assai notevole di curve, (la cui ricerca fu suggerita dal Saint-Venant nella precitata memoria (3) e che sono caratterizzate dalla proprietà che le loro normali principali sono tali anche per una seconda curva; sono le così dette « curve di Bertrand »; esse godono anche della prerogativa che in ogni punto torsione $\frac{1}{r}$ e flessione $\frac{1}{\rho}$ sono legate da una relazione lineare, e di altre qualità che scoprirono O. Bonnet (*Sur la théorie générale des surfaces*, Journ. Éc. pol., 32ᵉ cah., 1848), A. Serret (*Sur un problème relatif aux courbes à double courbure*, Journ. de Math., 16, 1851; *Condition pour que les normales principales d'une courbe soient normales principales d'une seconde courbe*, C. R. 75, 1877), ed altri (4).

---

(1) Ad esse si riferiscono le seguenti note recenti: Stolz, *Zur Theorie Raumcurven* (Monatshefte, I, 1890); Pomey, *Démonstration des formules de Frenet* (Nouv. Ann., III, 9, 1890); Kneser, *Bemerkungen über die Frenet-Serret'schen Formeln und die analytische Unterscheidung rechts und links gewundenen Raumcurven* (Journ. f. Math., 113, 1893); Staude, *Ueber den Sinn der Windung in den singulären Puncten einer Raumcurve* (Am. Journ., 17, 1895).

(2) I teoremi ivi enunciati furono dimostrati dal Frenet nell'articolo intitolato *Théorèmes sur les courbes gauches* (Nouv. Ann., 12, 1853).

(3) Tale ricerca venne notevolmente generalizzata nella nota del Balitrand intitolata *Un problème sur le courbes gauches* (Mathésis, II, 4, 1894).

(4) Voizot, *Note sur la théorie des courbes à double courbure* (Journ. de Math., 15, 1850); Curtis, *Sur les Surfaces engendrées par les normales principales d'une courbe à double courbure*

Analogo al problema di Saint-Venant è quello che consiste nella ricerca di una curva tale che le sue normali principali siano binormali di un'altra curva; essa condusse nel 1877 A. Mannheim alla scoperta delle curve tali che in ogni loro punto le due curvature sono legate da una relazione della forma $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{c\rho}$, ove c è una costante (v. *Principes et developpement de géométrie cinématique*, Paris 1894). Insieme al lavoro del Domoulin (*Sur une classe particulière de courbes gauches*, Bull. S. M. F., 21, 1893), nel quale sono studiate le curve aventi la seguente equazione intrinseca $\frac{A}{r} + \frac{B}{r\rho} + \frac{C}{\rho^2} + \frac{D}{r^2} = 0$, queste ricerche preludono alla considerazione delle curve in cui curvatura e torsione sono legate da un'equazione quadratica fra le due curvature, delle quali terremo parola nel seguente Libro dell' opera presente.

Al Bertrand si deve anche un' elegante dimostrazione geometrica del teorema, scoperto dal Puiseux (v. l'articolo intitolato *Problème de géométrie,* Journ. de Math., 7, 1842), che dice: « una curva di cui sono costanti le due curvature è un'elica situata sopra un cilindro rotondo », nonchè la notevolissima generalizzazione di esso espressa dalla proposizione: « una curva per cui è costante il rapporto delle due curvature è un'elica tracciata sopra un cilindro » (v. la nota *Sur les courbes dont les deux courbures sont constantes,* Id., 8, 1843) (1).

In Germania la geometria infinitesimale delle curve gobbe attirò su di sè l' attenzione di Jacobi, che dedicò ad essa l'articolo *Zur Theorie der Curven* (Journ. f. Math., 14, 1835) e la *Note de erroribus quibusdam geometricis, qui in theoria functionum leguntur* (Id., 16, 1837) (2); in tempi più prossimi a noi se ne occupò con perseveranza e ottimo successo R. Hoppe (1816-1900) (3)

(Id., II, 1, 1856); Nievenglowski, *Note sur les courbes qui ont les mêmes normales principales* C. R. 75, 1877); Fais, *Nota intorno alle curve gobbe aventi le stesse normali principali* (Bologna Mem. (III, 8, 1877) e *Intorno ad alcune proprietà delle curve gobbe aventi le stesse normali principali* (Id., 9, 1878); Rouquet, *Application des formules générales de la théorie des courbes gauches à l'étude des courbes de M. Bertrand* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, IX, 4, 1892); Cesàro, *Sulle curve di Bertrand* (Riv. di Mat. 2, 1892) e *Nouvelle propriété caractéristique des courbes de Bertrand* (Mathésis, II, 4, 1894).

Ad una classe speciale di curve di Bertrand è consacrata la nota di H. Molins, *Sur une famille de courbes gauches dont la courbure et la torsion sont liées par une relation linéaire et dont les coordonnées s'expriment sous forme finie et explicite* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, IX, 6, 1894).

(1) Cfr. anche la prima delle note di Liouville alla 5ª ed. (Paris, 1850) dell' *Application de l'Analyse à la Géométrie par Monge*, e l'articolo dello Zeuthen, *Vindskjove Kurver med konstant Forhold mellem Krumningsradius og Torsionsradius* (Tidsskrift, III, 5. 1875).

(2) L' errore ivi corretto fu commesso da Lagrange nella sua *Théorie des fonctions analytiques* (Paris, 1813; pp. 248-249).

(3) E. Lampe, *Nachruf für R. Hoppe* (Arch. f. Math. III, 1, 1901).

del quale vanno anzitutto ricordati i lavori sulla « geometria intrinseca delle curve » (1), di cui i più antichi sono le note *Ueber die Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion* (Journ. f. Math., 60, 1862; 63, 1864), mentre i più recenti sono le memorie seguenti: *Ueber die Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs-und Torsionswinkel* (Arch. der Math., 65, 1880), *Rein analytische Consequenzen der Curventheorie* (Id., II, 2, 1885), *Zum Molins'schen Problem* (2) (Ivi), *Zur Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs und Torsionswinkel* (Id., 8, 1889), e *Zur Goursat'sche Reduction des Problems der Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs-und Torsionswinkel* (Id., II, 9, 1890 (3). Altre questioni furono trattate dallo stesso geometra nelle note: *Ueber die Bedingung unter welcher eine variabele Gerade Hauptnormale einer Curve sein kann* (Id., 63, 1879); *Das Aoust'sche Problem in der Curventheorie* (Id., 66, 1881); *Ueber ein Problem der Curventheorie* (Id., II, 1, 1884); *Erweiterung des Aoust'schen Problems der Curventheorie* (Id., 2, 1885) (4).

3. Fra gli altri scritti che concernono le proprietà infinitesimali delle curve gobbe vanno ancora ricordati i tre seguenti del Molins (1813-1898) (5): *Sur les trajectoires qui coupent sous un angle donné les tangentes à une courbe à double courbure* (Journ. de Math., 8, 1843), *Note sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface développable sur laquelle elles sont tracées* (Id., 12, 1847) e *De la surface développable passant par une courbe donnée quelconque, et qui, par son développement, transformerait cette courbe en un arc de cercle de rayon donné* (Id., II, 1, 1856); poi la *Deuxième note sur les courbes à double courbure* (Id., 17, 1852) del Voizot, la memoria del Curtis *Sur la surface engendrée par les normales principales d'une courbe à double courbure* (Journ. de Math., II, 1, 1856), la *Nota sopra due proposizioni di Navier intorno alla curvatura*

(1) Come è noto, sotto tal nome si comprende lo studio di una curva sghemba rappresentata da due equazioni fra l'arco e i due raggi di curvatura, equazioni che bastano a definirla completamente, a meno di movimenti dello spazio.

(2) Cfr. H. Molins, *De la détermination sous forme intégrale des courbes gauches dont le rayon de courbure et le rayon de la sphère osculatrice sont liés par une relation quelconque* (Journ. de Math., II, 19, 1874 e Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 5, 1883).

(3) Goursat, *Sur un problème relatif aux courbes à double courbure* (Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1, 1887).

(4) Questa e l'antiprecedente furono provocate dalla memoria dell'Aoust intitolata *Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles* (Bull. S. M. F., 7, 1879).

(5) V. Rouquet, *Eloge de M. Molins* (Toulouse Mém. X, 1, 1901).

delle linee a doppia curvatura (Ann. di Mat., 3, 1860) di F. Chiò (1813-1871) (1), l'articolo di U. Dini (1845-1918) (2) *Su alcune proprietà delle superficie gobbe delle normali principali di una curva* (Giorn. di Mat., 3, 1865), e quella del Beltrami che tratta *Di una proprietà delle linee a doppia curvatura* (Id., 5, 1867), i due scritti dell'Aoust *Sur l'analyse des courbes rapportées à un système quelconque de coordonnées* (Ann. Éc. norm., 6, 1869) e *Intégrales des équations différentielles des courbes qui ont une même surface polaire* (Ann. di Mat., II, 7, 1875), la *Détermination des éléments infinitésimaux relatifs aux lignes à double courbure* (Nouv. Ann., II, 12, 1873) di A. de Saint-Germain (1839-1914), la *Note sur la transformation des courbes* del Niewenglowski (Ann. Éc. norm., II, 2, 1873), le osservazioni del Mannheim destinate a mostrare l'utilità *De l' emploi de la courbe représentative de la surface des normales principales d' une courbe gauche pour la démonstration de propriétés relatives à cette courbe* (C. R., 86, 1878), la nota di A. Enneper (1830 - 1885), *Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung* (Götting. Nachr., 1881, e Math. Ann., 19, 1881), quella del Pellet, *Sur les normales aux courbes* (C. R., 104, 1887), quella del Ciani intorno a *Le superficie rigate inerenti a una linea a doppia curvatura* (Giorn. di Mat., 27, 1889), quella di V. Rouquet intitolata *Formules générales de la théorie des courbes gauches. Applications* (Mém. de l' Acad. de Toulouse, IX, 3, 1891), da ultimo gli studî di G. Pirondini (1857 - 1914) *Sulla determinazione delle linee di cui il rapporto dalla curvatura alla torsione è una funzione nota dell' arco* (Ann. di Mat., II, 19, 1881), *Sulla costruzione delle linee dello spazio* (Napoli Rend., II, 3, 1889), e *Sur la détermination des lignes dont le rapport de la courbure à la torsion est une fonction donnée de l' arc* (Journ. f. Math., 109, 1892).

In particolare al luogo dei centri di curvatura di una curva sghemba si riferiscono le memorie seguenti: J. Möller, *Ueber den Ort des Krümmungskreiscentrums einer Raumcurve* (Lund Univ. Acta, 21, 1884-85); H. Molins, *Sur quelques nouvelles propriétés du lieu des centres de courbure des courbes gauches* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 10, 1888); Pirondini, *Sul problema di trovare la curva di cui è noto il luogo dei centri di curvatura* (Ann. di Mat., II, 17, 1889); P. Adam, *Sur le lieu des centres de courbure d'une courbe gauche et sur les courbes gauches à courbure constante* (Nouv. Ann., III, 10, 1891).

Delle sfere osculatrici si occuparono il Lecornu *(Distance d' un point*

---

(1) Da questo scritto sono corrette due proposizioni che si leggono nel postumo *Résumé des leçons d' analyse données à l' Ecole polytechnique* (Paris, 1843) di C. L. M. H. Navier (1785-1836).

(2) L. Bianchi, *Commemorazione di U. Dini* (Ann. Univ. Toscane 8, 1923), G. Loria, *Gli scienziati italiani*, T. I (Roma, 1923).

d'une courbe gauche à la sphère osculatrice d'un point infiniment voisin, C. R., 100, 1885), Ph. Gilbert (1832-1892) (*Sur quelques formules de la théorie des courbes gauches*, Id., 101, 1885), e V. Jamet (*Sur la théorie des sphères osculatrices à une courbe*, Toulouse Ann., 4, 1890).

Alcune interessanti questioni di geometria analitica relative alle curve nello spazio diedero materia alle note del Painvin intitolate: *Détermination des plans osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche* (Ann. di Mat., II, 4, 1871; cfr. C. R., 68, 1869) e *Détermination des élements de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles* (Journ. de Math., II, 17, 1872; cfr. C. R., 71, 1870).

Una notevole proprietà metrica delle curve gobbe (1) venne enunciata dal Craig nella nota dal titolo *A geometrical Theorem* (Hopkins Circ., 1882) e dimostrata, dopo averne limitata la portata, dall'Hoppe (*Bemerkung zu einem Satze von Craig*, Arch. der Math., II, 2, 1885).

Importanza non minore possiede la *Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verknüpft sind* fatta dal Lie (Christiania Versl., 1882), geometra al quale son dovuti altri importanti progressi che la geometria infinitesimale delle curve gobbe ha compiuti mediante l'applicazione ad essa della teoria dei gruppi di trasformazioni, come ora indicheremo brevemente. Il Lie si propose la ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti per eguaglianza di due curve date ad arbitrio nello spazio (2), e trovò che, detti s la lunghezza dell'arco e r, ρ i raggi di flessione e torsione di una curva sghemba, supposto che non tutte le tangenti di questa incontrino il cerchio immaginario all'infinito (3), per l'eguaglianza di due linee gobbe è necessario che entrambe siano rette, oppure soddisfacciano una delle tre coppie di relazioni seguenti:

$$r = \text{cost.},\ \frac{d\rho}{ds} = f(\tau) \quad \text{ove} \quad \rho \gtrless \text{cost.}\ ;$$

$$\frac{dr}{ds} = f(r),\quad \rho = \psi(r) \quad \text{ove} \quad r \gtrless \text{cost.}\ ;$$

$$r = \text{cost.},\qquad \rho = \text{cost.}$$

Il caso escluso ha indotto il Lie a colmare una lacuna che esiste nell'ordinaria teoria della curvatura delle linee gobbe, collo stabilire le formole di geo-

(1) « Se dal centro di una sfera si conducono le parallele alle normali principali di una curva chiusa, il luogo dei loro estremi divide la superficie della sfera in due parti fra loro equivalenti ».

(2) Un problema analogo esiste nella teoria delle superficie, la soluzione del quale fu schizzata dal Lie. Di tali importanti questioni è agevole prendere esatta notizia ricorrendo all'opera: Sophus Lie, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, bearb. und herausgeg. von G. Scheffers* (Leipzig, 1893).

(3) In tal caso si avrebbero le « curve di lunghezza nulla ».

metria differenziale applicabili alle curve di lunghezza nulla, formole di cui egli si è poi servito per determinare le condizioni di eguaglianza di due fra tali curve.

Oltre alle eliche, alle curve di Bertrand e ad altre curve di cui incidentalmente parlammo nelle pagine precedenti, parecchie curve a doppia curvatura particolari fissarono l' attenzione dei geometri. Ad es.: le lossodromie su una superficie qualunque (v. C. Dina, *Sopra una curva particolare giacente su una superficie generale*, Giorn. di Mat., 19, 1881) o sopra un cono (A. Enneper, *Ueber die Lossodromen der Kegelflächen*, Götting. Nachr., 1869 e Zeitschr. f. Math., 15, 1870), e le curve a torsione costante (G. Koenigs, *Sur la forme des courbes à torsion constante*, Toulouse, Ann., 1, 1887; Lyon, *Sur les courbes à torsion constante*, *Thèse*, Paris, 1890; Fouché, *Sur les courbes algébriques à torsion constante*, C. R., 113 e 114, 1892, e Ann. Éc. norm., III, 7, 1890; E. Fabry, *Sur les courbes algébriques à torsion constante*. C. R., 113 e 114, 1892, e Ann. Éc. norm., III, 9, 1892 (1)). Si aggiungano a queste le curve a cui sono consacrati i seguenti scritti: Hazzidakis, *Ueber die Curven, welche sich so bewegen können, dass sie stets geodätische Linien der von ihnen erzeugten Flächen bleiben* (Journ. f. Math., 95, 1883); Molins, *Sur les courbes gauches dont le rayon de torsion et le rayon de la sphère osculatrice sont dans un rapport constant* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 6, 1884); E. Cesàro (1859-1906) (2), *A proposito di un problema sulle eliche* (Giorn. di Mat., 24, 1886); Pirondini, *Sulle linee a doppia curvatura* (Id., 26, 1888); Venske, *Behandlung einiger Aufgaben der Variationsrechnung welche sich auf Raumcurven constanter erster Krümmung beziehen* (Diss. Göttingen, 1891); P. Stäckel (1862-1919) (3), *Ueber algebraisch rectificirbare Raumcurven* (Math. Ann., 43, 1893) e *Ueber algebraischen Raumcurven* (Id., 45, 1894).

Rileveremo da ultimo che della teoria che ci occupa possediamo parecchie buone esposizioni speciali (senza contare quelle che si trovano nei trattati di geometria analitica dello spazio), fatte con o senza il sussidio delle coordinate. Vanno ricordate — oltre quella che si legge nella prima delle Note di cui Liouville corredò la sua edizione della grande opera di Monge (cfr. n. seg.) — particolarmente le seguenti: W. Schell (1826 - 1904) (4), *Allgemeine Theorie der*

---

(1) È ivi risposto affermativamente alla questione se esistano delle curve algebriche reali a torsione costante.

Delle curve a torsione costante tratta anche la nota del Cosserat citata in fine del n. 9 di questo Cap.

(2) P. del Pezzo, *Ernesto Cesàro* (Napoli, Rend. III, 12, 1906).

(3) O. Perron, *Paul Stäckel*, (Heidelberg Akad. Sitzber. 1920).

(4) J. Lüroth, *Wilhelm Schell* (Deutschr. Math. Ver., 14, 1905).

Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung (Leipzig, 1859; III ed. per cura di E. Salkonski, id. 1914); P. Serret, *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure* (Paris, 1860); H. Laurent, *Théorie des courbes gauches* (Ann. Éc. norm., II, 1, 1872); R. Hoppe, *Principien der analytischen Curventheorie* (Arch. der Math., 56, 1874; v. anche Id., 60, 1877); Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes de l'espace* (Paris, 1876); E. Catalan, *Théorie analytique des lignes a double courbure* (Mém. la Soc. roy. des Sciences de Liège, 6, 1878).

4. Abbandoneremo ora le figure ad una dimensione per rendere conto dello stato attuale delle nostre cognizioni intorno alle proprietà infinitesimali delle superficie; le relazioni geometriche che ora passiamo a descrivere, a differenza di quelle esposte nel Cap. III, esulano dal campo della geometria projettiva, nè vi si possono ricondurre applicando quella nota considerazione (v. Cap. X, n. 8) che fa apparire le proprietà metriche come casi particolari delle descrittive e ciò perchè — per dirla con le parole di F. Klein (1) — il gruppo di trasformazioni proprio alla geometria differenziale non ha nulla di comune con quello che caratterizza la geometria projettiva.

Un capitolo importantissimo della disciplina a cui ora ci volgiamo è opera di Eulero e Meusnier; alludiamo alla teoria della curvatura delle superficie su cui questi geometri scrissero due fondamentali memorie, entrambe intitolate *Recherches sur la courbure des surfaces*, e di cui una venne stampata nei Mém. de Berlin (16, 1760) (2), mentre la seconda fu letta all'Accademia di Parigi nelle sedute del 14 e 21 febbraio 1776 e inserita nella raccolta dei Sav. Étr. (10, 1785). Ma la nascita della geometria differenziale si può far datare dalla pubblicazione del classico libro di Monge: *Application de l'analyse à la géométrie* (3); e siccome in seguito lo scritto che più potentemente contribuì allo sviluppo di essa fu quello di Gauss intitolato *Disquisitiones generales circa*

---

(1) Si veggano le celebri *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen 1872, oppure Math. Ann., 43, 1893).

(2) Ivi è, fra l'altro, dimostrato erroneo il ritenere che in ogni punto di qualsiasi superficie esista una sfera osculatrice.

(3) Fu pubblicato col titolo sopraindicato nel 1807 e nel 1809; ma prima era stato in parte stampato (1795 e 1801) col titolo *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*. La migliore edizione che se ne possiede è quella che il Liouville curò nel 1850, corredandola di numerose note.

L'importanza delle indagini di Monge fu riconosciuta anche da Lagrange, di cui passarono alla storia le parole: « Avec son application de l'analyse à la représentation des surfaces, ce diable d'homme sera immortel! ».

superficies curvas (1), così ci sembra conveniente assumere come piano della nostra esposizione l'ordinamento di materie preferito dai due sommi geometri testè citati, indicando dapprima quello che essi scrissero sui vari argomenti di cui si occuparono e poi le aggiunte fatte dai geometri che ne calcarono le orme.

5. Chi apre oggi il grande trattato di Monge si trova dinnanzi un primo § privo di grande interesse, ma che è un'indispensabile preparazione a quanto segue, avendo per argomento la determinazione mediante il calcolo delle rette normali e dei piani tangenti ad una superficie qualsivoglia. Più importanti sono i quattro §§ successivi i quali sono dedicati ordinatamente alle superficie coniche, alle cilindriche, a quelle di rivoluzione (2) ed alle rigate che (per dirla in linguaggio moderno) sono contenute in una congruenza lineare avente una direttrice all'infinito. Più notevole è il § VI, giacchè ivi Monge, nel trattare delle superficie inviluppi (3) e nel considerarne le coppie, le terne o le quaterne di inviluppanti consecutive, introduce le nozioni fondamentali di « caratteristica », di « spigolo di regresso » e di « punti stazionari » d'un inviluppo. Si collegano a questo § i tre successivi i quali concernono ordinatamente le superficie tubulari (inviluppo di una sfera di raggio costante il cui centro percorre una curva piana) (§ VII), le superficie aventi per linee di massima pendenza su un piano dato delle rette d'inclinazione costante sul piano stesso (§ VIII) ed infine l'inviluppo di una superficie dotata di un moto di traslazione tale che un punto ad essa invariabilmente connesso scorra sopra una linea data (§ IX) (4).

A partire da questo punto dell'opera di Monge, la teoria delle equazioni

---

(1) Presentata alla Società delle Scienze di Gottinga l'8 ottobre 1827 ed inserita nel t. 6 delle *Commentationes recentiores Societatis Gottingensis*; riprodotta poi in *Gauss Werke*, 4 (Göttingen, 1873) ed in appendice all'edizione di Monge fatta da Liouville. Si connettono ad essa le *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* inserite nel volume testè citato delle Opere di Gauss.

Una traduzione francese di questa memoria si legge in Nouv. Ann., 11 (1852) ed una tedesca, di A. Wangerin, forma il volume degli « Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften » intitolato *Allgemeine Flächentheorie* (Leipzig, 1889).

(2) Queste tre famiglie di superficie soddisfanno una condizione comune che l'Enneper ha stabilito nella nota *Ueber ein geometrisches Problem* (Götting. Nachr., 1874).

(3) Cfr. Enneper, *Bemerkungen über die Enveloppe einer Fläche* (Math Ann., 5, 1872).

(4) Se $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $z = \zeta(t)$ sono le espressioni parametriche delle coordinate dei punti di questa e $F(x, y, z) = 0$ l'equazione della superficie mobile in una sua posizione, la superficie cercata ha per inviluppante quella di cui

$$F(x + \xi(t),\ y + \eta(t),\ z + \zeta(t)) = 0$$

è l'equazione.

a derivate parziali entra in scena per recitare la parte importante che questo grande matematico le assegnò nella geometria analitica superiore; da questo istante si scorge come in un gran numero di casi per caratterizzare la natura intima di una famiglia di superficie sia assai più conveniente il considerarne l'equazione differenziale che l'equazione in termini finiti. Esempî capaci di mostrare la verità di tale osservazione sono a dovizia offerti dalle rigate contenute in un complesso lineare speciale coll'asse all'infinito o a distanza finita (§§ X e XI), altri dalle sviluppabili (§ XII), dall'inviluppo definito da Monge nel precedente § IX (§ XIII) e dal luogo (superficie di traslazione) di una curva mobile che scorre con un suo punto sopra una curva fissa (§ XIV) (1).

A nuove classi di superficie ancor più degne di studio guida la considerazione del modo in cui sono distribuite nello spazio le normali di una superficie e la conseguente introduzione delle linee di curvatura; l'una e l'altra sono fatte conoscere nel § XV, il quale è fra i più importanti di tutta l'opera di Monge; il caso particolare notevole dell'ellissoide dà materia al § successivo nel quale sono riesposti alcuni risultati che Monge aveva fatto già conoscere altrove (cfr. Cap. III, n. 6 (2)). Numerose e importanti sono le questioni cui dà luogo la nozione di raggi principali di curvatura di una superficie in un punto e di linee di curvatura. Si può ad es. cercare come siano generabili le superficie di cui le linee di curvatura d'un sistema stanno tutte in piani di data giacitura (§ XVII). Si può poi chiedere per quali superficie accada che uno dei raggi di curvatura è costante; a tale domanda rispose Monge (§ XVIII) dimostrando che una superficie dotata di tale proprietà è generabile nel modo indicato dai §§ IX e XIII della sua opera. Se i due raggi di curvatura sono fra loro eguali e diretti nello stesso senso, la superficie è sferica (§ XIX); se invece sono fra loro eguali, ma in direzioni opposte, le superficie hanno la proprietà (3) di essere d'area minima (§ XX) (4). Se poi uno dei raggi

---

(1) Il Lie trovò probabilmente qui lo stimolo alle ricerche che lo condussero alla *Bestimmung aller Flächen die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden* (Arch. for Math. og Nat., 7, 1882).

Riguardo alle superficie suddette si consulti anche l'importante lavoro del Mainardi, *Sulle superficie generabili dal movimento di una linea piana qualunque* (Mem. Soc. XL, 20, 1830; cfr. la nota dello stesso autore, *Su la teoria delle curve*, Tortolini, Ann., 5, 1854).

(2) Sullo stesso argomento si vegga la nota del Cayley, *On a Class of Differential Equations, and on the Lines of Curvature of an Ellipsoid* (Cambridge Journ., 3, 1843).

(3) V. Lagrange, *Essai sur une nouvelle méthode pour déterminer les fonctions, maxima et minima des formules intégrales indéfinies* (Miscellanea Taurinensia, 2, 1760-61), e Meunier, citate *Recherches sur la courbure des surfaces*.

(4) È nel suo *Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles* (Mém. de

di curvatura in ogni punto è infinito, la superficie è rigata (§ XXI) (1).

Alla teoria della curvatura delle superficie si collegano le ricerche di Monge sulle superficie tubulari a direttrice qualunque (§§ XXII e XXVI; v. anche Hoppe, *Bedingung einer Kanalfläche nebst einigen Bemerkungen an Kanalflächen*, Arch. der Math., II, 1, 1884), nonchè su quelle le cui normali toccano una data sfera (§ XXIII), un dato cono (§ XXIV) o una data sviluppabile (§ XXV); sono queste le prime indagini intorno alla determinazione di una superficie di cui si conosca una falda della superficie dei centri di curvatura, indagini che furono in tempi recenti validamente proseguite da J. Weingarten (1836-1910) (2) (*Ueber die Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren*, Journ. f. Math., 62, 1863), dall'Enneper (*Ueber die Flächen, welche gegebenen Flächen der Krümmungsmittelpunkte entsprechen*, Götting. Nachr., 1872), dall'Hoppe (*Abwickelbare Mittelpunktsflächen*, Arch. der Math., 63, 1879 *Bestimmung einer Fläche durch die eine ihrer Mittelpunktsflächen*, Id., 68, 1882), dall'August (*Ueber Flächen mit gegebene Mittelpunktsfläche und über Krümmungsverwandschaft*, Ivi), e dal Rudio (*Zur Theorie der Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confocalen Flächen zweiten Grades sind*, Jour. f. Math., 95, 1883).

Notiamo finalmente che per tutte le anzidette famiglie di superficie Monge trovò le equazioni generali, tanto differenziali quanto in termini finiti; siccome egli insegnò a risalire da quelle a queste, così la grande opera di cui ci stiamo occupando merita uno studio approfondito anche dai cultori dell'analisi infinitesimale; che i geometri puri debbano occuparsene è dimostrato, a tacer d'altro, dalle eleganti costruzioni che Monge scoprì per molte delle famiglie di superficie dianzi definite.

6. Colui che, più di qualunque altro, può aspirare al nome di continuatore dell'opera geometrico-analitica di Monge è Carlo Dupin, al quale siamo debitori di due lavori magistrali su cui è per noi un dovere e un piacere l'arrestarci qualche momento.

Il primo porta il titolo modesto *Développements de géométrie* (Paris, 1813), ma ha lo scopo non modesto di trattare tanto analiticamente quanto geome-

---

l'Acad. des Sc., Paris, 1784) che Monge studiò per la prima volta le superficie di area minima e l'integrazione della equazione differenziale scoperta da Lagrange che le caratterizza.

Alcuni lievi errori in essa contenuti furono corretti, coll'aiuto di Monge stesso, dal Legendre nel *Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux dérivées partielles* (Id., 1787).

(1) Cfr. O. Rodrigues, *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces* (Corr. Éc. pol. 3, 1815).

(2) S. Jolles, *Julius Weingarten* (Sitz. Berl. math. Ges. 10, 1911).

tricamente tutte le questioni relative alla teoria della curvatura delle superficie; esso consta di cinque memorie distinte, ma fra loro coordinate, di cui la prima e la quarta sono di geometria pura, le altre di geometria analitica. La prima, dopo molte ricerche sull' osculazione e sulla curvatura delle superficie e delle loro sezioni, fa conoscere gli elementi della teoria affatto originale delle « tangenti conjugate » (1), teoria che viene poi svolta nelle due memorie successive, nell' ultima delle quali incontrasi per la prima volta l' « indicatrice » a cui Dupin legò il proprio nome (2). La quarta memoria concerne la « curvatura considerata in tutta l'estensione di una superficie », e nella quinta si trova una teoria delle trajettorie ortogonali applicate alla determinazione delle linee di curvatura. A Dupin siamo ancora debitori della nozione di « linee asintotiche » e delle prime ricerche su queste notevoli linee, a cui in seguito molti geometri consacrarono delle ricerche importanti (3) e che suggerirono la considerazione sopra ogni superficie di altre linee, da un certo punto di vista analoghe (4). Da ultimo (*dulcis in fundo!*) dall' opera di Dupin si apprende

---

(1) Una generalizzazione del teorema di Dupin sulle tangenti coniugate è esposta nell' articolo di E. von Weber, *Theorie der Flächenelemente höherer Ordnung des Raumes von 3 Dimensionen* (Math. Ann., 44, 1894).

(2) Cfr. E. Barbier, *Sur une généralisation de l'indicatrice de Ch. Dupin* (C. R., 105, 1887).

(3) Ricorderemo qui quelle generali dell' Enneper (*Ueber asymptotische Linien*, Götting. Nachr. 1870; *Weitere Bemerkungen über asymptotische Linien*, Id., 1871), del Lelieuvre (*Sur les lignes de courbure et les lignes asymptotiques des surfaces*, C. R., 106, 1888; Bull. S. M. F., 16, 1888) e del Koenigs (*Sur les réseaux plans à invariants égaux et les lignes asymptotiques*, C. R., 114, 1892), e quelle speciali dell' Hoppe (*Zweite asymptotische Linie einer Regelfläche*, Arch. der Math., 60, 1877), dell' Halphen (*Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes*, Bull. S. M. F., 5, 1877), del Bioche, *Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces gauches* (Toulouse, Ann., 2, 1888), e di H. Maschke (*Asymptotic Lines on a Circular Ring*, Bull. of the American Math. Soc., II, 1, 1895).

(4) Tali sono quelle di cui si occupò per la prima volta il Darboux nella nota intitolata *Les courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface* (C. R., 73, 1871) e studiate poi dall' Enneper (*Bemerkungen über die Differentialgleichung einer Art von Curven auf Flächen*, Götting. Nachr., 1871), e dal Cosserat (*Sur les courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface*, C. R., 121, 1895). Tali quelle, esistenti soltanto nelle regioni a curvatura positiva, le cui tangenti fanno colle tangenti coniugate l' angolo minimo; preparate dalla nota di Hoppe, *Ueber das Minimum des Winkels zwischen zwei conjugierten Tangenten auf positivgekrümmter Fläche* (Arch. der Math., 69, 1882), esse vennero cominciate da E. Pucci (*Dell' angolo caratteristico e delle linee caratteristiche di una superficie*, Lincei Rend., IV, 5, 1889) e proseguite da V. Reina (1862-1919) (*Di alcune proprietà delle linee caratteristiche* (Ivi). Tali le « curve equidistanti » che vennero incontrate indipendemtemente dal Cèbycëf (*Sur la coupe des vêtements*, Ass. fr., Paris 1878) e dal Voss (*Ueber ein neues Princip der Abbildung krümmer Flachen*, Math. Ann., 19, 1881) e da quest' ultimo poi studiate nella nota *Ueber äquidistante Curvensysteme auf krummen Flachen* (Katalog der math. Austellung zu Nürnberg, München 1892).

l'importantissimo teorema: « le superficie di un sistema triplo ortogonale si tagliano nelle loro linee di curvatura », il quale, come vedremo, servì di punto di partenza a una folla di indagini sulle superficie e fu giudicato di tanto valore che molti eminenti geometri non credettero abbassarsi cercandone nuove dimostrazioni (1).

Di cinque memorie distinte si compone pure la seconda opera geometrica di Dupin (*Applications de géométrie et de méchanique à la marine, aux ponts et chaussées, etc., pour faire suite aux « Développements de géométrie »*. Paris, 1822); ma di esse una sola è di diretta pertinenza della geometria (2): è quella intitolata *Sur les routes suivies par la lumière et par les corps élastiques, en général, dans les phénomènes de la réflexion et de la réfraction* (3), e nella quale, fra l'altro, è fatto uno studio metodico della ciclide (cfr. Cap. III, n. 9), (essa è l'unica superficie — oltre la sfera, il cono ed il cilindro circolari — di cui tutte le linee di curvatura sono circolari) ed è insegnata una grande estensione di cui è suscettibile un importantissimo teorema del Malus (1755-1811) (4).

Per deficienza di spazio, non per avere esaurito quanto contengono di notevole le opere di Dupin, abbandoniamo questo egregio geometra e passiamo a dir qualche cosa intorno agli scritti che completarono questo o quel punto delle opere discorse nel n. precedente e nell'attuale.

7. Accorderemo il primo posto alle investigazioni concernenti le più semplici superficie speciali.

Fra le memorie intorno alle superficie di rotazione ci limiteremo a ricordare le seguenti: Enneper, *Ueber ein geometrisches Theorem* (Götting. Nachr., 1868); Résal, (1828-1896), *Sur la génération de la courbe méridienne d'une surface de révolution dont la courbure moyenne varie suivant une loi donnée*

(1) Fra essi citeremo qui il Cayley per la nota *A Demonstration of Dupin's Theorem* (Quart. Journ., 12, 1873) e O. v. Lichtenfels per l'articolo *Zum Beweise des Theorems von Dupin* (Monatschefte, 5, 1894).

(2) A mostrare però che anche le rimanenti non sono destituite di valore matematico, citeremo la nota di D. Codazzi, *Intorno ad alcuni teoremi di Dupin* (Tortolini, Ann., 8, 1857), nella quale sono dimostrate certe proposizioni della memoria *Sur la stabilité des corps flottants*.

(3) Cfr. Minding, *Neuer Ausdruck für die Hauptgesetz der Dioptrik* (Poggendorff Annalen, 70, 1847).

(4) Si vegga il *Mémoire sur l'optique* di questo celebre fisico, inserito nel Journ. Éc. pol., 14e cah., 1808. Mentre questi aveva dimostrato che i raggi di una stella riflettendosi sopra una superficie qualsivoglia si trasformano nelle normali a una superficie, Dupin osservò che le normali ad una superficie, dopo quante si vogliano riflessioni e rifrazioni, diventano normali ad un'altra superficie.

(C. R., 85, 1877); Molins, *De la détermination des surfaces de révolution, dont les trajectoires des méridiennes s us un angle constant ont pour perspective des spirales logarithmiques* (Mém. de l' Acad. de Toulouse, VIII, 7, 1885) e *De la détermination des surfaces de révolution ayant un même axe donné et qui sont coupées par une sphère donnée suivant une ligne géodésique* (Id., IX, 3, 1891); August, *Ueber Rotationsflächen mit loxodromische Verwandtschaft* (Zeitschr. f. Math., 33, 1888); Pirondini, *Sulla teoria delle superficie di rivoluzione* (Ann. di Mat., II, 18, 1890); E. Dolezwal, *Ueber Differentialgleichungen von Rotations-und Regelflächen* (Arch der Math., II, 14, 1895).

Più numerosi sono gli scritti intorno alle rigate (1), di cui ricorderemo quelli che seguono: Combescure, *Sur quelques problèmes relatifs aux surfaces réglées* (Journ. f. Math., 62, 1863); Dini, *Sopra alcune proprietà delle superficie rigate* (Giorn. di Mat., 3, 1865), *Sulle superficie gobbe che possono essere rappresentate da un' equazione data a derivate parziali del 2° ordine* (Id., 3, 1865, e 4, 1866) e *Sulle superficie gobbe applicabili a quelle di rivoluzione e su alcune proprietà delle superficie gobbe delle normali principali di una curva* (Id., 4, 1866); Catalan, *Recherches sur les surfaces gauches* (Belgique Mém., 18, 1866); A. Fais (1841 1924) (2) *Sulle principali proprietà delle trajettorie ortogonali delle generatrici delle superficie rigate* (Bologna Mem., IV, 1, 1880); Pirondini, *Studii geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe* (Giorn. di Mat., 23, 1885) e *Sulle superficie rigate* (Id., 25, 1887); Molins, *Sur les surfaces gauches dont la ligne de striction est plane et qui sont coupées sous le même angle par le plan de cette ligne* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 9, 1887); Koenigs, *Détermination sous forme explicite de toute surface réglée rapportée à ses lignes asymptotiques, et, en particulier, de toutes les surfaces réglées à lignes asymptotiques algébriques* (C. R., 106, 1888); Bioche, *Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement les génératrices d'une surface réglée* (Bull. Sc. math., II, 12, 1888), *Sur les surfaces gauches dont les lignes de courbure possèdent une propriété donnée* (Ivi) e *Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe et coupent sous un angle donné la développable des tangentes* (Ivi); L. Raffy (1855-1910), *Détermination des surfaces harmoniques réglées* (C. R., 110, 1890 (3));

---

(1) Le rigate costituiscono la più sémplice categoria delle superficie che il Lelieuvre ha considerate nella memoria *Sur les surfaces à génératrices rationnelles* (Ann. Éc. norm., III, 12, 1895).

(2) A. Fais, *Pagine autobiografiche* (Sassari, 1925).

(3) Questa nota prelude alle estese *Recherches sur les surfaces harmoniques* dello stesso geometra, delle quali tre sezioni apparvero in: Tolouse Ann., 1894; Journ. de Math., IV, 10, 1894; Ann. Éc. norm., III, 12, 1895.

R. Hoppe, *Zur Theorie der Regelflächen* (Arch. der Math., II, 9, 1892) e *Construction einer Regelfläche aus gegebener Strictionslinie* (Ivi).

Una esposizione delle proprietà delle superficie rigate si legge nell' opera di E. Goedseels, *Théorie des surfaces réglées* (Louvain, 1885); mentre in particolare delle sviluppabili trattarono: Molins, *Sur les lignes de courbure et les lignes géodésiques des surfaces développables dont les génératrices sont parallèles à celle d' une surface réglée quelconque* (Journ. de Math., II, 4, 1859); Mangoldt, *Ueber eine charakteristische Eigenschaft der developpablen Flächen* (Math. Ann., 19, 1881); Vivanti, *Sulle trasformazioni di contatto che trasformano qualunque sviluppabile in una sviluppabile* (Palermo Rend., 5, 1891), nota a cui serve di continuazione l' altra dal titolo *Un problema sulle trasformazioni di contatto* (Ivi).

Altri complementi degni di nota alle opere di Monge e di Dupin sono rappresentati dai risultati che ebbero le indagini sul modo di comportarsi delle linee di curvatura in un ombilico di A. Cayley (*On Differential Equations and Umbilici*, Phil. Mag., 24, 1863), W. R. Hamilton (*Elements of Quaternions*, London, 1866), Frost (*On the Direction of Lines of Curvature in the Neighbourhood of an Umbilici*, Quart. Journ., 10, 1869; v. Cayley, *Note on Mr. Frost Paper*, Id., 11, 1870). R. Hoppe (*Krümmungslinien in den Nabelpunkten von Flächen*, Arch. f. Math., 70, 1883) e Bioche (*Remarques sur les lignes de courbure qui passent par un ombilic*, Bull. S. M. F., 18, 1890 (1).

Presentano analogie con queste le osservazioni del Brioschi *Sulle linee di curvatura* (Tortolini Ann., 4, 1853), del Ribaucour (1845-1893) *Sur la théorie des lignes de courbure* (C. R., 74, 1872; v. anche *Note sur les développées des surfaces*, Ivi), le ricerche del Röthig, *Zur Theorie der Flächen* (Journ. f. Math., 85, 1878), del Knoblauch, *Ueber die Bedingung der Isometrie der Krümmungscurven* (Id., 103, 1888) e il *Teorema relativo alle linee di curvatura delle superficie e sue applicazioni* (Ann. di Mat., II, 16, 1888) del Pirondini; più speciali, ma dotate di non comune importanza, sono le note del Darboux aventi per iscopo la *Détermination des lignes de courbure d' une classe de surfaces et en particulier des surfaces tétraédriques de Lamé* (C. R., 84, 1877) e la *Détermination des lignes de courbure de toutes les surfaces de quatrième classe, corrélatives aux cyclides, qui ont le cercle à l' infini pour ligne double* (Id., 92, 1881).

Come continuazioni o derivazioni delle classiche opere di Monge e Dupin possono anche riguardarsi gli studî sulle superficie che sono divise in quadrati infinitesimi dalle loro linee di curvatura, i quali vennero inaugurati dal Cayley

(1) Cfr. Picard, *Traité d'analyse*, 3 (Paris, 1895), p. 225).

(*Sur les surfaces divisibles en carrés par leurs lignes de courbure et sur la théorie de Dupin*, C. R., 74, 1872; *On the Surfaces divisible into Squares by their Curves of Curvature*, Proc. L. M. S., 4, 1871 - 73) e continuati dal Weingarten (*Ueber die Differentialgleichungen der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden*, Berliner Ber., 1883) e dal Willgrod (*Ueber Flächen welche sich durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate teilen lassen*, Diss. Göttingen, 1883). Con tali investigazioni hanno qualche affinità quelle del Fibbi *Sulle superficie che, da un doppio sistema di traiettorie isogonali sotto un angolo costante delle linee di curvatura, sono divise in parallelogrammi infinitesimi equivalenti* (Lincei Rend., V, 4, 1895_1).

8. Altrettanto si può dire di quelle assai più antiche e numerose intorno alle superficie le cui linee di curvatura di un sistema o di entrambi sono piane o sferiche, ed i cui risultati più cospicui sono consegnati nelle memorie seguenti: A. Serret, *Mémoire sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques* (Journ. de Math., 18, 1853); O. Bonnet, *Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques* (Journ. Éc. pol., 35ᵉ cah., 1853); Joachimsthal, *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes* (Journ. f. Math., 54, 1857); Brioschi, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie a linee di curvatura piane o sferiche* (Tortolini Ann. 8, 1857); Picart, *Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques* (C. R., 46, 1858); Dini, *Sulle superficie che hanno le linee di curvatura piane* (Ann. di Mat., II, 1, 1867), *Sopra le superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche* (Mem. Soc. XL, III, 2, 1869) e *Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane* (Atti delle Univ. tosc., 1869 e 1871); Enneper, *Analytisch-geometrische Untersuchungen* (Götting. Nachr., 1868 (1)), *Ueber die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien*, (Id., 1872), *Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien* (Götting. Abh., 23 e 26, 1880) e *Ueber die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien* (Journ. f. Math., 94, 1883); Ribaucour, *Sur une propriété des surfaces enveloppes des sphères* (C. R., 67, 1868); Kretschner, *Beiträge zur Theorie der Flächen mit ebenen Krümmungslinien, welche gegebenen Bedingungen genügen* (Frankfurt a. O., 1871); A. Razzaboni (1855-1920) *Alcune proprietà delle superficie a linee di curvatura piane* (Bologna Mem., III, 10, 1879); Rouquet, *Étude géométrique des surfaces dont les lignes*

(1) Cfr. Bockwoldt, *Ueber die Enneper'schen Flächen mit constantem positivem Krümmungsmaas, bei denen die eine Schaar der Krümmunglinien von ebenen Curven gebildet wird* (Diss. Gottingen, 1878).

de courbure d' un système sont planes (Toulouse, 1882) e *Des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 9, 1887, e 10, 1888); E. Combescure, *Sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un système seulement* (Mém. de l'Acad. de Montpellier, 10, 1883); Dobriner, *Ueber die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien* (Journ. f. Math., 94, 1883); Voretzsch, *Untersuchung einer speciellen Fläche constanter mittlerer Krümmung, bei welcher die eine der beide Scharen der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet wird* (Diss. Göttingen, 1883); Lecornu, *Mémoire sur les surfaces enveloppes de sphères* (Journ. Éc. pol., 53° cah., 1883); Darboux, *Détermination d'une classe de surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes* (C. R., 96, oppure Bull. Sc. math., II, 8, 1883); Pirondini, *Sulle superficie le cui linee di curvatura di un sistema sono piane* (Giorn. di Mat., 22, 1884); Cayley, *On the Surfaces with Plane or Sperical Curves of Curvature* (Am. Journ., 11, 1888-89); Burnside, *On the Surfaces whose Lines of Curvature are all Plane* (Mess., II. 20, 1890); Caronnet, *Sur les surfaces dont les lignes de courbure d' un système sont planes et égales* (C. R., 117, 1893); Adam, *Sur les surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système ou dans les deux systèmes* (Ann. Éc. norm., III, 10, 1893); Blutel, *Sur les surfaces qui admettent un système de lignes de courbure sphériques et qui ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure* (C. R., 116, 1893). Queste ricerche costituiscono una sezione del gran problema di trovare le superficie aventi per linee di curvatura delle curve prestabilite, ad altre sezioni del quale sono preliminari importanti lo scritto del Petot *Sur les surfaces qui ont pour lignes de courbure d'un système des hélices tracées sur des cylindres quelconques* (C. R., 106, 1888), e quello di Luigi Bianchi (1856-1928) *Sulle superficie le cui linee assintotiche in un sistema sono curve a torsione costante* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1).

Di ordine analogo, ma più vaste, sono le importantissime indagini sulle superficie di cui i raggi di curvatura in ogni punto sono legati da una relazione; inaugurate da Weingarten colla memoria *Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des andern ist* (Journ. f. Math., 62, 1863), esse vennero proseguite dall' Halphen (*Théorème concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation*, Bull. S. M. F., 4, 1876), dal Lie (*Ueber Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind*, Arch. f. Math. og Nat., 4, 1879; *Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation*, Bull. Sc. Math., II, 4, 1880), dal Weingarten stesso (*Ueber eine Eigenschaft der Flächen bei denen der eine Hauptkrümmungsradius* *eine Function des anderen ist*, Journ. f. Math., 103, 1888), dal Raffy (*Sur certaines surfaces, dont les rayons de courbure sont liés par une relation*, Bull. S. M. F., 19, 1891), e, nel caso in cui la superficie è rigata, dal Beltrami (*Risoluzione di un problema relativo alla teoria delle superficie gobbe*, Ann. di Mat., 7, 1865) e dal Dini (*Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei due raggi di curvatura principale è una funzione dell' altro*, Ivi).

Rispetto a questa categoria d'investigazioni si può considerare come una sottoclasse quella costituita dagli studî sulle superficie a curvatura media costante, benchè alcuni di questi siano anteriori alla memoria di Weingarten, come risulta dall'elenco seguente: Delaunay, *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante* (Journ. de Math., 6, 1841); C. Sturm, *Note à l'occasion de l'article précédent* (Ivi); Jellet, *Sur la surface dont la courbure moyenne est constante* (Id., 18, 1853); Dini, *Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante* (Ann. di Mat., 7, 1865); Chini, *Sulle superficie a curvatura media costante* (Giorn. di Mat., 27, 1889; cfr. anche la nota dello stesso autore *Sopra una classe di superficie*, Ivi); Vivanti, *Sulle superficie a curvatura media costante* (Rend. Ist. Lomb., II, 28, 1895).

Lo stesso si può ripetere riguardo alle ricerche intorno alle superficie per cui è costante la differenza dei raggi di curvatura principali, dovute al Lipschitz (1832-1903) (1) (*Zur Theorie der krummen Oberflächen*, Acta, 10, 1887; *Sur les surfaces où la différence des rayons de courbure principaux en chaque point est constante*, C. R., 104, 1887) ed al Lilienthal (*Bemerkung über diejenigen Flächen, bei denen die Differenz der Hauptkrümmungen constant ist*, Acta, 11, 1888), e per quello di B. Calò, *Sulle evolute delle superficie i cui raggi principali di curvatura sono legati dalla relazione* $r_1 - r_2 = 2T_o \operatorname{sen}\left(\frac{r_1+r_2}{2T_o}\right)$ ($T_o = \text{cost.}^e$) *e sulle loro flessioni* (Ann. di Mat., II, 21, 1893).

9. Anche le superficie di area minima sono comprese come casi particolari fra quelle i cui raggi di curvatura sono legati da una relazione; ma la fedeltà storica impone di considerare le memorie che ad esse si riferiscono piuttosto come complementi al § 20 delle *Applications* di Monge. Tali memorie costituiscono una collezione assai ricca e variopinta; lo Schwarz — che, come vedremo, è uno di coloro a cui maggiormente si deve se la teoria delle superficie in discorso ha raggiunto oggi una perfezione tanto considerevole (2)

(1) H. Kortum, *Rudolf Lipschitz* (Deutsch. M. V., 15, 1906).

(2) I lavori dello Schwarz sulle superficie d'area minima sono riunite nel t. 1 delle sue *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 1 (Berlin, 1890).

ne ha compilato un catalogo completo che deve trovarsi fra le carte da lui redatte. Noi ci limiteremo a segnalare qui le più cospicue pubblicazioni sull'argomento, accordando il primo posto a quelle relative alle proprietà generali di esse e che sono: Poisson, *Note sur la surface dont l'aire est un minimum entre des limites données* (Journ. f. Math., 8, 1832); Scherk, *Bemerkung über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen* (Id., 13, 1835); Steiner, *Ueber parallele Flächen* (Berliner Ber., 1840); E. G. Björling, *In integrationem aequationis derivatarum partialium superficiei, cujus in puncto unoquoque principalis ambo radii curvedinis aequales sunt signoque contrario* (Arch. der Math., 4, 1844); Bonnet, *Note sur la théorie générale des surfaces* (C. R., 37, 1853); Catalan, *Sur les surfaces dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires* (Id., 41, 1855) e *Mémoire sur les surfaces dont les rayons de courbure en chaque point sont égaux et des signes contraires* (Journ. Éc. pol., 37° cah., 1858); Mathet, *Solution d'un problème de géométrie* e *Étude sur un certain mode de génération des surfaces d'étendue minimum* (Journ. de Math., II, 8, 1863); Enneper, *Analytisch geometrische Untersuchungen* (Zeitschr. f. Math., 9, 1864); Weierstrass, *Untersuchungen über die Flächen in denen die mittlere Krümmung überall gleich 0 ist* (Berliner Ber., 1866) (1); Riemann, *Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung* (Götting. Abh., 13, 1867 (2)); Christoffel (1829 - 1900) (3) *Ueber einige allgemeine Eigenschaften des Minimumflächen* (Journ. f. Math., 62, 1867); Beltrami, *Sulla teoria generale delle superficie d'area minima* (Bologna Mem., II, 7, 1868 (4)); Schwarz, *Beitrag zur Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhalts von Minimalflächenstücken in Allgemeinen und von Theilen der Schraubenfläche im Besonderen* (Berliner Ber., 1872), *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* (Journ. f. Math., 80, 1875) e *Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung* (Acta Societatis Fennicae, 15, 1885); Ribaucour, *Étude des classoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* (Belgique Mém., 44, 1881); L. Bianchi (1856-1928), *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie ad area minima* (Giorn. di Mat., 22, 1884); Pincherle, *Sopra alcuni problemi relativi alle superficie d'area minima* (Rend. Ist. Lomb., II, 19, 1886); Kiepert, *Ueber Minimalflä-*

---

(1) È questo uno dei più importanti lavori sulle superficie di cui trattiamo, essendo ivi indicata la loro connessione con le funzioni di una variabile complessa.

(2) Cfr. Niewenglowski, *Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minimes de contour donné* (Ann. Éc. norm., II, 9, 1880).

(3) C. F. Geiser e L. Maurer, *Elwin Bruno Christoffel* (Math. Ann. 54, 1901).

(4) Questo scritto si apre con una magistrale notizia storica sulle ricerche più antiche intorno alle superficie di area minima.

chen (Journ. f. Math., 82, 1887 e 85, 1888); Goursat, *Sur un mode de transformation des surfaces minima* (Acta, 11, 1888); P. Paci, *Sopra le superficie minima* (Torino Atti, 29, 1893-94); A Demoulin, *Note sur une déformation des surfaces de révolution* (Belgique Bull., III, 29, 1895). Riguardo a questi scritti ci limiteremo a notare che alcuni misero in luce ed altri svilupparono la connessione che esiste fra la teoria delle superficie d'area minima, quella delle funzioni di una variabile complessa e quella della rappresentazione conforme di un'area sopra un'altra.

Fra le superficie di cui ragioniamo, furono in particolare studiate quelle rigate, e Catalan dimostrò (nella nota *Sur les surfaces réglées dont l'aire est minimum*, Journ. de Math., 7, 1842) che l'elicoide a piano direttore è l'unica superficie rigata in ogni punto della quale la curvatura media è nulla: risultato importante che venne poi confermato dal Wantzel in una nota presentata l'11 febbraio 1843 alla Société Philomatique di Parigi, da M. Roberts (*Sur les surfaces dont les rayons de courbure sont égaux, mais dirigés en sens opposés*, Journ. f. Math., 11, 1846) e da A. Serret (*Sur la surface réglée dont les rayons de courbure sont égaux et dirigés en sens contraires*, Ivi).

Un'altra importantissima classe di superficie minime è costituita da quelle algebriche; di esse trattano le memorie seguenti: Geiser, *Note über die algebraischen Minimumsflächen* (Math. Ann., 3, 1871); Henneberg, *Bestimmung der niedrigsten Classenzahl der algebraischen Minimalflächen* (Ann. di Mat., II, 9, 1878); Lie, *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen* (Math. Ann., 14 e 15, 1879; C. Schilling, *Die Minimalfläche 5. Classe* (Diss. Göttingen, 1880); R. Sturm, *Reingeometrische Untersuchungen über algebraischen Minimalflächen* (Journ. f. Math., 105, 1889).

Alla determinazione sperimentale delle superficie d'area minima limitate da un dato contorno si riferiscono le celebri esperienze di Plateau (1801-1883) (1), le quali insegnarono a determinare praticamente, mediante una soluzione di glicerina, le superficie minime di dato contorno. Alla determinazione teorica di esse molti importanti scritti, fra i quali spiccano i seguenti dello Schwarz (2): *Ueber die Minimalflächen deren Begrenzung als ein vón vier Kanten eines regulären Tetraeders gebildetes räumliches Vierset gegeben ist* (Berliner Ber., 1865), *Bestimmung einer speciellen Minimalflächen* (Berlin, 1867), *Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen* (3) (Berliner Ber.,

(1) V.: *Statique expérimentale et théorique des liquides* (Gand et Leipzig, 1873).

(2) Tutti gli scritti dello Schwarz relativi alle superficie minime trovansi riuniti nel T. I delle sue *Gesammelte Abhandlungen* (Berlin, 1890).

(3) Ivi è esposta la soluzione completa del problema seguente enunciato da Gergonne nel 1816 (Ann. de Math., 7): « Tagliare un cubo in due parti per modo che la sezione sia limitata da due diagonali opposte e sia di area minima ».

1872), *Ueber ein Modell eines Minimalflächenstückes welches längs seiner Begrenzung vier gegebene Ebene rechtwinklig trifft* (ivi), *Ueber diejenigen Minimalflächen, welche von einer Schaar von Kegeln zweiten Grades eingehüllt werden* (Journ. f. Math., 80, 1875), *Ueber einige nicht algebraische Minimalfläche welche eine Schar algebraischer Curven enthalten* (Id., 87, 1879), *Sur les surfaces à courbure moyenne nulle sur lesquelles on peut limiter une portion finie de la surface par quatre droites situées sur la surface* (C. R., 96, 1883), *Ueber specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke* (Götting. Abh., 34, 1887), e *Zur Theorie der Minimalflächen, deren Begrenzung aus geradlinigen Strecken besteht* (Berliner, Ber., 1894).

Le altre speciali superficie d'area minima non possono riunirsi in classi, sicchè preferiamo dare qui l'elenco in ordine cronologico delle memorie relative, fidando che il loro titolo ne indicherà a sufficienza il tema: C. W. B. Goldschmidt (1807-1851), *Determinatio superficiae minimae rotatione curvae data duo puncta jungentis circa datum axe ortae* (Goettingae, 1831); M. Roberts, *Discussion analytique de deux surfaces particulières qui jouissent de la propriété d'avoir pour chacun de leurs points les deux rayons de courbure égaux et de signes contraires* (Journ. de Math., 8, 1850); Padula, *Nota intorno a due superficie i cui raggi di curvatura sono eguali e diretti in parti opposte* (Napoli, Rend., 1852); Bonnet, *Note sur la théorie générale des surfaces* (C. R., 37, 1853); A. Serret, *Sur la moindre surface comprise entre des lignes droites données, non situées dans le même plan* (C. R., 40, 1855); Lamarle (1806-1875), *Note sur une classe particulière de surfaces à aire minime* (Journ. de Math., II, 4, 1859); Schondorff, *Ueber die Minimalflächen, die von einem doppelt-gleichschenkligen räumlichen Viereck begrenzt wird* (Göttingen, 1868); Henneberg, *Ueber solche Minimalflachen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben* (Diss. Heidelberg, 1875) e *Ueber diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur geodetischen Linien hat* (Vierteljahrsschrift der Zürcher Naturf. Ges., 21, 1876); Cayley, *On a Special Surface of Minimum Area* (Quart. Journ., 14, 1876); Enneper, *Ueber Flächen mit besonderen Meridiancurven* (Götting. Abh., 29, 1882; cfr. H. Tallqvist, *Construction eines Modelles einer speciellen Minimalfläche*, Öfv. af finske Vetenskaps-Societetens Förh., 31, 1888-89); E. Neovius, *Bestimmung zweier speciellen periodischen Minimalflächen, auf welchen unendlich viele gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische Linien liegen* (Helsingfors Afh., 1883) e *Untersuchungen einiger Singularitäten, welche im Inneren und auf die Begrenzung von Minimalflächenstücken *auftreten können, deren Begrenzung von geradlinigen Strecken gebildet wird* (Acta Soc. Fennicae, 16, 1886); Lilienthal, *Ueber Minimalflächen, welche durch elliptische Integrale darstellbar sind* (Journ. f. Math., 99, 1886); Weingarten, *Ueber die durch eine Gleichung von der Form* $X + Y + Z = 0$ *darstellbaren Minimalflächen* (Götting Nachr., 1887); E. Götting *Bestimmung einer speciellen Gruppe nicht algebraischen Minimalflächen welcke eine Schaar von reellen algebraischer Curven enthalten* (Diss. Göttingen, 1887); Dobriner, *Die Minimalflächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien* (Acta, 10, 1887); F. Bohnert, *Bestimmung einer speciellen periodischen Minimalfläche, auf welcher unendlich viele gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische Linien liegen* (Diss. Göttingen, 1888); Vivanti, *Ueber Minimalflächen* (Zeitschr. f. Math., 33, 1888); W. Thienemann, *Ueber eine transcendente Minimalfläche, welche eine Schar algebraischer Raumcurven 4ten Grades enthält* (Diss. Giessen, 1890); Peche, *Analytische Bestimmung aller Minimalflächen, welche eine Schar reeller Parabeln enthalten* (Diss. Göttingen, 1891); Glaser, *Ueber die Minimalflächen* (Diss. Tübingen, 1891); Schönflies, *Sur les surfaces minima limitées par quatre arêtes d'un quadrilatère gauche* e *Sur les équations de deux surfaces minima périodiques, possédant la symétrie de l'octaèdre* (C. R., 112, 1891); Cosserat, *Sur les courbes algébriques à torsion constante et sur les surfaces minima algébriques inscrites dans une sphère* (C. R., 120, 1895).

10. Proseguendo lo svolgimento del nostro programma, diremo ora colla massima brevità possibile quali siano i punti più salienti della seconda delle opere in cui, come dicemmo (n. 4), trovansi in embrione le più importanti teorie costituenti la geometria differenziale.

Già fin dal primo § delle *Disquisitiones generales circa superficies curvas* c'imbattiamo in una nozione originale, quella di « rappresentazione sferica » di una superficie su di un'altra (1), la cui fecondità, già segnalata da Gauss, fu messa poi in luce meridiana dai numerosi seguaci che ebbe il grande geometra e fra i quali ci piace ricordare i nomi del Darboux (*Sur la représentation sphérique des surfaces*, C. R., 57, 1868; 58, 1869; 94, 1882; 96, 1883; Ann. Éc. norm., III. 5, 1888), del Ribancour (*Sur la représentation sphérique des surfaces*, C. R., 75, 1872), del Razzaboni (*Sulla rappresentazione di una superficie su di un'altra al modo di Gauss*, Giorn. di Mat., 27, 1889) e del Guichard (*Sur les propriétés géométriques qui ne dépendent

(1) Essa era stata già incidentalmente incontrata da O. Rodrigues nelle *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbes des surfaces* (Corr. Éc. pol., 3, 1815).

que de la représentation sphèrique, C. R., 116, 1893). — Poco dopo (§ IV) incontriamo le « coordinate curvilinee di un punto di una superficie », cioè quelle due variabili indipendenti in funzione delle quali sono esprimibili le coordinate di un punto qualunque della superficie stessa (cfr. anche i §§ XVII e XIX). Nel § VI troviamo la soluzione definitiva di un problema alla soluzione del quale contribuirono Eulero e Meusnier (cfr. n. 4) si affaticò indarno Sofia Germain (1776-1831) (1) (*Mémoire sur la courbure des surfaces*, Journ. f. Math., 7, 1831), quello cioè di misurare la curvatura di una superficie in un punto. Gauss risolse tale importantissima questione generalizzando il procedimento che mena alla misura della curvatura in un punto di una linea piana o gobba, e giunse ad assegnare come misura della curvatura (o « curvatura integra ») in un punto ordinario di una superficie il predotto delle curvature in quel punto delle relative sezioni normali principali (*Disquisitiones etc.*, § VIII) (2), mentre la citata scienziata francese aveva sostenuto, che, per raggiungere quello scopo, si deve considerare la somma delle curvature suddette. Dopo Gauss, altri matematici si occuparono della medesima questione, sia per esporre considerazioni somiglianti a quelle che egli istituì, ma conducenti a risultati differenti (3), sia per sostenere la convenienza di scegliere altre funzioni delle curvature principali in un punto di una superficie per misurare la curvatura di essa in quel punto (4). La curvatura integra di una superficie in un punto si può esprimere tanto se si conosce l'equazione della superficie in coordinate cartesiane (*Disquisitiones etc.*,

---

(1) V. la *Notice* di H. Stupuy che serve di esordio alle *Oeuvres philosophiques* de S. Germain (Paris, 1879).

(2) Lo studio della curvatura di una superficie in un suo punto singolare fu fatta dal Painvin (*Courbure en un point multiple d' une surface*, Journ. f. Math., 72, 1870), dal De Salvert (*Mémoire sur les ombilics coniques*, Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, 7, 1882) e dal Bioche (*Sur un mémoire de Poisson*, Bull. S. M, F., 14, 1883; cfr. Poisson, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Journ. f. Math., 7, 1832).

(3) E. Roger, *Note sur la courbure des surfaces* e *Note sur quelques propriétés des surfaces courbes* (C. R., 69, 1869); Minding, *Ueber die mittlere Krümmung der Fläche* (Pétersbourg Bull., 20, 1875); A. Voss, *Zur Theorie der Krümmung der Flächen* (Id., 29, 1891).

(4) Casorati, *Nuova definizione della curvatura delle superficie e suo confronto con quella di Gauss* (Rend. Ist. Lomb., II, 22) e *Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune. Ses rapports avec les mesures de courbure Gaussienne et moyenne* (Acta, 14, 1889; cfr. Catalan, *Sur la courbure des surfaces*, Id., 15, 1891); la funzione dei raggi principali di curvatura R_1 e R_2 che il Casorati propose di assumere per misura della curvatura è $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)$; ad accogliere tale proposta si oppone il fatto che non è in essa tenuto alcun conto dei segni delle curvature principali.

§§ VII e IX), quanto se sulle superficie sia stabilito un sistema di coordinate curvilinee (Id., §§ X e IX): però i calcoli eseguiti da Gauss per ottenere le espressioni corrispondenti non hanno tutta la semplicità ed eleganza possibili, donde lo stimolo ai perfezionamenti che ad essi arrecarono il Baltzer (1818-1887) (*Ableitung der Gauss'schen Formel für die Flächenkrümmung*, Leipziger Ber., 24, 1872) e l'Escherisch (*Ableitung des allgemeinen Ausdrucks für das Krümmungsmaass*, Arch. der Math., 57, 1875). Aggiungiamo che a Liouville (*Sur la théorie générale des surfaces*, Journ. de Math., 16, 1851), al Warren (*An improved Form of Writing the Formule of C. F. Gauss for the Measure of Curvature*, Quart. Journ., 16, 1879) e al Voss (*Ueber die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie*, Münchener Ber., 1892) si devono nuove ed eleganti espressioni della curvatura di una superficie in coordinate curvilinee. Al Painvin invece si deve il calcolo della *Courbure en un point d'une surface définie par son équation tangentielle* (Journ. de Math., II, 17, 1872; cfr. C. R., 73, 1871).

È opportuno segnalare subito i seguenti scritti a noi noti tendenti a commentare variamente le ricerche di Eulero e Gauss sulla teoria della curvatura delle superficie: Plücker, *Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Punkte* (Journ. f. Math., 3, 1828); Abel Transon (1805-1876), *Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces* (Journ. de Math., 6, 1841); Brioschi, *Sopra il prodotto reciproco dei raggi di curvatura di una superficie* (Tortolini Ann., 3, 1852); D. Chelini (1802-1878) (1); *Sulle formole fondamentali riguardanti la curvatura delle superficie e delle linee* (Id., 4, 1853) e *Della curvatura delle superficie con metodo diretto ed intuitivo* (Bologna Mem., II, 8, 1868); Beltrami, *Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie* (Tortolini Ann., 4, 1853); La Gournerie, *Études sur la courbure des surfaces* (Journ. de Math., 20, 1855); Vieille, *Remarques sur la théorie des lignes de courbure, et spécialement sur la plus courte distance de deux normales infiniment voisines dont l'une passe par un umbilic* (Ivi); D. Codazzi (1824-1873), *Sulla teoria delle coordinate curvilinee e sul luogo dei centri di curvatura di una superficie qualunque* (Tortolini Ann., 8, 1857); Curtis, *Sur la surface lieu des centres de courbure principaux d'une surface courbe* (Journ. de Math., II, 3, 1858); Aoust, *Sur la courbure des surfaces* (C. R., 67, 1868); Mannheim, *Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle espression de la théorie de la courbure des surfaces* (Journ. de Math., II, 17, 1872) e *Mémoire d'optique géométrique contenant la théorie du point représentatif d'un élé-*

(1) E. Beltrami, *Della vita e delle opere di Domenico Chelini* (Coll. math.);

ment de surface reglée et son emploi, tant pour la dimonstration nouvelles de théorèmes rélatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques (Lincei Mem., IV, 1, 1884-85); Halphen, *Propriétés relatives à la courbure de la développée d' une surface quelconque* (C. R., 80, 1875) e *Sur un point de la théorie des surfaces* (Ivi); A. Serret, *Sur la courbure des surfaces* (C. R., 74, 1877); De Salvert, *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces* (Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles 5, 1881; cfr. G. Loria, *Sulla teoria della curvatura delle superficie*, Riv. di Mat., 2, 1890) e *Note sur la théorie de la surface indicatrice des courbures* (Id., 8, 1884); Dietrich, *Das Verhältniss der Hauptkrümmungsradien an einem Flächenpunkt, gemessen durch den Winkel der zugehörigen Inflexionstangenten* (Zeitschr. f. Math., 26, 2881), G. Demartres (1848-1919), *Sur la courbure totale des surfaces* (Bull. S. M. F., 15, 1887) e *Sur un point de la théorie des surfaces* (Ivi); Lilienthal, *Ueber die Krümmung der Curvenschaaren* (Math. Ann., 32, 1888) e *Zur Theorie der Krümmung der Flächen* (Id., 39, 1891); P. Gilbert (1832 - 1892), *Sur l'emploi des cosinus directeurs de la normale dans la théorie de la courbure des surfaces* (Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, 18, 1894).

Nè si può lasciar passare inosservato che l' interessante studio delle alterazioni che subisce la curvatura di una superficie, quando a questa vengano applicate speciali trasformazioni univoche venne fatto negli articoli seguenti: Franke, *Sur la courbure des surfaces réciproques* (Journ. de Math., III, 3, 1877); Mehmke, *Krümmungs - Eigenschaften der räumlichen Inversion* (Böklen Mitth., 4, 1891), *Ueber zwei die Krümmung von Curven und das Gaus-s'sche Krümmungsmass von Flächen betreffende carackteristische Eingenschaften der linearen Punkttransformationen* (Zeitschr. f. Math., 36, 1891), *Ueber die geodätische Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Curven und ihre Änderung bei beliebiger Transformation der Flächen* (Id., 37, 1892), *Einige Sätze über die raumliche Collineation und Affinität welche sich auf die Krümmung der Curven und Flächen beziehen* (Ivi), *Untersuchungen über die auf die Krümmung von Curven und Flächen bezüglichen Eigenschaften der Berührungtransformationen* (Id., 38, 1893). Dello stesso ordine sono le ricerche del Vivanti, *Ueber diejenigen Berührungtransformationen, welche das Verhältniss des Krümmungsmasses irgend zwei sich berührender Flächen im Berührungspunkte unverändert lassen* (Zeitschr. f. Math., 37, 1892) e del Demoulin, *Sur les relations qui existent entre les éléments infinitésimaux de deux surfaces polaires réciproques* (C. R., 114, 1892), e *Sur la rélation qui existe entre les courbures totales de deux surfaces polaires réciproques par rapport à un paraboloïde de révolution* (Bull. S. M. F., 21, 1893).

11. Nell'espressione della curvatura in coordinate curvilinee p, q, entrano soltanto i coefficienti dell'elemento lineare della superficie $ds^2 = Edp^2 + 2Fdp.dq + Gdq^2$ e le loro derivate; di tali coefficienti Gauss per primo fece rilevare la straordinaria importanza per lo studio delle condizioni di applicabilità (senza rotture nè duplicature) di una superficie su di un' altra (§ XII). Ed appunto il problema dell'applicabilità lo guidò ad avvertire la convenienza di considerare una superficie, non come limite di un solido, ma sibbene come un corpo infinitamente sottile, flessibile ed inestendibile (§ XIII). Seguendo questo ordine di idee egli giunse a scoprire la prerogativa più cospicua della curvatura integra, quella cioè di essere un « invariante di flessione », a dimostrare, cioè, che comunque si fletta una superficie la sua curvatura in un punto non muta (1). Laonde per l' applicabilità di una superficie su un'altra è *condizione necessaria* che fra esse si possa stabilire una corrispondenza tale che in punti corrispondenti la curvatura sia la medesima. Ma due superficie soddisfacenti a tale condizione non sono sempre applicabili l' una all' altra (2), a meno che entrambe non siano di curvatura costante: dell' importante ricerca delle *condizioni sufficienti* per l'applicabilità trattò più tardi il Minding nel notevole articolo dedicato appunto alla questione *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht* (Journ. f. Math., 19, 1889) (3); egli ha così inaugurata la magnifica collezione di memorie sull' applicabilità delle superficie le une sulle altre, di cui ci sembra opportuno citare qui gli elementi più cospicui, accordando il posto d'onore alle tre che meglio risposero al tema: « studio delle superficie che si possono applicare le une sulle altre senza rotture nè duplicature », proposto nel 1858 dall' Accademia di Parigi pel Gran Premio delle Scienze matematiche; sono: Bour (1832-1866), *Théorie de la déformation des surfaces* (Journ. Éc. pol., 59e cah., 1861) (4); O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces appli-*

(1) Altre dimostrazioni di questa importante proprietà si apprendono dagli articoli seguenti: Liouville, *Sur un théorème de M. Gauss, concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface* (Journ. de Math., 12, 1847, e Nota IV a Monge): Bertrand, *Démonstration d'un théorème de M. Gauss* (Id., 13, 1848); Diguet, *Note à l'occasion de l'article précédent* (Ivi); Puiseux, *Sur le même théorème* (Ivi); Beltrami, *Sulla teoria generale delle superficie* (Atti Ist. Ven., 5, 1869); Stäckel, *Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses* (Journ. f. Math., III, 1893).

(2) P. Stäckel ed A. Wangerin in due articoli *Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses* (Leipziger Ber., 1893) hanno somministrato degli esempi assai interessanti dell' insufficienza della condizione suddetta per l'applicabilità di due superficie.

(3) Cfr. anche gli articoli del medesimo geometra: *Ueber die Biegung gewisser Flächen* (Jour. f. Math., 18, 1838) e *Ueber einen besonderen Fall bei den Abwickelung krummer Flächen* (Id., 20, 1840).

(4) Cfr. Cayley, *On the Gaussian Theory of Surfaces* (Proc. L. M. S., 12, 1881).

cables sur une surface donnée (Id., 61° cah., 1865, e 62° cah., 1867); D. Codazzi, *Mémoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres* (1) (Mém. pres., 27, 1882; cfr. la nota dallo stesso autore *Intorno alle superficie le quali deformandosi ritengono le stesse linee di curvatura* Tortolini, Ann., 7, 1856). Il medesimo tema venne poi variamente svolto nei seguenti scritti: Weingarten, *Ueber eine Klasse aufeinander abwickelbaren Flächen* (Journ. f. Math., 59, 1861), *Eine neue Klasse aufeinander abwickelbaren Flächen* (Götting. Nachr., 1887), *Ueber die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen* (Festsschrift der technischen Hochschule, Berlin, 1884) e *Sur la théorie des surfaces applicables* (C. R., 112, 1891); Dini, *Sull'equazione differenziale delle superficie applicabili su una superficie data* (Giorn. di Mat., 2, 1864); Moutard, *Sur la déformation des surfaces* (Bull. Soc. phil., 1869); Ribaucour, *Sur la théorie de l'application des surfaces les unes sur les autres* (Ivi) e *Sur la déformation des surfaces* (C. R., 70, 1870); A. Razzaboni, *Sopra alcune superficie gobbe applicabili* (Giorn. di Mat., 21, 1884); Combescure, *Sur l'application des surfaces* (C. R., 105, 1887); Goursat, *Sur la théorie des surfaces applicables* (C R, 112, 1891), *Sur le théorème de M. Weingarten et sur la théorie des surfaces applicables* (Toulouse Ann., 5, 1891) e *Sur un problème relatif à la déformation des surfaces* (Am. Journ., 14, 1891); Mlodzieiowski, *Sur la déformation des surfaces* (Bull. Sc. math., II, 15, 1891); Raffy, *Sur une transformation des formules de Codazzi et sur les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces à courbure moyenne constante* (Bull. S. M. F., 20, 1892) e *Sur le problème général de la déformation des surfaces* (C. R., 114, 1892); Caronnet, *Sur les couples des surfaces applicables* (Bull. S. M. F., 21, 1893); P. Adam, *Sur la deformation des surfaces* (Id., 23, 1895), *Sur la déformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure* (Ivi) e *Mémoire sur la déformation des surfaces* (Ivi); Stäckel, *Sur un groupe continu de transformations avec vingt-huit paramètres qu'on rencontre dans la théorie de la déformation des surfaces* (C. R., 121, 1895); Genty, *Sur la déformation infinitésimales des surfaces* (Toulouse Ann., 9, 1895).

A questi scritti si connettono altri relativi a certe deformazioni che possono subire date superficie; i principali sono i seguenti: Beltrami, *Sulla flessione delle superficie rigate* (Ann. di Mat., 7, 1865); Enneper, *Ueber die Biegung einiger Flächen* (Götting. Nachr., 1875); Weingarten, *Ueber die Deformation*

(1) Si noti a tale proposito, che le importantissime equazioni dimostrate ed applicate in questa memoria e che si designano d'ordinario col nome di « formole Codazzi » furono scoperte dal Mainardi, come emerge dalla memoria di questo *Su la teoria generale delle superficie* (Giorn. dell' Ist. Lomb., 9, 1856).

einer biegsamen unausdehnbaren Flächen (Journ. f. Math., 100, 1876) e *Ueber die unendlich kleine Deformation einer biegsamen, unausdehnbaren Flächen* (Berliner Ber., 1886); Bianchi, *Sopra la deformazione di una classe di superficie* (Giorn. di Mat., 16, 1878); Volterra, *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili* (Lincei Rend., IV, 1, 1885); Chini, *Sopra alcune deformazioni delle superficie rigate* (Torino, Atti, 26, 1890).

12. Ritorniamo ancora una volta alla fondamentale memoria di Gauss, da cui una lunga digressione ci ha allontanati. La parte residua di essa concerne le linee di lunghezza minima fra due punti, o, adottando il nome proposto da Liouville, le linee « geodetiche » (1). Di queste (2) viene da Gauss determinata l'equazione differenziale (§ XIV e XVIII), la cui integrazione venne poi studiata da egregi geometri (Liouville, *Théorème concernant l'intégration de l'équation des lignes géodésiques* Nota III a Monge, Brioschi, *Sulla integrazione della equazione delle geodetiche* Tortolini Ann., 4, 1853; ecc.)

L'analogia di esse con le rette del piano condusse Gauss ad una notevole estensione dell'ordinario sistema di coordinate polari nel piano (3) ed al concetto di « circoli geodetici » (§ XV) (4) e di « curve geodeticamente parallele » (§ XVI); nè va dimenticata la determinazione fatta da Gauss della curvatura totale di un triangolo geodetico, che guidò a un risultato, il quale venne poi generalizzato da K. Schering (1833-1897) (*Erweiterung des Gauss'schen Fundamentalsatzes für Dreiecke in stetig gekrümmten Flächen* Götting. Nachr., 1867).

(1) Legendre nel *Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre* (Paris, 1787) le chiamò invece « linee minime ».

(2) Nelle indagini intorno alle linee geodetiche Gauss non fu senza precursori. Infatti il problema che consiste nel determinare tali linee s'incontra nel corso delle discussioni che accompagnarono le origini del calcolo infinitesimale. Anzi Giovanni Bernoulli avvertì la proprietà caratteristica di tali curve, di avere come piano osculatore in ogni loro punto un piano normale della superficie su cui sono tracciate. Nè in quell'epoca i geometri stettero sempre nel campo delle generalità, chè anzi studiarono le geodetiche sopra alcune superficie particolari, quali sarebbero le sviluppabili e le superficie di rivoluzione. Ma l'angustia dello spazio vieta a noi l'addentrarsi in queste indagini storiche minute; al nostro silenzio il lettore potrà sopperire facilmente ricorrendo alle eccellenti *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien* di P. Stäckel (Leipziger Ber. 45, 1893).

(3) V. anche O. Bonnet, *Démonstration des propriétés fondamentales du système de coordonnées polaires géodésiques* (C. R. 97, 1883) e *Démonstration nouvelle de deux théorèmes de M. Bertrand* (Ivi).

(4) Cfr.: Darboux, *Sur les cercles géodésiques* (C. R., 96, 1883); Lie, *Ueber die allgemeinste geodätische Abbildung der geodätischen Kreisen einer Fläche* (Arch. for Math. og Nat., 9, 1884) e *Bestimmung des Bogenelements aller Flächen deren geodätischen Kreise eine infinitesimale Berührungstransformation gestatten* (Ivi).

Argomenti analoghi a quelli trattati in questa parte della memoria di Gauss sono svolti nei seguenti scritti: Steiner, *Ueber einige allgemeine Eigenschaft der Curven von doppelter Krümmung* (Berliner Ber., 1839); Minding, *Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen* (Journ. f. Math., 20, 1840) (1); Beltrami, *Sulla teoria delle linee geodetiche* (Rend. Ist. Lomb., II, 1, 1868); Christoffel, *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke* (Berliner Abh., 1869); Darboux, *Sur une série de lignes analogues aux géodésiques* (Ann. Éc. norm., 7, 1870); Cayley, *On Geodesic Lines, in particular those of a Quadric Surface* (Proc. L. M. S., IV, 1871-73); Hoppe, *Untersuchungen über kürzeste Linien* (Arch. f. Math., 64, 1879); A. von Braunmühl (1853-1908), *Ueber Enveloppen geodetischer Linien* (Math. Ann., 14, 1879) e *Ueber die reducierte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung jener Fläche, deren Normale eine gegebene Fläche berühren* (München, 1883); Lie, *Classification der Flächen nach den Transformationsgruppe ihrer geodetischen Curven* (Universitätsprogramm, Christiania, 1879) e *Untersuchungen über geodätischen Curven* (Math. Ann., 20, 1882); O. Böklen, *Ueber geodätische Linien* (Zeitschr. f. Math., 26, 1881); Mangoldt, *Ueber diejenigen Punkten auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien, nie aufhören kürzeste Linie zu sein* (Journ. f. Math., 91, 1881) e *Ueber die Classification der Flächen nach den Verschiebbarkeit ihrer geodätischen Dreiecke* (Id., 94, 1883); Weingarten, *Ueber die Veschiebbarkeit geodätische Dreiecke in krummen Flächen* (Berliner Ber., 1882); Brill, *Zur Theorie der geodätischen Linien und des geodätischen Dreiecks* (Münchener Abh., 14, 1883); Lüroth, *Ueber die Bestimmung einer Fläche durch geodätische Messungen* (Münchener Ber., 22, 1892); G. Ricci (1853-1925) (2) *Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville* (Atti Ist. Ven., VII, 5, 1893-94); Koenigs, *Mémoire sur les lignes géodésiques* (Mém. prés., II, 31, 1894; un sunto di essa è inserito in Toulouse Ann., 6, 1892) (3).

I §§ XXI e XXII del grande lavoro di Gauss sono gli ultimi che ci interessano, perchè gli altri non trattano che questioni di geodesia; essi, riferendosi alle trasformazioni che può subire l'elemento lineare di una superficie

---

(1) Sono in certo modo analoghe alle geodetiche le linee studiate dallo stesso Minding nelle memorie *Ueber die Curven des kürzesten Perimeters auf krummen Flächen* (Journ. f. Math., 5, 1830) e *Zur Theorie der Curven kürzesten Umrings, bei gegebenem Flächeninhalt, auf krummen Flächen* (Id., 86, 1879), e dal Delaunay nella *Note sur la ligne de longueur donnée qui renferme une aire maximum sur une surface* (Journ. de Math., 8, 1843).

(2) T. Levi-Civita, *Commemorazione* (Lincei Mem. VI, 1, 1926).

(3) I punti di contatto fortuiti esistenti fra le memorie or citate del Ricci e del Koenigs diedero luogo ad uno scambio di note di questi geometri in Lincei Rend., V, 3, 1893_1 e 1893_2.

quando si cambiano le linee coordinate, porgono elementi preziosi per lo studio delle coordinate curvilinee su una superficie e sono preliminari remoti di quegli importantissimi e geniali studi che identificarono la geometria differenziale delle superficie con la teoria delle forme differenziali quadratiche. Il più antico lavoro procedente in tale direzione è, per quanto a noi consta, quello di Felice Casorati (1835-1890) (1) intitolato *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve* (Ann. di Mat., 3, 1860, e 4, 1861): ad esso seguono le rinomate *Ricerche di analisi applicata alla geometria* che il Beltrami pubblicò nel Giorn. di Mat. (2, 1864, e 3, 1865) (2), poi il lavoro di questo stesso autore *Delle variabili complesse su una superficie qualunque* (Ann. di Mat., II, 1, 1867), il quale prelude alla *Teoria generale dei parametri differenziali* (Bologna Mem., II, 8, 1868; cfr. l'articolo *Zur Theorie des Krümmungsmasses*, Math. Ann., 1, 1869). Questa teoria venne poi ulteriormente sviluppata dal Ricci nei seguenti scritti: *Principî di una teoria delle forme differenziali quadratiche* (Ann. di Mat., II, 12, 1884), *Sui parametri e gli invarianti differenziali delle forme quadratiche differenziali* (Id., II, 14, 1886), *Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nell'analisi applicata* (Studî offerti dall'Università Padovana alla Bolognese nell'VIII Centenario ecc., 3, Padova, 1888) (3), e *Sulla teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di 2° grado* (Atti Ist. Ven., VII, 6, 1894-95). Indirizzo analogo hanno i trattati del Knoblauch e del Bianchi di cui il lettore apprenderà l'esistenza nella chiusa del presente Cap., e le seguenti memorie: E. Padova (1845-1896) *Sulla teoria generale delle superficie* (Bologna Mem., IV, 10, 1890); J. Knoblauch, *Ueber Fundamentalgrössen in der Flächentheorie* (Journ. f. Math., 103, 1888), *Ueber die geometrische Bedeutung der flächentheoretischen Fundamentalgleichungen* (Acta, 15, 1891), *Ueber Biegungscovarianten* e *Zur Theorie der Differentialparameter* (Journ. f. Math., 111, 1893); R. Lilienthal, *Zur Krümmungsteorie der Flächen* (Id., 104, 1889).

13. Come derivazioni del classico lavoro di Gauss sono da considerarsi le ricerche intorno ad alcune classi di superficie speciali, di cui non abbiamo

---

(1) Cfr.: G. Loria, *Cenni intorno a Felice Casorati* (Palermo Rend., 5, 1891); E. Bertini, *Commemorazione del M. E. prof. Felice Casorati* (Rend. Ist. Lomb., II, 25, 1892).

(2) Si connettono in certo modo a questo lavoro del Beltrami le due note di V. Reina, *Sulle linee coniugate di una superficie* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1) e *Di alcune formole relative alla teoria delle superficie* (Id., 1890_2).

(3) Cfr. il *Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associés à une forme différentielle quadratique* (Bull. Sc. math., II, 16, 1892).

ancora parlato. Spiccano fra esse quelle a curvatura costante positiva o negativa (1): dalla ricchissima letteratura su questo argomento scegliamo i seguenti lavori (2): Codazzi, *Intorno alle superficie le quali hanno costante il prodotto de' due raggi di curvatura* (Tortolini Ann., 8, 1857); Beltrami, *Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette* (Ann. di Mat., 7, 1865; cfr. Padova, *Sopra un teorema di geometria differenziale*, Rend. Ist. Lomb., II, 23, 1890) (3); P. Simon, *Ueber Flächen mit constantem Krümmungsmaass* (Diss. Halle, 1876); Enneper, *Bemerkungen über einige Flächen mit constantem Krümmungsmaass* (Götting. Nachr., 1876); Lie, *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung* (Arch. for Math. og Nat., 4, 1879, e 5, 1880); Bianchi, *Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi* (Pisa Ann., 2, 1879), *Ueber die Flächen mit constanter negativen Krümmung* (Math. Ann. 16, 1880), *Sulle superficie a curvatura costante positiva* (Giorn. di Mat., 20, 1882) e *Sulla trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche* (Lincei Rend., V, 1, 1892_2); Hazzidakis, *Ueber einige Eigenschaften der Flächen mit constantem Krümmungsmass* (Journ. f. Math., 88, 1879); Weingarten, *Ueber die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von constantem Krümmungsmass* (Journ. f. Math., 94 e 95, 1883); Darboux, *Sur la surface dont la courbure totale est constante* (C. R., 97, 1883; Ann. Éc. norm., III, 7, 1890); Bäcklund, *Om ytar med konstant negativ krökning*, *avec un Résumé en français* (Lunds Universitets Aarskrift, 19, 1884); Dobriner, *Die Flächen constanter Krümmung mit einem System sphärischer Krümmungslinien, dargestellt mit Hilfe von Θ-Functionen zweier Variabeln* (Diss. Marburg, 1886; Acta, 9, 1886-87); R. Liouville, *Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbure constante* (Am. Journ., 10, 1888); Guichard, *Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s' y rattachent* (Ann. Éc. norm. III, 7, 1890).

Un' altra categoria di superficie che venne con predilezione studiata dai geometri è quella composta delle superficie il cui elemento lineare è riducibile ad una forma speciale assegnata (4), in particolare, alla così detta « forma di

---

(1) Queste ultime superficie, seguendo il Beltrami, si dicono « pseudosferiche ».

(2) Ad essi si possono aggiungere quelli del Beltrami, dell' Escherich, del Brioschi e del Reina che citeremo nel n. 6 del Cap. X.

(3) Le uniche superficie per cui il problema enunciato è risolubile sono appunto quelle a curvatura costante.

(4) Come fondamentale per tali ricerche è da considerarsi la memoria del Lipschitz: *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschiebenen Ausdruck des Linearelement* (Berliner Ber., 1883).

Liouville » (1); fra le ricerche che vi si riferiscono ricorderemo quelle i cui risultati sono esposti nei seguenti scritti: Koenigs, *Sur les surfaces dont le* ds^2 *peut être ramené de plusieurs manières au type de Liouville* (C. R., 109, 1889); Raffy, *Sur un problème de la théorie des surfaces* (Bull. Sc. math., II, 13, 1889 e C. R., 108, 1889); P. Stäckel, *Eine charakteristische Eigenschaft der Flächen, deren Linienelement* ds *durch* $ds^2 = (\varkappa(q_1) + \lambda(q_2))(dq_1^2 + dq_2^2)$ *gegeben wird* (Math. Ann., 35, 1889); Demartres, *Sur les surfaces réglées dont l'élément linéaire est réducible à la forme de Liouville* C. R., 110, 1890); Waelsch, *Sur les surfaces à élément linéaire de Liouville et les surfaces à courbure constante* (Id., 116, 1893); Ricci, *Dei sistemi di coordinate atti a ridurre l' espressione del quadrato dell'elemento lineare di una superficie alla forma* $ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2)$ (Lincei Rend., V, 2, 1893$_1$). Va qui citata anche una nota del Petot, *Sur les surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme* $ds^2 = F(U + V)(du^2 + dv^2)$ (C. R., 110, 1890).

Giova riunire a questi i lavori consacrati allo studio di altre speciali classi di superficie; i titoli di essi basteranno in generale a significare al lettore di quale particolarità godano gli enti ivi considerati: Binet, *Remarque sur une courbe qui est sa propre développée, et sur un genre de surfaces qui contiennent le lieu des centres de l'une de leurs espèces de courbures* (Journ. de Math., 6, 1841); Catalan, *Recherche des lignes de courbure de la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites qui se coupent est constante* (Belgique Mém. couronnées, 32, 1860) e *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces* (Belgique Mém., 24, 1875); Laguerre, *Sur un genre particulier de surfaces dont on peut déterminer les lignes géodésiques* (Bull. S. M. F., 1, 1873); Röthig, *Der Malus'sche Satz und die Gleichungen der dadurch definierten Flächen* (Journ. f. Math., 84, 1877) e *Ueber die durch den Malus'schen Satz definierten Flächen* (Id., 88, 1879); Bianchi, *Ricerche sulle superficie elicoidali* (Giorn. di Math., 17, 1879); Lie, *Untersuchungen über Traslationsfläche* (Leipziger Ber., 44, 1892); Lilienthal, *Allgemeine Eigenschaften von Flächen deren Coordinaten sich durch die reelle Teile dreier analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen darstellen lassen* (Journ. f. Math., 98, 1885); Demartres, *Sur les surfaces à génératrices circulaires* (Nouv. Corr. math., 6, 1880; Ann. Éc. norm., III, 2, 1885), *Mémoire sur les surfaces qui sont divisées en carrés par une suite de cercles et leurs trajectoires orthogonales* (Ann. Éc. norm., III, 4, 1887) e *Sur les surfaces qui ont pour lignes isothermes une famille de cercles* (C. R., 104, 1887); Hazzidakis, *Flächenerzeugung durch Krümmungslinien* (Journ. f. Math.,

(1) È la forma $(P + Q)(dp^2 + dq^2)$ ove P è funzione della sola variabile p e Q della q.

98, 1885) (1); Molins, *Recherches sur les surfaces dont les trajectoires sous un angle constant des sections planes passant par une droite donnée ont pour perspectives des spirales logarithmiques* Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 8, 1886); Voss, *Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein conjugiertes System bilden* (Münchener Ber., 1888; cfr.: A. Razzaboni, *Delle superficie sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema conjugato*, Bologna Mem. IV, 9, 1889 e Guichard, *Sur les surfaces qui possèdent un réseau de géodésiques conjuguées*, (C. R., 110, 1890); Appell, *Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux* (Am. Journ. 10, 1888); Goursat, *Surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance d'un point fixe au plan tangent* (Ivi); Fibbi, *Sulle superficie che contengono un sistema di geodetiche a torsione costante* (Pisa, Ann., 5, 1888); Nannei, *Le superficie ipercicliche* (2) (Napoli Rend., II, 2, 1888 e Giorn. di Mat., 26, 1888); Pirondini, *Sopra alcune superficie e curve* (Ivi) *Studio sulle superficie elicoidali* (Ann. di Mat., II, 16, 1888), *Sulle superficie di traslazione* (Id., 17, 1889). *Di alcune superficie che ammettono un sistema di linee eguali e un secondo sistema di linee eguali o simili* (Id., 23, 1895); Baroni, *Superficie* Σ *in cui la somma dei raggi principali di curvatura è proporzionale alla distanza di un punto fisso dal piano tangente* (Giorn. di Mat., 28, 1890); Bianchi, *Sulle superficie le cui sezioni, fatte con un sistema di piani paralleli, tagliano le linee di curvatura sotto angolo costante* (Lincei Rend., IV, 7, 1891_1) e *Sulle superficie i cui piani principali hanno costante il rapporto delle distanze da un punto fisso* (Id., V, 3, 1894_1); Raffy, *Détermination de toutes les surfaces moulures applicables sur des surfaces de révolutions* (Bull. S. M. F., 19, 1891) e *Sur les surfaces moulures dont les lignes d'égale courbure sont parallèles* (Ivi); Caronnet, *Sur des surfaces dont les lignes de courbure s'obtiennent par quadrature* (Bull. S. M. F., 20, 1892); Probst, *Ueber Flächen mit isogonalen Systemen von geodätischen Kreisen* (Diss. Würzburg, 1893).

14. Differenti sviluppi intorno a varî punti dei classici lavori di Monge e Gauss che scegliemmo come fondamenti del presente Cap. si leggono negli scritti che seguono, il cui tema è, salvo poche eccezioni, indicato dal titolo: Bertrand, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces* (Journ. de Math., 9, 1844) e *Démonstration géométrique de quelques théorèmes relatifs à la théorie des*

---

(1) Questa memoria contiene la soluzione del problema: Sotto quali condizioni una curva invariabile di forma è sempre linea di curvatura della superficie che essa genera movendosi?

(2) Sono superficie di cui le linee di curvatura di un sistema sono a flessione costante.

surfaces (Id., 13, 1848); O. Bonnet *Mémoire sur la théorie générale des surfaces* (Journ. Éc. pol., 32e cah., 1848) (1), *Note sur quelques points de la théorie des surfaces* (Id., 16, 1851), *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes* (Id., II, 5, 1860) e *Sur la détermination du rayon de courbure des courbes tracées sur une surface et dont le plan osculateur est tangent à la surface* (Nouv. Ann., II, 4, 1865); Brioschi, *Intorno ad alcuni punti della teorica delle superficie* (Tortolini Ann., 3, 1852) e *Intorno ad alcune proprietà di una linea tracciata sopra una superficie* (Id., 5, 1854); Frenet, *Sur la théorie analytique des surfaces* (Lyon, 1854); Beltrami, *Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface* (Nouv. Ann., II, 4, 1865) e *Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali* (Rend. Ist. Lomb. II, 5, 1872); Christoffel, *Ueber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberflläche durch locale Messungen auf derselben* (Journ. f. Math. 64, 1865); Morin, *Théorèmes relatifs à la théorie des surfaces* (C. R., 66, 1868); Enneper, *Bemerkungen über den Durchschnitt der Flächen.* (Götting. Nachr., 1868), *Ueber die Developpabele Fläche, gebildet aus den berührenden Ebenen längs einer Curve auf einer Fläche* (Id., 1869) e *Ueber die Developpabele Fläche, welche einer gegebenen Fläche umschrieben ist* (Zeitschr. f. Math., 15, 1870); Gilbert, *Sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque* (Belgique Mém., 37, 1869); Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque* (Paris, 1869); Dini, *Ricerche sopra la teoria delle superficie* (Mem. Soc. XL, III, 2, 1869) e *Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie e loro applicazioni* (Ann. di Mat., II, 4, 1870-71); Laguerre, *Sur une propriété relative aux courbes tracées sur une surface quelconque* (Bull. Soc. phil., 7, 1870) e *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces* (Nouv. Ann., II, 11, 1872); Ribaucour, *Note sur les développées des surfaces* (C. R., 74, 1872) e *Propriétés des courbes tracées sur les surfaces* (C. R., 80, 1875; cfr. Mannheim, *Note sur une communication de M. Ribaucour*, Ivi); Cayley, *On the Geodesic Curvature of a Curve of a Surface* (Proc. L. M. S., 12, 1881); Lipschitz, *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften* (Berliner Ber., 1882 e 1883); G. Morera (1856-1909), *Sui sistemi di superficie e le loro traiettorie ortogonali* (Rend. Ist. Lomb., II, 19, 1886); Lilienthal, *Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlenssysteme* (Bonn. 1886) e *Zur Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen*

(1) Ivi incontrasi la nozione di « curvatura geodetica » di una curva tracciata sopra una superficie.

(Math. Ann. 30, 1887); Guichard, *Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables* (Ann. Éc. norm., III, 6, 1889); Kommerell, *Beiträge zur Gauss'schen Flächentheorie* (Diss. Tübingen, 1890); Pirondini, *Alcune formole relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni* (Ann. di Mat., II, 21, 1893); Bianchi, *Applicazioni geometriche del metodo delle approssimazioni successive di Picard* (Lincei Rend., V, 3, 1894_1) e *Sulla interpretazione geometrica del teorema di Moutard* (Ivi).

15. La bella teoria delle coordinate curvilinee su una superficie che Gauss fondò, applicando forse inconsciamente un geniale concetto di Leibniz (1), non tardò a venire generalizzata allo spazio. L'estensione venne indicata in un caso particolare — quello delle coordinate ellittiche — da Lamé nel *Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température* (Mém. prés., 5, 1833 e Journ. de Math., 2, 1837) e poco dopo da Jacobi nella *Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution* (Journ. f. Math., 19, 1839; cfr. le 26ª-28ª delle celebri *Vorlesungen über Dynamik*); in generale, ma supponendo ortogonali le coordinate essa è notata in un capitolo del *Mémoire sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré* (Journ. Éc. pol., 23ᵉ cah., 1834) dello stesso Lamé e quindi da lui sviluppata, dapprima nel *Mémoire sur les coordonnées curvilignes* (Journ. de Math., 5, 1840) e in seguito nel *Mémoire sur les variations des coordonnées curvilignes* (Id., 16, 1851) e nelle *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* (Paris, 1859) (2).

Il nuovo campo dischiuso ai geometri da Lamé si rivelò fin dal principio così ubertoso di risultati importanti per la geometria e le sue applicazioni alla fisica, che il grande matematico trovò ben tosto dei numerosi seguaci in Francia e fuori; ecco gli scritti più interessanti sull'argomento in discorso: Aoust, *Des coordonnées curvilignes se coupant sous un angle quelconque* (Journ. f. Math., 58, 1861), e *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques* (Ann. di Mat., 6, 1864; II, 2, 1868 69, 3, 1869-70, e 5, 1871-73); Combescure, *Sur les déterminants fonctionnels et les coordonnées curvilignes* (Ann. Éc. norm., 4, 1867); Brioschi, *Sulla teoria delle coordinate curvilinee* (Ann. di Mat., II, 1, 1867-68);

(1) *Leibnitzens Math. Schriften*, 5, p. 266-269.

(2) A malincuore, e per deficienza di spazio, tralascio di riportar qui l'eloquente epilogo di quest'opera, nel quale è chiaramente dimostrato qual parte fossero destinate a rappresentare le coordinate curvilinee nello studio matematico dei fenomeni naturali.

Codazzi, *Sulla teorica delle coordinate curvilinee e sul luogo dei centri di curvatura di una superficie* (Tortolini Ann., 8, 1857) e *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio* (Ann. di Mat., II, 1, 1867-68, 2, 1868-69, 4, 1870-71, 5, 1871-73); Chelini, *Teoria delle coordinate curvilinee nello spazio e nelle superficie* (Bologna Mem., II, 8, 1868); E. Roger, *Mémoire sur les coordonnées curvilignes* (Annales des Mines, VII, 5, 1874); Darboux, *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaus* (Ann. Éc. norm., II, 7, 1878); M. Lévy (1838-1910), *Mémoire sur les coordonnées curvilignes orthogonales* (Journ. Éc. pol., 43° cah., 1870); Warren, *Exercises in Curvilinear and Normal Coordinates* (Cambridge Trans., 12, 1877). Cayley, *On Curvilinear Coordinates* (Quart. Journ., 19, 1882); Padova, *Sulla teoria delle coordinate curvilinee* (Lincei Rend., IV, 4, 1888_2).

Com'è naturale, nelle applicazioni conviene di regola far uso di coordinate curvilinee rettangolari, donde una delle ragioni per cui la ricerca dei sistemi tripli ortogonali ha occupato un sì gran numero di geometri. Fra i risultati da essi conseguiti merita il primo posto la proposizione intuita dal Bouquet (*Note sur les surfaces orthogonales*, Journ. de Math., 11, 1846) e in modo notevole precisata dal Darboux (*Sur les surfaces orthogonales*, Ann. Éc. norm., 3, 1866), la quale afferma l'incapacità di una arbitraria schiera semplicemente infinita di superficie di far parte di un sistema triplo ortogonale; alla ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè ciò accada sono consacrati i lavori seguenti: Cayley, *Sur les surfaces orthogonales* (C. R., 75, 1872), *Sur la condition pour qu'une famille de surfaces données puisse faire partie d'un système ortogonal* (Ivi), e *On Curvature and Orthogonal Surfaces* (Phil. Trans., 163, 1873); Darboux, *Sur l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales* e *Sur le problème des surfaces orthogonales* (C. R., 76, 1873); Enneper, *Bemerkungen über die orthogonalen Flächen* (Götting. Nachr., 1872); Weingarten, *Ueber die Bedingung, unter welcher eine Flächenfamilie einem orthogonalen Flächensystem angehört* (Journ. f. Math., 83, 1877); Hoppe, *Ueber die Bedingung, welcher eine Flächenschaar genügen muss, um einem dreifachen orthogonalen System anzugehören* (Arch. der Math., 63, 1879); A. R. Johnson, *On Cayley's Differential Equations for Orthogonal Surfaces* (Mess., 16, 1886) (1); Ricci, *Della*

(1) Ivi l'equazione differenziale di cui è parola si presenta come caso particolare di quella che caratterizza i sistemi di superficie tali che le tangenti principali variano in un determinato modo al muoversi del punto di contatto lungo una traiettoria ortogonale del sistema. A concetti simili è informato l'articolo del medesimo autore intitolato *Extension of Cayley's Differentialequation for Orthogonal Surfaces* (Quart. Journ., 22, 1886).

equazione di condizione pei parametri dei sistemi di superficie che appartengono ad un sistema triplo ortogonale (Lincei Rend., V, 3, 1894$_2$).

Prima e dopo di tali investigazioni, la determinazione di sistemi tripli ortogonali e la deduzione di alcuni di essi da altri vennero studiate da W. Roberts (*Applications des coordonnées elliptiques à la recherche des surfaces orthogonales*, Journ. f. Math., 62, 1863; cfr. anche: C. R., 53, 1861, e Picart, *Étude géométrique sur les surfaces*, (Nouv. Ann. II, 4, 1865), da R. Hoppe (*Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems*, Arch. der Math., 55, 1873, 57 e 58, 1875) e dal Mehler (*Ueber die Benutzung einer vierfachen Mannigfaltigkeit zur Ableitung orthogonaler Flächensysteme*, Journ. f. Math., 84, 1878).

Assai più copiosi sono gli scritti aventi per oggetto la ricerca delle proprietà generali dei sistemi tripli ortogonali e la loro costruzione, nonchè lo studio di quelli fra tali sistemi che godono di particolarità prestabilite (alcune di queste furono suggerite dalla teoria del calore); nell'elenco dei loro autori incontriamo molti dei più bei nomi che annoveri la storia della geometria e dell'analisi moderna, come il lettore vedrà dal catalogo che qui diamo delle principali fra le memorie a noi note sull'argomento che in questo istante ci occupa: Lamé, *Mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes* (Journ. de Math., 8, 1843); Bertrand, *Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales* (Id., 9, 1844); Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces isothermes orthogonales* (Journ. Éc. pol., 30^e cah., 1845) e *Sur les surfaces isothermes et orthogonales* (Journ. de Math., 14, 1849); Bouquet, *Note sur les surfaces orthogonales* (Id., 11, 1846) e *Mémoire sur les surfaces orthogonales* (Id., 12, 1847); Brioschi, *Intorno ad alcune formole che si riscontrano nella teoria delle superficie* (Tortolini Ann., 4, 1853); Puiseux, *Note sur les systèmes de surfaces orthogonales* (Journ. de Math., II, 8, 1863); Darboux, *Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales* (C. R., 59, 1864), *Recherches sur les surfaces orthogonales* (Ann. Éc. norm., 2, 1865), *Sur les systèmes de surfaces orthogonales* (C. R., 67, 1868) *Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques* (Id., 69, 1869) e *Sur les systèmes orthogonaux comprenant une famille de surfaces du second degré* (C. R., 84, 1877); Moutard, *Lignes de courbure d'une classe de surfaces du quadrième ordre* (C. R., 59, 1864); Schläfli, *Ueber die allgemeinste Flächenschaar zweiten Grades, die mit irgend zwei anderen Flächenschaaren ein orthogonales System bildet* (Journ. f. Math., 76, 1873); A. Ribaucour, *Sur les surfaces orthogonales* (L'Institut, 37, 1869), e *Sur les systèmes cycliques* (C. R., 76, 1873) (1); Enneper, *Untersuchun-*

(1) Un sistema triplo è *ciclico* se una delle tre famiglie che lo costituiscono ha per traiettorie un sistema di circoli.

gen über orthogonale Flächensysteme (Math. Ann., 7, 1874); E. Betti (1823-1892) (1) *Sopra i sistemi tripli di superficie isoterme e ortogonali* (Ann. di Mat., II, 8, 1877); Molins, *Mémoire sur un système triple de surfaces orthogonales* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 1, 1879); H. Maschke (1853-1908) *Ueber ein dreifach orthogonales Flächensystem, gebildet aus Flächen dritter Ordnung* (Diss. Göttingen, 1880) (2); Bianchi, *Sopra alcune classi di sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali* (Giorn. di Mat., 21, 1883), *Sui sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali* (Id., 22, 1884), *Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali, che contengono un sistema di elicoidi aventi a comune l'asse ed il passo* (Ann. di Mat., II, 13, 1885), *Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten* (Ivi, e 14, 1886) (3), *Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali che contengono un sistema di superficie pseudosferiche* (Lincei Rend., IV, 2, 1886), *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali* (Ann. di Mat., II, 18, 1890), *Sopra una nuova classe di superficie appartenenti a sistemi tripli ortogonali* (Lincei Rend., IV, 6, 1890,), *Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane* (Ann. di Mat., 19, 1891) e *Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten* (Palermo Rend., 8, 1894); de Salvert, *Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme* (Mém. de la Soc. sc. de Bruxelles, 13, 1889; 14, 1890; 15, 1891; 16, 1892); Petot, *Sur certains systèmes de coordonnées sphériques et sur les systèmes triples orthogonaux correspondants* (C. R., 112, 1891); L. Lévy (1853-1912) *Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles* (Journ. de Math., IV, 8, 1892), *Sur certaines surfaces formant des systèmes triplement orthogonaux* (Bull. S. M. F., 20, 1892) e *Théorèmes sur les systèmes triplement orthogonaux* (C. R., 117, 1893) (4); Puchta, *Aufstellung eines neuen dreifach orthogonalen Flächensystems* (Wiener Ber., 102, 1893).

16. Se si volge uno sguardo retrospettivo al Cap. che ora volge al termine, si constaterà senza stento come la Geometria differenziale sia stato uno dei rami della geometria coltivati durante secolo XIX più intensamente e col mag-

---

(1) E. Padova, *Commemorazione* (Atti Ist. Ven. VII, 4, 1893).

(2) È ivi considerato un sistema triplo formato da superficie rigate.

(3) Questi sistemi tripli constano di superficie a curvatura costante ed eguale a ± 1.

(4) Nella seduta del 14 dicembre 1894 l'Accademia del Belgio ha premiata una memoria del Levy rispondente al tema seguente proposto dall'Accademia medesima: « Riassumere e poi completare in qualche punto importante le ricerche dei geometri contemporanei, relative alla teoria dei sistemi tripli ortogonali ».

giore successo, forse perchè esso è capace di mettere in evidenza tanto le facoltà proprie al geometra, quanto le attitudini speciali dell'analista, e fors' anche per le applicazioni che i problemi da essa risolti trovano nella geodesia e nella fisica. Il grado di perfezione che ai dì nostri raggiunse la geometria differenziale persuase parecchi geometri a redigerne delle esposizioni metodiche, e noi, finendo questo Capitolo, ne indicheremo le migliori, dopo di avere avvertito che chi desidera vederla studiata sinteticamente ne troverà alcuni capitoli nel *Traité de calcul différentiel et intégral* (1, Paris, 1864) del Bertrand, nel già citato *Traité de géométrie descriptive* del de la Gournerie, nella dissertazione del Picart *Essai d'une théorie géométrique des surfaces* (Paris, 1863) e nelle memorie del Mannheim, alcune delle quali furono ricordate nelle pagine precedenti e che per la maggior parte sono riprodotte o compendiate nell'opera intitolata *Principes et développements de géométrie cinématique* (Paris, 1894).

Le trattazioni algebriche della teoria sono invece: Brisse, *Exposition analytique de la théorie des surfaces* (Ann. Éc. norm., II, 3, 1874, e Journ. Éc. pol., 53° cah., 1883); Hoppe, *Principien der Flächentheorie* (Arch. der Math., 59, 1876; 60, 1877; 68, 1882) (1); Ioachimsthal, *Anwendung des Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung* (2ª Aufl., Leipzig, 1881); Knoblauch, *Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen* (Leipzig, 1888); Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* (2), a cui fanno seguito les *Leçons sur les systèmes orlogonaux et les coordonnées curvilignes* (I ed., Paris 1898); Résal, *Exposition de la théorie des surfaces* (Paris, 1891); A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (Journ. de Math., IV, 7, 1891); H. Stahl e V. Kommerell, *Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie* (Leipzig, 1893); L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa, 1894) (3).

---

(1) Una II edizione uscì nel 1889. Cfr. anche gli articoli dello stesso autore: *Beispiel der Bestimmung einer Fläche aus der Indicatrix der Normalen* (Arch. der Math., 59, 1876) e *Geometrische Deutung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der Flächentheorie* (Id., 60).

(2) Quest'opera magistrale, che fa epoca nella storia della Geometria differenziale, consta di quattro parti, che hanno ordinatamente i temi seguenti: I. *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima* (Paris, 1887). II. *Les congruences et les équations linéaires aux derivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces* (1889). III. *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfacès* (1894). IV. *Déformation infiniment petite et représentation sphérique* (1896).

(3) Una I. edizione (litografata) ne fu pubblicata nel 1886; la II. se ne distingue per l'uso metodico della teoria dalle forme differenziali; per le edizioni seguenti, vedi più avanti.

CAPITOLO VI.

Ricerche intorno alla forma delle curve, delle superficie e di altre figure geometriche. Analysis situs. Configurazioni.

1. L'investigare qual forma abbia in generale o sia suscettibile di assumere in certi casi una figura definita mediante determinate leggi fu ritenuto sin dall'antichità più remota siccome uno dei problemi di pertinenza diretta del geometra, anzi come uno dei problemi che questi deve sforzarsi di sciogliere per ogni nuova figura sottoposta al suo studio, perchè la soluzione di esso, porgendo un concetto più chiaro di tale figura, di sovente spiana la via al risolvimento di altre nuove questioni.

Benchè ai primi matematici sia mancato il concetto di figura generale in una certa categoria, pure ad essi non isfuggì la possibilità di distribuire le linee piane o le superficie in due grandi classi, cioè in « chiuse » ed « aperte » (estendentisi all'infinito); tale osservazione rimase isolata per lunghissimo tempo, cioè fino al giorno in cui Staudt introdusse la nozione di rami di curve o falde di superficie « pari » e « dispari » (1). Fra l'una e l'altra di queste due osservazioni cade l'èra occupata dalle origini e dall'evoluzione della geometria analitica e del calcolo infinitesimale; in questo periodo furono proposti vari procedimenti sia per determinare la forma di un luogo geometrico rappresentato da una speciale equazione, sia per riconoscere il modo in cui esso comportasi nelle vicinanze di un suo punto, si avvertiron forse le gravi difficoltà che si oppongono alla determinazione delle forme sotto cui si può presentare una curva od una superficie d'ordine assegnato, ma non si ebbe la forza di sormontarle. D'altronde, siccome per applicare l'analisi matematica alla ricerca delle proprietà delle figure geometriche non è necessario di sapersele raffigurare, così si ritenne legittimo il rimettere a miglior tempo la determinazione della loro forma; e che ciò fosse ragionevole è dimostrato da quanto narrammo nei quattro Cap. prec., nei quali sono descritte innumerevoli ricerche compiute intorno ad enti geometrici il cui aspetto in molti casi era completamente ignoto. Ma non tardò a giungere l'istante in cui si credette doveroso e possibile determinare anche l'apparenza esteriore delle figure studiate; delle investigazioni più importanti istituite in conseguenza intendiamo trattare in questo Cap., il

(1) Questa distinzione assieme ad altre osservazioni che vi si connettono si legge nei §§ 12-15 della *Geometrie der Lage*.

quale rappresenta un complemento indispensabile di quelli che lo precedono

Prima di entrare in materia osserviamo come dei risultati più cospicui che diede lo studio della forma delle curve e delle superficie si può agevolmente formarsi un concetto esaminando le collezioni esistenti di modelli di geometria, di cui la più copiosa e pregevole è quella della Casa L. Brill di Darmstadt (1), oppure percorrendo il Catalogo dell'Esposizione di modelli di matematica promossa, diretta ed effettuata negli anni 1892 e 1893 dalla Deutsche Mathematiker-Vereinigung (2).

2. Benchè gli studî generali sulla forma delle curve piane algebriche appartengano alla seconda metà del secolo XIX, pure la letteratura delle epoche precedenti non è priva di lavori riflettenti le forme di curve di ordini determinati. Per convincersene basti ricordare l'*Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704) (3), colla quale il Newton, stabilendo la possibilità di dedurre per proiezione la forma di tutte le cubiche piane da cinque tipi, mostrò col fatto di avere almeno intuito l'importanza del concetto fondamentale della geometria proiettiva e insegnò su un esempio in qual modo fosse da concepirsi il problema di determinare le forme possibili di un dato ente geometrico. Utilizzando un'osservazione fatta da G. Bellavitis (1803-1880) (4) nel suo lavoro *Sulla classificazione delle curve di terzo ordine* (Mem. Soc. XL, 25, II Parte, 1851, p. 34) si può enunciare il teorema di Newton dicendo: « Mediante un'opportuna trasformazione proiettiva qualunque curva di terzo ordine può ridursi ad una delle forme seguenti: 1° Curva composta di un serpentino e di un ovale (parabola campaniformis cum ovali), 2° Curva costituita da un serpentino (parabola pura), 3° Curva con punto doppio (parabola nodata), 4° Curva con una cuspide (parabola cuspidata), 5° Curva con un punto isolato (parabola punctata) ». (5). La verità di questa importante proposizione, insieme a quella di altre dalle quali emerge una ulteriore suddivisione delle cubiche piane in ordini, che Newton aveva soltanto enunciate, venne provata da molti geometri in modi differenti. Fra le dimostrazioni di essa, oltre quelle che si leggono negli scritti

(1) Cfr. A. Brill, *Ueber die Modellsammlung des mathematischen Seminars der Universitat Tübingen* (Böklen Mitth., 2, 1888).

(2) *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente* (München, 1892); *Nachtrag*, (München, 1893). Citeremo questi volumi in seguito per brevità come Katalog I e Katalog II.

(3) Cfr. W. W. Rouse Ball (1850-1925), *On Newton's Classification of Cubic Curves* (Proc. L. M. S., 22, 1891).

(4) A, Laisant, *Giusto Bellavitis* (Bull. Sc. math., II, 4, 1880); A. Favaro, *Justus Bellavitis* (Zeitschr. f. Math., 26, 1881).

(5) Cfr. Katalog I, 255, e II, 57.

di Stirling e Nicole da noi citati nel n. 1 del Cap. II, vanno ricordate quelle ad esse contemporanee del Clairaut (*Sur les courbes que l' on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position*, Mém. de Paris pour l'année 1731, Paris, 1733) e del Murdoch (1715-1774) (*Newtoni Genesis curvarum per umbras*, 1ª ed. Leida, 1740, 2ª ed., London, 1746).

Un concetto totalmente diverso da quello che informa la classificazione di Newton, sta a base di quella che propose Chasles, il quale, inspirandosi indubbiamente all'*Enumeratio* dell'emulo di Leibniz, mostrò (*Aperçu historique*, nota XX) come tutte le cubiche piane si possano dedurre per proiezione da cinque di esse dotate di centro. Lo stesso tema fu trattato in tempi a noi vicini da Plücker, nel suo *System der analytischen Geometrie* (Bonn, 1835) (1), dal Bellavitis nella memoria precitata, dal Möbius — il quale si servì dei principî della sferica analitica di cui egli è il creatore (2)—nello scritto *Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung* (Leipziger Abh., 1, 1852) e dal Cayley nei seguenti lavori: *Note on Cones of the Third Order* (Phil. Mag., 18, 1859), *On the Inflexions of the Cubical Divergent Parabolas* (Quart. Journ., 6, 1864), *On the Classification of Cubic Curves* (Cambridge Trans., 11, I Parte, 1866), *On Cubic Cones and Curves* (Ivi) e *On the Cubical Divergent Parabolas* (Quart. Journ., 9, 1868). Al Cremona (*Considerazioni sulle curve piane del terz'ordine*, Giorn. di Mat., 2, 1864) si deve la scoperta del legame che passa fra la forma di una cubica ed il segno del birapporto costante delle quattro sue tangenti che escono da un punto arbitrario di essa; da ciò si può far derivare una classificazione delle curve di 3° ordine che fu svolta dal Durège in due memorie *Ueber die Formen der Curven dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 75 e 76, 1873). Una nuova discussione delle forme delle cubiche e una conseguente nomenclatura differente dalla newtoniana vennero suggerite da F. W. Newman (*On Curves of the Third Order or Tertians*, Brit. Ass., 1869-70); mentre procedimenti nuovi per stabilire i risultati già noti furono proposti dal Reye nella 3ª ed. della sua *Geometrie der Lage* (Leipzig, 1886 - 92) (3); dal Baur nel lavoro intitolato *Synthetische Eintheilung der ebenen Kurven III Ordnung* (Stuttgart, 1888), dal Disteli nella memoria *Ueber eine neue einfache Darstellungsweise der Gestalden der ebenen Curven dritter Ordnung* (Zeitschr.

---

(1) « . . . es scheint dass das von Plücker gewählte Eintheilungsprincip kein glückliches war, insofern dabei die Zahl der zu unterscheidenden Gestalten sehr gross wird (219) und sich dieselben nicht übersichtlich gruppiren » (Clebsch, *Zum Gedächtniss an J. Plücker*, p. 22 dell' estratto).

(2) Notiamo che le classificazioni proposte da Bellavitis e Möbius contemporaneamente (perchè quella del primo, scritta nel 1851, apparve nel 1855, mentre l' altra venne pubblicata nel 1852) hanno questo di comune, che la projettività è posta a base della divisione in ispecie, e l' affinità della ripartizione in generi.

(3) Ivi la cubica è considerata come Jacobiana di una rete di coniche.

f. Math., 36, 1891) e da F. Kölmel in quella intitolata *Ableitung der verschiedenen Formen der Kurven dritter Ordnung durch Projection und Klassification derselben* (I Th., Ettenheim, 1892; II Th. Musbach 1895; III Th. Baden-Baden 1905). Della determinazione della realtà di certi punti di una cubica si occupò A. S. Hart (*On Ninepoints Contact of Cubic Curves*, Dublin Trans., 1875) e più diffusamente E. Kötter (*Beiträge zur Theorie der Oskulation bei ebenen Kurven dritter Ordnung*, Diss. Berlin, 1884).

La legge di dualità ci consiglia a far cenno qui delle indagini intorno alla classificazione delle curve piane di terza classe intraprese sino dalla metà del secolo scorso dal Bellavitis (*Sulla classificazione delle curve della terza classe*, Atti Ist. Ven., III, 4, 1852) e recentemente continuate da W. Burnside (*On the Form of Closed Curves of the Third Class*, Mess., II, 21, 1891).

3. L'esempio dato da Newton venne seguito da geometri i quali, volendo emularlo, si proposero di classificare le curve di ordine superiore al terzo; fra essi sono da nominare il Bragelogne (1688-1744) pei lavori *Examen des lignes du quatrième ordre* (Mém. de Paris, 1730) e *Sur les lignes du quatrième ordre* (Id., 1732), Eulero e Cramer pei trattati tante volte citati e il Plücker per alcune pagine (249 e segg.) della *Theorie der algebraischen Kurven* (1).

Ma tali studi — e così quelli di Cayley *On Quartics Curves* (Phil. Mag., 29, 1865) — non possono considerarsi che come precursori estremamente remoti di quelli moderni, i quali da un lato vennero inaugurati dallo Zeuthen con la memoria *Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre* (Math. Ann., 7, 1874) (2) e proseguite poi dal Crone colla nota *Sur la distribution des tangentes doubles sur les divers systèmes de coniques ayant un contact quadruple avec une courbe du quatrième ordre* (Id. 12, 1877) (3), e da un altro lato furono compiute da F. Klein colle memorie *Ueber den Verlauf der Abel'schen Integralen bei der Curven vierten Grades* (Id. 10, 1876 e 11, 1877).

A queste ricerche si possono riavvicinare le analoghe sulle quartiche ellittiche o razionali (cfr. Katalog, I, 255-56, e II, 57). Delle ellittiche si occuparono il Fiedler (nella 3ª ed. della sua *Darstellende Geometrie*) e il Cardinaal (*Applications des principes de la géométrie synthétique à la solution des problèmes de la géométrie descriptive*, Ann. de l'Éc. pol. de Delft., 3, 1887)

(1) Cfr. Beer (1825-1863), *Tabulae curvarum quarti ordinis symmetricarum* (Bonn, 1852).

(2) Cfr. anche Hossfeld, *Ueber die Realitätsverhältnisse der Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 31, 1886).

(3) La dissertazione di C. Piper, *Ueber die Formen der Curven vom vierten Grade welche kei nen Doppelpunkt haben* (Rostock 1876) ha dei casuali punti di contatto col lavoro dello Zeuthen.

e *Zur Theorie der ebenen Curven vierter Ordnung* (Journ. f. Math., 102, 1888) i quali le considerarono, vuoi come proiezioni di quartiche gobbe di prima specie, vuoi come prodotti di fasci proiettivi di coniche. Delle razionali trattò W. Fr. Meyer nella Diss. intitolata *Anwendung der Topologie auf die Gestalten der algebraischen Kurven, speziell der rationalen Kurven vierter und fünfter Ordnung* (München, 1878) e nella posteriore nota *Ueber algebraische Knoten* (Proc. of the R. Soc. of Edinburgh, 13, 1887), in cui sono applicate o svolte alcune idee che il Tait (1831-1901) (1) fece conoscere nella sua memoria *On Knots* (Trans. of the R. Soc. of Edinb., 28, 1877 e 32, 1885; cfr.: anche Brunn, *Ueber Verkettung*, Münchener Ber., 22, 1892).

4. Ricorderemo di passaggio le osservazioni del Crone *Sur une espèce de courbes symétriques de la sixième classe* (Acta, 2, 1883) per volgerci ad enumerare le nozioni che possediamo intorno alla forma delle curve d'ordine qualsivoglia. Oltre ad alcuni *General Theorems relating to close Curves* (Brit. Ass., 1876) del Tait e dello stesso *Some Elementary Properties of Closed Plane Curves* (Mess., II, 6, 1877), oltre l' « Habilitationsschrift » del Brunn *Ueber Curven ohne Wendepunkte* (München, 1889) citeremo con onore *Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve* (Math. Ann., 10, 1876, cfr. Perrin, *Sur une relation remarquable entre quelques-unes des singularités réelles des courbes algébriques plans*, Bull. S. M. F., 6, 1878), alla quale Klein fu condotto studiando le classificazioni delle quartiche suggerite da Plücker e Zeuthen, e il teorema di Harnack (*Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven*, Math. Ann., 10, 1876), « una curva di genere p può constare al massimo di $p+1$ rami distinti e questo massimo è effettivamente raggiunto qualunque sia p » (2), teorema che, con lo stabilire un legame fra la forma di una curva ed il suo genere, nuovamente conferma l'importanza di questa caratteristica. Al primo di questi fondamentali lavori diede un complemento necessario il Brill (*Ueber Singularitäten ebener algebraischen Curven und eine neue Curvenspecies*, Math. Ann., 16, 1880) coll'assegnare le modificazioni che intervengono nella formola di Klein per la presenza di singolarità superiori; mentre dal secondo rampollano gli scritti di D. Hilbert *Ueber die reellen Züge algebraischer Curven* (Id., 38, 1887) e di L. S. Hulburt sopra *A Class of new Theorems on the Number and Arrangement of Real Branches of Plane Algebraic Curves* (Am. Journ., 14, 1892).

---

(1) Lord Kelvin, *Professor Tait* (Edin. Proc. 1901).

(2) Il caso speciale corrispondente a $p=0$ era già noto; Bellavitis ne fe' cenno nella sua memoria già citata intorno alle cubiche; d'altronde esso giustifica la denominazione di *unicursali* che Cayley impose alle curve razionali.

Grande importanza possiede la connessione fra le ricerche sulla forma delle curve piane e quelle intorno alle superficie di Riemann simmetriche, che F. Klein segnalò nell' opuscolo *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig, 1882) e che svilupparono poi il Weichold nella Diss. *Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung* (Zeitschr. f. Math., 28, 1883) ed il Klein medesimo nel lavoro *Ueber Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalcurve der* φ (Math. Ann. 42, 1893).

Ricorderemo finalmente l' estesa memoria dello Zeuthen *Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, avec un Résumé en français* (Mem. dell' Acc. di Kopenhagen, V, 10, 1873) e l'altra dello Kneser intitolata *Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven* (Math. Ann., 41, 1893).

5. Il metodo applicato in quest' ultimo lavoro è modellato su quello che lo stesso autore adoperò nelle due memorie *Synthetische Untersuchungen über die Schmiegungsebenen beliebiger Raumcurven und die Realitätsverhältnisse specieller Kegelschnittsysteme* (Math. Ann., 31, 1888) e *Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten beliebiger Raumcurven* (Id., 34, 1889), le prime che tocchino il tema interessante e difficile di determinare le proprietà di forma delle curve sghembe. Per l' argomento, se non pel metodo, si collegano ad asse le indagini di W. Fr. Meyer, *Ueber Realitätseigenschaften von Raumcurven* (Götting. Nachr., 1891) e *Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichung für Singularitäten von algebraischen Raumcurven, mit Anwendung auf Realitätsverhältnisse* (Math. Ann., 43, 1893; Monatshefte, 4, 1893), colla quale resta esaurita l' enumerazione dei lavori concernenti le anzidette questioni (1). Sperando che l' avvenire ne renda l' elenco più numeroso, osserveremo come la determinazione della forma di molte speciali curve a doppia curvatura sia stata già fatta: lo fu per le cubiche gobbe (Katalog, I, 268, e II,

(1) Alcune notizie isolate si leggono nella nota di C. Wiener, *Die Abhängigkeit der Rückkehrelemente einer unebene Curve von der Curve selbst* (Zeitschr. f. Math., 25, 1880; cfr. Katalog I, 298) e nello scritto del Björling intitolato: *Modelle von Raumcurven und Developpablen-Singularitäten* (Lund, 1881). Aggiungiamo che alla forma di una classe particolare di curve gobbe si riferisce la nota del Brill, *Ueber algebraische Raumcurven, welche die Gestalt einer Schlinge haben* (Math. Ann., 18, 1881); mentre alla condizione affinchè due curve s' intreccino è dedicata la nota del Thomae *Ueber ein Integral von Gauss welches die Verknottung zweier geschlossenen Kurven im Raume zählt* (Berichte der mat. Ges. in Freiburg i. Br., 7, 1875) e ai punti doppi apparenti la nota del Brunn, *Ueber scheinbare Doppelpunkte von Raumcurven* (Deutsch. Math.-Ver., 3, 1894).

58), lo fu per le quartiche gobbe di 1ª specie (Id., I, 269, II, 61) e di 2ª (W. Fr. Meyer, *Ueber Realitätsverhältnisse auf Raumcurven 4ᵗᵉʳ Ordn. zweiter Species*, Böklen Mitt., 4, 1891; Rohn, *Modelle der rationalen Raumcurven 4. Ordn. und ihrer Developpabeln*, Deutsch. Math.-Ver., 1, 1892; Katalog, I, 269, 270 e 272), mentre possediamo da tempo una bella memoria del Möbius *Ueber die Gestalt sphärischer Curven welche keine merkwürdigen Puncte haben* (Leipziger Ber., 2, 1848) ed alcune osservazioni del Cayley *On Contour and Slope Lines* (Phil. Mag., 18, 1859).

6. Passando ora alle varietà a due dimensioni, additeremo al lettore anzitutto lo studio dell'aspetto delle superficie nelle vicinanze di certi punti singolari (Katalog, I, 299-302) e poi le ricerche sulla connessione (veggansi fra altri, gli scritti di Klein, *Ueber den Zusammenhang der Flächen*, Math. Ann., 7, 1874, e 9, 1876), quelle di C. Jordan *Sur la déformation des surfaces* e *Des contours tracés sur les surfaces* (Journ. de Math., II, 11, 1866) e quelle generali, relative non soltanto alle superficie ma anche alle curve piane, i cui risultati il Korteweg fece conoscere col mezzo della estesa memoria *Ueber Singularitäten verschiedener Ausnahme-Ordnung und ihre Zerlegung* (Math., Ann., 41, 1893). Delle superficie chiuse in particolare si occuparono F. Reech — il quale, nella nota intitolata *Démonstration d'une propriété générale des surfaces fermées* (Journ. Éc. pol., 37ᵉ cah., 1858), considerò il numero delle normali reali che si possono condurre da un punto ad una delle anzidette superficie — e H. Brunn nella Diss. *Ueber Ovale und Eiflächen* (München, 1887) (1).

Volgendoci ora alle superficie di ordine determinato, richiameremo l'attenzione del lettore sul bel gruppo di modelli della Casa Brill concernenti le quàdriche (Katalog I, 257-263) e sulle seguenti memorie intorno alla forma delle superficie cubiche (2): Klein, *Ueber Flächen dritter Ordnung* (Math. Ann., 6, 1873); Schäfli, *Quand'è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale?* (Ann. di Mat., II, 5, 1873), e *Correzione* (Id., 7, 1876); Zeuthen, *Étude des propriétés de situation des surfaces cubiques* (Math. Ann., 8, 1875); G. Bauer, *Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung* (Münchener Ber., 13, 1883); Herting, *Ueber die ge-*

(1) Cfr. anche gli articoli dello stesso autore: *Ein Satz über Eiflächen* e *Referat über eine Arbeit « Exacte Grundlangen für eine Theorie der Ovale »*, (Münchener Ber., 24, 1894).

(2) Per le superficie cubiche non rigate v. Katalog I, 263 e 283; II, 57 e 70; e per le rigate Id., I, 275 e II, 60. Cfr. anche l'articolo del Korteweg *Sur les modèles des surfaces cubiques construites d'après les indications de M. Rodenberg* (Nieuw Archiv voor Wiskunde, 20, 1893).

stalllichen Verhältnisse der Flächen driller Ordnung und ihrer parabolischen Kurven (Diss., München, 1887).

Oltre alle rigate di quarto grado (Rohn, *Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung,* Math. Ann., 28, 1887; Katalog I, 275 6 e II, 62), le superficie di quarto ordine che furono già studiate dal punto di vista della forma sono: la ciclide (e si vegga la memoria del sommo fisico Clerk Maxwell (1831-1879) *On the Cylide*, Quart. Journ., 9, 1868, e Katalog I, 265), la superficie di Kummer (v. le memorie del Rohn citate nel n. 11 del Cap. III e Katalog I, 265), la superficie delle onde (W. M. Hicks, *Practical Method of Modelling the Wave Surface*, Mess., II, 5, 1876), quella di Steiner (Katalog I, 266), quelle a conica doppia (Zeuthen, *Om Flader af fjerde Order med Doppeltkeglesnil*, Kopenhagen, 1879; trad. ital. di G. Loria in Ann. di mat. II, 14, 1887), e Cardinaal, *Constructie der opperclakken van den vierden graad met dubbelkeglesnede door middel van projectivische blundes oppervlakken van den tweeden graad,* Amsterdam Versl., III, 8, 1891), quelle a conica cuspidale (Crone, *Om Flader af fjerde Orden med Tilbagegangskeglesnil*, Kopenhagen, 1881), ed altre ancora, di minore importanza (Katalog. I, 265 e 267).

Tacendo per brevità di alcune speciali superficie d'ordine superiore al quarto (Ivi, p. 267-9 282-3) e di alcune sviluppabili particolari (Ivi, p. 272 e 2, p. 25), ricorderemo ancora i modelli delle superficie di curvatura totale (1) o media, costante (Ivi p. 291-297), e quelli intesi a illustrare la teoria della curvatura di alcune superficie (Ivi, 1, p. 285 291, 302-4 e 2, p. 71), o le proprietà delle asintotiche di una superficie generale (cfr. Dyck, *Gestaltliches über den Verlauf der Haupttangentencurven einer algebraischen Fläche*, Deutsch. Math.-Ver., 1, 1892).

Notiamo da ultimo che le indagini intorno alla forma delle curve e le superficie algebriche si possono intendere come casi speciali di quelle che il Segre inaugurò colle già citate scritture (v. pag. 35) intorno ad *Un nuovo campo di ricerche geometriche* e poi svolse nella memoria sopra *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* (Math. Ann., 40, 1892; v. anche P. Benedetti, *Sulla teoria delle forme iperalgebriche*, Pisa, Ann. 8, 1899). Infatti nei lavori che citammo nei Cap. II, III e IV, delle curve e delle superficie si consideravano tutti i punti reali ed immaginarii; studiare la forma di una curva o di una superficie equivale a considerarne i soli punti reali; ora, invece di studiare gli ∞^1 punti reali di una curva o gli ∞^2 punti reali di una superficie, si possono studiare le serie costituite da ∞^1

(1) Un modello di superficie pseudosferica venne costruito dal Beltrami fin dal 1868 e trovasi attualmente nell'Istituto matematico dell'Università di Pavia (v. R. Bonola, *Il modello di Beltrami di superficie a curvatura costante negativa* (Boll. di bibl. e storia, 9, 1906).

punti complessi scelti fra gli ∞^2 punti complessi di una curva, oppure le serie di ∞^1 o ∞^2 o ∞^3 di punti complessi contenute nella totalità degli ∞^4 punti complessi di una superficie. Gli è appunto quanto ha suggerito il Segre; il quale avvertì per primo la necessità di considerare dei nuovi punti che fossero rispetto ai punti complessi ciò che questi sono rispetto ai reali; dopo questi *punti bicomplessi*, si dovranno considerare i *tricomplessi*, ecc.

7. Alcuni scritti di Möbius toccano questioni intorno alla forma delle superficie; basti per ora citare la grande *Theorie der elementaren Verwandschaften* (Leipziger Ber., 15, 1863), in cui sono esposte delle notevoli considerazioni che oggi si ritengono come appartenenti all' *Analysis situs* (1), importante ramo di geometria di cui vennero gettati i semi da Riemann nella *Theorie der Abel'schen Functionen* (Journ. f. Math., 54, 1857; v. anche *Fragment aus der Analysis situs*, in *Ges. Werke*, Leipzig, 1876, p. 448), e che venne poi coltivato da molti geometri i cui lavori si trovano accuratamente caratterizzati nell' introduzione della memoria di W. von Dyck *Beiträge zur Analysis situs* (Math. Ann., 32, 1888, e 37. 1890 (2)), alla quale rimandiamo il lettore desideroso di maggiori particolari.

Vogliamo qui citare una seconda volta (cfr. Cap. II, n 10) la *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi* del de Paolis, giacchè ivi, non solo sono esposte e completate le più significanti indagini anteriori sull' *Analysis situs*, ma è introdotta come ausiliare del geometra e studiata in modo originale la celebre superficie a più strati di cui Riemann arricchì la collezione degli strumenti propri all' analista. Prima del de Paolis le « superficie di Riemann » erano state studiate con buon successo dal Lüroth (*Note über Verzweigungschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche*, Math. Ann., 4, 1871), dal Clebsch (*Zur Theorie der Riemann'schen Flächen*, Id., 6, 1873), dal Clifford (*On the Canonical Form and Dissections of a Riemann'is Surface*, Proc. L. M. S., 8, 1877), da J. H. Graf (1852-1918) (*Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche* Diss. Bern. 1880, da F. Hofmann (*Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen*, Halle a. S., 1889) e poi dal Bertini (*Sulle superficie*

(1) Cfr. Katalog I, 278 e II, 64, 69, 71-73.

(2) Fra i lavori posteriori ricorderemo i seguenti: E. Bortolotti, *Alcune osservazioni sulla definiziane di connessione* (Bologna Rend., 1890, in continuazione della nota delto stesso autore, *Sopra un teorema della teoria della connessione* Lincei, Rend., IV, 5, 1889_2); C. Koehler, *Beweis eines Satzes aus der Analysis situs* (Journ. f. Math., 109, 1892); H. Poincaré, *Analysis situs* (Journ. Éc. pol., II, 1er cah., 1894).

di Riemann, Lincei Rend., V, 2, 1893$_2$); d'altronte il concetto di superficie di Riemann venne radicalmente trasformato da F. Klein nelle importanti scritture *Ueber eine neue Art Riemann'scher Flächen* (Math. Ann., 7, 1874, e 10, 1876; cfr. del Pezzo, *Sulle superficie di Riemann relative alle curve algebriche*, Palermo Rend., 6, 1892).

Nell'anzidetta memoria del de Paolis è tenuto il debito conto anche delle idee che il Möbius espose ed applicò nella sua celebre nota *Ueber die Bestimmung des Inhalts einer Polyeder* (Leipziger Ber., 17, 1867) (1); il che porge a noi il destro di far cenno delle ricerche moderne sulla teoria dei poliedri (2) che, oltre il Listing (1808-1882) (*Census räumlicher Gebilde*, Götting. Abh., 10, 1861; v. anche Götting. Nachr., 1867), fecero il Kirkman (*On the Representation and Enumeration of Polyhedra*, Mem. of Lit. and Phil. Soc. of Manchester, 12, 1854; *On the Enumeration of* x-*edra having Triedral Summits and an* (x-1)-*gonal Base*, Phil. Trans., 146, 1856; *On Autopolar Polyhedra*, Phil. Trans., 147, 1857), il Cayley (*The Problem of Polyhedra*, Ivi; *On the △-faced Polyacrons in Reference to the Problem of the Enumeration of Polyhedra*, Mem. of Lit. and Phil. Soc. of Manchester, 1, 1862; *On the Partition of a Close*, Phil. Mag., 21, 1861); il Jordan (*Recherches sur les polyèdres*, Journ. f. Math., 66, 1866, e 68, 1868; *Résumé de recherches sur la symétrie des polyèdres non eulériens*, Id., 66, 1866; *Note sur la symétrie inverse des polyèdres non eulériens*, Id., 68, 1868; *Sur les assemblages de lignes*, Id., 70, 1869) (3), il Bertini (*Sui poliedri euleriani*, Pisa Ann., 1868-69), il Clifford (*On a Theorem Relating to Polyhedra analogous to Mr. Cotterill's Theorem on Plane Polygones*, Proc. L. M. S., 4, 1872), E. Hess (1842-1903) (*Einleitung in die Lehre der Kugeltheilung mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der gleichflächigen und gleicheckigen Polyeder*, Leipzig, 1883), il Feil (*Ueber Euler'sche Polyeder*, Wiener Ber., 93, 1886), l'Eberhard (*Eine Klassification der allgemeinen Ebenensysteme*, Journ. f. Math., 106, 1890, e *Zur Morphologie der Polyeder*, Leipzig, 1891), ed E. Cesàro *Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polyèdre soit superposable à son image dans un miroir plan* (Belgique Bull., III, 12, 1891).

---

(1) Ivi s'incontra la « superficie unilaterale ». Cfr. anche la nota postuma *Zur Theorie der Polyeder und der Elementarverwandschaften* in *Möbius Werke*, 2 (Leipzig, 1886), p. 513-560, e C. Reinhardt, *Zu Möbius Polyedertheorie* (Leipziger Ber., 15, 1885), nonchè l'*Einleitung in die Theorie der Polyeder* (Meissen, 1890).

(2) Abbiamo escluso quelle che hanno attinenza più stretta con la cristallografia che con la geometria.

(3) Cfr. de Polignac, *Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications* (Bull. S. M. F., 8, 1880 e 9, 1881).

Un indiscutibile legame con le indagini precedentemente discorse hanno quelle che si sogliono comprendere sotto il nome di « topologia » — nome che incontrasi, a quanto sappiamo, per la prima volta nelle *Vorstudien zu Topologie* (Göttinger Studien, 1847) del Listing (1) — ; esse vennero poi svolte con ottimi risultati specialmente da O. Simony — del quale basti qui ricordare l'opuscolo intitolato *Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: « In ein ringförmig geschlossenes Band, einen Knot zu machen » und verwandter merkwürdiger Probleme* (3ª Aufl., Wien, 1881) e le due memorie *Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie* (Math. Ann., 19, 1882 e 25, 1884) (2); lo seguirono L. Koller (*Ueber einige allgemeine auf Knotenverbindungen bezügliche Gesetze*, Wiener Ber., 89. 1884), il Dingeldey (*Topologische Studien über die aus ringförming geschlossenen Bänder durch gewisse Schnitte erzeugbaren Gebilde* (Leipzig. 1890). Aggiungiamo ancora che ad uno speciale ma interessante teorema che dipende dall'aspetto di una superficie e comprende uno più antico relativo al piano (cfr. Tait, *On Colouring of Maps*, Proc. of the R. Soc. of Edinburg, 10, 1880) (3) si riferiscono gli scritti seguenti: Kempe, *On the Geographical Problem of the Four Colours* (Am. Journ. 2, 1879); Heawood, *Map colours Theorem* (Quart, Journ., 24, 1890); Heffter, *Ueber das Problem der Nachbargebiete* (Math.Ann., 38, 1891).

8. Alle svariate ricerche di cui tentammo ritrarre i lineamenti nel presente Cap. ci conviene riavvicinare quelle intorno alle figure costituite da un certo numero di punti, rette e piani, cioè a quegli aggruppamenti notevoli che oggi si designano col nome di ***configurazione*** e coll'abbreviazione Cf. (4).

Le memorie di Cayley *Sur quelques théorèmes de la géométrie de position* (Journ. f. Math., 31, 1846, 34, 1847, e 41, 1851), le numerose scritture intorno all'esagrammo di Pascal (le quali sono ricordate nell'introduzione dell'im-

---

(1) Cfr. Hierholzer, *Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren* (Math. Ann., 6, 1873), e Cayley, *On Listing's Theorem* (Mess., 2, 1873).

(2) Cfr. H. Brunn, *Topologische Betrachtungen* Zeitschr. f. Math., 37, 1892).

(3) Questo teorema afferma la possibilità di colorire qualunque carta di geografia politica adoperando quattro soli colori.

(4) Una Cf. n_i piana consta di n punti ed n rette disposte in modo che ogni retta contenga i punti e per ogni punto passino i rette. Una Cf. (n_i, g_k) nello spazio consta di n punti, n piani e g rette tali che per ogni punto, passano i piani e k rette e su ogni piano stanno i punti e k rette. È *regolare* una Cf. che si comporti allo stesso modo rispetto ad ogni suo punto.

Avvertiamo che la teoria delle configurazioni presenta poche analogie con quelle trattate nelle parti precedenti dell'attuale Cap.; in essa non si fa veruna distinzione fra elementi reali e elementi immaginari, sicchè essa è effettivamente un capitolo della geometria projettiva, mentre le ricerche sulla forma delle figure geometriche formano un ramo di geometria (per dirlo col Klein) il cui gruppo di trasformazioni non è quello della geometria di posizione.

portante lavoro del Veronese intitolata *Nuovi teoremi sull'exagrammum mysticum*, Lincei Mem., III, 1, 1877) e meglio ancora molte delle proposizioni enunciate da Steiner e concernenti quel ramo di matematica che Poncelet designava, con ingiustificato disprezzo, col nome di « geometria di combinazione » (1) mostrano ad esuberanza che gli elementi di questa teoria risalgono ad epoca abbastanza lontana da noi.

Ciò è confermato dagli studî sopra i triangoli più volte omologici fatti dallo Schröter (*Ueber perspectivisch liegende Dreiecke*, Math. Ann., 2, 1870), dal Rosanes (*Ueber Dreiecke in perspectivischer Lage*, Ivi) e dall'Hess (*Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder*, Id., 28, 1887) (2). Lo stesso dicasi per quelli intorno alla configurazione nascente da un esagono dieci volte di Brianchon, scoperta da Steiner (*Ges. Werke*, 2, p. 512) e da Clebsch (*Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5ten Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits*, Math. Ann., 4, 1871); le sue proprietà vennero metodicamente studiate dallo Schröter (*Das Clebsch'sche Sechseck*, Id., 28, 1887).

Ma la teoria delle configurazioni cominciò ad avere vita autonoma nel 1882 per merito del Reye, il quale ne caratterizzò il còmpito nell'articolo intitolato *Das Problem der Configurationen* (Acta, 1) e ne illustrò i procedimenti colla successiva nota *Die Hexaëder und Octaëder-Configurationen* (12_6 , 16_3) (Ivi). A partire da questo istante la teoria generale delle configurazioni piane venne studiata a fondo (segnatamente dal Martinetti, dal de Vries e dal Schönflies) e da varî punti di vista, nè si trascurò di accrescere il numero delle configurazioni speciali del piano e dello spazio, o il numero delle proprietà delle configurazioni già note. Tutto ciò emerge dal seguente elenco di memorie sull'argomento che ci occupa (3): Vietor, *Die harmonische Configuration* 24_2 (Berichte der nat. Ges. in Freiburg i. Br., 8, 1882); Hossfeld, *Ueber die mit der Lösung einer Steiner'schen Aufgabe zusammenhängende Configuration* (12_6 ,

(1) *Traité des propr. proj.* (2e éd., Paris, 1865-66, 2, p. 404); ivi si legge la frase « géométrie combinatoire de M. Steiner »; altrove (II, 1, p. 414) Poncelet parla di « théorèmes à combinaisons ».

(2) Come lo fa supporre il titolo, in questo scritto è anche trattata la questione analoga nello spazio; v. anche Klug, *Ueber mehrfach perspective Tetraeder* (Arch. der Math., II. 6, 1887).

(3) In esso non abbiamo inserite le seguenti di S. Kantor, perchè cominciarono ad uscire prima dei lavori del Reye: *Ueber eine Gattung von Configurationen* (Wiener Ber., 80, 1879); *Ueber die Configuration* (3, 3) *mit den* 8, 9 *Indices und ihren Zusammenhang mit den Curven dritter Ordnung* (Id., 84, 1881), *Die Configurationen* $(3, 3)_{10}$ (Ivi), e *Ueber eine Configuration* $(3, 3)_{10}$ *und unicursale Curven vierter Ordnung* (Math. Ann., 21, 1883). Altrettanto e per egual motivo facemmo riguardo a quella del Veronese, *Sopra alcune configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e superficie di 2° grado e di altre curve e superficie* (Lincei Mem., III, 9, 1881).

16_3) (Zeitschr. f. Math., 29, 1884, e 30, 1885); Jung, *Sull' equilibrio dei poligoni articolati in connessione col problema delle configurazioni* (Ann. di Mat., II, 12, 1884) (1) e *Sopra una classe di configurazioni d' indice 3* (Rend. Ist. Lomb., II, 18, 1885); Martinetti, *Sopra alcune configurazioni piane* (Ann. di Mat., II, 14, 1886), *Sulle configurazioni piane μ_3* (Id., 15, 1887) e *Sopra un gruppo di configurazioni regolari contenute nell' esagrammo di Pascal* (Atti dell' Acc. Gioenia, IV, 3, Catania, 1891); Schröter, *Ueber das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummer'sche Configuration* (Journ. f. Math., 100, 1886), *Ueber lineare Constructionen zur Herstellung der Configurationen x_3* (Götting. Nachr., 1888), *Ueber die Bildungsweise und geometrische Construction der Configuration 10_3* (Id., 1889), *Die Hesse'sche Configuration* (12_4, 16_3) (Journ. f. Math., 108, 1891) (2), e *Elementare Construction der Figur der in desmischen Lage befindlichen Tetraeder* (Id., 109, 1892) (3); F. Klein, *Ueber Configurationen, welche den Kummer'schen Flächen zugleich ein und umgeschrieben sind* (Math. Ann., 27, 1886); Staigmüller, *Die harmonische Configuration* (Diss. Tübingen, 1886); Schönflies, *Ueber einige ebene Configurationen und die zugehörigen Gruppen von Substitutionen* (Götting. Nachr., 1887), *Ueber die regelmässige Configurationen x_3* (Math. Ann., 31, 1888), *Ueber Configurationen welch sich aus gegebenen Raumelementen durch blosses Schneiden und Verbinden ableiten lassen* (Deutsch. Math.-Ver., 1, 1890-91) e *Bemerkungen zur Theorie der regelmässigen Configurationen x_3* (Math. Ann., 42, 1893); Caporali, *Memorie di geometria* (Napoli, 1888); J. de Vries, *Ueber gewisse ebene Configurationen* (Acta, 12, 1888), *Ueber die einem Vierseite harmonisch eingeschriebene Configuration 18_2* (Wiener Ber., 92, 1888), *Over vlakke Configuraties* (Amster dam Versl., III, 5, 1888), *Over de harmonische Configuratie* (24_3, 18_4) (Ivi), *Over vlakke polyedrale configuraties* (Id., 6, 1889), *Over eene groep van regelmatige vlakke configuraties* (Ivi), *Over de desmische Configuratie 9_2* (Ivi), *Over vlakke configuraties, die nit de osculatiegroepen der kubische kromme kunnen worden afgeleid* (Ivi), *Over vlakke configuraties, waarin elk punt met twee lijnen incident is* (Ivi), *Ueber gewisse der allgemeinen cubischen Curve eingeschriebene Configurationen* (Wiener Ber., 98, 1889), *Ueber gewisse Configurationen auf ebenen kubischen Curven* (Ivi), *Ueber polyedrale Confi-*

---

(1) Si veda anche: Burmester, *Kinematische Untersuchungen der Mechanismen mit Bandtrieb* (Der Civilingenieur, II, 35, 1889) e *Ueber die momentane Bewegung der ebenen Mechanismen* (Technische Blätter, 22, 1890).

(2) Cfr. E. Hess, *Bemerkung zu der Abhandlung von H. Schröter* (Journ. f. Math., 111, 1893).

(3) Cfr.: Stéphanos, *Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres* (Bull. Sc. math., II, 3, 1879).

gurationen (Math. Ann., 34, 1889), *Ueber eine Gattung regelmässiger ebener Configurationen* (Id., 35, 1889), *Ueber die Configuration welche durch die Aehnlichkeitspunkte und Aenlichkeitsgeraden von* n *Kreisen der Ebene gebildet werden* (Zeitschr. f. Math., 35, 1890), *Over eene groep van regelmatige vlakke configuraties en eenige daarmede samenhangende vlakke configuraties van punten en krommen* (Amsterdam Versl., III, 7, 1890), *Nieuwe eigenschappen der harmonische configuratie* (24_3, 18_4) (Ivi), *Cyclische veelhoecken on vlakke kubische krommen* (Ivi), *Sur les configurations planes dont chaque point supporte deux droites* (Palermo Rend., 5, 1891), *Ueber räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleilen lassen* (Wiener Ber., 100, 1891), *Ueber gewisse räumliche Configurationen* (K. Akad. van Wetenschappen Verslagen, Amsterdam, 1894-5) (1); Witting, *Ueber eine der Hesse'schen Configuration der ebenen Curven 3, Ordnung analoge Configuration im Raume* (Diss. Göttingen, 1887); Maschke, *Ueber eine merkwürdige Configuration gerader Linien im Raume* (Götting. Nachr., 1889, e Math. Ann., 36, 1890); Hess, *Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen. Ueber die Klein'sche Configuration* (60_{15}, 30_4) *und einige bemerkenswerte räumliche Configurationen* (Verhand. der K. Leop.-Carol. Deutschen Akad. der Wiss., 55, Halle, 1890) e *Ueber gewisse räumliche Configurationen* (Berichte der nat. Ges. in Marburg i. Br., 1892); Daublebsky, *Die Configurationen* 11_3 (Monastshefte, 5, 1894); Sterneck, *Die Configuration* 11_3 (Monatshefte, 5, 1894), e *Die Configuration* 12_3 (Id., 6, 1895); E. Hastings Moore, *A Configuration of 36 Points, 27 Lines, 36 Planes, a Special Case of which leads to Klein's Hyperelliptic Configuration of 40 Points, 90 Lines, 40 Planes* (American Association, Prof., 1894).

---

(1) Questa memoria si collega a un lavoro dell'Andreeff, *Sul problema delle configurazioni* pubblicato in russo dalla Società matematica di Kharkow. Alla teoria delle configurazioni si riattaccano anche le due memorie del de Vries, *Isodynamische und metaharmonische Gebilde* (Wiener Ber., 101, 1892) e *Involutions harmoniques dans le plan et sur la sphère* (Archives Teyler, II, 4, 1894).

CAPITOLO VII.

Geometria della retta nello spazio.

1. Nella geometria greca si considera il punto come l'elemento generatore di tutte le figure, nell'antica geometria analitica si pone il punto siccome fondamento di tutti i ragionamenti e dei calcoli; l'una e l'altra sono dunque da riguardarsi siccome le due basi della geometria del piano e dello spazio *punteggiati*. Ora, una delle più ovvie conseguenze del principio di dualità è che la retta nel piano e il piano nello spazio hanno egual diritto del punto di fungere da elementi generatori delle figure: messi alla prova questi nuovi elementi si manifestarono ben presto capaci di sostenere quella parte con altrettanto buon risultato, donde le origini della geometria (analitica e sintetica) del *piano rigato* e dello *spazio di piani*. Il merito di avere per tal modo quasi raddoppiato il dominio della geometria (specialmente quello della geometria analitica) spetta in gran parte a Plücker (1).

Ma a Plücker ancor meno discutibilmente appartiene la gloria di avere metodicamente introdotto un terzo elemento delle figure a tre dimensioni — la retta — e di avere costruito in conseguenza una « nuova geometria dello spazio »; egli, dopo di avere abbandonato durante quasi vent'anni la geometria per consacrare alla fisica le sue poderose forze intellettuali, ritornò alla scienza che per prima gli aveva assicurata la fama, per sviluppare alcune idee originali che egli aveva schizzate sin dal 1846 (*Geometrie des Raumes*, n. 258) (2), per arricchirla di una nuova e importantissima disciplina, la « Geometria della retta » nello spazio.

Le prime pubblicazioni fatte su questo argomento dal grande geometra tedesco risalgono all'anno 1865 (*On a New Geometry of Space*, Proc. R. S., 14, 1865, e Phil. Trans., 155, 1865) (3); ivi sono enunciate — non senza qualche inesattezza — le proprietà fondamentali dei complessi in generale e dei

(1) « Sino ai tempi moderni, il metodo analitico, quale Cartesio lo ha creato, si reggeva per così dire sopra un solo piede. A Plücker era riserbato l'onore di collocarlo sopra due sostegni eguali introducendo il sistema di coordinate complementari. Però questa scoperta era divenuta inevitabile dopo che si erano introdotte nello spirito dei matematici le profonde vedute di Steiner » (Sylvester in *Phil. Mag.*, 37, 1850, p. 263).

(2) Che la retta fungesse talora da elemento generatore notò fin dal 1847 Staudt (*Geom. der Lage*, n. 26); si ricordi ancora (Cap. IV, n. 2) che già nel 1860 Cayley considerò una curva gobba come « complesso » delle sue secanti.

(3) Cfr. anche le note *On Complexes of the Second Order* (Brit. Ass., 1867), e *Géométrie nouvelle de l'espace* (Les mondes, 13, 1867).

lineari in particolare, e quelle delle loro intersezioni (congruenze e superficie rigate); le dimostrazioni di esse sono ivi soltanto accennate e, secondo l'autore, dovevano venire ordite coll'aiuto delle « coordinate di una retta nello spazio », che egli introdusse come concezione propria, ma che poi si riconobbero per casi particolari di quelle che — a tacere del Grassmann (1)—il Cayley aveva poco dianzi inventato (*On a New Analytical Representation of Curves in Space*, Quart. Journ., 3, 1860 (2) e di cui in seguito sviluppò le proprietà più cospicue nella memoria *On the six Coordinates of a Line* (Cambridge Trans., 11, II Parte, 1869).

Le comunicazioni fatte da Plücker alla Società Reale di Londra eccitarono il Battaglini a giustificare completamente le asserzioni ivi contenute; ebbe in conseguenza il suo principio quella serie di memorie intorno alla geometria della retta che valsero al nostro connazionale un posto eminente tra i fondatori di questa disciplina, memorie di cui pel momento citeremo le seguenti: *Intorno ai sistemi di rette di primo grado* (Giorn. di Mat., 6, 1868), *Intorno ai sistemi di rette di secondo grado* (Id., 7, 1869), *Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque* (Id., 10, 1872). Riguardo ad esse osserveremo due cose: la prima è che sono ivi applicate con singolare perizia le coordinate omogenee e la teoria delle forme algebriche, alla creazione della quale il Battaglini aveva dianzi tanto efficacemente contribuito; la seconda è che, quantunque il Battaglini abbia posto a base del suo studio dei complessi quadratici un'equazione speciale (lo osservò per primo F. Klein nella Diss. che citeremo fra breve), pure molti dei ragionamenti che egli espone (si può dir tutti, eccettuati quelli intorno alla superficie singolare del complesso) valgono per qualsiasi complesso quadratico e molte delle sue formole, con lievi modificazioni, si adattano al caso generale.

2. Nel frattempo il Plücker elaborava le sue idee intorno alla geometria della retta e, dopo averne data un'applicazione nella *Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction* (Ann. di Mat., II, 1, 1867), le esponeva metodicamente nella sua ultima opera intitolata *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* (Leipzig, 1868 1869) (3). Dire che questo libro abbia in tutte le sue parti egual valore ed importanza sarebbe affermar cosa contraria al

(1) Tale merito di Grassmann venne segnalato da Clebsch nella sua già citata (v. p. 30) *Commemorazione* di Plücker.

(2) Una speciale illustrazione dei concetti ivi esposti si legge nella nota dello stesso autore *On the Complex of Lines which meet an Unicursal Quartic Curve* (Proc. L. M. S., 17, 1886).

(3) La seconda parte fu pubblicata da F. Klein, dopo la morte dell'autore.

vero. Inoltre il Plucker non teneva in gran pregio l'eleganza dei calcoli alla quale ci abituarono Lagrange, Jacobi, Hesse e Clebsch; egli per fermo non condivideva l'opinione di Lamé che « la notazione sia per l'analisi ciò che la disposizione e la scelta delle parole è per lo stile » (1); al contrario è evidente che per lui, in una ricerca di geometria analitica, il calcolo ad una sola condizione doveva soddisfare, quella di condurre con celerità e sicurezza alla soluzione dei problemi proposti. Questa imperfezione, che rese antiquati prima del tempo tutti i lavori di Plucker e potrebbe farli scegliere come argomenti contro la tesi di Jacobi « mathesis et ars et scientia dicenda », fu più dannosa all'ultimo che agli altri, perchè questo doveva inevitabilmente affrontare il paragone, se non con altre opere, almeno coll' *Analytische Geometrie des Raumes* di Hesse e colle *Vorlesungen über Dynamik* di Jacobi. Si aggiunga che Plücker, avendo per lungo tempo abbandonata la geometria e tralasciato di seguirne lo svolgimento, credette di inserire nel suo libro certe investigazioni (metriche) le quali non interessano che mediocremente essendo incluse in altre assai più generali, l'esame di casi particolari del cui valore si tenta invano di convincersi oggi e formole eccessivamente complicate e prive di quella generalità e simmetria che sole varrebbero a renderle utili, epperò a salvarle dall'oblio. Malgrado questi difetti della *Neue Geometrie des Raumes*—che ad ditammo unicamente per render ragione dell'esiguo numero di lettori che oggidì essa trova—non si può disconoscere che essa sia ricca di concetti nuovi e geniali; e sarebbe da consigliarne lo studio a chiunque volesse apprendere la geometria della retta ove gli scienziati posteriori non avessero migliorata la forma e completata la sostanza di questa nuova diramazione della matematica (2).

Primo fra i continuatori dell'opera di Plücker è F. Klein il quale anzitutto perfezionò le ricerche intraprese dal suo maestro intorno ai complessi quadratici (*Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung 2. Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form* (Diss. Bonn, 1868, ristampata in Math. Ann., 23, 1884) e *Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades*, Math. Ann., 2, 1870; cfr. Veronese, *Sui gruppi* $(P)_{360}$, $(\pi)_{360}$ *delle figure di sei complessi lineari di rette due a due in involuzione*, Ann. di Mat., II, 11, 1883); a lui inoltre dobbiamo la definizione

(1) *Examen des différentes méthodes qu'on a pour résoudre les problèmes de géométrie* (Paris, 1818), p. 26.

(2) Cito qui: G. Janni, *Esposizione della nuova geometria di Plücker* (Giorn. di Mat., 8, 1870); Chelini, *Sulla nuova geometria dei complessi* (Bologna Mem., III, 1, 1870); de Paolis, *Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari* (Lincei Mem., IV, 1, 1884-85); Caporali e del Pezzo, *Introduzione alla teoria dello spazio rigato* (in *Memorie di geometria di Ettore Caporali*, Napoli, 1888); Fouret, *Notions géométriques sur les complexes et les congruences* (Paris, 1893); G. Koenigs, *La géométrie réglée et ses applications* (Paris, 1895).

più generale di coordinate di una retta (v. specialmente l'articolo sopra *Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten*, Math. Ann., 2, 1870); a lui, che per primo concepì la geometria dello spazio rigato indipendentemente da quella dello spazio di punti o di piani, l'importantissima osservazione che « la geometria della retta è identica allo studio di una varietà quadratica a quattro dimensioni contenuta in uno spazio lineare a cinque » (veggasi la fondamentale memoria *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*, (Math. Ann., 5, 1872); a lui il teorema che assicura essere ogni complesso rappresentabile mediante un'unica equazione fra le coordinate di una retta nello spazio (*Ueber einen liniengeometrischen Satz*, Götting. Nach. 1872 o Math. Ann., 22, 1883). Che quell'osservazione e questo teorema siano di massimo momento venne dimostrato particolarmente dal Segre nella sua memoria *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* (Torino Mem., II, 37, 1884) (1), che nessun geometra può esonerarsi dallo studiare.

3. Nel campo aperto da Plücker entrò ben presto il Pasch, il quale diede alcuni eleganti sviluppi analitici intorno ai complessi lineari (*Zur Theorie der lineanen Complexe*, Journ. f. Math., 75, 1873) e fece intorno alla superficie singolare di un complesso qualsivoglia delle osservazioni destinate a rimanere (*Zur Theorie der Complexen und Congruenzen von Geraden*, Giessen, 1870; *Ueber die Brennflächen der Strahlensysteme und die Singularitätenflachen der Complexe*, Journ. f. Math., 76, 1873). D'altra parte una nuova definizione per le coordinate di una retta è esposta nella *Note sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace* dello Zeuthen (Math. Ann., 1, 1869; cfr. Chelini, *Sulla composizione geometrica de' sistemi di rette, di aree e di punti*, Bologna Mem., III, 1, 1870), la quale, toccando questioni metriche a cui dànno luogo i complessi di 1° grado, ci porge il destro di nominare l'articolo del Drach, *Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Complexe* (Math. Ann., 2, 1870).

L'applicazione dell'algebra moderna alla geometria della retta fu tentata dal Battaglini (2), cominciata da Clebsch colle due bellissime memorie *Ueber*

(1) V. anche l'articolo dello stesso autore *Sur une expression nouvelle du moment mutuel de deux complexes* (Journ. f. Math., 99, 1886).

(2) Nota a tal proposito E. d'Ovidio, in una *Commemorazione* già da noi citata (pag. 56, nota 1) che al Battaglini « spetta altresì il gran merito di essere stato il primo a recare sistematicamente e largamente nelle ricerche sui complessi il potente sussidio della teoria delle forme algebriche; al qual merito si aggiunga quello di essere stato il primo a introdurre nello studio dei complessi la notazione *ombrale* o *simbolica* che il Clebsch poscia (Math. Ann., 1869) perfezionò, rendendo i simboli più snodati e più atti al passaggio da formole in coordinate di rette a quelle in coordinate di punti o di piani ».

die Plücker'schen Complexe (Math. Ann., 2, 1870) e *Ueber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe* (Id., 5, 1872) e continuata, dopo un lungo intervallo, da E. Waelsch (*Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie*, Wiener Ber., 98, 1889, e Math. Ann., 37, 1890), e, in un certo senso, da F. Mertens (*Die Gleichung des Strahlencomplexes welcher aus allen die Kanten des gemeinschaftlichen Polartetraeders zweier Flächen II Ordnung schneidenden Geraden besteht*, Wiener Ber., 91, 1885, e *Invariante Gebilde von Nullsystemen*, Id., 97, 1888) e da G. Pick (*Ueber das System der covarianten Strahlencomplexe zweier Flächen zweiter Ordnung*, Id., 106, 1891).

La classificazione dei complessi quadratici venne schizzata da Klein nella precitata Diss, e poi eseguita da A. Weiler nella memoria *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades* (Math. Ann., 7, 1874) (1). Le « forme » di detti complessi si trovano invece considerate nella memoria del Reye, *Ueber die Hauptarten der allgemeinen quadratischen Strahlencomplexe und Complexgewebe* (Journ. f. Math., 98, 1885).

Delle proprietà infinitesimali dello spazio rigato trattarono F. Klein nell'importante lavoro *Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen* (Math. Ann., 5, 1872), G. Koenigs nella tesi *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (Ann. Éc. norm., II, 11, 1882), H. Bourget nella nota sulla *Représentation géométrique des propriétés infinitésimales du premier ordre des complexes* (C. R., 104, 1887), E. Waelsch nell'articolo *Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen* (Wiener Ber., 100, 1891), ed E. Cesàro in quello, *Sulla geometria intrinseca delle congruenze* (Napoli Rend., II, 8, 1894); lavori che sono più o meno intimamente commessi alla grande memoria di S. Lie, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe* (Math. Ann., 5, 1872), nella quale inoltre è messo in luce il legame che esiste fra la geometria dello spazio di rette e la geometria dello spazio di sfere ed è dimostrato quanta utilità l'una e l'altra possono ritrarre da questo inatteso ravvicinamento (2). Invece l'analogia esistente fra le proprietà dell'insieme delle rette e quelle dello spazio delle coniche di un piano venne indicata nel 1870 dal Cremona in una lettera al Beltrami inserita nel t. 8 del Giorn. di Mat., svolta da F. Aschieri (1844 - 1907)

---

(1) Parecchie inesattezze ivi commesse furono corrette dal Segre nelle *Note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du second ordre double* (Math. Ann., 23, 1883).

(2) Cfr. la nota del Cremona, *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie* (Lincei Atti, II, 3, 1875) e lo scritto di C. Segre, *Sulle geometrie metriche dei complessi e delle sfere e sulle loro mutue analogie* (Torino Atti, 19, 1884).

(*Sulla rappresentazione dello spazio rigato con un sistema di coniche in un piano; Imagine piana dei complessi e delle loro intersezioni*, Rend. Ist. Lomb., II, 12, 1879; *Fondamenti per una geometria dello spazio composto di rette*, Mem. Ist. Lomb., III, 6, 1883) e discussa poi dal Segre (*Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette*, Torino, Atti, 20, 1885).

In due importanti memorie (*Zur Theorie der windschiefen Flächen*, Math. Ann., 8, 1875; *Ueber Complexe und Congruenzen*, Id., 9, 1876), in cui l'autore rivelò una non comune abilità di analista, il Voss determinò le singolarità degli enti propri alla geometria della retta, argomento che venne poi trattato con i metodi che gli sono propri (v. Cap. IX, n. 11) da H. Schubert (*Singularitäten des Complexe n^{ten} Grades*, Id., 12, 1877). Il Voss stesso si occupò poi anche della teoria delle quàdriche considerate come intersezioni di complessi lineari, nella memoria intitolata *Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades* (Id., 10, 1876).

Il numero delle rette dello spazio che soddisfanno a quattro date condizioni fu determinato e poi sfruttato dall' Halphen (*Sur le nombre des droites qui satisfont à des conditions données*, C. R., 68, 1869; *Sur les droites qui satisfont à des conditions données*, Id., 73, 1871, e 74, 1872; *Applications nouvelles d' une proposition sur les congruences de droites*, Bull. S. M. F., 1, 1873) (1).

La rappresentazione del complesso lineare sullo spazio punteggiato venne indicata per la prima volta da F. Klein nello scritto del Nöther, *Zur Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer complexen Variabeln* (Gött. Nachr., 1869); essa fu studiata dal Caporali prima (*Sui complessi e sulle congruenze di 2° grado*, Lincei Mem., III, 2, 1877-78) e poi dall'Aschieri (*Sopra la rappresentazione dei complessi di 1° grado nello spazio punteggiato*, Rend. Ist. Lomb. II, 14, 1881) e da Del Pezzo poi (*Intorno alla rappresentazione del complesso lineare di rette sullo spazio di punti a tre dimensioni*, Palermo Rend., 1, 1884-87). Differenti da queste sono le leggi di corrispondenza esposte dall' Aschieri nella memoria, *Sopra una classe di trasformazioni razionali in spazi a tre dimensioni* (Mem. Ist. Lomb., III, 2, 1879), da A. Porchiesi nella nota su *Una rappresentazione del complesso lineare sullo spazio ordinario* (Lincei Rend., IV, 1, 1885), e da R. Schumacher nel § 2 della sua *Classification der algebraischen Strahlensysteme* (Math. Ann., 37, 1890). Finalmente di rappresentazioni dello spazio rigato sopra una varietà lineare a

---

(1) Cfr. anche le due note dello stesso autore: *Sur le mouvement d' une droite* (Bull. S. M. F., 1, 1873), e *Sur le déplacement d' un solide invariable* (Id., 2, 1874).

quattro dimensioni trattano le seguenti memorie: F. Chizzoni, *Sulla corrispondenza univoca fra le rette di uno spazio ordinario e i punti di uno spazio lineare a quattro dimensioni* (Atti dell' Acc. Gioenia di Scienze naturali, III, 20, Catania, 1887); F. Aschieri, *Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni* (Lincei Mem., IV, 4, 1887); G. Loria, *Di due rappresentazioni univoche dello spazio rigato su una forma fondamentale di 4ª specie* (Giorn. di Mat., 27, 1889); M. Pieri, *Sulla geometria projettiva delle forme di 4ª specie* (Id., 28, 1890); M. Pannelli, *Sulla più semplice trasformazione birazionale dello spazio ordinario rigato in uno spazio lineare a quattro dimensioni* (Lincei Rend., IV, 6, 1890$_1$).

4. Il complesso lineare, avanti di dar materia al primo capitolo della nuova geometria di Plücker, era stato studiato da tre distinti geometri, cioè: da Gaetano Giorgini (1795-1874) (1) nel 1827 (v. la memoria *Sopra alcune proprietà de' piani de' momenti principali e delle coppie di forze equivalenti*, Mem. Soc. XL, 20, 1828), dal Möbius nel 1828 (2) (v. l'articolo *Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume*, Journ. f. Math., 10, 1833), finalmente da Chasles (*Mémoire de géométrie pure sur les systèmes des forces*, Corr. math., 6, 1830, e *Mémoire de géométrie sur deux principes* ecc., che fa seguito all' *Aperçu historique*) (3). Questi poi lo incon-

---

(1) Cfr. G. Loria, *Intorno a la vita e le opere di Gaetano Giorgini* (Giorn. di Mat., 31, 1893).

(2) Con maggiore precisione si può dire che fu il 5 febbraio 1828 il giorno della scoperta, da parte di Möbius, del complesso lineare.

(3) A questi tre geometri non isfuggì il significato del complesso lineare nella teoria dei moti infinitesimi e della composizione delle forze. Molti sviluppi relativi a tali argomenti si trovano nel Cap. I dei pregevoli *Mélanges de géométrie pure* (Paris, 1856) del de Jonquières.

Aggiungiamo che la relazione fra la geometria della retta e la meccanica fu anche rilevata da Plücker nella nota *Fundamental Views regarding Mechanics* (Phil. Trans., 156, 1866) e sviluppata più tardi dal Klein nella *Notiz betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie und der Mechanick starrer Körper* (Math. Ann., 4, 1871; cfr. anche W. Fiedler, *Geometrie und Geomechanick*, Wolf Zeitschr., 21, 1876) e più completamente R. Stawell Ball nell' opera intitolata *The Theory of Screws* (Dublin, 1876). Cfr. anche le note del Battaglini, *Sulla composizione delle forze*, *Sulla teoria dei momenti*, *Sulle serie di sistemi di forze* e *Sulle dinami in involuzione* (Napoli Atti e Rend., 1869), nonchè quelle dello stesso autore *Sul movimento geometrico infinitesimo di un sistema rigido* e *Sul movimento geometrico finito di un sistema rigido* (Napoli Rend., 1870).

Da ultimo va notato che la teoria dei complessi lineari ha somministrato alla Statica grafica una delle sue più eleganti teorie, quella delle figure reciproche. V.: Clerk Maxwell, *On Reciprocal, Figures and Diagrams of Forces* (Phil. Mag., 28, 1864) e *On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Forces* (Edinburgh Trans., 26, 1872); Culmann (1821-1881), *Lehrbuch der graphischen Statik* (Zürich, 1866); Cremona, *Le figure reciproche della statica grafica* (Milano, 1872); Hauck, *Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik* (Journ. f. Math., 100, 1887); Schur, *Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik* (Zeitschr. f. Math., 40, 1895).

trò nel corso di altre ricerche di geometria pura (v. la memoria intitolata *Propriétés nouvelles de l'hyperboloïde à une nappe*, Journ. de Math., 4, 1839), e si pose così alla testa del drappello di coloro che trattarono le questioni di geometria della retta senza servirsi di coordinate.

Che tale manipolo di combattenti sia in breve tempo divenuto una legione di prodi emerge dal seguente elenco di memorie: O. Hermes, *Ueber Strahlensysteme der ersten Ordnung und der ersten Classe* (Journ. f. Math., 67, 1867); T. Reye, *Lehrsätze über das Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse und den linearen Strahlencomplex* (Id., 69, 1868) (1), *Bemerkenswerthe Eigenschaft der Schraubenlinie* (Zeitschr. f. Math., 15, 1870), *Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse unde die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotempunkten* (Journ. f. Math., 86, 1879; *Ueber das Strahlensystem zweiter Klasse sechster Ordnung von der ersten Art* (Id., 93, 1882), *Ueber lineare und quadratische Strahlencomplexe und Complexen-gewebe* (Id , 95, 1883) e *Ueber die Singularitätenflächen quadratischer Strahlencomplexe und ihre Haupttangentencurven*, Id., 97, 1884 (2); Tognoli, *Intorno ad alcune questioni generali sulla teoria dei complessi, risolute col metodo geometrico puro* (Giorn. di Mat., 9, 1871); Silldorf, *Ueber das Strahlensystem n^{ter} Ordnung und 1^{er} Klasse und den linearen Strahlencomplex* (Zeitschr. f. Math., 20, 1875); F. Schur, *Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe 1. und 2. Grades* (Diss. Berlin, 1879, e Math. Ann., 15, 1879); Bertini, *Sui complessi di secondo grado* (Giorn. di Mat. 17, 1879) e *Sulla congruenza di 2ª ordine, 2ª classe e 1ª specie, dotata soltanto di superficie focale* (Lincei Trans., 1879); d'Ovidio, *Nota sulle proprietà fondamentali dei complessi lineari* (Torino Atti, 16, 1881); W. Stahl, *Das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse* (Journ. f. Math., 91, 1881), *Ueber das Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Klasse* (Id., 92, 1882), *Zur synthetischen Construction der Complexe zweiten Grades* (Id., 93, 1882), *Zur Polarentheorie der Complexe zweiten Grades* (Id., 94, 1883), *Ueber Strahlensysteme zweiter Ordnung* (Id., 95, 1883) e *Das Strahlensystem vierter Ordnung zweiter Klasse* (Id., 97, 1884); W. Fiedler, *Geometrische Mittheilungen*, II (Wolf Zeitschr., 24, 1882); A. Weiler, *Eine elementare Betrachtung über Strahlencongruenzen* (Zeitschr. f. Math., 31, 1886); G. Loria, *Rappresentazione su un piano delle congruenze* [2,6], *e* [2,7] (Torino Atti, 21, 1886); E. Waelsch, *Ueber ei-*

---

(1) Cfr. Walther, *Zur Theorie des Strahlenssystems 1. Ordnung 1. Classe und des linearen Stracklencomplezes. Analytische Ableitung einiger Sätze von Reye* (Diss. Leipzig, 1889).

(2) A queste va unita la memoria che lo stesso autore pubblicò in Journ. f. Math., 98 e che nominammo nel n. prec.

ne Strahlencongruenz beim Hyperboloider (Wiener Ber, 95, 1887); C. Arnoldt, *Einige Untersuchungen über quadratische Strahlencomplexe* (Diss. Strassburg, 1887); Küpper, *Die Schraubenbewegung, das Nullsystem und der lineare Complexe* (Monatshefte, 1, 1890), *Ueber benachbarte, windschiefer Strahlen im linearen Complexe* (Ivi) e *Geometrische Betrachtungen über den Strahlencomplex und die Congruenz* (Prager Abh., VII, 5, 1891); Fouret, *Sur les congruences de droites du premier ordre et de la première classe* (Bull. S. M. F., 19, 1891); Zindler, *Ueber Büschel linearer Complexe* (Monatshefte, 3, 1892); A. Demoulin, *Sur la congruence des axes centraux des complenes linéaires passant par trois droites données* (Bull. S. M. F. 21, 1893); Borgmeyer, *Geometrische Untersuchungen über den Ort der Fusspunkte der Lote welche von einem Punkte auf die Strahlen einer linearen Congruenz gefällt werden* (Diss. Münster, 1893); Franel, *Note sur les complexes linéaires* (Vierteljahrsschrift d. naturf. Ges. in Zürich, 40, 1895).

E non sapremmo chiuder meglio questa enumerazione che citando la estesa opera di R. Sturm, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung* (1), in cui non soltanto sono fatte conoscere nuove vedute, proposizioni importanti e una migliore nomenclatura, ma sono esposti con buon ordine i frutti più cospicui che furono raccolti nel campo che andiamo percorrendo.

Non è fuor di proposito aggiungere qui l' *Application de la théorie des complexes linéaires à l' é ude des surfaces et des courbes gauches* (Ann. Éc. norm., II, 6, 1877) del Picard, ed il notare che alla geometria della retta sono stati applicati i metodi analitico-geometrici di Hamilton e Grassmann, come lo provano i seguenti scritti: Genty, *Mémoire de géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure* (Journ. de Math., III, 8, 1882); A. Buchheim, *On the Application of Quaternions to the Theory of the Linear Complex and the Linear Congruence* (Mess., II, 12, 1883) e *On the Quaternion Treatment of the Linear Complex* (Id., 13, 1884); Gorton, *Systems of Rays Normal to a Surface* (Am. Journ., 13, 1890); E. Müller, *Die*

(1) I. Theil: *Der lineare Complex oder Strahlengewinde und der tetraedrale Complex* (Leipzig, 1892); II. Theil: *Die Strahlencongruenzen erster und zweiter Ordnung* (1893; cfr. Martinetti, *Su un problema di geometria numerativa relativo alle congruenze lineari*, Riv. di Mat., 3, 1893); III. Theil: *Die Stahlenkomplexe zweiten Grades* (1896; cfr. la nota preventiva *Ueber den allgemeinen Complex zweiten Grades* (Berliner Ber., 1894) e la complementare *Die Komplenpunktpeare und die kosingulière komplese eines komplenes zweiten Grades*, (Arch. Math. Phys., III, 22, 1913). Una correzione ad un passo dell'opera dello Sturm trovasi nella nota di K. Zindler, *Eine neue Erzeugungweise des linearen Complexes durch zwei Rotationen* (Deutsch. Math. Ver. 4, 1894).

Liniengeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre (Monatshefte, 3, 1892).

5. Accanto alla copiosa collezione di lavori dovuti all'impulso dato da Plücker, fa mestieri descriverne un'altra di indole differente. Essa abbraccia per dirlo in breve la « geometria differenziale dello spazio rigato »; essa trae le proprie origini dalle ricerche di Monge e dei suoi discepoli intorno alle normali di una superficie di cui abbiamo fatto cenno nel n. 4 del Cap. V (1) e da quelle generali del Malus e del Dupin, ricordate in fine del n. 5 del Cap. stesso, sopra i sistemi di raggi rettilinei. Tali indagini vennero continuate in Francia dal Gergonne (*Recherches sur les surfaces caustiques*, Ann. de Math., 16, 1825-26), dal Quetelet (*Sur une nouvelle manière de considérer les caustiques, produites soit par réflexion soit par réfraction*, Belgique Mém., 3, 1826, e *Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques, suivie de différentes applications à la théorie des projections stéréographiques*, Id., 4, 1827), da C. Sturm (*Mémoire d'optique*, Journ. de Math., 3, 1838, e *Sur la théorie de la vision*, C. R., 20, 1845); cfr. Lévistal (1838-1874), *Recherches d'optique géométrique*, Ann. Éc. norm., 4, 1867), da A. Transon (*Mémoire sur les propriétés d'un ensemble de droites menées de tous les points de l'espace suivant une loi quelconque*, Journ. Éc. pol., 38° cah., 1861); in Inghilterra esse lo furono da W. R. Hamilton (*Theory of Systems of Rays*, Irish. Trans., 15 1828; 16, 1830-31; 17, 1837; vedasi anche Cayley, *On the Condition for the Existence of a Surface cutting at Right Angle a given Set of Lines* Proc. L. M. S., 8, 1876-77). Agli studi di quest'ultimo dobbiamo se Kummer si è occupato della teoria di cui andiamo descrivendo le fasi di svolgimento, apportandovi delle modificazioni così radicali da chiudere un'èra per aprirne un'altra.

La prima delle memorie di quel grande matematico sui sistemi di ∞^2 rette (*Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme*, Journ. f. Math., 57, 1860) ha, come dichiara l'autore, « lo scopo di far entrare la teoria dei sistemi di raggi, trattata per la prima volta da Hamilton, nel campo della geometria analitica dello spazio, erigendola sopra una nuova base, ed in pari tempo di completarla in certi punti importanti ». Fra le innovazioni da lui apportate vanno segnalati il concetto e la misura di « densità di un sistema di raggi », quantità che, pei sistemi di raggi costituiti dalle normali ad una superficie, coincide colla misura della curvatura di questa. « Si vede anche qui (osserva Kummer) che i concetti introdotti nella scienza da Gauss hanno

(1) Ricordiamo anche le già nominate memorie del Mannheim (v. Cap. V, n. 10), del Lilienthal e del Guichard (Id., n. 14).

di regola quei caratteri di vera generalità, grazie ai quali essi esercitano la loro influenza assai più in là del campo pel quale furono originariamente creati ».

A dimostrare che questo lavoro del grande geometra tedesco, non soltanto non passò inosservato, ma esercitò un' azione salutare, citeremo gli scritti seguenti che da esso rampollano: Möbius, *Geometrische Entwickelung der Eigenschaften unendlich-dünner Strahlenbündel* (Leipziger Ber., 14, 1862); P. Zech, *Die Geometrie unendlich dünner Strahlenbündel und die Affinität ebener Systeme* (Zeitschr. f. Math., 17, 1872); L. Matthiessen, *Neue Untersuchungen über die Lage der Brennlien unendlich dünner copulirter Strahlenbündel gegen einander und gegen einen Hauptstrahl* (Id., 29, 1884; v. anche Acta, 4, 1884); Blasendorff, *Ueber die Beziehungen zwischen zwei allgemeinen Strahlensystemen, von welchen das eine durch die verschiedensten Reflexionen und Brechungen in Medien mit beliebiger Wellenfläche aus dem anderen hervorgegangen ist* (Diss. Berlin, 1883); Weingarten, *Note über die Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels* (Journ. f. Math., 98, 1885); Bianchi, *Sui sistemi doppiamente infiniti di raggi* (Ann. di Mat., II, 15, 1887) (1); Hensel, *Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel* (Journ. f. Mat., 102, 1888); Gorton, *Line Congruences* (Am. Journ., 10, 1888); Issaly, *Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites* (Bull. S. M. F., 16, 1888) e *Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces* (Id., 17, 1889); Cayley, *On Systems of Rays* (Mess., II, 17, 1887) e *On the Analytical Theory of the Congruency* (Proc. L. M. S., 23, 1892); Guichard, *Détermination des congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale* (C. R., 110, 1890) e *Sur les congruences dont la surface moyenne est un plan* (Id., 114, 1892); Cosserat, *Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces* (Toulouse Ann., 1893) e *Sur les congruences rectilignes et sur le problème de Ribaucour* (C. R., 118, 1894; Demoulin, *Sur une propriété métrique commune à trois classes particulières de congruences rectilignes* (Id., 118, 1894); Waelsch, *Sur le premier invariant différentiel projectif des congruences rectilignes* (C. R., 118, 1894).

6. Di non minore originalità della memoria di Kummer analizzata nel n. preced., è ricca l'altra, dello stesso geometra, *Ueber die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung* (Berliner Abh., 1866) (2), nella quale l'autore, con abilità straordinaria, pervenne a de-

(1) Sono ivi studiate le congruenze assai notevoli per le quali è costante tanto la distanza dei fuochi quanto quella dei punti limiti.

(2) Cfr. A. Weiler, *Ueber die Kummer'sche Darstellung der Strahlensysteme zweiter Ordnung* (Wolf Zeitschr., 29, 1884).

terminare tutti i sistemi algebrici doppiamente infiniti di raggi di ordini 1 e 2, le equazioni che rappresentano essi e le loro superficie focali (sono le superficie di quarto ordine con punti singolari di cui abbiamo fatto cenno nel n. 8 del Cap. III), le singolarità di quelli e di queste, le configurazioni a cui dànno luogo i loro punti e i loro piani eccezionali. Questi pregi, aggiunti alla perfezione dello stile di Kummer, fecero ben presto ascrivere il lavoro in discorso fra le scritture classiche.

A stabilire diversamente le verità insegnate nell' or citata scrittura s' industriarono parecchi geometri; sono in parte i sintetici che ricordammo nel n. 4, in parte quelli che studiarono le speciali forme di rette di cui parleremo nel n. seg. Qui va notato che alcune aggiunte alle relazioni scoperte da Kummer fra i numeri delle singolarità di una congruenza si leggono nella memoria di U. Masoni, *Sui connessi conici ed in particolare sui sistemi di rette del 2° ordine* (Napoli Rend., 22, 1884); altre non meno importanti sono dovute a R. Sturm e R. Schumacher (1), le quali arrecarono un notevole perfezionamento ai risultati dianzi conseguiti, perchè condussero alla scoperta di nuovi ed interessanti sistemi di raggi; esse sono esposte metodicamente nel secondo volume dell' opera di maggior lena (v. pag. 188) del primo dei prelodati geometri, ma entrarono nel dominio del pubblico, qualche anno più presto, grazie alle seguenti memorie: Sturm, *Ueber die Zahl und Lage der singulären Punkte bei den Strahlencongruenzen zweiter Ordnung* (Götting. Nachr., 1888), *Eintheilung der Strahlencongruenzen zweiter Ordnung mit Brenn-oder singulären Linien* (Math. Ann., 36, 1889) e *Ueber die sogenannten Sthralen-Congruenzen ohne Brennfäche* (Hamburger Mitth., 2, 1889); R. Schumacher, *Classification der algebraischen Strahlensysteme* (Math. Ann., 37, 1890) e *Zur Eintheilung der Strahlencongruenzen 2. Ordnung mit Brenn-oder singulären Linien* (Id., 38, 1891).

Questi scritti segnarono il termine della pausa nella produzione di lavori originali che tenne dietro alle memorie di Kummer; e fra le scritture che debbono venir citate come ulteriore sintomo di tale risveglio vanno ricordate segnatamente le seguenti del Montesano: *Su una congruenza di rette di 2° ordine e di 4ª classe* (Torino Atti, 27, 1892); *Su due congruenze di rette di 2° ordine e di 6ª classe* (Lincei Rend., V, 1, 1892_2); *La rappresentazione su di un piano delle congruenze di rette di secondo ordine dotate di linea singolare* (Palermo Rend., 7, 1893).

---

(1) Al Schumacher la geometria della retta è debitrice di un importante progresso, l' introduzione cioè di un terzo numero, oltre l' ordine e la classe, per caratterizzare completamente una congruenza; è quel numero che egli chiama *Art* e che lo Sturm preferì designare col nome di *Rang*.

7. Fra i complessi speciali venne particolarmente studiato quello di secondo grado la cui superficie singolare è costituita dalle facce e dai vertici di un tetraedro. Se ne occupò per primo (nel caso generale ed in un caso speciale notevole offerto dalla geometria metrica delle quadriche) il Reye in *Die Geometrie der Lage* (la cui prima edizione risale al 1868) (1); donde il nome di « complesso di Reye » sotto cui vien talvolta designato invece che sotto quello più espressivo di « complesso tetraedrale ». In seguito esso fu studiato nei lavori seguenti; S. Lie, *Ueber die Reciprocitätsverhältnisse des Reye'schen Complexes* (Götting. Nachr., 1870); A. Weiler, *Eine Abbildung des tetraedralen Complexes auf den Punktraum* (Zeitschr. f. Math., 22, 1877) e *Ueber den Reye'schen Axencomplex* (Id., 28, 1883); F. Aschieri, *Sui complessi tetraedrali* (Rend. Ist. Lomb., II, 12, 1879); G. Battaglini, *Sui complessi di 2° grado* (Giorn. di Mat., 17, 1879); G. Loria, *Intorno alla geometria su un complesso tetraedrale* (Torino Atti, 19, 1884); F. Machovec, *Beiträge zu den Eigenschaften des Axencomplexes der Flächen zweiten Grads und des allgemeinen tetraedralen Complexes* (Prager Ber., 1886); Ameseder, *Ueber die linearen Transformationen des tetraedralen Complexes in sich* (Wiener. Ber., 98, 1888) (2). I casi particolari, dal punto di vista della geometria projettiva, che può presentare il complesso in questione si trovano determinati e descritti nella nota *Su le corrispondenze projettive fra due piani e fra due spazi* (Giorn. di Mat., 23, 1884) di G. Loria.

Un altro speciale complesso quadratico è quello di cui Battaglini studiò come complesso quadratico generale (3); lo si chiama « complesso di Battaglini », o, poichè la sua superficie singolare è un tetraedroide di Cayley (v. Cap. III, n. 11), « complesso tetraedroidale ». Le sue principali proprietà specifiche si trovano dimostrate negli scritti seguenti: Aschieri, *Sopra un complesso di 2° grado* (Giorn. di Mat., 8, 1870) e *Sopra un particolare complesso di rette del secondo grado* (Bologna Mem., III, 10, 1879); Segre, *Sopra una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di Battaglini* (Id., 21, 1883); Schur, *Ueber einen das System zweier Flächen zweiten Grades betreffenden Satz* (Math. Ann., 21, 1883) (4); C. Segre e G. Loria, *Sur les différentes espèces de com-*

---

(1) V. a questo proposito la notizia storica inserita dal Reye nella 3ª ed. della sua opera (II Abth., Leipzig, 1892, p. 147-148).

(2) Si può unire a questi lo scritto di G. Scheffers sopra *Eine Abbildung der Geraden des Raumes in der Ebene* (Leipziger Ber., 47, 1895), ove una speciale rappresentazione delle rette dello spazio sopra le coppie di rette del piano viene applicata allo studio del complesso di cui ora discorriamo.

(3) La sua equazione non contiene che i quadrati delle coordinate tetraedriche di una retta.

(4) Cfr. Franel, *Sur le systeme de quatre droites dans l'espace* (Vierteljahrschrift d. Naturf. Ges. zu Zürich, 39, 1894).

plexes du 2e degré de droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre (Id., 23, 1884); Weiler, *Bemerkungen über einige Complexe* (Zeitschr. f. Math., 29, 1884); Ernst, *Ueber Complexe zweiten Grades welche durch Flächenpaare 2. Grades erzeugt werden* (Diss. München, 1885); Montesano, *Su alcuni complessi di rette Battaglini* (Napoli Rend., 25, 1886); F. Hofmann, *Die synthetischen Grundlagen der Theorie des Tetraedroids-Complex* (Arch. der Math. II, 5, 1887). Di un caso speciale metrico del complesso di Battaglini si occuparono il Painvin (*Étude d'un complexe du second ordre*, Bull. Sc. math., 2, 1870, o Nouv. Ann., II, 11, 1872; *Étude d'un système de rayons*, Journ. de Math., II, 19, 1874) ed il Demoulin (*Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires*, Bull. S. M. F., 20, 1892) (1).

Alla geometria metrica devono anche la loro origine i complessi che si trovano studiati nella nota di C. Segre *Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes* (Journ. f. Math., 27, 1884), negli scritti dello Schoute *Sur un complexe du troisième ordre* (Ass. fr., 1887), *Étude géométrique d'un complexe* (C. R., 104, 1887) e *Sur le complexe des droites dont les distances à deux droites données sont entre elles dans un rapport constant* (Ann. de l'Éc. pol. de Delft, 3, 1887), nella Diss. di J. B. Eck, *Ueber die Vertheilung der Axen der Rotationsflächen 2. Grades, welche durch gegebene Punkte gehen* (Münster, 1890), nella memoria di F. Enriques sopra *Alcune proprietà metriche dei complessi di rette e in particolare di quelli simmetrici rispetto ad assi* (Pisa Ann., 1891), nell' *Étude* del Rouquet *d'un complexe du sixème ordre* (Toulouse Ann., 3, 1891 (2), nella Diss. di H. Menzel *Ueber die Bewegung einer starren Geraden welche mit mehreren von ihren Punkten in festen Ebenen oder auf festen Geraden gleitet* (Münster, 1891), e nella memoria di E. Cosserat *Sur une classe de complexes de droites* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, IX, 4, 1892).

Citeremo ancora la nota di A. Weiler, *Die Involution auf einer Raumcurve dritter Ordnung und der daraus entstehende Complex* (Zeitschr. f. Math., 24, 1879) (3), lo studio *Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati dalle intersezioni dei complessi corrispondenti in due o più fasci projettivi di complessi lineari* (Piazza Armerina, 1882) del Roccella, ed il lavoro

(1) I matematici francesi sogliono chiamare « complesso di Painvin » appunto l'insieme delle rette da cui escono coppie di piani ortogonali di una quadrica.

(2) Si tratta del luogo delle direttrici delle sezioni piane d'una quadrica.

(3) È ivi studiato il complesso di terzo grado che si ottiene considerando le ∞^1 congruenze, ognuna delle quali ha per direttrici le tangenti a una cubica gobba in due suoi punti che si corrispondano in un'involuzione stabilita su di essa.

del Montesano, *Sui complessi di rette di secondo grado generati da due fasci projettivi di complessi lineari* (Napoli, 1886), il quale, al pari della nota dell'Aschieri intitolata *Di una particolare corrispondenza univoca fra elementi di spazi a tre dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 13, 1880), si riferisce ai complessi di 2° grado aventi per superficie singolare una rigata di 4° grado; così dicasi delle note del Weiler, *Die Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen* (Zeitschr. f. Math., 27, 1882, e 29, 1884) e *Einfache Erzeugung einiger Complexe zweiten grades* (Journ. f. Math., 95, 1883). Finalmente il lavoro del Kluyver *Sur les complexes des génératrices d'un réseau de quadriques* (Nieuw arch. voor wiskunde, 19, 1892), ha comune il tema con quello del Montesano *Su di un complesso di rette di terzo grado* (Bologna, Mem., V, 2, 1892).

8. Dobbiamo ora far menzione degli studî fatti intorno a speciali congruenze di ordine o classe superiore al secondo, a complemento dell'elenco dato precedentemente nel n. 4: Irmer, *Ueber Strahlensysteme dritter Ordnung mit Brenncurven* (Diss. Halle, 1870); Kummer, *Ueber diejenigen Flächen welche mit ihren reciprok polaren Flächen von gleicher Ordnung sind und dieselben Singularitäten besitzen* (Berliner Ber., 1878); T. Archer Hirst (1830-1892), *On Congruences of the Third Order and Class* (Proc. L. M. S., 16, 1885) e *Sur la congruence Roccella du troisième ordre et de la troisième classe* (Palermo, Rend., 1, 1884-87); Schumacher, *Untersuchungen über das Strahlensystem 3. Ordnung und 2. Classe ausgehend von den in ihm enthaltenen Regelflächen* (Diss. München, 1885); Sturm, *Ueber Strahlencongruenzen von gleichem Bündel-und Feld grade* (Journ. f. Math., 101, 1887); Bordiga, *Di una certa congruenza del terzo ordine e della sesta classe dello spazio ordinario* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_2); Kluyver, *Sur des systèmes de rayons déduits de quatre droites données dans l'espace* (Archives Néerlandaises des sciences, 25, 1891); Fouret, *Sur la génération des congruences de droites du premier ordre et de classe quelconque* (Palermo Rend., 6, 1892); del Re, *Sopra un sistema di rette* (3, 4) (Lincei Rend., V, 2, 1892_2); Demoulins, *Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données* (Bull. S. M. F., 21, 1893) (1); Fano, *Sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare* (Torino Atti, 29, 1894); Visalli, *Sulle congruenze di grado n che si possono rappresentare*

(1) Questa congruenza, insieme ad una congruenza lineare, forma la completa insersezione di due complessi quadratici; ciascuno di questi è l'insieme delle rette da cui partono coppie di piani tangenti ortogonali di una quidrica, cioè un « complesso di Painvin ».

sopra un piano (Lincei Rend., V, 4, 1895_1) e *Sopra alcune congruenze di grado* n *dotate di una curva gobba singolare di ordine* n (Ivi).

9. Chiuderemo questo Cap. notando che la teoria delle corrispondenze, di cui diffusamente ci occuperemo nel Cap. seg., condusse a parecchie classi di congruenze speciali notevoli. Tali sono quelle che nascono congiungendo i punti di una superficie omaloide ai loro corrispondenti di un piano rappresentativo (v. Caporali, *Sopra alcuni sistemi di rette*, Napoli, Rend., 18, 1879), tali quelle più generali che il Pannelli ha studiato nella memoria, *Sopra le congruenze generate da due superficie i cui punti si corrispondono univocamente* (Lincei Mem., IV, 6, 1889) (1). Tali sono pure le congruenze (dette « cremoniane ») ottenute congiungendo i punti corrispondenti di due piani in corrispondenza univoca e trattate dall' Hirst (*On Cremonian Congruences*, Proc. L. M. S., 14, 1883; *On the Cremonian Congruences which are contained in a Linear Complex*, Id., 17, 1886) (2), e le analoghe studiate da I. Conti nella memoria *Sulle congruenze generate da una coppia di piani in corrispondenza doppia* (Palermo Rend., 1, 1884-87, e 2, 1888) e dal Visalli in quella *Sulle congruenze generate da due piani punteggiati in corrispondenza* (1, ν) (Rend. Ist. Lomb., II, 28, 1895).

Un' origine analoga hanno le investigazioni sull' insieme delle rette che sono incidenti con due elementi corrispondenti di due piani correlativi; esse vennero fatte prima dall' Hirst (*On the Complexes Generated by two Correlative Planes*, Coll. Math., 1881) e poi di nuovo da F. Deruyts (*Construction d'un complexe de droites du second ordre et de la seconde classe*, Belgique Bull., III, 24, 1894), al quale sembra sia sfuggito di avere avuto nell'Hirst un predecessore; più generalmente, se un piano punteggiato ed un piano rigato sono in corrispondenza univoca di grado superiore al primo e si considerano le rette incidenti con due elementi corrispondenti, si ottiene un complesso che appartiene a quelli della categoria a cui è dedicata la nota del Visalli *Sui complessi generati da due piani in corrispondenza birazionale reciproca* (Lincei Rend., V. 4, 1895_1).

---

(1) Per un caso speciale v. A. del Re, *Sulle congruenze* (6, 2) *delle rette che uniscono le coppie di punti omologhi di due quadriche, che si corrispondono in una determinata omografia* (Palermo Rend., 1, 1884-87).

(2) Cfr. anche la memoria di G. Loria, *Su gli enti geometrici* ecc. citata nel n. 14 del Cap. III e di più: E. Schöner, *Untersuchungen über das durch zwei kubisch verwandte Ebenen erzeugte Strahlensystem* (Diss. München, 1888) e A. del Re, *Sopra i sistemi di rette Cremoniani* (Lincei-Rend., V, 3, 1893_2).

CAPITOLO VIII.

Corrispondenze, rappresentazioni, trasformazioni.

1. Fra due varietà esiste una corrispondenza se ad ogni elemento dell'una è associato un elemento od un gruppo di elementi dell'altra; affinchè a due elementi contigui dell'una corrispondano due elementi contigui dell'altra fa mestieri, come dimostrò G. Cantor (1845-1921) (1), che le due varietà abbiano lo stesso numero di dimensioni, nel qual caso la corrispondenza è « continua » (2). Gli è alle trasformazioni continue che di regola il geometra limita le proprie considerazioni (3).

È impossibile dire a chi spetti il merito di avere concepita la possibilità e vista l'utilità di stabilire fra due figure una corrispondenza la quale abiliti a dedurre le proprietà dell'una da quelle dell'altra; infatti già nei *Luoghi piani* di Apollonio Pergeo esistono tracce non dubbie di speciali trasformazioni geometriche (4). Ma è nel corso del XIX Sec. che vennero formulati i concetti generali di corrispondenza fra due figure, di rappresentazione di una figura su un'altra, di trasformazione di quella in questa, e venne riconosciuta la parte fondamentale che essi hanno diritto di rappresentare nella matematica tutta, specialmente nel caso in cui la relazione sia univoca (5).

Tale è la corrispondenza projettiva (collineazione o correlazione) in cui ad ogni forma fondamentale contenuta in una delle varietà studiate corrisponde nell'altra una forma fondamentale della stessa specie (omonima o non). Allo studio di essa prelude quello della proiezione da un centro sopra un piano, che fu fatto, forse per la prima volta, da Cristoforo Griensberger (1561-1636)

(1) A. Schoenflies, *Zur Erinnerung an Georg Cantor* (Deutsch. Math. Ver., 31, 1922).

(2) V. la raccolta di memorie del Cantor in *Acta*, 2, 1883.

(3) Di indole differente sono la corrispondenza stabilita da Hesse, nella nota intitolata *Ein Uebertragungsprincip* (Journ. f. Math., 66, 1866), fra i punti di un piano e le coppie di punti d'una retta, e l'analoga, suggerita dall'Hirst (*On the Representation of Points in Space by Triplets of Points on a Line*, Proc. L. M. S., 2, 1869), fra i punti dello spazio e le terne di punti di una retta. L'utilità di tali rappresentazioni non fu peranco dimostrata.

(4) Cfr. l'Appendice al II Libro della mia opera già citata sopra *Le scienze esatte nell'antica Grecia*.

(5) È bene tener presente che nel campo algebrico l'utilità delle trasformazioni era stata avvertita assai prima; si rammentino infatti le numerose trasformazioni che furono suggerite per risolvere un'equazione, eseguire delle quadrature, o integrare delle equazioni differenziali. Nè va disconosciuta la parentela strettissima esistente fra i concetti funzione e corrispondenza.

nello scritto intitolato *Prospectiva nova coelestis* (Roma, 1612) (1) e poi, con la massima larghezza da Poncelet (al quale si deve il nome di « omologia » per la proiezione centrale), nel suo grande *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris, 1822) (2). La teoria generale della collineazione venne anche efficacemente preparata da molti altri lavori, l'analisi dei quali è uno dei principali intenti dell' *Aperçu historique* di M. Chasles; ma fu studiata in tutta la generalità che comporta dal Möbius (*Der barycentrische Calcul*, Leipzig, 1827), dal Magnus (1790 - 1861) (*Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie der Ebene*, Berlin, 1833) e dallo Chasles (1837) nell'opera testè ricordata. Essa venne poi rifatta con altri intendimenti in epoca a noi più vicina dal Richelot (*Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten*, Journ. f. Math., 70, 1869) e da G. Wenzel (*Ueber die einfachste allgemeine Beziehung zwischen räumlichen Gebilden*, Diss. Breslau, 1870). Inoltre alcune cospicue proprietà metriche di cui essa gode vennero scoperte da H. J. S. Smith e dal Reye, come si apprende dalle note *On the Focal Properties of Homographic Figures* (Proc. L. M. S., 2, 1868) del primo (3) e dall'articolo *Ueber die focale Eigenschaften collinearer Figuren* (Math. Ann., 46, 1895) del secondo.

2. Esaurita la determinazione delle proprietà generali della corrispondenza proiettiva e compiuto l'esame di tutti i suoi casi particolari dal punto di vista descrittivo e dei più interessanti casi notevoli offerti dalla geometria metrica, non si mancò di osservare essere importante studiare le trasformazioni proiettive godenti di proprietà speciali, sia considerate in sè, sia rispetto a certe altre figure; ad esempio quelle trasformazioni che, ripetute più volte, riconducono un punto qualsivoglia alla posizione di partenza (4), o quelle che fanno corrispondere ad un elemento di una certa figura un altro elemento della stessa.

Le prime sono le « proiettività cicliche », di cui trattano gli scritti seguenti: F. Klein, *Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie* (Götting. Nach., 1872 o Math. Ann., 22, 1883); Lüroth, *Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, Zweite Abhandlung* (Mah., Ann., 11, 1877) e *Ueber cyklisch-projectivische Punktgruppen in der Ebene*

---

(1) R. Wolff, *Geschichte der Astronomie* (München, 1877), p. 387.

(2) Cfr. i nn. 23 e 24 della memoria di Jacobi *De transformatione integralis duplicis indefiniti* etc. (Journ. f. Math., 8, 1832).

(3) Si connette a questo l'altro articolo dello stesso autore *On the Focal Properties of Correlative Figures* (Proc. L. M. S., 3, 1869).

(4) Le più semplici fra queste sono le involutorie delle quali si occupò *ex-professo* Möbius nella *Theorie der collinearen Involution von Punctpaaren in einer Ebene und im Raume* (Leipziger Ber., 8, 1856).

und im Raume (Id., 13, 1878); Schröter, *Ueber cyklisch-projective Punktquadrupel in zwei collinearen Räumen* (Id., 20, 1882); H. Wiener, *Reingeometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden* (Darmstadt, 1885); Ameseder, *Theorie der cyklischen Projectivitäten* (Wiener Ber., 98, 1889) e *Die Quintapellage collinearer Räume* (Ivi).

Le altre sono suscettibili di infinite forme, ogni figura che ammette una trasformazione proiettiva in sè stessa potendo dar luogo ad una di esse. Furono già studiate quelle che mutano in sè stesse una quàdrica, un complesso lineare od una cubica gobba; il lettore desideroso di informazioni sull'argomento deve ricorrere — oltre che alla memoria di Caporali e del Pezzo citata in nota al n. 2 del Cap. prec. e ad alcuni lavori di del Re e Brambilla nominati nel n. 7 del Cap. IV — ai seguenti scritti: Frahm, *Ueber eine Classe von linearen Transformationen* (Tübingen, 1873); Voss, *Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen* (Math. Ann., 13, 1878); C. Segre, *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale* (Torino Mem., II. 37, 1885); R. Sturm, *Ueber Collineationen und Correlationen, welche Flächen 2. Grades oder cubische Raumcurven in sich selbst transformiren* (Math. Ann., 26, 1886); Montesano, *Su le correlazioni polari dello spazio rispetto alle quali una cubica gobba è polare a sè stessa* (Lincei Mem, IV, 3, 1886).

Prima di abbandonare le corrispondenze proiettive citeremo ancora le seguenti memorie che, da vari punti di vista e con intenti differenti, risolvono questioni, fondamentali o complementari, che ad esse si riferiscono: R. Sturm, *Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades* (Math. Ann., 1, 1869) (1), *Das Problem der räumlichen Projectivität* (2) (Id., 6, 1873), *Das Problem des Collineat on* (Id., 10. 1876) (3), *Vereinfachung des Problems der räumlichen Projectivität* (Id., 15, 1879), *Ueber Collineation und Correlation* (Id., 22, 1883), *Ueber gleiche Punkreihen*,

---

(1) Il « problema della proiettività piana » si enuncia come segue: Dati in un piano due gruppi ognuno di n punti, i cui elementi si corrispondano univocamente, trovare altri due punti di quel piano, dai quali proiettando quei due gruppi si ottengano due fasci di raggi fra loro proiettivi, essendo omologhi due raggi che proiettano due dei dati punti fra loro corrispondenti.

(2) Il « problema della proiettività solida » è il seguente: Dati nello spazio due gruppi ognuno di n punti, i cui elementi si corrispondano univocamente, trovare due rette, dalle quali proiettando quei due gruppi si ottengano due fasci di piani fra loro proiettivi, essendo omologhi due piani che proiettano due dei dati punti fra loro corrispondenti.

(3) Ecco in che cosa consiste il « problema della collineazione »: Dati nello spazio due gruppi ognuno di n punti, i cui elementi si corrispondano univocamente, trovare due punti dai quali proiettando quei due gruppi si ottengano due stelle di raggi fra loro proiettive, essendo omologhi due raggi che proiettano due dei punti dati fra loro corrispondenti.

È chiaro che le corrispondenze di ordine superiore al primo, di cui parleremo fra poco, dànno luogo a problemi analoghi a quelli enunciati in questa nota e nelle due precedenti; essi però, a quanto ci consta, non vennero peranco trattati.

Ebenenbüschel, Strahlenbüschel, bei collinearen Räumen (Id., 28, 1887) e *Zur Theorie der Collineation und Correlation* (Ivi); S. Kantor, *Ueber successive lineare Transformationen* (Wiener Ber., 82, 1880) e *Ueber die allgemeinsten linearen Systeme linearer Transformationen bei Coincidenz gleichartiger Träger und successive Anwendung der Transformationen* (Wiener Denk., 46, 1882); Rosanes, *Ueber linearabhängige Punksysteme* (Journ. f. Math., 88, 1880), *Zur Theorie der reciproken Verwandtschaften* (Id., 90, 1881), *Ueber abhängige Punktsysteme und deren Bedeutung für die reciproke Verwandschaft zweier Ebene* (Id., 95, 1883), *Zur Theorie gewisser abhängiger Punktgruppen im Raumê* (Id., 100, 1887) e *Erweiterung eines bekannten Satzes auf Formen von beliebig vielen Veränderlichen* (Math. Ann., 23, 1884); Pasch, *Zur Theorie der Collineationen und der Reciprocität* (Ivi), e *Ueber Viereck, Vierseit und projective Verwandschaft in der Ebene* (Id., 26, 1886); C. Stéphanos, *Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques* (Id., 23, 1884) (1); Goldschmitd, *Coniugierte Reciprocitäten* (Zeitschr. f. Math., 30, 1885); London, *Ueber polare Fünfflache und Sechsflache räumlicher Reciprocitäten* (Diss. Breslau, 1886); Kraus, *Die geometrische Deutung von Invarianten ebener Collineationen* (Diss. Giessen, 1886); C. Segre, *Note sur les homographies binaires et leur faisceaux* (Journ. f. Math., 100, 1887) (2); P. Muth (1860-1907), *Die geometrische Deutung von Invarianten räumlicher Collineationen und Reciprocitäten* (Math. Ann., 33, 1889) e *Ueber Covarianten ebener Collineationen* (Id., 40, 1892); H. Küppers, *Kollineationen durch welche fünf gegebene Punkte des Raumes in dieselben fünf Punkte transformiert werden* (Diss. Münster, 1890); H. Wiener, *Ueber geometrische Analysen* (Leipziger Ber., 42, 1890, e 43, 1891) e *Ueber die aus zwei Spiegelungen zusammengesetzen Verwandschaften* (Ivi); Reye, *Ueber symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandschaften* (Math. Ann. 43, 1893) (3); White, *On Generating Systems of Ternary and Quaternary Linear Trasformations* (Am. Journ., 14, 1892); M. Böcher (1867-1918) (4) *Einige Sätze über projective Spiegelungen* (Math. Ann., 43, 1893).

---

(1) In questa memoria è per la prima volta applicato con ottimo successo il calcolo con simboli di trasformazioni geometriche, calcolo di cui altri si servì poi ad ottenere nuovi importanti risultati.

(2) V. anche A. Sannia (1822-1891), *Lezioni di geometria projettiva* (1ª ed., Napoli, 1891, 2ª ed., Ivi, 1895).

(3) V. pure la 3ª edizione di *Die Geometrie der Lage*.

(4) P. D. Bickhoff, *The scientific work of Maxime Böches* (Bull. Am. M. S., 25, 1919); W. F. Osgood, *The life and services of Maxime Böches* (Ivi).

3. Due, come dicemmo, sono le proprietà caratteristiche di una trasformazione proiettiva; cioè l'avere: 1° ogni punto un corrispondente determinato ed unico, 2° ogni forma fondamentale per corrispondente una forma della stessa specie (omonima o non secondochè si tratti di collineazione o di correlazione). Sopprimendo la prima di queste condizioni si ottengono le corrispondenze multiple di cui tratteremo nei nn. 6 e 12 dell'attuale Cap., sopprimendo la seconda si arriva alle corrispondenze univoche d'ordine superiore al primo delle quali, per quanto concerne il piano, ci occuperemo ora.

Un esempio notevolissimo di tali corrispondenze venne offerto nel 1822 da Poncelet, il quale, nel suo famoso *Traité*, si occupò della relazione che esiste fra le coppie di punti di un piano che sono coniugati rispetto a tutte le coniche di un fascio, relazione in virtù della quale ad una retta corrisponde una conica circoscritta ad un triangolo fisso. — Un altro, non meno elegante, si ottiene con la seguente legge che Steiner fece conoscere dieci anni dopo, nella sua *Sistematische Entwikelung:* dati due piani distinti e due rette sghembe, ad ogni punto dell'un piano si fa corrispondere la traccia sull'altro dalla retta condotta per quel punto ad appoggiarsi sulle due rette date; in conseguenza ad ogni retta di uno dei due piani corrisponde una conica dell'altro (1). La relazione geometrica che si ottiene nei due modi suddetti non differisce nella sostanza da quella che più tardi venne incidentalmente considerata da Plücker nella memoria *Ueber ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coëfficienten* (Journ. f. Math., 5, 1830), e studiata poi analiticamente dal Magnus (*Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géometrie*, Journ. f. Math., 8, 1832 e *Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie der Ebene*, Berlin, 1833) e dal grande astronomo G. Schiaparelli (1835-1910) (*Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica*, Torino Mem., 21, 1864) (2), sinteticamente dal Seydewitz (*Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittelst projectivischer Gebilde*, Arch. der Math., 7 e 8, 1846), dal Reye (*Geometrische Verwandtschaften zweiten Grades*, Zeitschr. f. Math., 11, 1866) e dal Darboux (*Sur un mode de transformation des*

---

(1) Questa costruzione che i tedeschi chiamano «projezione di Steiner» fu ritrovata nel 1865 da A. Transon, che ne espose le più essenziali proprietà nella memoria *De la projection gauche* (Nouv. Ann., II, 4, 1865, e 5, 1866). Servendosi di essa E. Vessiot dimostrò potersi far corrispondere ad ogni curva algebrica piana dotata di soli punti multipli a tangenti distinte una curva algebrica gobba senza punti singolari (v. la nota *Sur une méthode de transformation et sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique*, Bull. S. M. F., 22, 1894).

(2) Ivi è segnalata l'applicazione delle trasformazioni quadratiche all'analisi indeterminata di 2° grado, concetto che sarebbe forse suscettibile di ulteriore sviluppo, in varie direzioni.

figures et son application à la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points, Ann. Éc. norm., 6, 1869). — Un terzo esempio di trasformazioni quadratiche (involutorie), il quale gode di maggior splendore di rinomanza, venne adombrato da Apollonio ne' suoi *Luoghi piani* e da Steiner nel n. 20 dell' articolo *Einige geometrische Betrachtungen* (Journ. f. Math., 1, 1826), ma venne diffusamente trattato per la prima volta dal Bellavitis nella *Teoria delle figure inverse e loro uso nella geometria elementare* (Ann. delle Scienze del Regno Lomb.-Ven., 6, 1836), e poco dopo dallo Stubbs nell' articolo *On the Application of a New Method to the Geometry of Curves and Curve Surfaces* (Phil. Mag., 23, 1843). Esso, nonchè la sua estensione allo spazio, fu anche suggerito a W. Thomson (1824-1907) (1) — il futuro Lord Kelvin — da alcune ricerche di fisica matematica e da lui designato col nome di « principio delle immagini elettriche ». Il lettore avrà già compreso che qui alludiamo alla « corrispondenza per raggi vettori reciproci » o « inversione », in virtù della quale, dato un punto fisso O, ad ogni punto P è associato un punto P' della retta O P tale che sia O P . O P' = cost.; allora ad ogni retta e ad ogni circonferenza corrisponde di regola un' altra circonferenza, per eccezione una retta (2), ad ogni piano e ad ogni sfera di regola un'altra sfera, per eccezione un piano.

Combinando un' inversione piana con un movimento arbitrario si perviene a quell' altra notevole relazione che Möbius studiò a fondo nella grande memoria *Die Theorie der Kreisverwandschaft in rein geometrischer Darstellung* (Leipziger Abh., 2, 1855; cfr. Cayley, *Note on the « Circular Relation » of Prof. Möbius*, Quart. Journ., 2, 1858). Invece trasformandola proiettivamente nasce una nuova corrispondenza, pure involutoria, che si può costruire direttamente come segue: « Dati in un piano π un punto fisso o ed una conica Γ, si fa corrispondere ad ogni punto P di π il punto in cui la retta O P è tagliata dalla polare di P rispetto a Γ »; sotto tale forma s'incontra nel *Saggio di geometria derivata* (Nuovi Saggi dell' Acc. di Padova, 6, 1838) del Bellavitis (3), poi in un lavoro del Geiser (Mitth. der Berner Naturf. Ges., 1865)

(1) *Note sur les lois élémentaires de l'électricité statique* (Journ. de Math., 10, 1845) e *Extraits de deux lettres adressées à M. Liouville* (Id. 12, 1847; cfr. Liouville, *Note au sujet de l'article précédent*, Ivi).

(2) Il concetto d' inversione è stato posto a base di una nuova classificazione delle curve piane algebriche; il Johnson nell' articolo *Classification of Plane Curves with Reference to Inversion* (The Analyst, 4, 1887) propose, infatti, di chiamare « grado circolare » di una curva il grado della sua equazione rispetto a x, y, $z = x^2 + y^2$. Il grado circolare non è alterato da un' inversione; due curve aventi lo stesso grado circolare appartengono alla stessa categoria. Per quanto ci consta, questa classificazione non fu sinora giudicata di importanza tale da meritare un posto stabile nella scienza.

(3) Cfr. anche l'articolo dello stesso geometra intitolato *Principii della geometria di derivazione* (Tortolini Ann., 5, 1854).

e nella memoria da T. Archer Hirst (1830-1892) *On the Quadric Inversion of Plane Curves* (Proc. R. S., 14, 1865; Ann. di Mat., 7, 1865, e Giorn. di Mat., 4, 1866) (1). Concepita tale corrispondenza a questo modo si vede essere dessa suscettibile di molteplici generalizzazioni, alcune delle quali furono studiate dal Saltel. Una è la « trasformation arguésienne » (così chiamata in onore di Desargues) che si costruisce come segue: « Dati in un piano un punto fisso O e due coniche Γ_1, Γ_2, ad ogni punto P del piano si fa corrispondere il punto P′ della retta $r = OP$ che è coniugato a P nell'involuzione determinata su r dalle coppie di intersezioni di questa con le due coniche date » (2).

Mentre tutte le corrispondenze antecedentemente descritte sono quadratiche, perchè fanno corrispondere ad ogni retta una conica, quest'ultima è cubica. Di ordine qualsivoglia è invece quella (comunemente detta « trasformazione di de Jonquières ») che il de Jonquières studiò negli anni 1859 e 1860 (3) e le cui proprietà furono da lui succintamente esposte nella nota *De la transformation géométrique des figures planes* (Nouv. Ann., II, 6, 1864), e completamente dimostrate nel *Mémoire sur les figures isographiques et sur un mode uniforme de génération des courbes à double courbure d'un ordre quelconque au moyen de deux faisceaux correspondants de droites*, pubblicato

(1) Le costruzioni indicate sono le più celebri, ma non le uniche che siano state suggerite per le trasformazioni quadratiche; altre si leggono esposte ed applicate in alcune memorie del Battaglini (*Sulla dipendenza duplo-anarmonica*, Napoli Atti, 2, 1863), dello Schoute (*Deux cas particuliers de la transformation birationnelle*, Bull. Sc. math., II, 6, 1882, *Application de la transformation par droites symétriques à un problème de Steiner*, Id., 7, 1883, e *Quelques théorèmes géométriques*, Ass. fr., 1884), di V. Retali (*Sopra due particolari trasformazioni piane quadratiche*, Bologna Mem., IV, 10, 1890, *Sopra le tangenti doppie di alcune curve piane algebriche*, Bologna Rend., 1890, e *Sur le double contact et le contact quadriponctuel de deux coniques*, Liège Mem., II, 18, 1895), e di L. E. Dickson (*A Quadratic Transformation defined by a Conic*, Palermo Rend., 9, 1895).

(2) Saltel, *Su l'application de la transformation arguésienne à la génération des courbes et des surfaces algébriques* (Belgique Mém., 22, 1872), *Sur quelques questions de géométrie* (Belgique Bull., II, 34, 1872), e *Mémoire sur le principe arguésien unicursal et sur certains systèmes de courbes géométriques* (Belgique Mém., 23, 1873); Mansion, *Note sur les transformations arguésiennes de M. Saltel* (Belgique Bull., II, 36, 1873); Crocchi, *Proprietà derivate dalle curve e superficie arguisiane* (Giorn. di Mat., 22, 1874).

La « transformation hyperarguésienne » dello stesso geometra non è univoca perchè nasce dalla seguente costruzione: Dati in un piano un punto fisso O e tre coniche Γ_1, Γ_2, Γ_3, ad ogni punto P del piano si fa corrispondere il punto P′ della retta $r = OP$ che corrisponde a P in una omografia determinata sopra r dalle tre coppie di punti in cui essa è tagliata dalle tre coniche date. Sostituendo alle coniche tre coppie di rette si può arrivare ad una trasformazione univoca.

(3) Essa fa corrispondere ad una retta una curva d'ordine n con un punto $(n-1)$-plo.

nel 1885 per cura del Guccia nel t. 23 del Giorn. di Mat. Del resto, la possibilità di ottenere delle corrispondenze piane univoche di ordine qualsivoglia fu notata, fin dal 1833, dal Magnus nella ***Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze aus der analyt. Geom. der Ebene***, il quale giunse a tale scoperta studiando l'effetto della ripetizione di una trasformazione quadratica.

4. Tale importante osservazione rimase isolata e sterile fino al giorno in cui il Cremona stabilì la teoria generale delle corrispondenze univoche fra i due piani. Le memorie in cui questo grande geometra fece conoscere le più cospicue proprietà di tali trasformazioni sono intitolate ***Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*** e furono pubblicate una prima volta in Bologna Mem., II, 2, 1863, e 5, 1865, ed una seconda in Giorn. di Mat., 1, 1863, e 3, 1865; più tardi vennero tradotte in francese liberamente e corredate di aggiunte, dal Dewulf (***Sur les transformations géométriques des figures planes***, Bull. Sc. math., 5, 1872). Il loro contenuto divenne ben presto classico e si diffuse rapidamente grazie ai trattati di Salmon e di Clebsch-Lindemann che nominammo a pagg. 44 e 45, sicchè ci riteniamo dispensati dal descriverlo qui. Osserveremo piuttosto che un notevole perfezionamento ai risultati di Cremona arrecarono il Clebsch, dimostrando rigorosamente una proposizione che questi aveva ottenuto per via sperimentale (***Zur Theorie de Cremona'schen Transformationen***, Math., Ann., 3, 1871), ed un altro contemporaneamente il Clifford (v. i nn. 68-73 della memoria di Cayley, ***On the Rational Transformation between two Spaces***, Proc. L. M. S., 3, 1869-71, e ***Mathematical Papers by W. K. Clifford***, London, 1882, p. 538), il Rosanes (***Ueber diejenigen rationalen Substitutionen welche eine rationale Unkehrung zulassen***, Journ. f. Math., 73, 1873) e il Nöther (***Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen***, Math., Ann. 5, 1872), che consiste nella sostituibilità di qualunque trasformazione Cremoniana con una serie di trasformazioni quadratiche, risultato questo che non toglie in alcun modo importanza (come forse taluno potrebbe credere) alle trasformazioni di ordine superiore, e può ritenersi per equivalente alla proposizione reciproca di quella che, come dicemmo nella chiusa del n. prec., fu notata dal Magnus.

Con questi complementi si può dir chiusa l'èra di primo sviluppo della teoria delle trasformazioni piane univoche. Tuttavia molti problemi interessanti si presentavano al riguardo. Ed anzitutto la ricerca di un metodo per trovare tutte le trasformazioni di un ordine determinato; essa fu tentata in certa misura da S. Roberts nella memoria ***On Professor's Cremona Transformation between two Planes and Tables relating thereto*** (Proc. L. M. S., 4, 1872), e toccata dal Jung nella nota ***Sulle trasformazioni birazionali di tre forme*** *geometriche di seconda specie* (Rend. Ist. Lomb., II, 19, 1886); essa, da un certo punto di vista, si può considerare di pertinenza dell'analisi indeterminata e come tale fu studiata, se non esaurita dal Ruffini (*Sulla risoluzione delle due equazioni di condizione delle trasformazioni cremoniane delle figure piane*, Bologna Mem., III, 8, 1877 e *Di un problema di analisi indeterminata che s'incontra nella teoria geometrica delle trasformazioni delle figure piane*, Id., 9, 1878), e poi dal de Jonquières (*Solution d'une question d'analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona, Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations Cremona* e *Sur les transformations géometriques birationnelles d'ordre* n, C. R., 101, 1885; *Modes de solutions d'une question d'analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona*, Paris, 1885; *Étude sur une question d'analyse indéterminée*, Giorn. di Mat., 26, 1886; v. anche Guccia, *Sur les transformations géométriques planes birationnelles*, C. R., 101, 1885). — Un altro problema che si incontra è quello di stabilire con un numero sufficiente di coppie di elementi corrispondenti una trasformazione d'un certo ordine; ad esso, per trasformazioni quadratiche, accennarono il Reye (mem. cit. nel n. 3 di questo Cap.) ed Em. Weyr (*Analytische Untersuchung der quadratischen Verwandtschaft*, Zeitschr. f. Math., 14, 1869); di esso trattarono poi nel caso di trasformazioni cubiche e biquadratiche T. Maschke (*Ueber das Problem der Bestimmbarkeit der Cremona'schen Transformation 3. Ordnung*, Diss. Breslau, 1879) ed A. Schmidt (*Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen insbesondere derjenigen 4. Ordnung*, Diss. Bleslau, 1882); ma il problema generale crediamo non fu ancora affrontato nell'epoca di cui ragioniamo, quantunque, come ognuno vede, sia di notevole importanza. Un'altra questione, più speciale ma interessante, fu trattata da S. Kantor nelle due note *Wie viele cyclische Gruppen giebt es in einer quadratischen Transformation der Ebene?*, e *Beantwortung derselben Frage für Cremona'sche Transformation* (Ann. di Mat., II, 10, 1880) (1); cfr. Hirst, *On Quadric Transformation*, Quart. Journ., 17, 1881).

Ad alcuni luoghi collegati ad una corrispondenza univoca si riferiscono i *Teoremi sulle trasformazioni Cremoniane nel piano* (Palermo Rend., 1, 1884-87; cfr. *Sur les transformations Cremona dans le plan*, C. R., 101, 1885) del Guccia, il quale ha anche fatto conoscere delle *Formole analitiche di trasformazioni Cremoniane* (Ivi). Finalmente a quelle speciali corrispondenze che sono il prodotto di una trasformazione Cremoniana e di una correlazione è de-

(1) Applicando a un punto P_0 n volte di seguito una data trasformazione Cremoniana si ottengono in generale n punti $P_1 P_2 \ldots P_n$: ove P_n coincida con P_0, i punti $P_0 P_1 \ldots P_{n-1}$ formano ciò che il Kantor chiama « gruppo ciclico ».

dicata la nota del Lazzeri, *Sulle reciprocità birazionali nel piano* (Lincei Rend., IV, 2, 1886$_2$).

Alle ricerche intorno ad una trasformazione isolata seguono naturalmente quelle sulle totalità composte di un certo numero finito od infinito di trasformazioni, in particolare sui « gruppi » (1) di tali trasformazioni; ora, per le trasformazioni Cremoniane, lo studio dei gruppi fu fatto, nell'ipotesi che il loro ordine sia finito, dall'Autonne (*Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona*, Journ. de Math., IV, 1, 1885, e 2, 1886, e *Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien*, Id., 4, 1888), e per gruppi di ordine infinito e continui da F. Enriques (*Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano* e *Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano*, Lincei Rend., V, 2, 1893) e poi da S. Kantor (*Theorie der endlichen Gruppen von eindeutingen Transformationen in der Ebene*, Berlin, 1895) e da G. Fano (*Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni proiettive*, Palermo Rend., 10, 1896).

5. Fra le trasformazioni piane univoche speciali le più importanti nascono supponendo sovrapposti (o, secondo il Reye, conjettivi) i piani in corrispondenza; e tra esse il primo posto compete senza dubbio a quelle « involutorie », tali, cioè, che non mutano scambiando fra loro gli uffici dei due piani. Il loro studio fu inaugurato vent'anni or sono dal Bertini in due memorie giustamente apprezzate (*Sopra una classe di trasformazioni univoche involutorie* e *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*, Ann. di Mat., II, 8, 1877), venne continuato dal Caporali (*Sulle trasformazioni univoche piane involutorie*, Napoli Rend., 18, 1879) e poi ripreso dal Bertini stesso (*Sulle trasformazioni univoche piane e in particolare sulle involutorie*, Rend. Ist. Lomb., II, 13, 1880; *Costruzioni geometriche della trasformazione univoca di 3° ordine*, Id., 15, 1882; *Sopra alcune involuzioni piane*, Id., 16, 1883) e spinto innanzi dai di lui discepoli Martinetti (*Le involuzioni di 3ª e 4ª classe*, Ann. di Mat., II, 12, 1884; *Sopra alcune trasformazioni involutorie del piano*, Id., 13, 1885; e *Sul genere delle curve Ω nelle involuzioni piane di classe qualunque*, Palermo Rend., 4, 1890) e Berzolari (*Ricerche sulle trasformazioni piane, univoche, involutorie e loro applicazione alla determinazione delle involuzioni di quinta classe*, Ann. di Mat., II, 16, 1888, e *Un nuovo teorema sulle involuzioni piane*, Palermo Rend., 3, 1889). Fuori d'Italia tali trasformazioni attirarono l'attenzione del Lüroth, che dedicò ad esse la notevole me-

(1) Come si sa, un certo numero di trasformazioni formano un « gruppo » se la successione (o, come suol dirsi, il prodotto) di due qualunque di esse, distinte o non, è un'altra di quelle trasformazioni.

moria intitolata *Rationale Flächen und involutorische Transformationen* (Freiburg, 1889); di alcuni loro casi particolari trattarono il Geiser (*Ueber zwei geometrische Probleme*, Journ. f. Math., 67, 1867) e il Bobek (*Ueber gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene*, Wiener Ber., 91, 1885).

Una trasformazione involutoria è caratterizzata dalla proprietà di avere per quadrato l'identità; una trasformazione univoca avente l'identità per potenza di esponente superiore a due dicesi « periodica » di ordine eguale a tale esponente. Queste importanti corrispondenze, più generali delle involutorie, furono studiate a fondo da S. Kantor, il quale, dopo avere fatti conoscere alcuni risultati speciali sull'argomento (oltre alle memorie precedentemente citate) si veggano le seguenti: *Zur Theorie der successiven quadratischen Transformationen in der Ebene*, Wiener Ber., 82, 1880, *Sur une méthode pour traiter les transformations périodiques univoques* e *Théorie des transformations univoques* (C. R., 100, 1885), vi dedicò la memoria di lunga lena intititolata *Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques* (Napoli Atti, II, 1, 1888, e 2, 1893) (1), intesa a rispondere ad una questione posta dall'Accademia di Napoli e da questa premiata (2).

Le trasformazioni univoche d'ordine n fra due piani sovrapposti ammettono in generale $n+2$ punti uniti; ma può darsi (lo prova l'esempio dell'omologia) che ne abbiano infiniti; e l'ipotesi che esista una curva unita conduce alla considerazione di speciali corrispondenze che vennero considerate dal Doehlemann (1864-1926) (*Ueber Cremona-Transformationen der Ebene welche eine Curve enthalten die sich Punkt für Punkt selbst entsprich*, Math. Ann., 39, 1892) e dal Castelnuovo (*Sulle trasformazioni Cremoniane del piano che ammettono una curva fissa*, Lincei Rend., V, 1, 1892). Similmente, una trasformazione univoca d'ordine n fra due piani sovrapposti ammette generalmente parlando $\frac{n(n-1)}{2}$ coppie involutorie di punti, ma può darsi ne ammetta infinite; la memoria del Doehlemann *Ueber die involutorische Gebilde welche eine ebene Cremona-Transformation, speciell die quadratische enthalten kann* (Zeitschr. f. Math., 36, 1891) tratta, fra l'altro, delle trasformazioni risultanti dal supporre l'esistenza di una curva involutoria.

Più ristretti intendimenti hanno altri lavori sopra speciali trasformazioni di ordine determinato, di alcuni dei quali vogliamo qui far menzione a com-

(1) Gli articoli dello stesso autore: *Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene* (Journ. f. Math., 114, 1894), e *Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene* (Acta, 19, 1895) sono destinati a riassumere, completare e diffondere i risultati del lavoro premiato.

(2) V.: Caporali, *Relazione sul concorso pel premio accademico nell'anno 1882* (Napoli Rend., 22, 1883).

plemento di quanto esponemmo nei nn. 3 e 4. Prima ci si presenta una particolare trasformazione di quart'ordine, che venne generata mediante una costruzione stereometrica e studiata da T. Cotterill (1808-1881) nella memoria *On a Correspondence of Points, such that a Curve of the* n — *th Order in one Plane corresponds to a Curve of the* 4n — *th in another Plane. with three Multiple Points of the order* n *on the Line of intersection of the Planes and three other Multiple Points of the Order* 2n (Proc. L. M. S., 2, 1869); altre del quinto e sesto dal Le Paige (*Sur une représentation géométrique de deux transformations uniformes*, Belgique Bull., III, 3, 1882, e *Sur quelques transformations géométriques uniformes*, Id., 4, 1882), corrispondenze la cui definizione venne poi generalizzata dallo Schoute nell'articolo *Sur deux transformations géométriques uniformes* (Ass. fr., 1883); finalmente altre di ordine $2k (k = 2 \ldots, 6)$ vennero fatte conoscere da R. Sturm come *Beispiele zu den Cremona'schen Ebenentransformationen* (Math. Ann., 26, 1885).

6. Una classe importante di corrispondenze (in generale non univoche) tra due piani è costituita dalle « trasformazioni isogonali », la cui origine è da rintracciarsi nella teoria delle funzioni analitiche, perchè qualunque funzione (nel senso riemanniano) conduce ad una di quelle trasformazioni (1). Chi se ne occupò più di qualunque altro è G. Holzmüller (1844-1914), il quale, dopo avere esposti i risultati a cui era pervenuto in una lunga serie di memorie separate, li raccolse nella pregevole opera intitolata *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandschaften* (Leipzig, 1883). Fra gli altri scritti che concernono lo stesso tema vanno ricordati: Siebeck, *Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen* (Journ. f. Math., 55, 1858); Durège, *Untersuchungen über die Anwendung der imaginären Grössen in der Curvenlehre* (Arch. der Math., 42, 1865); Von der Mühl. (1841-1912), *Ueber die Abbildung von Ebenen auf Ebenen* (Journ. f. Math., 59, 1868); O. Biermann (1858 - 1909), *Zur Theorie der Abbildung mittelst gebrochener rationaler Functionen* (Wiener Ber., 89, 1884); Laurin, *Sur la transformation isogonale définie par une fonction rationnelle* (Lund, 1887); C. A. Laisant (1841-1920) *Des rayons de courbure dans les transformations isogonales* (Bull. S. M. F., 15, 1887); Harris, *Note on the Use of Supplementary Curves in Isogonal Transformations* (Am. Journ., 14, 1892).

Le trasformazioni che conservano gli angoli furono, come testè vedemmo,

---

(1) Si veda, oltre la memoria di Gauss premiata dall'Accademia di Kopenhagen e citata più avanti Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grössen* (Diss. Göttingen, 1851).

studiate diffusamente ed in vari modi; altrettanto non può ripetersi per quelle in cui due aree corrispondenti qualunque sono eguali o in un rapporto costante; Möbius è il primo che vi si sia dedicato e i risultati che conseguì vennero fatti noti mediante la memoria *Ueber eine allgemeinere Art der Affinität geometrischer Figuren* (Journ. f. Math., 12, 1834).

Al pari di tali relazioni tra figure ripete la propria origine dalla geometria metrica ed è suscettibile di immediata generalizzazione allo spazio la « transformation par directions réciproques » che il Laguerre ha inventato, svolto ed applicato nelle memorie seguenti: *Sur la géométrie de direction* (Bull. S. M. F., 8, 1880); *Sur la transformation par directions réciproques* (C. R., 92, 1881); *Sur les hypercycles* (Id., 94, 1882); *Transformations par semi droites réciproques* (Nouv. Ann., III, 1, 1882); *Sur quelques propriétés des cycles* (Id., 2, 1883) e *Sur les courbes de directions de la troisième classe* (Ivi; cfr. anche: Dautheville, *Sur l'hypercycle et la théorie des cycles*, Bull. S. M. F., 14, 1886, e Juel, *Studie over an Transformation af Laguerre*, Nyt Tidsskrift for Math., 3, 1892); nello spazio l'analoga di essa non differisce (lo osservò C. Stéphanos nell'articolo, *Sur la géométrie des sphères*, C. R., 92, 1881) da quella per mezzo della quale Lie (v. più avanti) collegò la geometria della sfera alla geometria della retta.

Ritorniamo ancora un momento alla teoria delle trasformazioni isogonali e precisamente a quelle determinate da una equazione della forma $w = f(z)$, f essendo un polinomio di grado n. Ad ogni punto z corrisponde un unico punto w, ma ad ogni punto w corrispondono n punti z le cui coordinate si ottengono risolvendo rispetto a z l'equazione $f(z) - w = 0$. Questa semplice osservazione conduce naturalmente a ricercare le proprietà dei gruppi di punti così ottenuti e le loro relazioni con i gruppi che nascono eguagliando a zero i covarianti del primo membro di quell'equazione, considerato come funzione di z; donde l'origine di un certo numero di interessanti memorie che citiamo qui, non trovando a ciò occasione più propizia: Beltrami, *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche* (Bologna Mem., II, 9, 1869); Wedekind, *Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen* (Diss. Erlangen, 1875, e Math. Ann., 9, 1876), *Studien in binären Werthgebiet* (Karlsruhe, 1876) e *Das Doppelverhältniss und die absolute Invariante binärer biquadratischer Formen* (Math. Ann., 17, 1880); F. Lucas, *Géométrie des polynômes* (Journ. Éc. pol., 28ᵉ cah., 1880); J. de Vries, *Involutions cubiques dans le plan complexe* (Palermo Rend., 5, 1891), *Une distribution du champ ponctuel en groupes involutives* (Archives néerlandaises etc., 23, 1891), *Zur Theorie der Involutionen* (Monatshefte, 3, 1892) e *Ueber mehrstufige Involutionen in der complexen Ebene* (Id., 5, 1894).

Le trasformazioni isogonali hanno, quasi incidentalmente, dimostrata la possibilità di corrispondenze (1, n), tali cioè che ad ogni elemento di una delle forme collegate corrisponda un elemento dell'altra e ad ogni elemento di questa un gruppo di n elementi di quella. Sono le « corrispondenze multiple » di cui, a tacer d'altri, il Cayley (nella nota *Sur quelques transmutations des lignes courbes*, Journ. de Math., 14, 1849, e 15, 1850) suggerì alcuni esempi e di cui Chr. Wiener (1826-1896) (1) si occupò, proponendo di generarle facendo corrispondere alle rette di un piano le curve di un altro piano, di un dato ordine e formanti un sistema lineare, e in conseguenza i centri dei fasci di raggi di quel piano ai punti base dei fasci di questo (*Die mehrdeutige Beziehung zweier ebenen Gebilde aufeinander*, Math. Ann., 3, 1871) (2). Molto più significanti di questa sono la memoria di R. de Paolis su *Le trasformazioni piane doppie* (Lincei Mem., III, 1, 1877; cfr. Charlotte A. Scott, *On a memoir by R. de Paolis*, Bull. Ann. M. S. II, 7, 1900) e le due seguenti dello stesso autore intitolate: *La trasformazione piana doppia di secondo ordine e la sua applicazione alla geometria non-euclidea* e *La trasformazione piana doppia di terzo ordine primo genere e la sua applicazione alle curve del quarto ordine* (Id., 2, 1878), le quali diedero un fondamento sicuro e permanente alla teoria delle trasformazioni doppie, teoria a cui il Nöther consacrò la nota *Ueber die einzweideutigen Ebenentransformationen* (Erlangener Ber., 10, 1878) e il Bertini quella intitolata *Deduzione delle trasformazioni piane doppie dei tipi fondamentali delle involutorie* (Rend. Ist. Lomb., II, 22, 1889). Ed è a notarsi che i ragionamenti ed i metodi del de Paolis, con opportune lievi modificazioni, possono adattarsi allo studio delle trasformazioni multiple qualunque, come mostrarono P. Visalli nella *Memoria sulle trasformazioni geometriche* N-ple (Messina, 1884) e in una successiva *Sopra le diverse classi delle trasformazioni geometriche piane multiple* Id. id.) e C. F. E. Björling nel lavoro *Zur Theorie der mehrdeutigen Ebenen - Transformation* (Stockh. Vetensk. Bihang, 13, 1887) (3). Sullo stesso tema si consulteranno con profitto due note del Jung, *Sopra le trasformazioni piane multiple* (Lincei Rend., IV, 2, 1886_2), e *Sulle trasformazioni piane multiple d'ordine minimo* (Rend. Ist. Lomb., II, 20, 1888); lo stesso geometra fece poi notare che certe trasformazioni multiple sono collegate a qualsivoglia trasformazione Cremoniana (*Di due trasformazioni multiple associate a ogni trasformazione birazionale*, Rend. Ist. Lomb., II, 20,

(1) A. Brill e L. Sohnke, *Christian Wiener* (Deutsch. Math. Ver. 6, 1898).

(2) V. anche: Steinmetz, *Multivalent and Univalent Involutory Correspondences in a Plane determined by a Net of Curves of n^{th} Order* (Ann. Journ., 14, 1892).

(3) V. anche un frammento di Clifford in *Mathematical Papers*, p. 647.

1888, e *Di una terza trasformazione di genere* p *e di grado* p + 1 *associata a ogni trasformazione piana birazionale* (Id., II, 19, 1886; cfr. M. Pannelli nella nota *Sulle trasformazioni multiple associate ad ogni trasformazione piana birazionale*, Giorn. di Mat., 29, 1891). Aggiungiamo che la questione risoluta nella nota di F. Borghese sopra *Un problema sulle trasformazioni piane multiple* (Giorn. di Mat., 32, 1894) è la generalizzazione di quella trattata dal Kantor nelle note che citammo precedentemente.

Una trasformazione involutoria distribuisce tutti i punti del piano in coppie ognuna delle quali è individuata da uno de' suoi elementi; più generalmente si possono considerare nel piano i gruppi costituiti da r punti e tali che ogni gruppo sia individuato da un suo elemento; un tal sistema di gruppi di punti— che può intendersi generato da una speciale trasformazione piana $(r-1)$-pla— si chiama « involuzione » e il Castelnuovo dimostrò la possibilità di far corrispondere univocamente i gruppi che lo costituiscono ai punti di un piano (*Sulla razionalità delle involuzioni piane*, Lincei Rend., V, 2, 1893,, e Math. Ann., 44, 1894), risultato di grande importanza, oltre che per altri motivi, grazie alle applicazioni che riceve nella teoria della rappresentazione di una superficie algebrica su di un piano.

Alle corrispondenze piane $(1, n)$ seguirebbero naturalmente quelle più generali (m, n), ma il loro studio non fu ancora, per quanto ci consta, intrapreso; però al caso $m = n = 2$ si riferiscono i due scritti seguenti: Visalli, *La trasformazione quadratica* (2, 2) (Palermo Rend., 3, 1889); Burali-Forti, *Sulle trasformazioni* (2, 2) *che si possono ottenere mediante due trasformazioni doppie* (Id., 5, 1891).

7. Il concetto di corrispondenza fra i punti di due piani si può generalizzare in varî modi. Quelli che si presentarono pei primi furono la corrispondenza: 1° fra i punti di un piano e le linee di un sistema doppiamente infinito (cfr. le memorie del Wiener e dello Steinmetz citate nel n. prec.) (1); 2° fra i punti di un piano e quelli di una superficie; 3° fra i punti di due spazî;

(1) Il più semplice esempio di tale legame geometrico è offerto dalla correlazione fra due piani. Un altro si ha colla costruzione seguente. Sia ABC un triangolo, P un punto qualunque del suo piano. Vi è una sola conica Γ che tocca i lati del triangolo nei punti (PA, BC), (PB, CA), (PC, AB). Se si fa corrispondere P a Γ, si ha una corrispondenza della specie di quelle accennate nel testo; la quale, assieme alla sua correlativa, fu studiata dal Montag nella Diss. *Ueber ein durch die Sätze von Pascal und Brianchon vermitteltes geometrisches Beziehungssystem* (Breslau, 1871).—Altre corrispondenze analoghe si otterrebbero osservando essere P centro di una conica inscritta nel triangolo ABC, di una ad esso circoscritta e di una rispetto a cui ABC è autoconjugato. Anzi quest' ultima corrispondenza è immediatamente generalizzabile allo spazio.

4° fra i punti dello spazio e le curve di un sistema triplicemente infinito di curve di un piano.

Quest'ultimo caso venne studiato a fondo soltanto nell'ipotesi che le curve siano circonferenze; prima, analiticamente, C. Crone (*Undersögelse af Figuren i Planen, sammensatte af Cirkler, vedel säregent Koordinatsystem*, Tidsskrift, III, 6, 1876) (1); poi più geometricamente dal Fiedler, il quale, non solo fece alla Naturforschende Gesellschaft di Zurigo alcune comunicazioni in proposito (v. le note: *Zu zwei Abhandlungen von Steiner*, Vierteljahrsschrift der Zürcher Naturf. Ges., 28, 1883); *Geometrische Mittheilungen* VII, VIII, Id., 29, 1884; *Ueber die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen*, Acta, 5, 1884, nonchè parecchie osservazioni sparse nella 3ª ed. dell'opera *Die darstellende Geometrie*) ma credette la corrispondenza in discorso abbastanza importante per essere considerata una nuova diramazione della geometria (che chiamò Ciclografia) ed esposta in un'opera speciale (2). Alla medesima relazione geometrica si riferiscono le investigazioni del Thomae sopra *Das ebene Kreissystem und seine Abbildung auf den Raum* (Zeitschr. f. Math., 29, 1894).

Incomparabilmente più significante per la geometria è la prima delle generalizzazioni suddette. Accennata da Plücker (*Analytisch-geometrische Entwickelungen*, 2, n. 724), essa fu sviluppata da Clebsch nella memoria citata qui appresso e diede origine alla « teoria dei connessi ». Gli scritti a noi noti che ad essa si riferiscono sono: Clebsch, *Ueber ein neues Grundgebilde der analytische Geometrie der Ebene* (Math. Ann., 6, 1873); Godt, *Ueber den Connex 1. Ordnung und 2. Classe* (Diss. Göttingen, 1873); Armenante, *Generazione dei connessi di 2° ordine e 2ª classe* (Lincei Atti, 3, 1876); Battaglini, *Sui connessi ternarii di 2° ordine e 2ª classe in involuzione semplice* (Giorn. di Mat., 19, 1881), *Sui connessi ternarii di 1° ordine e 1ª classe* (Id., 20, 1882), e *Sulle forme ternarie bilineari* (Id., 21, 1883); C. Stéphanos, *Sur la théorie des connexes conjugués* (Bull. Sc. math., II, 4, 1880); Peano, *Costruzione dei connessi* (1, 2) *e* (2, 2) (Torino Atti, 16, 1881); Piazza, *Sulle corrispondenze* (1, 2) *e* (1, 3) (Id., 17, 1882); Pannelli, *Sui connessi ternarii di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione doppia* (Giorn. di Mat., 26, 1888); Amodeo, *So-*

---

(1) Giova a questo proposito osservare che la geometria dei cerchi di un piano (e delle sfere dello spazio) diede materia a uno scritto giovanile dello Steiner, del quale questo grande geometra fece menzione nella memoria *Einige geometrische Betrachtungen* (Journ. f. Math., 1, 1826); esso fu per lungo tempo creduto irremissibilmente perduto; ma venne poi rintracciato; la pubblicazione di esso fu più volte annunziata, ma non è ancora avvenuta; perchè?

(2) *Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis-und Kugelsysteme* (Leipzig, 1882).

pra un particolare connesso (2, 2) *con due punti singolari e due rette singolari* (Id., 25, 1885); Lazzeri, *La rappresentazione dello spazio rigato sopra un piano connesso e sua applicazione allo studio dei connessi lineo-lineari* (Atti Ist. Ven., VI, 3, 1885).

Chiediamo venia al lettore se facciamo cenno in questo momento delle ricerche di geometria dello spazio analoghe a quelle testè indicate; sono quelle consegnate nella memoria del Masoni citata precedentemente, e nelle seguenti: Krause, *Ueber ein Gebilde der analytischen Geometrie des Raumes, welches dem Connexe zweiler Ordnung und erster Classe entspricht* (Math. Ann., 14, 1879); Battaglini, *Sulle forme quaternarie bilineari* (Giorn. di Mat., 22, 1884); Lazzeri, *Sopra i sistemi lineari di connessi quaternarii* (1, 1) (Lincei Mem., IV, 4, 1887); del Re, *Le superficie polari congiunte rispetto ad un connesso di piani e di rette e ad una superficie algebrica fondamentale* (Napoli Rend., II, 2; cfr. anche la già ricordata nota dello stesso autore, *Sulle superficie del 4º ordine a conica doppia*, Lincei Rend., V, 2, 1893_1).

8. Assai più ricca è la letteratura matematica concernente la seconda delle cennate generalizzazioni della corrispondenza fra due piani, giacchè comprende tutti gli scritti intorno alla rappresentazione di una superficie su di un'altra, specialmente pel caso in cui questa sia piana. Ora tale rappresentazione può comprendere una porzione di una delle superficie ed essere in conseguenza applicabile anche alle superficie trascendenti, oppure può estendersi a tutta quella superficie, supposta algebrica. La teoria delle rappresentazioni della prima categoria fa parte della Geometria differenziale, mentre quella delle seconde appartiene alla Geometria algebrica: diremo qualche cosa dell'una e dell'altra.

Le più antiche ricerche della prima specie risalgono forse ad Ipparco e Tolomeo, i quali, per aiutare i geografi, proposero di projettare la superficie terrestre da un polo sul piano dell'equatore, inventarono cioè quella che oggi si chiama « projezione stereografica » (1). Origine analoga hanno la projezione immaginata da Mercatore (1512-1594), nel 1550 o nel 1569 (2), e le ricerche compiute sul finire del secolo scorso da Lambert (1728-1777) e Lagrange sulla costruzione delle carte geografiche (3), nonchè altre analoghe che qui non enumeriamo perchè appartengono alle applicazioni della matematica alla geografia,

(1) Questo nome s'incontra per la prima volta nell'opera di F. Aguillon (1566-1617) dal titolo *Opticorum libri VI* (Antwerp 1613).

(2) Cfr. Wright, *The Correction of Certain Errors in Navigation* (London, 1599).

(3) Queste memorie di Lambert e Lagrange, assieme a quelle di Gauss che citeremo fra un momento, furono di recente raccolte e ripubblicate dal Wangerin in « Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften », 54 e 55 (Leipzig, 1894).

rimandando alle opere speciali sull' argomento (1). Tuttavia alcune eccezioni vanno fatte, e cioè a favore della tesi di O. Bonnet, *Sur la théorie mathématique des cartes géographiques* (Journ. de Math., 17, 1852), delle memorie del Dini, *Sopra alcuni punti della teoria delle superficie* (Mem. Soc. XL, III, 2, 1869) e *Sulla rappresentazione geografica di una superficie su di un' altra* (Ann. di Mat., II, 7, 1877), del *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques* (Nouv. Ann., II, 17-19, 1877-79) del Tissot, ed ancora dell'articolo di A. Korkine, *Sur les cartes géographiques* (Math. Ann., 35, 1890), lavori che sono degni della massima considerazione anche da parte del matematico puro.

Altrettanto, anzi con maggior ragione, si può ripetere della celebre *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* (Astronomische Nachrichten, 3, 1825) (2) dovuta a Gauss e premiata dall' Accademia delle Scienze di Kopenhagen. Il Beltrami, oltre al pubblicare una traduzione italiana di questa memoria (Ann. di Mat., 4, 1862), ha risolto elegantemente (in una memoria che già citammo) un problema analogo a quello ivi trattato, quello cioè della rappresentazione di una superficie su un piano, per modo che alle geodetiche corrispondano delle rette. La questione più generale ed importantissima di rappresentare, quando è possibile, una superficie su un'altra per modo che le geodetiche si corrispondano fra loro, fu risolta dal Dini nella memoria, *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un' altra* (Ann. di Mat., II, 3, 1870).

Della rappresentazione sferica di Gauss (e Rodrigues) parlammo altrove (Cap. V, n. 10); qui aggiungiamo che essa venne generalizzata da Steiner nello scritto *Ueber Lehrsätze von welchen die bekannten Sätze über Parallelcurven besondere Fälle sind* (Journ. f. Math., 22, 1846). Tale lavoro presenta delle analogie con quello *Ueber eine Erweiterung des Begriffs von Parallelflächen* (Götting. Nachr., 1873), in cui l'Enneper si occupò della corrispondenza fra due superficie tale che in punti omologhi le normali siano pa-

(1) Fiorini, *Le projezioni delle carte geografiche* (Bologna, 1884); Zoppritz, *Leitfaden der Kartenwurfslehre* (Leipzig, 1884); Herz, *Lehrbuch der Kartenprojectione* (Leipzig, 1885); ecc.

(2) Cfr. Liouville, nota 5ª a Monge; Jacobi, *Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf eine Ebene, bei welcher die kleinsten Theilen ähnlich bleiben* (Journ. f. Math., 59. 1861); Hoppe, *Abbildung der Flächen zweiten Grades nach Aehnlichkeit der Flächenelemente* (Math. Ann., 2, 1870), e *Ein Theorem über conforme Abbildung der Flächen auf Ebenen* (Arch. der Math., 59, 1878); Craig, *Orthomorphic Projection of an Ellipsoid upon a Sphere* (Am. Journ. 3, 1882); Marcolongo, *Sulla rappresentazione conforme della pseudo-sfera e sue applicazioni* (Napoli, Rend., II, 2, 1888).

rallele e che le linee di curvatura si corrispondano; del resto le corrispondenze dotate di tale proprietà erano state considerate prima da O. Bonnet (*Note sur un genre particulier de surfaces réciproques*, C. R., 42, 1856) e lo furono poi dal Darboux (*Sur les modes de transformations qui conservent les lignes de courbure*, C. R., 92, 1881). Di altre somiglianti trasformazioni, l'Enneper stesso trattò più tardi nel lavoro intitolato, *Bemerkungen über einige Transformationen von Flächen* (Götting. Nachr., 1877 e 1881; Math. Ann., 21, 1883). Delle « superficie reciproche » ci dispensiamo dal fare speciale menzione, non tanto perchè le ricerche di Monge in proposito non furono pubblicate per esteso, quanto perchè — lo dimostrò Chasles nella nota 30ª dell'*Aperçu historique* — la relazione che passa fra due tali superficie altro non è che una speciale polarità rispetto ad una quàdrica.

Finiremo coll'additare, come collegate alle precedenti, le *Recherches des surfaces que l'on peut représenter sur un plan* (Ann. di Mat., II, 7, 1875) di O. Bonnet, la memoria del Bäcklund, *Zur Theorie der Flächenstrasformationen* (Math. Ann., 19, 1882), e quella del Voss, *Ueber ein Princip der Abbildung krummer Oberflächen* (Ivi).

9. Le rappresentazioni della seconda delle categorie indicate nell'esordio nel n. 7 si può ritenere abbiano avuto per prototipo la proiezione stereografica, la quale fu il germe del metodo per studiare la geometria sopra una quàdrica proposto dal Clifford (*Geometry on an Ellipsoid*, Proc. L. M. S., 4, 1872). Di natura più algebrica son quelli suggeriti per conseguire lo stesso scopo da Plücker in due scritti sopra, *Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe* (Journ. f. Math., 34, 1847), da Chasles nella sua *Théorie analytique des courbes à double courbure de tous les ordres tracées sur l'hyperboloïde à une nappe* (C. R., 53, 1861) e da Cayley nell'articolo, *On the Curves situated on a Surface of the Second Order*, (Phil. Mag., 22, 1861), metodi che, col loro valore, spinsero i geometri a procurarsene degli analoghi per lo studio della geometria su una superficie cubica; che tale ricerca non sia rimasta infruttuosa, si apprende da alcune memorie di Clebsch (*Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung*, Journ. f. Math., 65, 1866, e *Ueber die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung*, Math. Ann., 5, 1872) (1) e Cremona (*Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, Journ. f. Math., 68, 1868).

---

(1) Complementi a questi lavori trovansi nelle seguenti memorie: Diekmann, *Ueber die Modificationen welche die ebene Abbildung einer Fläche 3ter Ordnung durch Auftreten von Singularitäten erhält* (Math. Ann., 4, 1871); Korndörfer, *Die Abbildung einer Fläche dritter Ordnung mit einem oder mehreren Knotenpunkten auf eine Ebene* (Neumünster, 1871).

Risultati analoghi si ottennero in seguito per molte altre superficie, quali sarebbero le rigate di terzo grado (Clebsch, *Bemerkung über die Geometrie auf den windschiefen Flächen dritter Ordnung*, Math. Ann., 1, 1869) (1), la superficie di Steiner (2), e le superficie del quarto ordine con una linea doppia del secondo (Clebsch, *Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen*, Journ. f. Math., 69, 1868) (3).

Il Clebsch, che più di qualunque altro si mostrò fecondo nell' immaginare procedimenti per rappresentare su un piano delle superficie particolari, è anche il primo che si provò a costruire una teoria generale di tali rappresentazioni; egli espose i risultati delle proprie ricerche nell' importante memoria *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung* (Math. Ann., 1, 1869); di più egli fece vedere, nel lavoro *Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen* (Math. Ann., III, 1871), come in molti casi fosse utile cominciare dal rappresentare una superficie sopra un piano doppio, e trasformare poi questo, quando è possibile, in uno semplice (4). Ricerche per generalità analoghe a quelle di Clebsch si leggono nell'articolo di Cayley, *On the Transformation of Unicursal Surfaces* (Ivi), nella *Note über die Gleichungen der auf einer Ebene abbildbaren Flächen* (Id., 5, 1872) di A. Brill e nell' importante memoria del Caporali, *Sui sistemi triplamente infiniti di curve piane algebriche* (Coll. math., 1881).

Una considerevole generalità hanno pure le investigazioni concernenti la rappresentazione delle rigate razionali, condotte a buon termine, indipendentemente l' uno dall' altro, da A. Armenante (*Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere* $p = 0$ *sopra un piano*, Ann. di Mat., II, 4, 1870) e dal Clebsch (*Ueber di geradlinigen Flächen vom Geschlechte* $p = 0$, Math. Ann., 5, 1872), le quali furono precedute dalle analoghe del Cremona sulle rigate di grado $m + n$ dotate di una direttrice m — pla e di una n — pla (*Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano e determi-*

---

(1) V. anche la memoria di B. Klein nominata nel n. 7 del Cap. III.

(2) V. gli scritti di Cremona e di Clebsch citati a p. 110, nota seconda.

(3) A tale scritto di Clebsch servono di complemento i seguenti del Korndörfer: *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Doppelpunkten* (Math. Ann., 1, 1869, e 2, 1870), *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden* (Id., 3, 1871) e *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche aus zwei sich schneidenden unendlich nahen Geraden besteht* (Id., 4, 1871).

(4) Il germe di quest' idea — alla quale deve la propria esistenza la teoria delle trasformazioni doppie fra due piani, su cui c' intrattenemmo nel n. 6 — esiste probabilmente nella generalizzazione della projezione stereografica che Chasles espose nella Nota 28ª dell' *Aperçu historique*.

nazione delle loro curve assintotiche (1), Ann. di Mat., II, 1, 1868; cfr. Guccia, *Sur une classe de surfaces représentables point par point su un pian*, Ass. fr., 1880).

Ancora più generali e dotate di eccezionale importanza sono le indagini del Nöther, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (Math. Ann., 3, 1870), le quali, fra l'altro, condussero a concludere la razionalità di ogni superficie che contenga una schiera razionale semplicemente infinita di curve razionali e servirono di modello a innumerevoli ricerche congeneri.

Vanno ancora ricordati qui l'articolo del Tognoli sopra la *Rappresentazione piana di una classe di superficie algebriche dotate di curve multiple* (Giorn. di Mat., 14, 1876) e la tesi di G. Lazzeri, *Sulla rappresentazione pianà delle superficie sviluppabili razionali* (Pisa Ann., 3, 1883), perchè entrambi questi lavori si riferiscono a superficie speciali, ma di ordine qualsivoglia. Invece alla rappresentazione su un piano di superficie di ordine determinato sono consacrate le memorie seguenti: Clebsch, *Ueber die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve dritten Grades haben* (Math. Ann., 2, 1870), e *Ueber die Abbildung einer Classe von Flächen des fünften Ordnung* (Götting. Abh., 15, 1870) (2); F. Klein, *Ueber die Abbildung der Complexflachen vierter Ordnung und vierter Klasse* (Math. Ann., 2, 1870); Cremona, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen* (Id., 4, 1871), *Rappresentazione piana di alcune superficie algebriche dotate di curve cuspidali* (Bologna Mem., III, 2, 1872), e *An Exemple of the Method of Deducing a Surface from a Plane Figure* (Trans. of the R. Soc. of Edinburgh, 32, 1885); Frahm, *Ueber die Abbildung einer gewissen Fläche vierter Ordnung* (Math. Ann., 7, 1874); Laguerre, *Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner* (Bull. S. M. F., 1, 1875); Caporali, *Sulla superficie del quinto ordine dotata d'una curva doppia del quinto ordine* (Ann. di Mat., II, 7, 1875); Darboux, *Sur une surface de 5ième ordre et sa représentation sur le plan* (Bull. Sc. math., 2, 1871); H. Krey, *Ueber einen besonderen Fall des eindeutigen Entsprechens der Punkte zweier Flächen* (Math. Ann., 18, 1881).

Una questione importante presentasi spontanea nello studio della rappresentazione delle superficie le une sulle altre è quella se tutte siano riferibili punto per punto un piano, o, più generalmente, se due superficie qualunque si

---

(1) Queste assintotiche sono curve d'ordine $2(m+n-1)$, di cui l'Halphen diede più tardi una notevole costruzione nella nota *Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes* (Bull. S. M. F., 5, 1877).

(2) Le superficie ivi studiate hanno per curva doppia una quartica gobba di 1ª specie.

possano far corrispondere punto per punto. E poichè non è difficile persuadersi che tale domanda esige risposta negativa, così si è condotti all'altra questione: Quali sono le superficie che si possono rappresentare univocamente sopra una data? La questione analoga per le curve piane fu risolta considerando i generi ed i moduli; quella per le superficie servì di stimolo alle ricerche sopra i numeri analoghi per una superficie delle quali parlammo nel n. 3 del III Cap. e che vedremo essere state proseguite in varie direzioni durante il presente secolo.

10. L'ultima delle generalizzazioni delle trasformazioni cremoniane a cui accennammo nell'introduzione del n. 7, somministrò la « teoria delle trasformazioni razionali dello spazio ».

Alcuni esempi semplici di tali corrispondenze sono offerti dalla omologia nello spazio di Poncelet, dall'omografia in generale e dalla trasformazione per raggi vettori reciproci (1). Un esempio più complicato è offerto dalla trasformazione che nasce associando ad ogni punto dello spazio l'intersezione dei piani che gli corrispondono in tre date polarità o, più generalmente, in tre date correlazioni: tale corrispondenza, che in un certo senso è analoga alla corrispondenza quadratica fra due piani, fu studiata, indipendentemente gli uni dagli altri, dal Magnus (*Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes*, Berlin, 1837, p. 403 e seg.), da Hesse nella già citata memoria (v. pag. 61) del Journ. f. Math., 49, 1855 e da Cremona nella sua memoria sulle superficie cubiche (v. pag. 87).

Ma la teoria generale, benchè intuita e direi quasi abbozzata dal Magnus

---

(1) È questa l'unica trasformazione dello spazio che condivide con la similitudine la proprietà di conservare gli angoli: lo fece vedere Liouville nella VI delle sue note a Monge; tale importante proprietà si trova poi ridimostrata nei seguenti articoli: Maxwell, *On the Condition that in the Transformation of any Figure by Curvilinear Coordinates in three Dimensions every Angle in the New Figure shall be Equal to the Corresponding Angle in the Original Figure* (Proc. L. M. S., 4, 1872); L. Bianchi, *Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano e nello spazio* (Giorn. di Mat., 17, 1879); A. Capelli (1855-1910), *Sulla limitata possibilità di trasformazioni conformi dello spazio* (Ann. di Mat., II, 14, 1886). La similitudine invece è l'unica rappresentazione che conservi le aree delle superficie; lo assodò A Razzaboni nella nota *Sulle rappresentazioni dello spazio sopra sè stesso che conservano le aree delle superficie corrispondenti* (Bologna Rend., 1889-90).

Che il prodotto di quante si vogliano inversioni sia un'inversione dimostrò geometricamente il Mannheim nella nota intitolata: *Démonstration géométrique d'une propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques* (Journ. de Math., II, 16, 1871). Quali modificazioni subiscano per un'inversione le caratteristiche di una curva gobba si apprende dalla memoria di J. Möller, *Ueber die Transformation einer gewundenen Curve durch sphärische Inversion* (Lund Aarsskrift, 18, 1882). Finalmente uno studio metodico delle proprietà metriche della inversione leggesi nella nota del Pirondini, *Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci* (Giorn. di Mat., 27, 1889).

fin dal 1837 (v. op. cit.), non sorse che verso il 1870 e vide la luce per opera di tre grandi geometri che studiarono la questione ciascuno per propria iniziativa; sono Cayley, Cremona e Nöther; e gli scritti donde meglio si apprendono le loro ricerche sono rispettivamente: *On the Rational Transformation between Two Spaces* (Proc. L. M. S., 3, 1869-1871); *Sulle trasformazioni razionali dello spazio* (Ann. di Mat., II, 5, 1872) (1); *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen* (Math. Ann., 4, 1871). Di questi lavori il più importante è indubbiamente quello dovuto alla penna del nostro celebre connazionale. Egli, guidato dall'analogia che presenta la teoria che ci occupa con quella delle corrispondenze univoche fra due piani, mostrò come essa equivalga in ultima analisi allo studio dei sistemi « omaloidici » di superficie, cioè di quei sistemi lineari triplicemente infiniti di superficie algebriche razionali aventi un solo punto mobile d'intersezione. Inoltre insegnò un metodo ingegnosissimo per ottenere tutti i sistemi omaloidici di cui fa parte una superficie della quale si conosce una rappresentazione univoca sopra un piano (2). Finalmente con opportuni e molteplici esempî egli dimostrò come la teoria in discorso insegni il modo di rappresentare certe superficie su altre, in particolare sopra il piano. Donde emerge chiaramente come, conoscendo la rappresentazione di una superficie su un piano, si possa ottenere quella di infinite altre, epperò, successivamente, innumerevoli altre trasformazioni razionali dello spazio.

11. Malgrado il grande valore degli scritti con cui l'Inghilterra, l'Italia e la Germania contribuirono a fondare e svolgere la teoria delle corrispondenze univoche tra due spazî, non si può dire che questa abbia nel Secolo scorso raggiunto quel grado di perfezione che altre conseguirono e a cui essa poteva giustamente aspirare; ciò forse dipende dal fatto che la soluzione delle più ardue e delicate questioni ad essa collegate dipende dalla determinazione della natura e dal numero delle singolarità delle superficie, determinazione che offre

(1) Questa memoria, sgraziatamente incompleta, fu preceduta da alcune note dallo stesso titolo inserite in Rend. Ist. Lomb., 4, 1871; una traduzione francese di essa si legge in Bull. S. M. F., 7, 1874; come suo complemento si può intendere l'articolo *Sopra una trasformazione birazionale del sesto grado dello spazio a tre dimensioni, la cui inversa è del quinto grado* (Proc. L. M. S., 15, 1884).

(2) Tale metodo si può applicare anche alle trasformazioni razionali di spazi lineari comunque estesi; il che ignoro sia stato notato. Che altri ragionamenti più diretti possano, in casi particolari, condurre agli stessi risultati è chiarito su un esempio dalla nota di G. Loria, *Sulle trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale del terz'ordine* (Torino Atti, 26, 1890).

difficoltà che non furono ancora totalmente vinte (1). Da ciò forse la spiegazione del fatto che i geometri posteriori a quelli citati si occuparono più di illustrare i metodi dei grandi maestri summentovati, che di perfezionarli e completarli. Fra le speciali trasformazioni che vennero in conseguenza studiate vanno notate le (monoidali) analoghe di quelle di de Jonquières (v. p. 233), di cui il de Paolis trattò nella memoria. *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie d' ordine* n *con un punto* (n — 1) — *plo* (Giorn. di Mat., 13, 1875), alcune involuterie di cui occuparonsi il Martinetti (*Sopra una classe di trasformazioni involutorie dello spazio,* Rend. Ist. Lomb., II, 18, 1885), il de Paolis (*Alcune particolari trasformazioni involutorie dello spazio,* Lincei Rend., IV, 1, 1885). l' Eberhard (*Ueber eine räumlich involutorische Verwandtschaft 7. Grades und ihre Kernfläche 4. Ordnung,* Breslau, 1885) ed il Montesano (*Su alcuni gruppi chiusi di trasformazioni involutorie nel piano e nello spazio,* Atti Ist. Ven., VI, 6, 1888; *Su le trasformazioni involutorie monoidali,* Rend. Ist. Lomb., II, 21, 1888; *Su una classe di trasformazioni involutorie dello spazio*; *Su le trasformazioni involutorie dello spazio nelle quali ai piani corrispondono superficie di ordine* n *con una retta* (n—2)-*pla,* Lincei Rend., IV, 5, 1889$_1$; *Su le trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso lineare di rette,* Id., 4, 1888$_1$; *Su le trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso tetraedrale,* Id., 5, 1889$_2$; *Su una classe di trasformazioni razionali ed involutorie dello spazio, di genere arbitrario* n *e di grado* $2n+1$, Giorn. di Mat., 31, 1893). Additeremo ancora (cfr. n. 3 di questo Cap.) il *Mémoire sur la classification arguésienne des courbes gauches algébriques ou extension à ces courbes du principe arguésien* (Belgique Bull., II, 46, 1878) del Saltel, nonchè le memorie del Casey, *On Cubic Transformations* (Dublin Trans., 1880), di A. Schönfliess, *Uber Gruppen von Transformationen des Raumes in sich* (Math. Ann., 34, 1883), dell'Aschieri, *Sulle corrispondenze cremoniane nel piano e nello spazio* (Rend. Ist. Lomb., II, 14, 1881), di F. von Krieg, *Ueber die eindeutige Beziehung von Räumen mittelst projectiver Ebenenbüschel und ihre Anwendung auf Constructionsaufgaben* (Zeitschr. f. Math., 29, 1884) e dell' Ascione, *Studio di una trasformazione* (3, 3) (Giorn. di Mat., 31, 1893), di cui le tre ultime, in forza dei temi che trattano, hanno molti punti di contatto.

L'innumerevole varietà di forme speciali di cui sono suscettibili le trasformazioni razionali dello spazio rende desiderabile di classificarle. Un criterio di classificazione si ottiene osservando che in una tale trasformazione alle rette

(1) Fra gli scritti con cui si cercò di sormontarle merita un posto eminente quello del Nöther, *Sulle curve multiple di superficie algebriche* (Ann. di Mat., II, 5, 1872).

dell' uno spazio corrispondono delle curve di un certo genere, il quale non si altera scambiando le voci dei due spazi; si è proposto di chiamarlo « genere della trasformazione » e fu indicato un modo per determinare tutte le trasformazioni di genere zero (G. Loria, *Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio, in particolare sulle trasformazioni di genere* 0, Rend. Ist. Lomb., II, 23, 1890). Un altro criterio di classificazione emerge dalla considerazione del complesso generato dalle rette congiungenti i punti corrispondenti di due spazi conjettivi in corrispondenza univoca (M. Pannelli, *Sui complessi associati ad ogni trasformazione birazionale dello spazio*, Giorn. di Mat., 28, 1890); sembra, infatti, che alcuni preferirebbero collocare in una stessa classe tutte le trasformazioni che dànno luogo al medesimo complesso di rette: ciò appare da alcune memorie già citate (pag. prec.) del Montesano e dalle quattro seguenti del Pieri: *Sulle trasformazioni involutorie dello spazio determinate da un complesso Hirstiano di rette* (Rend. Ist. Lomb., II, 25, 1892) (1). *Sulle trasformazioni razionali dello spazio inerenti a un complesso lineare speciale* (Giorn. di Mat., 31, 1893), *Le trasformazioni razionali dello spazio inerenti ad una conica* (Palermo Rend., 7, 1893), e *Sulle trasformazioni razionali dello spazio che individuano complessi di tangenti* (Giorn. di Mat., 33, 1895). A quali di questi criteri convenga accordare la preferenza, o se convenga usarli promiscuamente, o se sia meglio sceglierne dei nuovi, sono questioni che l' avvenire deciderà.

12. Un primo tentativo di una teoria delle trasformazioni (1, *n*) dello spazio venne fatto dal Tognoli nella memoria, *Sulle corrispondenze multiple fra due spazii a tre dimensioni* (Giorn. di Mat., 10, 1872), generalizzando allo spazio le considerazioni di Chr. Wiener che citammo precedentemente (n. 6); altrettanto fece molto tempo dopo il Pannelli nell' articolo, *Sulle trasformazioni multiple involutorie di due spazii* (Napoli Rend., II, 1, 1887). Un altro fu fatto dal Reye nell' articolo intitolato: *Ueber Coordinaten - Transformationen* n^{ter} *Grades* (Journ. f. Math., 94, 1883). D'altronde l' Aschieri, nella memoria sopra *La trasformazione quadratica doppia di spazio e la sua applicazione alla geometria dello spazio non-Euclideo* (Rend. Ist. Lomb., II, 14, 1881, e 15, 1882), estendeva allo spazio una trasformazione piana doppia considerata dal de Paolis (v. n. 6 di questo Cap.), ed il Segre, in un articolo citato a p. 102, esponeva delle assai notevoli applicazioni di una certa trasformazione doppia tra due forme di terza specie. Ma la teoria generale delle trasformazioni

---

(1) È *Hirstiano* un complesso generabile nel modo indicato da Hirst nella memoria menzionata nella chiusa del Cap. prec.

doppie dello spazio, è dovuta, come l'analoga del piano, al de Paolis, il quale ne fece conoscere i concetti e le proposizioni più cospicue nella fondamentale memoria sopra *Le trasformazioni doppie dello spazio* (Lincei Mem., IV, 1, 1885). Una applicazione dei metodi ivi insegnati fu fatta dallo stesso de Paolis in una nota da noi già ricordata (p. 99), una seconda dal Pieri nel lavoro, *Sulle tangenti triple di alcune superficie del sest' ordine* (Torino Atti, 24, 1889). Sono questi preliminari della teoria delle trasformazioni multiple (1, n) fra due spazii (cfr. Aschieri, *Del legame fra la teoria dei complessi di rette e quella delle corrispondenze univoche e multiple dello spazio*, Rend. Ist. Lomb., II, 21, 1888) e di quelle più generali (m, n), entrambe riserbate ai futuri geometri: intanto ci piace rilevare che alcuni casi particolari sono considerati nel lavoro di C. Steinmetz, *Ueber die durch ein lineares Flächensystem n^{ter} Ordnung definirten mehrdeutigen involutorischen Raumverwandtschaften* (Zeitschr. f. Math., 35, 1890).

13. Quando si hanno due spazi in corrispondenza univoca qualunque e si considera la figura correlativa dell'uno, si arriva ad una relazione fra punti e piani che include come suo caso particolarissimo l'ordinaria correlazione fra due spazi. Se in particolare i due spazi sono conjettivi e due elementi corrispondenti qualunque sono in posizione unita, si ha una relazione geometrica più generale della correlazione nulla fra due spazi; questi, considerati insieme, formano allora un « sistema nullo d'ordine superiore ». A tali figure accennò, in un certo modo, il Reye nell'articolo *Ueber die reciproke Verwandtschaft von* F^2 — *Systeme und* Φ^2 — *Gewebe und die quadratische* F^2 — *Systeme achter Stufe* (Journ. f. Math., 82, 1877); ma, nel caso in cui la corrispondenza sia quadratica (1), essi furono studiati metodicamente per la prima volta dall'Ameseder, nelle due memorie: *Ueber ein Nullsystem zweiten Grades* (Wiener Ber., 83, 1881) e *Das allgemeine räumliche Nullsystem zweiten Grades* (Journ. f. Math., 97, 1884) e poi da H. Oppenheimer, *Anwendungen des Ameseder'schen Nullsystems* (Diss. Jena, 1892; oppure Arch. der Math., II, 13, 1894). Riguardo a tali corrispondenze citeremo anche le memorie seguenti: R. Sturm, *Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften* (Math. Ann., 19, 1882) e *Ueber höhere raumliche Nullsysteme* (Id., 28, 1887); Voss, *Zur Theorie der allgemeinen Punkt-Ebenen-Systeme* (Id., 23, 1884), e *Theorie der rationalen algebraischen Punkt-Ebenen-Systeme* (Ivi); Lazzeri, *Sulle reciprocità birazionali nello spazio* (Lincei Rend., IV, 2, 1886_2); Montesano, *Sulle reciprocità birazionali dello spazio* (Id., IV, 4, 1888_1).

(1) Cioè tale che ai piani di una stella corrispondano i punti di una quadrica.

Finiremo col rilevare come, generalizzando il concetto di corrispondenza, si possa considerare una relazione fra r figure dello stesso numero di dimensioni tale che, scelto ad arbitrio un elemento in $r-1$ fra esse, resti determinato un elemento od un gruppo di m_i elementi nella rimanente. Tale corrispondenza, che col de Paolis (*Sulle corrispondenze* $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ *continue che si possono stabilire tra i punti di* r *gruppi*, Ann. di Mat., II, 18, 1890) si può indicare col simbolo $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$, venne studiata nel caso di $r=3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, e supponendo che le figure in corrispondenza siano forme fondamentali di prima specie, anzitutto da F. August, il quale la chiamò relazione « duploprojettiva » (1) e l'applicò a generare le superficie cubiche (v. lo scritto menzionato a p. 88), poi nei seguenti lavori: Rosanes, *Ueber linear-abhängige Punktsysteme* (Journ. f. Math., 88, 1860); Schubert, *Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilde* (Math. Ann., 17, 1880 e Hamburger Mitth., 1881); Castelnuovo, *Studio sulla omografia di seconda specie* (Atti Ist. Ven., VI, 5, 1887); F. Deruyts, *Sur la représentation de l'homographie de seconde espèce sur la cubique gauche* (Ann. de la Soc. Sc. de Bruxelles, II, 17, 1889); F. Aschieri, *Sulle omografie di 2ª specie* (Rend. Ist. Lomb., II, 28, 1890); B. Klein, *Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde* (Marburg, 1881) e *Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde*, Ann. di Mat., II, 18, 1890, e 19, 1891); London, *Zur Theorie der trilineare Verwandtschaft dreier einstufigen Grundgebilde* (Math. Ann., 44, 1894) (2). Contemporanei circa ai lavori dello Schubert sulla corrispondenza trilineare sono quelli del Le Paige intitolati *Essais de géométrie supérieure du troisième ordre* (Liège Mem., II, 10, 1883, e Belgique Bull., III, 5, 1883), *Note sur l'homographie du troisième ordre* (Ivi) e *Ueber eine Eigenschaft der Oberflächen zweiter Ordnung* (Wiener Ber., 87, 1883); essi porgono delle notevoli applicazioni della teoria delle forme algebriche. Altrettanto può ripetersi di quelli del medesimo autore in cui è studiata ed applicata l'analoga corrispondenza « quadrilineare » e che sono: *Sur la forme quadrilinéaire* (Torino Atti, 17, 1882); *Sur la génération de certaines surfaces par des faisceaux quadrilinéaires* (Belgique Bull., III, 8, 1884); *Sur la forme quadrilinéaire et les surfaces du troisième ordre* (Ivi); *Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre* (Acta, 5, 1884). Delle corrispondenze analoghe fra un numero qualunque di forme di prima specie tratta il *Mémoire*

(1) Oggi si preferisce chiamarla « trilineare », perchè è rappresentata da un'equazione lineare fra tre serie di variabili.

(2) Aggiungiamo che sulla corrispondenza trilineare si basa una generalizzazione ideata da A. Petot pel teorema di Pascal; si trova esposta nella nota, *Sur une extension du théorème de Pascal aux surfaces du troisième ordre* (C. R., 102, 1886).

sur la théorie de l' involution et de l' homographie unicursale (Bruxelles, 1891) di F. Deruyts. Invece la corrispondenza [1, 1, 1] nel caso di forme di seconda specie è studiata nelle due memorie di G. Hauck (1845 - 1905) (1) *Neue Construction der Perspective und Photogrammetrie* (Journ. f. Math., 95, 1883) e *Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme* (Id., 97, 1884, 98, 1885, 108, 1891, e 111, 1893 (2)), dalle quali risulta che tale corrispondenza è importante per le applicazioni che riceve nella geometria descrittiva (3).

Si aggiunga che la geometria projettiva degli spazi lineari qualunque, la quale verrà descritta nel Cap. XI dell' opera presente, venne applicata con ottimi risultati allo studio di certe particolari corrispondenze; ciò emerge dai seguenti scritti: Castelnuovo, *Studio dell' involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale* (Atti Ist. Ven., VI, 4, 1886) e *Studii sulla teoria della involuzione nel piano* (Ivi); F. Deruyts, *Sur la représentation des involutions unicursales* (Belgique Bull., III, 14, 1887) e *Sur la théorie de l' involution* (Ivi).

Finalmente noteremo *(last but not least!)* come tutte le trasformazioni considerate cambino due figure (curve o superficie) fra loro tangenti in altre due pure tangenti: donde l' origine del concetto di trasformazione godente tale prerogativa, che è base della « teoria delle trasformazioni di contatto », che assieme a quella dei gruppi di trasformazioni, forma quel campo d' indagini che il Lie ha aperto e così sapientemente coltivato e che rappresenta uno dei più memorabili progressi che la matematica, nel suo complesso, fece sullo scorcio del secolo XIX (4).

Se si volge uno sguardo a quanto esponemmo nelle pagine precedenti, si vedrà come il tema trattato in questo Cap. abbia trovato numerosi e significanti cultori (5). La ragione di tal fatto risiede nell' essere generale convincimento che, per quanto lo studio diretto di una figura sia per fermo preferibile a quello di una sua trasformata, pure, nello stato attuale della scienza, poche

---

(1) E. Lampe, *Guido Hauck* (Deutsch. Math. Ver., 14, 1905).

(2) V. anche: T. Schmid, *Ueber trilinear verwandte Felder als Raumbilder* (Monatshefte, 6, 1895, e 7, 1896).

(3) Per più precise informazioni al riguardo si veda la citata *Storia della geometria descrittiva* dell' autore.

(4) Di tali teorie, di cui già citammo alcune applicazioni, è agevole prender notizia grazie alla grande opera, *Theorie der Transformations-gruppen* che, colla collaborazione di F. Engel, il Lie ha pubblicato (Leipzig, 1888, 1890, 1893); si veda anche: Lie e Scheffers, *Vorlesungen über continuirlicher Gruppen* (Leipzig, 1893) e *Geometrie der Berührungstransformationen* (Leipzig, 1896).

(5) Ai quali fa d' uopo unire coloro che studiarono la rappresentazione del complesso lineare di rette sullo spazio punteggiato e dello spazio rigato sullo spazio lineare a quattro dimensioni, dei quali dicemmo nel Cap. prec.

teorie sarebbero, quanto quella delle trasformazioni geometriche, meritevoli di essere rese perfette in tutti i loro più minuti particolari. Infatti, per dirla con le parole di un grande, « en réfléchissant aux procédés de l'Algèbre, et en recherchant la cause des avantages immenses qu'elle apporte dans la Géométrie, ne s'aperçoit-on pas qu'elle doit une partie de ces avantages à la facilité des transformations que l'on fait subir aux expressions qu'on y introduit d'abord? transformations dont le secret et le mécanisme font la véritable science, et l'objet constant des recherches de l'analyste. N'était-il pas naturel de chercher à introduir pareillement, dans la Géométrie pure, des transformations analogues, portant directement sur les figures proposées et sur leurs propriétés? » (3).

---

(3) Chasles, *Aperçu historique*, 2ᵉ ed., p. 196.

CAPITOLO IX.

Geometria numerativa.

1. Il problema che la Geometria numerativa si propone, concepito nella sua forma più generale, si enuncia così: Determinare fra gli ∞^r enti di data definizione, il numero di quelli che soddisfanno a un numero di condizioni equivalenti ad r condizioni semplici (1). Tradotta in linguaggio algebrico, questa questione si trasforma nella ricerca del numero delle soluzioni finite che ammette un sistema di equazioni dotate di singolarità qualunque; si riduce, cioè, a quella che ragionevolmente si può ritenere essere la questione fondamentale della teoria dell'eliminazione algebrica (2); ciò è sufficiente a mostrare quale importanza possieda.

È impossibile assegnare l'epoca in cui fece la sua apparizione questo ramo della scienza dell'estensione; infatti, il giorno in cui un geometra, giunto in possesso di un metodo per costruire una figura soddisfacente a certe condizioni, intraprese la discussione della soluzione ideata per riconoscere, non soltanto come dovevano essere disposti i dati affinchè quella costruzione fosse effettivamente eseguibile, ma anche per stabilire quante di quelle figure verificassero le condizioni imposte; in quel giorno fu studiato un problema di Geometria numerativa. Però la disciplina che porta oggi questo nome differisce dagli studî a cui testè alludemmo perchè si propone di determinare il numero delle soluzioni di una questione senza averla sciolta, spesso anzi ignorando il modo di risolverla. Ad essa soltanto è consacrato il presente Cap., il quale porge molti complementi a quanto esponemmo in quelli che portano i numeri II, III, IV e VII. Prima di entrare in argomento, osserviamo che la materia del Cap. medesimo non è determinata senza incertezza, sicchè in esso avremmo potuto, ad esempio, far entrare molte indagini intorno alle singolarità di curve, di superficie e di complessi di rette, nonchè altre congeneri; se opportunamente pensammo di non farlo, giudichi il lettore.

---

(1) Nella Geometria numerativa si *contano*, non si *descrivono a parte*, le soluzioni; si *numerano*, non si *enumerano*: donde la ragione per cui noi non approviamo, epperò non adottiamo, il nome di Geometria enumerativa prescelto da alcuni matematici.

(2) Gli è perciò che la nota del Krey, *Ueber Systeme von Gleichungen mit gewissem Besonderheiten* (Math. Ann., 19, 1882) è di pertinenza della Geometria numerativa.

2. Fra le numerose proposizioni di cui Steiner ci lasciò gli enunciati, parecchie entrano nel dominio della Geometria numerativa. Tali sono quelle che assegnano il numero delle coniche, le quali passano pei tre punti dati di una cubica piana e la osculano altrove (*Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung*, Journ. f. Math., 32, 1846) e il numero di quelle quadritangenti a una quartica piana od aventi assegnate relazioni di contatto con curve date (*Aufgaben und Lehrsätze*, Id., 45, 1853, e 49, 1855); tali sono, ancora meno discutibilmente, quelle donde si apprende quante siano le coniche che toccano 5, 4 o 3 coniche date e passano rispettivamente per 0, 1 o 2 punti dati (*Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte*, Id., 37, 1848), e quante quelle di cui si conoscono p punti, t tangenti e n normali, ove $p+t+n=5$ (*Vermischte Sätze und Aufgaben*, Id., 55, 1858) (1); tali da ultimo quelle che insegnano quante siano le cubiche di un dato piano che soddisfanno a certe condizioni (*Aufgaben und Lehrsätze*, Id., 45, 1853). Aggiungeremmo ancora gli scritti di Steiner e de' suoi numerosi commentatori intorno alle curve dotate di centro e alle normali a curve e superficie algebriche, se non ne avessimo discorso altrove (v. Cap. II, n. 2, e Cap. III, n. 5).

Siccome non ci è nota la via che seguì Steiner per giungere alle ora ricordate verità, così si può dire che egli appartenga al periodo di preparazione (sarebbe dir troppo asserendo che egli lo contrassegni); è lecito anche affermare che i suoi studî contribuirono indirettamente, ma molto efficacemente, alla costituzione della Geometria numerativa, in quanto stimolarono molti geometri a creare metodi di giustificazione per quanto egli aveva asserito. Fra tali scienziati va anzitutto ricordato il Bischoff grazie alla nota intitolata *Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven* (Journ. f. Math., 56, 1859), ove l'algebra moderna è sfruttata per dimostrare e completare alcuni dei teoremi summentovati; ivi però il Bischoff, come del resto lo stesso Steiner, incorse in alcuni errori che cinque anni più tardi vennero rilevati e corretti da Chasles (v. pag. seg.); per renderli perfetti, come nota il Cremona (*Einleitung in eine Theorie der ebenen Curven*, Greifswald, 1865, n. 111 *bis*) basta tenere il debito conto delle soluzioni improprie (2). D'altronde i teoremi di cui Steiner diede notizia in Journ. f. Math., 55, si trovano dimostrati nella *Note sur le nombre*

(1) I numeri trovati da Steiner non sono tutti esatti; le relative modificazioni si leggono nella nota di A. Wiman, *Ueber die Anzahl des Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tangenten und Normalen bestimmt sind* (Zeitschr. f. Math., 40, 1895), ove sono anche risolti i problemi analoghi per la parabola.

(2) Cfr. anche Gundelfinger, *Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Bischoff über die Tangenten algebraischer Curven im 56. Bande d. J.* (Journ. f. Math., 73, 1871).

des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque parmi ces conditions il existe des normales données (Journ. de Math., II, 4, 1859) del de Jonquières, geometra al quale dobbiamo anche delle *Solutions de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes* (Journ. f. Math., 59, 1861); citiamo qui tale lavoro essendo ivi insegnate parecchie proposizioni che comprendono alcune di Steiner ed alle quali l'autore pervenne risolvendo in casi speciali il problema generale seguente: « determinare la classe dell'inviluppo di una retta che seca una data curva algebrica in modo che una data funzione algebrica razionale intera delle mutue distanze dei punti d'intersezione abbia un dato valore » (1). Notiamo di passaggio che altri enunciati di Steiner si possono giustificare servendosi di una trasformazione piana quadratica, come ebbe a notare il Berner nella sua pregevole Diss. *De transformatione secundi ordinis ad figuras geometricas adhibita* (Berlin, 1864).

Si può ritenere che l'ultimo geometra appartenente all'ora descritto periodo di preparazione sia il de Jonquières, di cui va ancora menzionata la memoria dal titolo *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (Journ. de Math., II, 6, 1861; cfr. Battaglini, *Sulla serie di curve di indice qualunque*, Napoli Atti, 2, 1863), la cui importanza è in gran parte dovuta alla nozione ivi introdotta di « indice di un sistema semplicemente infinito di curve piane »; ma non ci è permesso di tacere che parecchi dei teoremi ivi esposti per raggiungere l'esattezza devono subire delle modificazioni non insignificanti (cfr. de Jonquières, *Note sur les systèmes de courbes et de surfaces*, Journ. de math., II, 10, 1865, e *Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque*, Giorn. di Mat., 4, 1866); la causa di tali imperfezioni sta nel metodo usato dall'egregio geometra metodo il quale, essendo in sostanza una semplice applicazione del teorema di Bézout, non permette di discernere le soluzioni proprie; e nemmeno è lecito lasciar passare inosservato che egli erroneamente credette alla possibilità di rappresentare in coordinate cartesiane qualunque serie algebrica di curve d'indice m mediante un'equazione della forma $\sum_{r=0}^{r=m} \lambda^{m-r} f_r(x, y) = 0$ (f_r essendo polinomi interi dello stesso grado), sicchè le sue proposizioni non sono applicabili che a serie *razionali*.

3. Il primo periodo di esistenza della Geometria numerativa si può far cominciare dal giorno in cui Chasles intraprese la pubblicazione della lunga se-

(1) Algebricamente questo problema si può sciogliere con facilità in molti casi applicando il notissimo « principio di trasporto » (*Uebertragungsprincip*) di Clebsch.

rie di memorie con cui egli chiuse gloriosamente la sua luminosa carriera scientifica (1).

Comincia tale serie con la memoria che tratta della *Détermination du nombre des sections coniques qui doivent toucher cinq courbes d'ordres quelconques ou satisfaire à diverses autres conditions* (C. R., 58, 1864), e tende a correggere le proposizioni inesattamente esposte da Steiner e Bischoff (v. pag. prec.), e a sorreggere con inconfutabili dimostrazioni dei teoremi che il de Jonquières aveva dianzi scoperti. Ad essa seguono da presso le due intitolate *Construction des coniques qui satisfont à cinq conditions. Nombre des solutions dans chaque question* (Ivi) e *Systèmes de coniques qui coupent des coniques données, sous des angles donnés, ou sous des angles indéterminés, mais dont les bisectrices ont des directions déterminées* (Ivi), lo scopo delle quali è sufficientemente indicato dal titolo. Del metodo per assodare la verità dei teoremi ivi enunciati, Chasles si occupò in una celebre comunicazione fatta all' Accademia delle Scienze di Parigi il 27 giugno 1864 e pubblicata in C. R., 58, sotto il titolo: *Considérations sur la méthode générale exposée dans la séance du 15 février. Différences entre cette méthode et la méthode analytique. Procédés généraux de démonstration.* Ivi sono fatti notare i servizi che rendono nella geometria numerativa: 1° le « caratteristiche » μ e ν di un sistema semplicemente infinito di coniche d'un piano (μ numero delle coniche del sistema che passano per un punto arbitrario del piano del sistema, ν numero delle coniche che toccano una retta qualunque del piano stesso), 2° la considerazione delle coniche singolari o degeneri contenute nel sistema considerato, 3° il « principio di corrispondenza » di cui parleremo nel n. 8. Questo metodo, almeno nella parte che concerne le caratteristiche, è un perfezionamento, che la pratica aveva dimostrato indispensabile, di quello che il de Jonquières aveva eretto sulla nozione di « indice » (2). Tale perfezionamento — che sembra naturale a chi rifletta non essere la considerazione di due caratteristiche correlative in un sistema che il riflesso del doppio modo di considerare una curva, come luogo di punti e come inviluppo di rette — è così grande che a ragione Chasles, viene considerato per il creatore della geometria numerativa delle curve piane.

Fedeltà storica impone di ricordare qui una polemica vivace fra Chasles e de Jonquières, a cui diede luogo la teoria delle caratteristiche; non potendo addentrarci nell'esame di essa, ci limitiamo a indicare gli scritti che ne contrassegnano le fasi (3); Chasles, *Observations relatives à la théorie des systèmes*

---

(1) Cfr. l'articolo bibliografico del Painvin, *Sur la théorie des caractéristiques* (Bull. Sc. math., 3, 1872).

(2) Infatti l' « indice » non differisce dalla caratteristica μ di Chasles.

(3) Cfr. Chasles, *Rapport sur les progrès de la géométrie* (Paris, 1870), p. 330-331.

de courbes (C. R., 63, 1866); de Jonquières, *Observations relatives à la théorie des séries ou systèmes de courbes* (Ivi); Chasles, *Observations au sujet de cette communication* e *Addition aux observations présentées dans la dernière séance* (Ivi); de Jonquières, *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque, suivies d'une réponse à quelques critiques de M. Chasles* (Paris, 1866); Chasles, *Réponse à une revendication de priorité* (Paris, 1867); de Jonquières, *Documents relatifs à une revendication de priorité* (litogr. Paris, 4 fév. 1867); Chasles, *Réponse aux documents relatifs à une revendication de priorité* (Paris, 1867); de Jonquières, *Lettre à M. Chasles sur une question en litige* (Paris, 31 mai 1867).

Dopo di aver esposti i concetti fondamentali del suo metodo, Chasles fece conoscere degli *Exemples des procédés de démonstration annoncés dans la séance précédente 27 juin 1864* (C. R., 59, 1864), che moltiplicò nella *Suite des propriétés relatives aux systèmes de sections coniques* (Ivi) e nelle note seguenti: *Questions dans lesquelles il y a lieu de tenir compte des points singuliers des courbes d'ordre supérieur. Formule générale compremant la solution de toutes les questions relatives aux sections coniques* (Ivi), *Questions dans lesquelles entrent les conditions multiples, telles que des conditions de double contact ou de contact d'ordre supérieur* (Ivi), *Propriétés de systèmes de coniques, relatives, toutes, à certaines séries de normales en rapport avec d'autres lignes ou divers points* (Id., 72, 1871), *Propriétés des systèmes de coniques, dans lesquelles se trouvent des conditions de perpendicularité entre divers systèmes de droites* (Ivi) e *Théorèmes divers concernant les systèmes de coniques représentés par deux caractéristiques* (Ivi).

4. Gli splendidi risultati ottenuti da Chasles ebbero un'eco in tutto il mondo scientifico; lo provano le numerose pubblicazioni aventi per iscopo di perfezionare i di lui procedimenti, di verificare i suoi enunciati (1) o di pervenire per altra via alle verità da lui scoperte, infine di rendere più copiosa la collezione di teoremi di Geometria numerativa: fra essi basterà che ora citiamo, oltre ai brani di lettere di Cremona, Cayley e Hirst inserite in C. R., 64, 1867, alcune note del Cremona (*Sur le nombre de coniques qui satisfont à des conditions doubles*, C. R., 59, 1864), del Cayley (*Sur les coniques déterminées par cinq conditions de contact avec une courbe donnée*, Id., 63, 1866), e di N. Salvatore-Dino (*Sur la théorie des systèmes de coniques*, Id., 65, 1867, e *Alcune applica-*

(1) P. es. nella Diss. del Tognoli intitolata: *Teoremi di Chasles sopra le proprietà dei sistemi di coniche* (μ, ν) *che servono di base alla determinazione del numero di queste curve che soddisfano a cinque condizioni qualunque* (Pisa, 1869), si trovano dimostrati i teoremi che Chasles fece inserire in C. R., 58 e 59.

zioni analitiche del metodo delle caratteristiche, Napoli Rend., 14, 1875), e poi le importanti memorie dello Zeuthen *Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques* (Nouv. Ann. II, 5, 1866) (1) e del Cayley, *On the Curves wich satisfy given Conditions* (Phil. Trans., 158, 1868 (2). Chasles di poi accrebbe notevolmente la portata dei suoi metodi e così potè estendere a sistemi di curve d' ordine qualsivoglia alcune delle ricerche che in origine aveva limitato alle coniche, come si apprende dalle note, veramente fondamentali, intitolate: *Relations entre les deux caractéristiques d' un système de courbes d'ordre quelconque* (C. R., 62, 1866); *Remarques sur les questions de contact de courbes d'ordre quelconque avec une courbe donnée dont les points se déterminent individuellement* (Id., 63, 1866): *Sur les systèmes de courbes d' ordre quelconque* (Id., 64, 1867). Indagini congeneri vennero condotte a termine dal de Jonquières, *Formules exprimant le nombre de courbes d' une même système d' ordre quelconque, qui coupent des courbes données d' ordre également quelconque, sous des angles donnés, ou sous des angles indéterminés mais dont le bissectrices ont des directions données* (C. R., 58, 1864); *Détermination du nombre des courbes d' ordre* r *qui ont un contact d' ordre* $n < mr$ *avec une courbe donnée d'ordre* m e *Détermination du nombre des courbes du degré* r *qui ont deux contacts, l'un dordre* n, *l'autre d'ordre* n' (Id., 63, 1866), e da lui estese anche ai sistemi di superficie algebriche. (*Propriétes diverses des systèmes de surfaces d'ordre quelconque,* C. R., 58, 1864, e *Sur la détermination des valeurs des caractéristiques dans les séries ou systèmes élémentaires de courbes et de surfaces,* Id., 63, 1866) (3); a tali investigazioni devono la loro esistenza anche i seguenti lavori del medesimo geometra: *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré* r, *qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe de degré* m (Journ. f. Math., 66, 1866), *Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques* (Math. Ann., 1, 1869) e *Note sur quelques théorèmes fondamentaux dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques* (Ann. di Math., II, 8, 1877); analoghe a queste sono le questioni risolute nella nota

---

(1) Originariamente questo lavoro comparve in danese col titolo *Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit, der er underkatede 4 Betingelser* (Köjbenhavn, 1865); un sunto se ne legge in C. R., 62, 1866.

(2) Ivi è mostrata l' applicazione delle equazioni funzionali alla risoluzione di problemi di Geometria numerativa.

(3) Cfr. anche le *Recherches* che fanno parte degli scritti polemici contro Chasles che furono citate a pag. 229, nonchè l' *Étude* dello stesso autore, *Sur les singularités des surfaces algébriques* (Nouv. Ann., II, 3, 1864); inoltre: Cayley, *Notes sur quelques formules de M. E. de Jonquières, relatives aux courbes qui satisfont à des conditions données* (C. R., 63, 1866), e A. Legoux, *Mémoire sur les systèmes de surfaces* (Mém. de l' Acad. de Toulouse, VIII, 9, 1887).

Détermination de courbes et de surfaces satisfaisant à des conditions de contact double (C. R., 89, 1879) dello Zeuthen, geometra che alcuni anni prima, in una memoria già citata (pag. 171) (1), aveva esteso il metodo delle caratteristiche, dalle coniche, alle curve piane d'ordine qualunque.

Osserviamo qui come i lavori del de Jonquières abbiano eccitato parecchi scienziati ad occuparsi delle questioni di Geometria numerativa in cui entrano condizioni di contatto fra curve, fra superficie e fra curve e superficie, il che fornì ad alcuni di essi una propizia occasione per mostrare ottime applicazioni dell'analisi più raffinata. Vanno in particolare ricordati i seguenti scritti: A. Brill, *Ueber diejenigen Curven eines Büschels welche eine gegebene Curve zweipunktig berühren* (Math. Ann., 3, 1871), *Ueber zwei Berührungsprobleme* (Id., 4, 1871) e *Ueber Systeme von Curven und Flächen* (Id., 8, 1875); Tognoli, *Nota sul numero delle superficie di una rete, che hanno un contatto tripunto colla curva d'intersezione di due superficie algebriche* (Giorn. di Mat., 9, 1871); Spottiswoode, *On the Contact of Surfacs* (Phil. Trans. 162, 1872), *Sur les surfaces osculatrices* (C. R., 79, 1874), *On the Contact of Quadrics with other Surfaces* (Proc. L. M. S., 5, 1874), *Sur le contact d'une courbe avec un faisceau de courbes doublement infini* (C. R., 88, 1876), *On Multiple Contact of Surfaces* (Quart. Journ., 4, 1876), *On Curves having Four—point Contact with a Triply Infinite Pencil of Curves* (Proc. L. M. S., 8, 1877), *On Hyperjacobian Surfaces and Curves* (Phil. Trans., 167, 1877), e *On the Contact of Conic with Surfaces* (Id. 169, 1879); Clifford, *On Mr. Spottiswoode's Contact Problems* (Id., 164, 1874); Krey, *Ueber dreipunktig berührende Curven einer dreifach unendlichen Schaar* (Math. Ann. 10, 1876); Fouret, *Démonstration par le principe de corrispondance d'un théorème sur le contact des surfaces d'un implexe avec une surface algébrique* (C. R., 84, 1877); Lindemann, *Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre* (Bull. S. M. F., 10, 1882); G. Humbert, *Sur un problème de contact de M. de Jonquières* (Palermo Rend., 4, 1890); G. Bagnera (1865-1927), *Sul luogo dei contatti tripunti delle curve di un fascio con le curve di una rete* (Id. 10, 1896); de Franchis, *Sulla curva luogo dei contatti d'ordine* k *delle curve d'un fascio colle curve d'un sistema lineare* ∞^2 (Ivi e 11, 1897).

5. Nel frattempo Chasles aveva enunciati molti teoremi intorno ai sistemi semplicemente infiniti di coniche nello spazio (*Systèmes de coniques qui sa-*

(1) Se ne trova un sunto in Bull. Sc. math., 7, 1874. Cfr. anche Krey, *Ueber Systeme von Plancurven* (Acta, 7, 1885) Assai più ristretto è il campo di azione della *Note sur le nombre des coniques qui touchent en cinq points une courbe du cinquième degré* (Nouv. Ann., II, 5, 1866) del Beyer.

stisfont à sept conditions dans l'espace, (C. R., 61, 1865) ed ai sistemi analoghi di quàdriche (*Théorie générale des systèmes de surfaces du second ordre satisfaisant à huit conditions ; caractéristiques des systèmes élementaires* e *Expression générale du nombre des surfaces déterminés par neuf conditions quelconques*, Id., 62, 1866). Fra tali proposizioni quelle relative alle coniche (o le loro correlative) furono dimostrate analiticamente e completati dall'Hierholzer (*Ueber Kegelschnitte im Raume*, Math. Ann., 2, 1870), dal Lüroth (*Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Gerade im Raume schneiden*, Journ. f. Math., 68, 1868, e *Eine Aufgabe über Kegelschnitte im Raume* Math. Ann., 3, 1871), e dal Cayley (*On the Surfaces each the Locus of the Vertex of a Cone whic passes through* m *Given Points and touches* 6—m *Given Lines*, Proc. L. M. S., 4, 1873). Agli scritti del citato geometra francese sulle quàdriche si collegano i lavori seguenti: Salmon, *On Some Points in the Theory of Elimination* (Quart. Journ., 7, 1866, ove è applicata la considerazione di spazi a più dimensioni); Zeuthen, *Sur la détermination des caractéristiques des surfaces du second ordre* (Nouv. Ann., II, 7, 1868); Darboux, *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (C. R., 67, 1868); Schubert, *Zur Theorie der Charakteristiken* (Journ. f. Math., 71, 1870) e *Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber* (Id., 73, 1871 (1); Halphen, *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (C. R., 76, 1876), e *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre* (Bull. S. M. F., 1 e 2, 1873-74).—Della teoria delle caratteristiche pei sistemi di superficie di 2° ordine venne fatta un'applicazione importante al sistema delle ∞^3 quadriche polari dei punti dello spazio rispetto ad una superficie algebrica qualunque; essa fu indicata dallo Schubert nella nota del titolo *Geometrische Bestimmung der zu einer Fläche beliebiger Ordnung gehörigen Hesse'schen Kernflächen* (Zeitschr. f. Math., 15, 1870) e completamente svolta dallo Zeuthen nella *Note sur les quadriques polaires* (Ann. di Mat., II, 4, 1870-71); è chiaro che quest'applicazione è suscettibile di ulteriori svolgimenti, di cui forse varrebbe la pena di occuparsi.

Termineremo questo n. dicendo che la ricerca delle caratteristiche dei sistemi elementari di cubiche piane fu compiuta dallo Zeuthen (*Détermination des caractéristiques des sistèmes élémentaires de cubiques*, C. R., 74, 1872) e quasi contemporaneamente dal Maillard (*Recherche des caractèristiques des systèmes élémentaires de courbes planes du troisième ordre*, Paris, 1871) (1); la ricerca analoga per le quartiche piane è pure dovuta allo Zeuthen (*Résultats*

(1) Di una terza memoria dello stesso autore verrà fatto cenno in una nota al termine del presente Cap.

d'une recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires de quartiques, C. R., 75, 1872), per le cubiche piane razionali allo Schubert (*Die fundamentalen Anzahlen und Ausartungen der cubischen Plancurven nullten Geschlechtes*, Mat. Ann., 13, 1878) e per le cubiche gobbe allo Schubert stesso (v., oltre uno scritto che indicammo a piè della pag. 119, il § 25 dell'opera *Kalkül der abzählende Geometrie* (Leipzig, 1879), il quale riassume una memoria premiata nel 1875 dall'Accademia di Kopenhagen) e a R. Sturm (*Erzeugnisse, Elementarsysteme und Charakteristiken von kubischen Raumcurven*, Journ. f. Math., 79, 1875; *Weitere Untersuchungen über kubische Raumkurven*, Journ. f. Math., 79 e 80 1875.

6. Di grande importanza per la teoria dei sistemi semplicemente infiniti di curve piane (in particolare per la determinazione delle loro caratteristiche) è il legame che si può stabilire fra essa e la teoria delle equazioni differenziali di primo ordine fra due variabili (2), rappresentando gli integrali di una di tali equazioni mediante un sistema di curve piane. Se μ e ν sono le caratteristiche di un tale sistema, la data equazione differenziale fa corrispondere ad ogni punto μ rette (direzioni) uscenti da esso, ad ogni retta ν punti di essa. A tale corrispondenza fu condotto Clebsch dalle sue ricerche sopra i connessi (v. il n. 7 del Cap. prec.); ma indipentemente da lui, venne studiata dal Fouret in parecchie memorie (*Sur les systèmes de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques* C. R., 78, 1874; *Nombre des points de contact des courbes algébriques ou transcendantes avec une courbe algébrique* Id., 82, 1876; *Sur quelques propriétés des systèmes de courbes* ($\mu = 1$, $\nu = 1$) Ivi; *Intégration géométrique de l'équation* $L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0$ *dans laquelle* L, M, N *désignent des fonctions linéaires de* x *et* y, Ivi; *Du nombre des branches de courbes d'un système* μ, ν *qui coupent une courbe algébrique donnée sous un angle de grandeur donnée ou dont les bissectrices aient une direction donnée*, Id., 83, 1876; *Sur les points fondamentaux du faisceau des courbes planes défini par une équation différentielle du premier ordre algébrique*, Id., 86, 1878; *Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques*, Bull. S. M. F., 2, 1874; *Sur les courbes planes transcendantes susceptibles de faire partie d'un système* (μ, ν), ivi) e quindi da lui estesa allo spazio (*Sur certains groupes de surfaces, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques* C. R., 79, 1874,

---

(1) Cfr. Cayley, *Sur les courbes aplaties* (C. R., 74, 1872) e *Sur une certaine surface quartique aplatie* (Ivi).

(2) Si noti che così si toglie la limitazione che le curve considerate siano algebriche.

Proprietés des implexes de surfaces, définis par deux caractéristiques, ivi; *Sur la notion des systèmes généraux de surfaces algébriques ou transcendantes, déduite de la notion des implexes*, Id., 80, 1875; *Sur quelques conséquences d' un théorème général, relatif à un implexe et à un système de surfaces*, ivi; *Du contact des surfaces d'un implexe avec une surface algébrique*, id., 82, 1876; *Intégration géométrique de l' équation aux dérivées partielles* L(px + qy) — Mp — Nq + R = 0, *dans laquelle* L, M, N *et* R *désignent des fonctions linéaires de* x, y, z, id., 83, 1876; *Sur les points fondamentaux du réseau de surfaces défini par une équation aux dérivées partielles du premier ordre algébrique, linéaire par rapport à ses dérivées*, id., 86, 1878). Fra le applicazioni fatte dal Fouret delle corrispondenze testè indicate noteremo l' estensione a sistemi di curve trascendenti di un teorema di Chasles che indica quante curve di un sistema semplicemente infinito tocchino una data curva algebrica (*Nombre des points de contact des courbes algébriques ou transcendantes avec une courbe algébrique*, Id., 82, 1876); la determinazione dell' ordine del luogo dei punti di contatto delle superficie (algebriche o trascendenti) di un sistema semplicemente infinito colle superficie di un sistema analogo doppiamente infinito, e quella dell'ordine del luogo dei punti di contatto delle superficie (non necessariamente algebriche) di un sistema doppiamente infinito con una superficie algebrica.

7. Un notevole progresso venne fatto dalla Geometria numerativa coll'introduzione di nuovi enti geometrici, oltre alle curve ed alle superficie, ai quali si possono applicare, *mutatis mutandis*, i procedimenti inventati da Chasles; si può dire che questi stesso lo abbia compiuto colle numerose comunicazioni sulle serie di triangoli da lui fatte all'Accademia delle Scienze di Parigi. L'indole delle questioni da lui trattate risulta dai titoli che qui riferiamo delle sue note sopra tale argomento: *Questions relatives à des séries de triangles semblables assujettis à trois conditions communes* (C. R., 1874), *Détermination du nombre de triangles semblables qui sastisfont à quatre conditions* (Ivi), *Sur les séries de triangles semblables* (Id., 79, 1874), *Nouveaux théorèmes sur les séries de triangles semblables* (Ivi), *Théorèmes relatifs à des séries de triangles de même périmètre satisfaisant à quatre conditions* (Id., 84, 1877), *Théorèmes relatifs à des séries de triangles isopérimètres, qui ont un côté de grandeur constante, et satisfont à trois autres conditions diverses* (Ivi), *Triangles isopérimètres ayant un côté de longueur constant et satisfaisant à trois autres conditions* (Ivi), *Triangles isopérimètres ayant un côté de grandeur constant et un sommet en un point fixe* (Ivi). — Tema congenere hanno gli importanti lavori del Cayley, *On the Problem of the*

In—and Circumscribed Triangle (Phil. Trans., 161, 1871) (1), dello Schubert *Anzahl-geometrische Behandlung des Dreiecks* (Math. Ann., 17, 1880) e, in una certa misura, la Diss. di J. W. Kirchner *Ueber die perspectivische Lage ebener Dreiecke* (Halle, 1888); mentre un primo tentativo di estendere allo spazio le investigazioni di Chasles è rappresentato dall'articolo dell'Hossfeld *Ueber die einer algebraischen Fläche eingeschriebenen regulären Tetraeder mit Berücksichtigung der Flächen zweiter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 29, 1884).

Dello stesso ordine sono gli studi che guidarono l'Hirst ad estendere la teoria delle caratteristiche alle correlazioni piane e solide (*On the Correlations of two Planes*, Ann. di Mat., II, 6, 1875, e 8, 1878; Proc. L. M. S., 5, 1874; *Correlation in Space*, Id., 6, 1875; *Note on the Correlation of two Planes*, Id., 8, 1877): studi i quali vennero proseguiti con ottimi risultati dallo Sturm (*Ueber correlative und reciproke Bündel*, Math. Ann., 12, 1877, e *Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften*, Id., 19, 1822) e dal Visalli (*Sulle correlazioni in due spazii a tre dimensioni*, Lincei Mem., IV, 3, 1886, *Sulle correlazioni (in due spazii a tre dimensioni) che soddisfano a dodici condizioni*, Lincei Rend., IV, 3, 1887_1, *Sulle collinearità e correlazioni ordinarie ed eccezionali in due spazii a quattro dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 29, 1896); essi sono analoghi a quelli sulla corrispondenza (1, 2) fra due forme fondamentali di prima specie che lo Schubert espose nella memoria *Ueber die ein-zweideutige Beziehung zwischen den Elementen einstufiger Grundgebilde* (Journ. f. Math., 88, 1880).

8. Al ramo di Geometria di cui ci occupiamo appartengono anche gli innumerevoli teoremi a cui Chasles fu condotto applicando il « principio di corrispondenza » che reca il suo nome (2). Che lo porti con piena giustizia è estremamente discutibile (3); se esso generalmente viene attribuito a Chasles gli è perchè questi, dopo averlo fatto conoscere in due casi speciali relativi a forme elementari di prima specie (*Principe de correspondance entre deux objets variables qui peut être d'un grand usage en géométrie*, C. R., 41, 1855), non solo lo enunciò in tutta la generalità che comporta nella celebre comunicazione (già citata nel n. 3 di questo Cap.) da lui fatta all'Accademia delle Scienze di Parigi il 27 giugno 1864, ma ne mise in chiaro le doti speciali,

---

(1) Questa memoria si riferisce a un triangolo di cui i vertici percorrono tre date curve, mentre i lati ne inviluppano tre altre.

(2) È tanto noto che è superfluo il riferirne qui l'enunciato.

(3) C. Segre, *Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve* (Bibl. math., 1892).

in un articolo intitolato appunto *Considérations sur le caractère propre du principe de correspondance* (C. R., 78, 1874); di più egli, insieme a Cayley, (*Note sur la correspondance de deux points d'une courbe*, C. R. 62, 1866), ne avvertì l'applicabilità a tutte le forme di prima specie razionali (*Sur les courbes planes ou à double courbure dont les points se peuvent déterminer individuellement. Application du principe de correspondance dans la théorie de ces courbes*, C. R., 62, 1866, e *Sur les courbes à points multiples, dont tous les points se peuvent déterminer individuellement*). Dilucidazioni ed estensioni del principio di corrispondenza furono somministrate dal Geiser (*Sopra un teorema fondamentale della geometria*, Ann. di Mat., II, 4, 1870-71) e dallo Zeuthen (*Note sur le principe de correspondance*, Bull. Sc. math., 5, 1873), mentre il Saltel suggerì un metodo per distinguere le coincidenze che avvengono a distanza finita dalle altre (*Sur une extension analytique du principe de correspondance de M. Chasles*, C. R., 80, 1875; v. anche la nota dello stesso *Sur les courbes gauches de genre zéro*, Ivi) e ne fece molteplici ed interessanti applicazioni (*Application du principe de correspondance analytique à la démonstration du théorème de Bézout* C. R., 81, 1875; *Application d'un théorème complémentaire du principe de correspondance, à la détermination sans calcul, de l'ordre de multiplicité d'un point* O *qui est un point multiple d'un lieu géométrique donné*, ivi; *Détermination par le principe de correspondance analytique, de l'ordre d'un lieu géometrique défini par des conditions algébriques*, Id., 82, 1876; *Rectification à la communication précédente*, Id., 83, 1876; *Détermination par le principe de correspondance analytique, de l'ordre de la courbe ou surface enveloppe d'une courbe ou surface donnée*, Ivi; *Détermination par la méthode de correspondance analytique, de l'ordre de la surface enveloppe d'une surface dont l'équation renferme* n *paramètres liés entre eux par* n—2 *relations*, Ivi).

La generalizzazione del principio di corrispondenza di Chasles a forme di prima specie non razionali fu ottenuta induttivamente da Cayley (*Note sur la correspondance de deux points sur une courbe*, C. R., 62, 1866; *On the Correspondance of two Points in a Curve*, Proc. L. M. S., 1, 1865-66; *Second Memoir on Curves which satisfy Given Conditions*, Phil. Trans., 158, 1868), il quale però non riuscì a somministrare al suo teorema una dimostrazione rigorosa. Ciò venne fatto da A. Brill (1). Altre dimostrazioni della formola

(1) Si vedano le note, *Ueber Entsprechen der Punksysteme auf einer Curve* (Math. Ann., 6, 1873) e *Ueber die Correspondenzformel* (Id., 7, 1874); inoltre Krey, *Note uber ein Eliminationsproblem* (Math. Ann., 12, 1877) e le due memorie posteriori del Brill stesso, *Ueber algebraische Correspondenzen* (Math. Ann., 31, 1888, e 36, 1890), a cui funge da commento la Diss. di F. Junker, *Ueber algebraische Correspondenzen* (Tübingen, 1889).

di Cayley - Brill si leggono nella memoria del Küpper *Ueber das verallgemeinerte Correspondenzprinzip* (Wiener Ber., 93, 1886), ed in quella dello Zeuthen *Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et de Brill, et méthode à la détermination des coincidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque* (Math. Ann., 40, 1892). Un importante ampliamento di cui quella formola è suscettibile venne scoperto dall'Hurwitz ed esposto nel lavoro *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprinzip* (Leipziger Ber., 1886, e Math. Ann., 28, 1887).

Per le forme di seconda e terza specie sussistono teoremi analoghi al principio di corrispondenza di Chasles; essi vennero enunciati dal Salmon (*Analytic Geometry of Three Dimensions*, II ed., Dublin, 1865) e dallo Zeuthen (*Sur le principe de correspondance du plan et de l'espace*, C. R., 78, 1874); teoremi analoghi si leggono nel succoso articolo del Clifford *On Some Extensions of the Fundamental Proposition in M. Chasles' Theory of Characteristicis* (Mathematics from the Educational Times, 49 e 50, 1866). L'estensione del principio stesso a spazî lineari qualunque fu fatta da E. Caporali (*Memorie di Geometria*, Napoli, 1888, pp. 329-332), il quale però non pubblicò i risultati a cui era pervenuto, e, indipendentemente da lui, dal Pieri, di cui abbiamo una nota *Sul principio di corrispondenza in uno spazio lineare qualunque a* n *dimensioni* (Lincei Rend., IV, 3, 1887,) ed un'altra *Sulla corrispondenza algebrica fra due spazii rigati* (Torino Atti, 25, 1890.

9. Innumerevoli sono le applicazioni che può ricevere il principio di corrispondenza, anche limitato a forme razionali di prima specie. Ad alcune fra esse è dedicato un gruppo di comunicazioni fatte da Chasles all'Accademia di Parigi, di cui il gran numero e la varietà di argomenti dimostrano che la grave età non aveva spento nel grande scienziato francese la fantasia di geometra di cui aveva date tante splendide prove nel corso della sua vita. Noteremo fra esse anzitutto la *Détermination, par le principe de correspondance, de la classe de la développée et de la caustique par réflexion d'une courbe géométrique d'ordre* m *et classe* n (C. R., 72, 1871), poi le molteplici e variopinte *Propriétés des courbes d'ordre et de classe quelconque démontrées par le principe de correspondance* (Ivi); a queste si possono unire le proposizioni di cui abbiamo fatto menzione a p. 34, i *Théorèmes concernant les axes harmoniques des courbes géométriques, dans lesquels on considère deux séries de points qui se correspondent anharmoniquement sur une courbe unicursale* (Ivi), e i *Théorèmes relatifs aux axes harmoniques des courbes géométriques* (Id., 73, 1871, e 74, 1872). Ai *Théorèmes rélatifs aux obliques*

menées par les points d'une courbe, sous des angles de même grandeur (Id., 74, 1872) si può riavvicinare la *Généralisation de là théorie des normales des courbes géométriques où l'on substitue à chaque normale un faisceau de droites* (Id., 80, 1875); stanno isolate le proposizioni *Sur les polygones inscrits ou circonscrits aux courbes* (C. R., 78, 1874), mentre i *Théorèmes généraux sur le déplacement d'une figure sur un plan* (Id., 80, 1875) devono avvicinarsi ai *Théorèmes relatifs au déplacement d'une figure plane dont deux points glissent sur deux courbes d'ordre et de classe quelconques* (Id., 82, 1876). Interesse teorico maggiore dei risultati che ebbero le ricerche ora citate possiede la da lui fatta *Détermination immédiate, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de deux courbes quelconques d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie* (Id., 75, 1872. e 76, 1873); tanto più che il ragionamento di Chasles è suscettibile di ampia generalizzazione e abilita in molti casi a trovare il numero esatto delle soluzioni finite di *n* equazioni algebriche con altrettante incognite d a risolvere questioni dello stesso genere, come dimostrarono il Fouret (*Détermination à l'aide du principe de correspondance du nombre des solutions d'un système de* n *équations algébriques à* n *inconnues*, C. R., 78, 1874; *Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordre quelconque* Bull. S. M. F., 1, 1873; *Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface*, Ivi; *Démonstration du nombre exact des solutions d'un système de* n *équations algébriques à* n *inconnues*, Id., 2, 1874), ed il Saltel (*Application du principe de correspondance analytique à la démonstration du théorème de Bézout*, C. R., 81, 1875). Altre applicazioni del principio di corrispondenza si leggono nelle seguenti note di Chasles: *Application de la méthode de correspondance à des questions de grandeur de segments sur les tangentes des courbes* (C. R., 81, 1875), *Théorèmes dans lesquels entre une condition d'égalité de deux segments rectilignes* (Ivi), *Nouveaux théorèmes relatifs à des conditions d'égalité de grandeur des segments rectilignes sur les tangentes des courbes géométriques, d'ordre et de classe quelconques* (Ivi), *Détermination de la classe des courbes enveloppes qui se présentent dans la question d'égalité de grandeur de deux segments faits sur des tangentes de courbes géométriques* (Ivi), *Théorèmes dans lesquels se trouve une condition d'égalité de deux segments pris sur des normales et des tangentes des courbes d'ordre et de classe quelconque* (Ivi), *Théorèmes dans lesquels se trouvent des couples de segments ayant un rapport constant* (Ivi), *Théorèmes relatifs à des courbes d'ordre et de classe* *quelconques, dans lesquels on considère des couples de segments ayant un produit constant* (Id., 82. 1876). *Lieux géométriques et courbes enveloppes satisfaisant à des conditi ns de produit constant de deux segments variables* (Ivi), *Théorèmes relatifs à des couples de segments rectilignes ayant un rapport constant* (Id., 83, 1876), *Théorèmes relatifs à des courbes d'ordre et de classe quelconques dans lesquels on considère des couples de segments rectilignes faisant une longueur constante* (Ivi), *Théorèmes relatifs à des couples de segments faisant une longueur constante, pris l'un sur une tangente d'une courbe, et l'autre sur une normale d'une autre courbe, les deux courbes étant d'ordre et de classe quelconques* (Ivi), *Théorèmes concernant des couples de segments pris l'un sur une tangente d'une courbe et l'autre sur une oblique d'une autre courbe, et faisant ensemble une longueur constante, les courbes étant d'ordre et de classe quelconques* (Ivi), *Théorèmes rélatifs à des systèmes de trois segments ayant un produit constant* (Ivi), e *Théorèmes relatifs à des systèmes de trois segments formant une longueur constante* (Id. 83, 1876).

Queste ricerche guidarono Chasles a concepire e formulare alcune leggi generali di geometria piana, delle quali val la pena di riferire gli enunciati: I. Quando fra i dati di una questione avente per iscopo la determinazione dell'ordine di un luogo (o della classe di un inviluppo), si trova che un punto deve scorrere sopra una curva d'ordine n, l'ordine (o la classe) che si cerca sarà della forma nf, f essendo una funzione degli altri dati della questione. E correlativamente (*Deux lois générales des courbes géométriques*, C. R. 84, 1877). II. Quando nella definizione di un luogo (o di un inviluppo) intervengono i punti e le relative tangenti dei punti di una curva d'ordine n e classe ν, l'ordine del luogo (o la classe dell'inviluppo) sarà della forma $nf+\nu\varphi$, f e φ essendo funzioni degli altri dati della questione (*Une loi générale des courbes géométriques, concernant l'intervention de chaque point d'une courbe et de la tangente de ce point, dans les questions des lieux géométriques et des courbes enveloppes*, Id., 85, 1877). III. Quando nella definizione di un luogo (o di un inviluppo) intervengono un punto di una curva d'ordine n e classe ν e la tangente in un altro punto, l'ordine del luogo (o la classe dell'inviluppo) conterrà a fattore il prodotto $n\nu$; che se per converso intervengono un punto della curva e le tangenti condotte da esso alla curva stessa l'ordine (o la classe) sarà della forma $nf+\nu\varphi+n\nu F$, f, φ, F essendo funzioni degli altri dati della questione (*Deux lois des courbes géométriques d'ordre et de classe* m *et* n, Ivi). La dimostrazione e la generalizzazione allo spazio di queste leggi si apprendono dai seguenti lavori del Fouret: *Démonstration de deux lois géométriques enoncées par M. Chasles* (C. R., 85, 1877), *Sur l'extension à l'espace de deux lois relatives aux courbes planes données par M. Chasles* (Ivi); *Sur l' ordre (ou la classe) d' une courbe plane algébrique dont chaque point (ou chaque tangente) dépend d'un point correspondant d'une autre courbe plane et de la tangente en se point*, et *Sur les lois qui régissent l'ordre (ou la classe) des courbes planes algébriques dont chaque point (ou chaque tangente) dépend à la fois d' un point et d' une tangente variables sur une courbe donnée* (Ivi).

Dopo Chasles le applicazioni del principio di corrispondenza si moltiplicarono, tanto che si può dire non esservi scritto moderno di geometria in cui non se ne trovino una o più, perchè in molti casi esso rappresenta il modo più conveniente per esprimere geometricamente che gli enti considerati sono algebrici; onde sarebbe vano il tentativo di enumerarle qui tutte. Facciamo eccezione soltanto pei lavori seguenti, come quelli che provano quanto presto le idee di Chasles siansi diffuse e siano state apprezzate e svolte: Fouret, *Sur la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points de contact ou d' intersection sous un angle donné des courbes d'un système avec une courbe algébrique* (Bull. S. M. F., 5, 1877), e *Détermination par le principe de correspondance du nombre des points d'un plan en lesquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois systèmes donnés* (Ivi); Saltel (oltre agli scritti citati a pag. 236) *Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l' ordre d' un lieu géométrique* (Bélgique Mém., 24, 1875), e *Sur le principe de correspondance et le moyen qu' il offre de lever quelques difficultés dans les solutions analytiques* (C. R., 82, 1876).

10. Il metodo delle caratteristiche ideato da Chasles si può dire abbia due fondamenti essenziali. Cioè il principio di corrispondenza, sul quale c' intrattenemmo nei due nn. prec., e la proposizione che dice « il numero delle coniche di un sistema avente per caratteristiche μ, ν, che soddisfano ad una nuova condizione semplice, è della forma $\alpha\mu + \beta\nu$ »; tale proposizione, che sussiste in tutti i casi considerati da Chasles, fu da lui ritenuta per vera incondizionatamente, e vera pure fu supposta una somigliante proposizione che il Cremona enunciò sui sistemi doppiamente infiniti (nell' articolo citato nel n. 4 di questo Cap.). Anzi, non soltanto quel teorema di Chasles si considerò per vero, ma degli egregi geometri credettero di essere giunti in possesso di dimostrazioni inconfutabili di esso; basti citare, per convincere il lettore della verità di quanto asseriamo, i lavori seguenti: Clebsch, *Zur Theorie der Carakteristiken* (Math. Ann., 6, 1873), Halphen (mem. cit. nel n. 5 di questo Cap.), Tognoli, *Sui sistemi di curve piane* (Giorn. di Mat., 13, 1875), Lindemann in *Vorl. üb.*

Geom. von A. Clebsch, (Leipzig, 1875), Hurwitz e Schubert, *Ueber den Chasles'schen Satz* $\alpha\mu + \beta\nu$ (Götting. Nachr., 1876).

Tuttavia esso (e altrettanto si dica per quello di Cremona) non è vero incondizionatamente. Lo rilevarono quasi contemporaneamente il Saltel, nella nota *Sur la formule indiquant le nombre des coniques d'un système* (μ, ν) *satisfaisant à une cinquième condition* (Belgique Bull., II, 42, 1876) (1), e l'Halphen, nell'articolo *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques* e *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (C. R., 83, 1876). Ma le modificazioni di cui abbisogna in generale l'enunciato di Chasles (le quali provengono da una forma degenere che può assumere una conica, a snidare la quale non era forse sufficiente l'ingegno esclusivamente geometrico di questo grande matematico), nonchè la determinazione dei casi in cui esso è vero, sono il tema di parecchi importantissimi scritti dell'Halpen che qui citiamo coll'onore che meritano: *Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques* (Proc. L. M. S., 9, 1878), *Sur le nombre des coniques qui, dans un plan, satisfont à cinq conditions projectives et indépendantes entre elles* (Id., 10, 1879) *Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques* (Math. Ann., 15, 1879) e *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (Journ. Éc. pol., 45, 1878) (2).

I risultati ottenuti dall'Halphen furono in seguito esposti diversamente dal del Pezzo (*Sui sistemi di coniche*, Napoli Rend., 23, 1884) e dal Burali-Forti (*Sui sistemi di coniche* Giorn. di Mat., 24, 1886); i suoi concetti furono sviluppati (fra altri dal Burali-Forti nelle note *Sui sistemi i volte infiniti di quàdriche*, Ivi, e *Sopra il sistema di quadriche che hanno l'* n—*pla polare comune*, Palermo Rend., 4, 1890), e combattuti dallo Study (*Ueber die Geometrie der Kegelschnitte insbesondere deren Charakteristikenproblem*, Math. Ann., 27, 1886; *Abbildung der Mannigfaltigkeit aller Kegelschnitte einer Ebene auf einem Punktraum*, Id., 40, 1892, e *Ueber Systeme von Kegelschnitte*, Ivi) (3). Questi ultimi scritti accesero una discussione fra lo Zeuthen e lo Study (la terza in ordine di tempo di quelle cui diede origine la geometria numerativa, ma fra quelle da noi sinora incontrate, seconda) (4), e di cui i

(1) Cfr.: Chasles, *Lettre relative à une comunication de M. L. Saltel sur la théorie des deux caractéristiques* (Belgique Bull., II, 44, 1877), e le seguenti *Observations* di Folie, Catalan e Chasles.

(2) Cfr. Hirst, *On Halphen's new Form of Chasles' Theorem on Systems of Conics satysfying four Conditions* (Brit. Ass., 1878). Si vedano anche le lettere scritte dell'Halphen allo Zeuthen nel 1876 e 1879 e pubblicate nel T. IV (Paris 1924) delle *Oeuvres de G. H. Halphen*.

(3) Lo Study, anzi, estese la ricerca anche al succitato teorema di Cremona nella nota *Ueber die Cremona'sche Charakteristikenformel* (Math. Ann., 27, 1886).

(4) Cfr. n. 3 del presente Cap.

vari momenti sono segnati, oltrechè dai precitati lavori dello Study, dagli articoli seguenti: Zeuthen, *Sur la révision de la théorie des caractéristiques de M. Study* (Math. Ann., 37, 1890), Study, *Entgegnung* (Id., 40, 1892), Zeuthen, *Exemples de la détermination des coniques dans un système donné qui satisfont à une condition donnée* (Id., 41, 1893).

11. L'ultimo grande progresso compiuto dalla Geometria numerativa è opera di H. Schubert. Tacendo delle brevi note che questo egregio geometra pubblicò a varie riprese in Götting. Nachr., perchè i risultati ivi esposti entrarono a far parte di più estesi lavori posteriori, citeremo le seguenti importanti memorie intitolate: *Beiträge zur abzählende Geometrie. Erste Abhandlung* (Math. Ann., 10, 1876), *Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung* (Ivi), *Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche* (Id., 11, 1877) (1); *Das Correspondenzprincip für Gruppen von* n *Punkten und von* n *Strahlen* (Id., 12, 1877), *Singularitäten des Complexes* n*-ten Grades* (Ivi), alle quali si debbono unire quelle dello stesso autore precedentemente citate. In esse sono posti i fondamenti e svolte molte applicazioni importanti di una trattazione metodica della disciplina che ci occupa. Gran parte del loro contenuto è divenuto ingrediente della maggiore opera dello Schubert, cioè del libro intitolato *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig, 1879), dalla cui comparsa si può far datare l'erezione della Geometria numerativa a dottrina autonoma e indipendente. Come punti più salienti di esso rileveremo l'esposizione metodica da un punto di vista elevato e generale dei principî di corrispondenza già noti e di altri nuovi, l'enunciato generale del problema delle caratteristiche per qualunque figura geometrica e la dimostrazione di procedimenti per risolverlo in un gran numero di casi. Malgrado una discussione che sollevò l'apparizione di quest'opera (2), la considerazione in cui essa è tenuta, e che è già grande, andrà vieppiù crescendo col numero dei geometri che si dedicheranno allo studio, all'ulteriore svolgimento od almeno all'applicazione dei metodi in essa consegnati.

Come continuazione del libro dello Schubert ci imbattiamo anzitutto — oltrechè nello studio già citato sulla geometria numerativa del triangolo —

(1) Cfr.: Krey, *Ueber singuläre Tangenten algebraischer Flächen* (Id., 15, 1879), Cayley, *On Schubert's Method of the Contact of a line with a Surface* (Quart. Journ. 17, 1880), e J. C. Kluyver, *Kenmerkende getallen der algebraische ruimtekromme* (Amsterdam Versl., III, 7, 1890) e *Twaalfde vraagstuk beantwoord* (Nieuw Archief voor wiskunde, 17, 1890).

(2) Halphen, *Observations sur la théorie des caractéristiques* (Bull. S. M. F., 8, 1880); Schubert, *Réponse aux observations de M. Halphen sur la théorie des caractéristique* e *Note sur l'évaluation du nombre des coniques faisant partie d'un systeme et satisfaisant à une condition simple* (Ivi).

nelle note di lui *Ueber dreipunktige Berührung von Curven* (Götting. Nachr., 1880), *Lösung der auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnte Projectivitätsproblem* (Hamburg, 1882) e *Einstufige Ausartungen der quadratischen Trasformationen der Ebene* (Hamburger. Mitth., 1, 1880). Ci si presenta poi la bella collezione di lavori in cui lo Schubert generalizzò i proprî metodi e gran parte dei proprî risultati a spazî lineari comunque estesi, lavori in cui diamo l' elenco: *Die* n*-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes* (Math. Ann., 26, 1885), *Die* n*- dimensionale Varallgemeinerung der Anzahlen für die vielpunktig berührenden Tangenten einer punktallgemeinen Flächem^{ter} Grades* (Ivi), *Lösung der Charakteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension* (Hamburger Mitth., 1, 1889), *Anzahl-Bestimmung für lineare Räume beliebiger Dimension* (Acta, 8, 1886), *Ueber Räume zweiten Grades* (Hamburger. Mitth. 1, 1889), *Kegelschnitt-Anzahlen als Functionen der Raumdimension* n (Id., 2, 1890), *Ueber eine Verallgemeinerung der Aufgaben der abzählenden Geometrie* (Id., 3, 1891), *Mittheilungen aus der abzählenden Geometrie* p*-dimensionaler Räume ersten und zweiten Grades* (Verhandl. der Ges. deutschen Naturf. und Aerzte, Halle, 1891), *Beitrag zur Liniengeometrie in* n *Dimension* (Ivi), *Beziehungen zwischen den linearen Räumen auferlegbaren charakteristischen Bedingungen* (Math. Ann. 38, 1891), e *Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Fläche und Räume zweiten Grades in* n *Dimensionen* (Id., 45, 1894).

Lo Schubert non trovò molti seguaci; se si toglie lo Sturm, di cui molti fra i lavori già ricordati si riattaccano alla Geometria numerativa, e il Castelnuovo, autore di una interessante nota sul *Numero degli spazi che segano più rette in uno spazio ad* n *dimensioni* (Lincei Rend., V, 5, 1889$_2$), si può dire che il citato geometra tedesco abbia incontrato, durante il periodo storico di cui ragioniamo, un solo imitatore e collaboratore efficace, M. Pieri, di cui meritano menzione assai onorevole le memorie seguenti (nonchè due altre che già citammo): *Sopra un teorema di geometria ad* n *dimensioni* (Giorn. di Mat., 26, 1888), *Formule di coincidenza per le serie algebriche* ∞^n *di coppie di punti dello spazio a* n *dimensioni* (Palermo Rend., 5, 1891) e *Sul problema degli spazi secanti* (Rend. Ist. Lomb., II, 26, 1893, e 27, 1895); memorie che mostrano aver saputo anche la patria nostra efficacemente contribuire allo sviluppo di uno dei rami della geometria da cui la matematica ragionevolmente attende la soluzione di non pochi problemi importanti.

CAPITOLO X.

Geometria non - euclidea.

L' ultima categoria di lavori di cui ci dobbiamo occupare comprende una serie di ricerche che diedero origine a vivaci discussioni, e — strano a dirsi! — divisero per qualche tempo i matematici in due campi l' un contro l' altro armato; oggi, dopo conchiusa la pace, esse formano quelle parti della scienza dell' estensione che si chiamano *Geometria non-euclidea* e *Geometria degli spazî a quantesivogliano dimensioni* (1); a quella è dedicato il presente Cap., a questa il successivo (2).

1. Nessuno ignora che fra tutte le proposizioni contenute negli *Elementi* di Euclide una ve n'ha che a stento ci si adatta a porre, come fa il geometra

(1) A dimostrare come le questioni a cui si riferiscono questi lavori fecero perdere ad alcuni scienziati quella imparzialità e quella serenità di giudizio che dovrebbero sempre presiedere alle loro discussioni, riferirò qui due brani tolti, l'uno da un autore ben noto ai cultori della filosofia, l'altro da un giornale molto diffuso in Germania: « .... so gewiss ist es logische Spielerei ein System von vier oder fünf Dimensionen noch Raum zu nennen. Gegen alle solche Versuche soll man sich wahren; sie sind Grimassen der Wissenschaft und durch völlig nutzlosen Paradoxien das gewöhnliche Bewusstsein einschüchtern und über sein gutes Recht in der Begrenzung der Begriffe täuschen » (Lotze, *Logik*, p. 217). « Die absolute oder nicht euklidische Geometrie, die Geometrie des endlichen Raumes und die Lehre von n Raumdimensionen sind entweder Karrikaturen oder Krankheitserscheinungen der Mathematik » (J. Gilles in Blätter für das Bairische Gymnasial - und Realschulwesen, 18, 1878, p. 423). Analoga tendenza ha la seguente frase: « Die verschiednen sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrien sind thatsächlich Nichts weiter, als eine ganz willkürliche Façon de parler ohne wissenschaftliche Bürgschaft und Ueberzeugung » (A. Karagiannides, *Die Nicht-euklidische Geometrie vom Alterthum bis zur Gegenwart*, Berlin, 1893, p. 44). Si veggano anche le troppo vivaci espressioni del Dühring riferite da B. Erdmann a p. 85 della pregevole monografia sopra *Die Axiome der Geometrie;* inoltre: Kroman, *Unsere Naturerkenntniss* (trad. Fischer-Benzon, Kopenhagen, 1883, p. 145-175), e Stallo, *La matière et la physique moderne* (Paris, 1884, cap. XIII e XIV). — A tutti costoro si può rispondere con le belle parole del Beltrami: « Quando questi tentativi (di rinnovamento radicale dei principii) si presentano come frutto di investigazioni coscienziose e di convinzioni sincere, quando essi trovano il patrocinio di un'autorità imponente e fin qui indisputata, il dovere degli uomini di scienza è di discuterli con animo sereno, tenendosi lontani egualmente dall'entusiasmo e dal disprezzo ».

(2) Per la bibliografia dell'argomento in discorso additiamo intanto: G. Bruce Halsted, *Bibliography of Hyperspace and Non-Euclidian Geometry* (Am. Journ., 1 e 2, 1878-79) ed il 2° vol. (p. I-XX) delle *Opere* di Lobatscheffsky citate qui appresso; altri congeneri lavori più recenti verranno segnalate nel Libro seguente.

greco fra quelle che non esigono dimostrazione; è il celebre Postulato V (1), che dice: « se una retta ne incontra due altre e fa con queste due angoli interni dalla stessa parte la cui somma è minore di due retti, tali due rette prolungate indefinitamente s'incontreranno da quella parte ove la somma dei due angoli è inferiore a due retti ». Benchè Euclide non lo dica, pure è pressochè certo che egli ha avvertito la difficoltà nascosta in questa proposizione che, come il serpente biblico, s'annida nella geometria e ne corrompe la paradisiaca bellezza, in questa proposizione che il d'Alembert non esitò a considerare per « l'écueil et le scandale des éléments de la géométrie » (2); lo prova la distribuzione delle proposizioni componenti il I Libro degli *Elementi*, di cui le prime ventotto sono indipendenti dal celebre postulato, ed in cui il teorema dell'angolo esterno di un triangolo è considerato due volte (prop. 16 e 32) per distinguere in esso quella parte che è vera anche se si nega il detto postulato.

La storia non ha registrato i tentativi fatti da Euclide per togliere il neo che brutta il suo sistema geometrico; ha registrato invece quelli dei geometri posteriori, molti dei quali si sforzarono di surrogare il citato postulato con altro di più facile accettazione; fra questi basti qui ricordare un astronomo di primo ordine, Claudio Tolomeo (87-165) (3), un egregio traduttore arabo, Nasîr-Eddîn (1201-1274), ed un rinomato matematico, il Wallis (4).

2. Gli sforzi fatti per depurare la geometria di Euclide dall'imperfezione esistente nella teoria delle parallele crescono col diffondersi dell'interesse per le ricerche geometriche: il descriverli equivarrebbe a tracciare la storia della geometria elementare, il che esorbita dalla cornice del nostro quadro (5). Va

(1) Un tempo era chiamato Assioma XI; ma dopo l'edizione critica di Euclide dovuta all'Heiberg, divenne certezza il dubbio (Hankel, *Vorlesungen über die complexen Zahen und ihre Functionen*, I Th., 1867, p. 52) che ad un errore di ricopiatori ne fosse dovuta la inserzione fra gli assiomi.

(2) V. i *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, 5, IV ed. (Paris, 1767), pagine 200-219, e l'articolo « Parallèle » nel *Dictionnaire encyclopédique des Mat.*, 2 (Paris, 1789), p. 519.

(3) Cantor, *Vorl. über Geschichte der Math.*, 1 (II ed., Leipzig, 1894), p. 395.

(4) Questi mostrò come al sistema euclideo potesse darsi una base rigorosa ammettendo l'esistenza di una figura simile ad un'altra ed avente dimensioni arbitrarie. Un'importante miglioramento a questo punto di partenza fu suggerita da M. J. M. Hill in un discorso pubblicato nel marzo 1927 di *The mathematical Gazette*.

(5) Il lettore desideroso di maggiori notizie bibliografiche ricorra all'elenco di lavori sulla teoria delle parallele anteriori al 1837, che Engel e Stäckel compilarono, sfruttando lavori analoghi anteriori, ed inserirono a p. 287-313 della pregevole opera: *Die Theorie der Parallelinien von*

però fatta un'eccezione a favore dell'opera di Girolamo Saccheri (1667 - 1733) dal titolo *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia* (Milano, 1733), la quale a ragione fece riguardare questo geometra come un precursore di Legendre, di Lobaceffsky e Bolyai (1); che realmente meriti questo nome è evidente considerando che egli diede alle ricerche sul postulato di Euclide un indirizzo affatto originale, dimostrando esservi tre geometrie secondochè si ammetta che in un quadrilatero ACBD avente retti gli angoli in A e B, ed eguali i lati AC, BD, gli angoli in C e D sono acuti, retti od ottusi; ma poi egli dedicò per lunghi anni un « diuturnum praelium » a dimostrare (e qui con discutibile risultato) l'impossibilità delle due ipotesi differenti dall'euclidea, che allora ritenevasi come l'unica vera e possibile. Tali investigazioni, malgrado i loro indiscutibili pregi, rimasero isolate e sterili e vennero ben presto dimenticate, tanto vero che alcune proposizioni che vi si leggono sono spesso attribuite al Legendre, che le scoperse più tardi da sè.

Non maggior fortuna ebbe un posteriore analogo tentativo del grande geometra tedesco J. H. Lambert, contenuto nella memoria postuma sopra la *Theorie der Parallelenlinien* (scritta nel settembre 1766 e inserita vent'anni dopo nel *Leipziger Magazin für Mathematik*) su cui solo in questi ultimi mesi fu attratta l'attenzione dei geometri (2), e ove, in sostanza, è ridotta la questione se sia vero o meno il postulato euclideo a quella di riconoscere la specie del quarto angolo di un quadrilatero avente tre angoli retti; tre geometrie nascono dal supporre che esso sia retto, ottuso, acuto, la prima delle quali è quella del piano euclideo, la seconda quella della sfera euclidea, mentre la terza (osservazione totalmente originale ed importantissima che fa fede dell'acutezza e

---

Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie (Leipzig, 1895. Osserviamo soltanto che ai di nostri, applicando il celebre aforisma di Abel « on doit donner au problème une forme telle qu'il soit toujours possible de le résoudre », invece di proporsi di dimostrare il postulato di Euclide, si è posta la questione se esso sia dimostrabile. Donde la *Note* dell'Hoüel *Sur l'impossibilité de demontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide* (Nouv. Ann., II, 9, 1870), la *Lettre à M. Quetelet sur diverses questions mathématiques* del Genocchi e il *Rapport* su di essa redatto dal de Tilly, l'una e l'altro inseriti in Belgique Bull., II, 36, 1873.

(1) E. Beltrami, *Un precursore italiano di Legendre e di Lobaceffsky* (Lincei Rend., IV, 5, 1889,).

Dopo che il Beltrami ebbe esumato l'opera del Saccheri, il Mansion ne fece un'analisi negli Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles, 14, Parte II, 1889-90, l'Halsted ne intraprese l'esposizione in *The American Mathematical Monthly* (1, 1894), finalmente Engel e Stäckel ne pubblicarono una completa versione tedesca nella raccolta succitata.

(2) Essa pure si trova riprodotta nel volume di Engel e Stäckel.

profondità di pensiero di Lambert) si verificherebbe sopra una sfera di raggio immaginario; e Lambert, osservando appunto quel che accade sulla sfera, asserì la necessità di una dimostrazione pel postulato euclideo; nè mancò di notare come, ove la somma degli angoli di un triangolo fosse differente da due retti, esisterebbe nel mondo una costante assoluta, una specie di naturale unità di lunghezza.

3. Alle ricerche intorno ai fondamenti della geometria non poterono restare indifferenti i geometri dell'*Enciclopedia* ed i loro successori immediati, i quali inaugurarono un'èra, di cui (come a ragione notò l'Humboldt) uno dei caratteri più spiccati è la critica imparziale di tutto il retaggio del passato. Ed infatti numerosi sono i geometri francesi che meditarono sulla grande questione suscitata dal postulato d'Euclide, ma le loro conclusioni, benchè abbiano raggiunto una notorietà assai grande, possiedono un valore di gran lunga minore di quelle del Saccheri e del Lambert, giacchè consistono in gran parte in opinioni non dimostrate od in *aperçus* aspettanti tuttora il necessario sviluppo. Così il celebre Fourier (1768-1830), a perfezionare la teoria delle parallele, propose delle nuove definizioni per la retta ed il piano fondate sul concetto di movimento e sulla nozione di sfera (1). Dal canto suo Lagrange ravvisò l'indipendenza delle formole della trigonometria sferica dal postulato d'Euclide e sperò di dedurre da tal fatto una dimostrazione di questo, ritenendo inconcludenti tutte le altre (2): che egli stesso abbia poi riconosciuta la vanità di tale impresa, sembra emergere da un aneddoto riferito dal de Morgan (3), secondo il quale il celebre geometra italiano avrebbe composto negli ultimi anni della sua vita una memoria sulle rette parallele, avrebbe anzi cominciato a leggerla all'Accademia di Parigi, ma poi avrebbe improvvisamente interrotta la lettura colle parole: « Il faut que j'y songe encore! ». Nè, parlando di Lagrange, è da dimenticare come lo scritto di F. Daviet de Foncenex (1734-1799) *Sur les principes fondamentaux de la méchanique* (Miscellanea Taurinensia, 2, 1761) — su cui il Genocchi (1817-1889) (4) richiamò l'attenzione dei matematici (5) — si riattacca allo studio de' principî fondamentali della geometria e fu probabilmente ispirato (se non dettato) dal famoso inventore del Calcolo delle varia-

---

(1) Séances des Écoles normales, Débats, 1 (nouv. éd., Paris 1800), p. 28.

(2) Hoüel, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* (Paris, 1867), p. 76 nota.

(3) *A Budget of Paradoxes* (London, 1872), p. 173; II ed. (Chicago, 1915), I Vol. p. 288.

(4) Cfr.: F. Siacci, *Cenni necrologici di Angelo Genocchi* (Torino Mem. II, 39, 1889); E. d'Ovidio, *Discorso in commemorazione di Angelo Genocchi* (Torino Atti, 27, 1892).

(5) *Intorno ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex* (Torino Atti, 4, 1869) e *Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géomètres non-euclidiens* (Torino Mem., II, 29, 1877).

zioni (1). Assai più decisivi di questo lavoro e delle osservazioni che condussero Carnot e Laplace a proporre (come aveva già fatto il Wallis) di sostituire il postulato di Euclide con quello che afferma l'esistenza di figure fra loro simili, furono le ricerche di A. M. Legendre, il quale, dopo avere tentato di stabilire, appunto con questo principio, il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo (*Élem. de géom.*, I éd., 1794) — teorema la cui verità implica quella del postulato di Euclide, — dimostrò, senza invocare il postulato medesimo, nè altro equivalente, che la detta somma non può essere maggiore di due retti e che se è eguale a due retti per uno speciale triangolo, lo sarà per qualunque altro (2).

4. Circa contemporanei agli studî di Legendre sul postulato di Euclide sono quelli di Gauss. Quale fu il movente di tali indagini, quale il punto di partenza, quali i risultati concreti raggiunti da quello che i tedeschi considerano come il « princeps mathematicorum? » Sono questi problemi storici, la cui soluzione è desiderabilissima e ardentemente desiderata, ma la quale oggi non è dato raggiungere. Gli è che Gauss non pubblicò (3), e forse nemmeno mise sulla carta le proprie investigazioni sull'argomento e gli unici documenti che si possono invocare per determinarne l'estensione e la portata sono i seguenti (4): 1° una lettera a W. Bolyai dell'anno 1799 pubblicata dallo Schering *Nella solennità del centenario della nascita di C. F. Gauss* (vedino la trad. italiana che si trova in Ann. di Mat., II, 9, 1878-79), 2° due recensioni inserite nelle *Göttinger gelehrten Anzeigen* del 20 aprile 1816 e del 28 ottobre 1822 (*Gauss, Werke,* 4, 1873, p. 364-370), 3° due lettere scritte da Gauss a F. W. Bessel (1784-1846) negli anni 1829 e 1830 (*Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, Leipzig, 1880, p. 490-497), 4° alcune del 1831 e 1846 a H. C. Schumacher (1780-1850) (*Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher,*

---

(1) Cfr. l'*Eloge* di Lagrange tessuto dal Delambre e riprodotto in testa alle *Œuvres de Lagrange.*

(2) *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle* (Mém. de l'Acad. des Sc., 12, Paris, 1833). I risultati di Legendre sono ben noti grazie all'esposizione che ne fece il Baltzer nella Parte IV dei suoi *Elemente des Mathematik,* a partire della II ed. (1867).

Non è fuor di proposito notare qui con G. Tarry (*Sur un théorème indépendant du postulatum d'Euclide*, Journ. de math. élémentaires, 19, 1895) che è indipendente dal postulato di Euclide anche il teorema « un triangolo avente eguali due bisettrici interne, è isoscele ».

(3) Lo trattenne forse la tema del « Geschrei der Gegner » di cui parla in una lettera a Bessel del 1829?

(4) Cfr. Engel e Stäckel, op. cit., nella quale sono adunati tutti gli altri documenti sull'argomento. Ulteriori notizie sulle investigazioni di Gauss si otterrebbero forse dal carteggio di questo con Barteles (1769-1836); ma, ove si trovano le lettere che lo compongono?

2, Altona, 1860, p. 255-262 e 266-272, e 5, 1863, p. 246-247), 5° una di cui non è noto che il soggetto (v. Engel e Stäckel, op. cit. p. 246, 6° una del 1824 recentemente giunta nel dominio del pubblico (Id., p. 248) (1). Ora da tutti questi scritti emerge senza dubbio che Gauss ebbe un' idea perfettamente chiara del modo in cui è da intendersi e risolversi il problema scientifico generato dal postulato di Euclide, anzi che egli era in possesso di molte delle verità a cui si sogliono collegare i nomi di Lobatceffsky e Bolyai; è per converso ignoto fino a qual punto egli siasi spinto nella nuova via, come è ignoto se egli abbia ricevuto qualche ispirazione dall' opera del Saccheri che esisteva a Gottinga negli anni 1790-1800 (essendo segnata con un asterisco nella *Bibliotheca mathematica* del Murhard (2)), oppure dalle ricerche di Legendre, come opina il Mansion; e l'asserzione di F. Klein, che alla influenza di Gauss siamo debitori degli studi di questi ultimi geometri (3), ha l'aspetto di un teorema in attesa di dimostrazione (4).

A due benemeriti studiosi (5) si deve la scoperta di un' altra coppia di investigatori appartenenti alla preistoria della geometria non-euclidea, cioè: F. K. Schweikart (1780-1857), di cui va ricordata l' opera *Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie* (Jena und Leipzig, 1807), e che Gauss asserisce inventore di una « Astralgeometrie » indipendente dal postulato euclideo; e F. A. Taurinus (1794-1874), autore di una *Theorie der Parallellinie* (Köln, 1825), al quale è diretta l'ultima delle succitate lettere di Gauss (6).

---

(1) V. anche Sartorius von Walterhausen, *Gauss zum Gedächtniss* (Leipzig, 1856), p. 81.

(2) Osservazione fatta dall' Halsted nell'articolo *The Non Euclidian Geometry Inevitable* inserto in The Monist, July 1894.

(3) *Nicht-Euklidische Geometrie*, Wintersemester 1890-91, autographirt (Göttingen, 1893), p. 175 Cfr. anche un articolo dell' Halsted in *Science* (New Series, 2, 1895, p. 308-9) sopra l' opera di Engel e Stäckel.

(4) Alcuni elementi per chiarire questi punti si trovano in pubblicazioni di cui parleremo nel Libro seguente.

(5) V. l' opera summentovata di Engel e Stäckel.

(6) Alla preistoria della geometria non-euclidea converrebbe ascrivere anche Grassmann, ma non lo facciamo perchè l' *Ausdehnungslehre* uscì sette anni dopo che apparve in Journ. f Math., 17, la memoria fondamentale del Lobatscheffsky; chi desidera conoscere le relazioni fra la geometria non-euclidea ed i metodi del prelodato geometra ricorra all' Appendice I della 2ª ed. (1878) di *Die Ausdehnungslehre* von 1844.

Altri precursori minori dei geometri non-euclidei sono ricordati dall' Halsted nel precitato articolo di *The Monist*; mentre alcune antiche osservazioni sulla teoria delle parallele sono esposte nella nota del Mansion *Sur la géométrie non-euclidienne* (Mém. de la Soc. sc. de Bruxelles, 13, 1889).

5. Con questi scritti si chiude il periodo di preparazione latente del ramo di geometria di cui ci stiamo occupando. Vuoi che ad essi mancasse il sorriso della fortuna, vuoi che i tempi non fossero ancora maturi perchè venisse accolta per vera una teoria che conduceva a conclusioni in aperta contraddizione con quanto è attestato dai sensi, fatto sta che non a Saccheri, nè a Lambert, nè a Schwetkart, nè a Taurinus, la sorte concesse di legare il proprio nome alla geometria non-euclidea: avrebbe forse potuto ottenerlo e nol volle Gauss, per ragioni che non giova indagare, e lasciò che la nuova luce venisse dai più lontani confini di Europa, cioè dalla Russia e dalla Transilvania.

Giacchè Nicolò Lobatceffsky (1793-1856) (1) fin dagli anni 1815 e 1816 tenne all' Università di Kasan importanti conferenze sulla geometria e l' 11 febbraio 1826 presentò alla sezione fisico-matematica dell' Università stessa una *Exposition des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*, un sunto della quale apparve in russo nel *Messaggiero di Kasan* del 1829. Ivi è dimostrata chiaramente la possibilità di una geometria indipendente dal postulato di Euclide, il che venne messo in luce ancora migliore nei *Nuovi fondamenti di geometria con una teoria completa delle parallele*, stampati negli Atti dell' Università di Kasan degli anni 1835-1838. Alla diffusione in Europa delle proprie idee provvide il Lobaceffsky stesso pubblicando in Journ. f. Math., 17 (1837) la sua *Géométrie imaginaire*, poi a parte le *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Berlin. 1840; II ed., ivi, 1887) (2) e la *Pangéométrie* (Kasan, 1855) (3); opere che non tardarono a riscuotere il plauso dei geometri (4).

D'altra parte Wolfango Bolyai (1775-1856), amico e condiscepolo di Gauss,

(1) Cfr. E. Janischefsky, *Notice historique sur la vie et les travaux de Nicolas Ivanovich Lobachefsky* (Bull. Bonc, 2, 1869; A. Vasiliev, *Nicolái Ivánovich Lobachéfasky*. Translated from the Russian with a Preface by G. Bruce Halsted (Austin, 1894). Una traduzione tedesca dello stesso discorso fu fatta dall' Engel ed inserita in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, 7 (Leipzig. 1895).

Una *Collection complète des Oeuvres géométriques* del geometra di cui ci occupiamo fu fatta sotto gli auspici dell' università di Kasan; nel 2° vol. (1886) si trovano raccolte le opere scritte in francese ed in tedesco. Una nuova edizione è in corso di stampa.

(2) Ne conosciamo una traduzione francese dell' Hoüel (Bordeaux Mém., 4, 1866; II ed., Paris, 1895) ed una inglese di G. Bruce Halsted (IV ed., Austin, 1892).

(3) Ne esiste una versione italiana del Battaglini (Giorn di Mat., 5, 1867); nel 1905 l'originale fu ristampato a Parigi.

(4) Basti infatti ricordare la frase scultoria del Clifford: « What Vesalius was to Galen, what Copernic was to Ptolemy, that was Lobatachewsky to Euclid ». E a tal proposito ricorderò la parte che ebbe il Clifford alla diffusione in Inghilterra delle nuove idee (v. *Lectures and Essays*, London, 1879, e la prefazione di J. S. Smith a *Mathematical Papers by W. K. Clifford*, London, 1832), analoga a quelle che rappresentarono J. Hoüel (1823-1886) in Francia ed in Italia il Battaglini.

con i propri studi sull'argomento quasi inconsciamente spinse il proprio figlio Giovanni (1802-1860) ad occuparsi della teoria delle parallele (1): il frutto delle ricerche di questi occupa solo ventotto pagine in aggiunta all' opera di Wolfango intitolata *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi* (Maros Vásárhely 1832) e reca l' intestazione seguente: *Appendix scientiam spatii absolute veram exibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) indipendentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica* (2). Un sunto di tutta l' opera fu pubblicato nel 1851 in tedesco nella medesima città dell' Ungheria, con un lungo titolo che comincia colle parole *Kurzer Grundriss eines Versuches*, colle quali viene d'ordinario citato.

I risultati concordanti che Lobatceffsky e Bolyai ottennero e che Gauss si affrettò di sanzionare con la sua imponente autorità, furono la base di una geometria totalmente nuova, rigorosa quanta la geometria euclidea, esente da contraddizioni, ed indipendente dal postulato di Euclide o da altro che gli equivalga: essa concorda in molte parti coll'ordinaria geometria (3), se ne scosta in tutte quelle teorie collegate all' ipotesi della parallela unica. Alla nuova geometria, o geometria non-euclidea, negarono diritto d'asilo nel santuario delle scienze esatte quelli che per principio rifiutan fede a tutto ciò che contraddice alle grossolane testimonianze degli organi dei nostri sensi; fu accolta invece come simbolo di importante progresso da tutti coloro che seppero apprezzarne l' indiscutibile e grande valore logico. Oggi, accanto all'antico sistema euclideo, si suol collocarne un secondo altrettanto pregevole, che ad Euclide si può far risalire soltanto per essere stato ottenuto seguendo i procedimenti rigorosi di indagine che il grande alessandrino c' insegnò coll'esempio.

6. A questa sconfitta dei misoneisti, a questa vittoria della logica sul cieco empirismo, contribuirono possentemente alcuni lavori di capitale impor-

(1) A. Forti, *Intorno alla vita ed agli scritti di Wolfang e Giovanni Bolyai di Bolya, matematici ungheresi* (Bull. Bonc, I, 1868).

(2) Fu tradotta in italiano dal Battaglini (Giorn. di Mat., 6, 1868), in francese dall' Hoüel (Bordeaux Mém., 5, 1868; II ed., Paris, 1895; III ed. id. 1911), in tedesco liberamente dal Frischauf (*Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*, Leipzig, 1872; la prefazione contiene alcuni dati biografici sui Bolyai), ed in inglese dall' Halsted (IV ed., Austin. 1896; l'interessante introduzione comprende molte notizie sulla storia della geometria non-euclidea). In occasione del centenario della nascita dell' autore fu ristampata a Budapest (1902); tre anni dopo, per cura dell'Accademia ungherese fu ripubblicata in fac simile (1905).

(3) Ad es. tutta la geometria proiettiva è indipendente dal postulato d' Euclide: ciò emerge chiaramente dall' esposizione fattane da Staudt, ma fu per la prima volta notato da F. Klein in una memoria di cui parleremo a pag. 256.

tanza di Riemann, Helmholtz (1821-1895) (1) e Beltrami apparsi negli anni 1867 e 1868.

Quello di Riemann (ove s' incontrano le tre forme che può assumere la geometria) *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grande liegen*, scritto nel 1855 e pubblicato da R. Dedekind (1831-1916) dopo la morte dell' autore (Götting. Abh., 13, 1867) (2), per la generalità dei concetti, la concisione della forma e la presenza di considerazioni più famigliari ai filosofi che ai matematici, riuscì e riesce ancora di difficile intelligenza, non solo ai principianti, ma anche a chi è già provetto nelle matematiche discipline (3). Tuttavia il problema generale ivi trattato, quello cioè di assegnare le proprietà atte a caratterizzare pienamente lo spazio (non necessariamente a tre dimensioni) e i concetti fondamentali della soluzione di esso non tardarono a diffondersi, perchè Helmholtz, dopo essersene occupato indipendentemente da Rieman, prendendo anzi le mosse da un punto completamente diverso, espose le conclusioni a cui era pervenuto sotto forma prettamente scientifica ai matematici (4), sotto forma popolare al gran pubblico in conferenze ed articoli di giornali destinati al volgarizzamento delle nozioni scientifiche (5). Fa però mestieri osservare che la teoria di Helmholtz, benchè ricca di intrinseci pregi, presenta alcune imperfezioni, le quali vennero segnalate e corrette dal Lie (*Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Tratsachen die der Geometrie zu Grunde liegen*, Leipziger Ber., 38, 1886; *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, Id., 42, 1890), che, risolvendo completamente quello che egli

(1) Cfr. L. Königsberger *Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanick* (Leipzig, 1896) e l' estesa biografia *Hermann von Helmbotlz* (3 vol., Leipzig 1902-03).

(2) Riprodotto in *Riemann's math. Werke* (Leipzig, 1876), ove (p. 517) è descritta da R. Dedekind l' impressione che esso fece su Gauss. Tradotto in francese dall' Houël (Ann. di Mat. II, 3, 1869-70; II ed., Paris, 1895) ed in inglese dal Clifford (*Math. Papers*, p. 55). Una nuova edizione, con brevi commenti di H. Weyl, fu pubblicata a Berlino nel 1919.

(3) Aggiungasi che il lavoro di Riemann non era destinato alla stampa, essendo lo schizzo di una conferenza scolastica, il cui uditorio non era composto di soli matematici; un commento completo ad esso sarebbe lavoro meritorio e ancora utilissimo. Un riassunto delle idee di Beltrami, Riemann, ecc. leggesi nell'articolo di P. Tannery, *La géométrie imaginaire a la notion d' espace* (Revue philos. 1876-77).

(4) V. la nota *Ueber die Thatsachen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Götting. Nachr., 1868, oppure Wissenschaftliche Abhandlungen, 2, Leipzig, 1883); cfr. A. Krause. *Kant und Hemholtz, über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der geometrischen Axiome* (Zeitschr. f. Math., 14, 1869), e Rosanes, *Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume* (Breslau, 1871).

(5) *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie* (Heidelberger Jarbücher der Literatur 1868); *Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome* (Populäre wissenschaftliche Vorträge, 3, Braunschweig, 1876).

chiamò « problema di Riemann e Helmholtz » (1), fece una delle più memorabili applicazioni conosciute della sua teoria dei gruppi di trasformazioni: l'esposizione di essa occupa alcuna fra le più interessanti pagine dell'ultimo volume della già citata *Theorie der Transformationsgruppen*, dal Lie composta in collaborazione con F. Engel.

Non meno efficace pel consolidamento della Geometria non-euclidea fu il classico *Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea* pubblicato nel 1868 da Eugenio Beltrami in Giorn. di Mat., 6 (2). Chè il rigore delle argomentazioni e l'eleganza analitica che lo informano attrassero su di esso l'attenzione dei geometri; il brillante e sorprendente risultato che le proposizioni caratteristiche della geometria non-euclidea si verificano sopra le superficie (pseudosferiche, cioè) a curvatura costante negativa dell'ordinaria geometria impressionò in modo favorevole alla nuova teoria coloro che negano ogni valore alle affermazioni disformi da quanto testificano i sensi ed assicurò il trionfo delle nuove vedute; infine i sani principî di filosofia scientifica ivi propugnati, e lo stile affascinante in cui sono esposti, fecero sorgere in tutti una viva ammirazione pel nostro illustre connazionale (3). Rileviamo che, nel valutare questa memoria, non bisogna dimenticare come non abbia altro scopo che di insegnare una *rappresentazione* dei principî della geometria non-euclidea; essa presuppone l'ordinaria teoria della curvatura della superficie, onde, sinchè non siasi insegnato un modo per stabilirla senz'invocare il postulato di Euclide, chi pretendesse dedurre da essa delle conseguenze intorno alla struttura dello spazio nostro, cadrebbe in un circolo vizioso.

7. La benefica influenza dei geometri testè nominati sopra la geometria tutta è dimostrata ad evidenza dal mutamento operatosi in questi ultimi tempi nel modo di considerare le proposizioni che stanno a base di essa. Mentre un

(1) Eccone l'enunciato: Trovare le proprietà che spettano tanto alla schiera dei movimenti euclidei quanto alle due schiere di movimenti non euclidei, e che bastano a distinguerle da tutte le schiere di movimenti di una varietà numerica.

(2) Una versione francese di esso, dovuta all'Hoüel, è inserita in Ann. Éc. norm., 6, 1869. Alcune delle idee ivi esposte furono criticate dal Genocchi nella memoria che tratta *Dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide*. (Mem. Soc. XL, III, 2, 1869); altri rilievi verranno indicati nel Libro seguente.

(3) Sviluppi su alcuni punti della memoria del Beltrami si leggono nelle note dello stesso: *Teorema di geometria pseudosferica* e *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle pseudosferiche* da lui pubblicate in Giorn. di Mat., 10, 1872, e negli scritti seguenti: Escherich, *Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung* (Wiener Ber., 69, 1874), Reina, *Sugli oricicli delle superficie pseudosferiche* (Lincei Rend., IV, 5, 1889$_1$), Bianchi, *Applicazioni geometriche del metodo delle approssimazioni successive del Picard* (Id., V, 3, 1894$_1$).

tempo i geometri lasciavano sdegnosamente ai filosofi la cura di discutere se le verità di cui si occupano fossero oppure necessarie contingenti, inclinando verso la prima ipotesi, dopo, riconosciuta, coll' esempio del postulato d'Euclide alla mano, la base sperimentale della geometria, si sforzarono senza posa di determinare quali fatti sia indispensabile desumere dalla testimonianza dei sensi per erigere sopra solidi fondamenti la scienza dell' estensione (1), e per tal modo giunsero fra l'altro a riconoscere come negli *Elementi*, oltre alle proposizioni assiomatiche onestamente dichiarate come tali, altre se ne trovino tacitamente assunte per vere. Chi legge le belle *Vorlesungen über neuere Geometrie* del Pasch (Leipzig, 1882), esamina le opere più recenti del Veronese (*Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Padova, 1891; trad. in tedesco da A. Schepp, Leipzig, 1894) e del Killing (*Einführung die Grundlagen der Geometrie*, Paderborn, I, 1893, II, 1898), studia altre indagini contemporanee (2), senza dimenticare i più reputati trattati scolastici recenti; e quelle e questi paragona con lavori più antichi, non stenterà a rilevare molte differenze sostanziali. Infatti, mentre in passato il maestro presentava le proposizioni indimostrate come verità necessarie, eterne, indiscutibili, nelle nuove egli guida per così dire il discente ad eseguire le esperienze necessarie per istabilire le premesse alle

(1) Si paragonino le parole con cui il d'Alembert respinge l'opinione che le verità della meccanica siano sperimentali (*Traité de Dynamique*, Paris, 1758, p. XII) con le seguenti: « La géométrie et la mécanique doivent être envisagées comme des véritables sciences naturelles, fondées, ainsi que toutes les autres, sur l'observation, quoique, par l'extrême simplicité de leurs phénomènes, elles comportent un degré infiniment plus parfait de systématisation, qui a pu quelquefois faire méconnaître le caractère expérimental de leurs premiers principes » (Comte, *Cours de philosophie positive*, 2e éd., 1, 1864, p. 87). « Nello stesso modo che, per fabbricare la teoria di un ramo di fisica, partiamo dall' esperienza, e fondiamo sui nostri esperimenti un certo numero di assiomi, che ne formano in tal modo la base, così gli assiomi, che prendiamo a base della geometria, per quanto meno palesemente, sono realmente un risultato dell' esperienza » (Clifford, *Il senso comune nelle scienze esatte*, Milano, 1886, p. 270). V. anche Hoüel, *Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes* (Prag, 1875; tradotto in tedesco ed inserto in Arch. der Math., 59, 1876), e S. Roberts, *Remarks on Mathematical Terminology and the Philosopic Bearing of recent Mathematical Speculations concerning the Realities of Space* (Proc. L. M. S., 14, 1882).

(2) Vanno in particolare citate le seguenti: Peano, *I principii di geometria logicamente esposti*, (Torino, 1889); Bettazzi, *Il concetto di lunghezza e la retta* (Ann. di Mat., II, 20, 1892); Killing, *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Journ. f. Math., 109, 1892); Schmidt, *Geometrische Untersuchungen* (Id., 112, 1893); Pieri, *Sui principii che reggono la geometria di posizione* (Torino Atti, 30, 1895, e 31, 1896); Burckhardt, *Beiträge zur den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie* (Götting. Nachr., 1895); Hilbert, *Ueber die gerade Linie als kurzeste Verbindung zweier Punkte* (Math. Ann., 46, 1895); H. Wiener, *Weiteres über Grundlagen und Aufbau der Geometrie* (Deutscher Mat. - Ver., 3, 1894).

ulteriori deduzioni (1). Nelle antiche, il sistema geometrico euclideo appare come l'unico concepibile, nelle nuove, come uno dei molti che adottar si potrebbero. E queste differenze attestano la scomparsa di un inveterato e dannoso preconcetto, segnano pertanto un vero progresso, poichè, per l'avanzamento della scienza, il riconoscere un errore ha forse minore importanza dell'acquisto di una nuova verità? Ciò d'altronde non deve recare alcuna sorpresa; giacchè, come osserva il Beltrami nel succitato *Saggio*, « nella scienza matematica il trionfo di concetti nuovi non può mai infirmare le verità già acquisite: esso può soltanto mutarne il posto o la ragion logica, e crescerne o scemarne il pregio e l'uso. Nè la critica profonda dei principii può mai nuocere alla solidità dell'edificio scientifico, quando pure non induca a scoprirne e riconoscerne meglio le basi vere e proprie ».

8. Ai concetti che caratterizzano la geometria non-euclidea si è pervenuti anche per un'altra via che nulla ha di comune con quella seguita dagl' indagatori finora considerati, e che è di massima importanza di delineare, non foss' altro per far conoscere una categoria affatto nuova di argomenti atti a mostrare la perfetta legittimità di quei concetti apparentemente strani.

È notorio che, in seguito al *Traité des propriétés projectives des figures*, venne stabilita una schietta distinzione fra le proprietà delle figure che si conservano quando queste vengano projettate da un punto qualunque sopra un piano arbitrario, e quelle che si perdono eseguendo una tale geometrica operazione. È del pari noto che della prima categoria fanno parte tutte le proprietà descrittive, ma soltanto alcune proprietà metriche. Ora il desiderio di togliere le conseguenti eccezioni fece sì che i geometri si domandassero se non fosse possibile considerare ed enunciare le proprietà metriche delle figure in modo che tutte si conservassero per proiezione. Per alcune classi di proposizioni Chasles e Poncelet risolsero la questione introducendo le feconde nozioni di « punti ciclici del piano » e di « cerchio immaginario all'infinito », per altre classi essa venne risoluta da Laguerre, il quale, in una *Note sur la théorie des foyers* (Nouv. Ann., 12, 1853; cfr. Faure, *Transformation des propriétés métriques des figures*, Id., 18, 1859), riuscì a rendere projettivo il concetto di angolo, servendosi appunto delle nozioni testè ricordate. Ma chi la sciolse con piena generalità e grande eleganza fu il Cayley, il quale nel celebre *Fifth Memoir upon Quantics* (Phil. Trans., 149, 1859) (2) dimostrò che qual-

---

(1) Si vegga specialmente la summentovata opera del Veronese.

(2) Cfr. la prima delle memorie del Battaglini *Sulle forme ternarie quadratiche* (Napoli Atti, 3, 1867).

sivoglia proprietà metrica di una figura piana si può considerare come inclusa in una relazione projettiva fra questa ed una conica fissa (detta « assoluto »), mentre nello spazio ogni teorema della geometria di misura è caso particolare di un altro in cui interviene una quadrica fissa (detta pure « assoluto »); se quella conica si spezza nella coppia dei punti ciclici, o questa quàdrica si riduce al cerchio immaginario all'infinito, si ritrovano le proprietà insegnate da Euclide ne' suoi *Elementi;* ma se si lascia ad esse tutta la generalità di cui sono suscettibili, si ottengono i sistemi geometrici di cui consta la geometria non-euclidea (1).

A porre in chiara luce i rapporti intimi e profondi che intercedono fra le ricerche di Cayley e quelle dei geometri di cui analizzammo le opere nelle pagine precedenti è destinato la memoria del Klein *Ueber die so-genannte nicht-euklidische Geometrie* (Math. Ann., 4, 1871) (2): il modo luminoso in cui tale scopo è raggiunto è sufficientemente attestato dell'altissima fama in cui ben presto salì e dell'immensa influenza che esercitò tale lavoro (3). Aggiungiamo che una seconda memoria di Klein dallo stesso titolo (Math. Ann., 6, 1873) è destinata a chiarire alcuni punti della prima (4), e fu il punto di partenza di numerose ricerche (5) intorno a quello che a buon diritto si considera come il « teorema fondamentale della geometria projettiva » (6). Più tardi lo stesso Klein, in occasione di un corso di geometria non-euclidea (che

(1) Si noti che nell'articolo del Cayley *On some Analytical Formulae and their Application to the Theory of Spherical Coordinates* (Cambridge Journ., 1, 1846) sono esposte le formole fondamentali della sferica analitica coll'intervento di una funzione quadratica omogenea delle coordinate le quali sono in sostanza quelle che valgono nel piano ellittico. Inoltre nell'articolo del medesimo *Sur les problème des contacts* (Journ. f. Math., 39, 1850) si trova risolto il problema d'Apollonio in una metrica genarale: cfr. anche il *Mémoire* dello stesso autore *sur les coniques inscrites dans une même surfaces du second ordre* (Id., 41, 1851).

(2) Tali rapporti sembra non fossero sfuggiti al Beltrami ed al Fielder: v. *Analytische Geometrie der Kegelschnitte nach* G. Salmon, *frei bearbeitet von* W. Fiedler (IV Aufl., Leipzig, 1878, p. 697, nota 134

(3) Ivi s'incontra la definizione di distanza di due punti mediante il prodotto di una costante pel logaritmo del birapporto che essi formano colle intersezioni della loro congiungente coll'assoluto; vi si trovano eziandio i nomi di geometria ellittica, parabolica ed iperbolica.

(4) Cfr.: V. Reyes y Prosper, *Sur la géométrie non-euclidienne* (Math. Ann., 39, 1387), e Pasch, *Ueber die projective Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde* (Ivi).

(5) Vanno specialmente ricordate quelle di Lüroth e Zeuthen (esposte da Klein in Math. Ann., 7, 1874), di Thomae e Reye (v. le edizioni II e III dell'opera *Die Geometrie der Lage* di quest'ultimo), dello Schur (*Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie*, Math. Ann., 17, 1880), del Darboux (*Sur le théorème fondamental de la géométrie projective*, ivi) e del de Paolis (*Sui fondamenti della geometria projettiva*. Lincei Mem., III, 9, 1880-81.

(6) Esso afferma che due punteggiate projettive sullo stesso sostegno non possono avere più di due punti uniti.

venne poi litografato e che noi citammo precedentemente, ritornò sullo stesso tema con un'interessante nota *Zur nicht-euklidischen Geometrie* (Math. Ann., 37, 1890) a cui fece seguito quella del Killing, *Ueber die CliffordKlein'schen Raumformen* (Id., 39, 1891).

9. La creazione di nuovi sistemi geometrici accanto a quello di Euclide suggerì ai geometri un nuovo e assai vasto problema, quello cioè di cercare in quali teorie degli spazi non-euclidei siano incluse quelle che formano la geometria classica: tale problema occupò per parecchi anni i geometri e diede risultati più o meno interessanti dei quali qui deve essere fatto cenno. Ricorderemo anzitutto l'estensione della ordinaria trigonometria che fu intrapresa da Cayley stesso (*On the Non-Euclidian Geometry*, Math. Ann., 5, 1872), e completata dallo Story (*On the Non-Euclidian Trigonometry*, Ann. Journ., 4 o 5, 1882-83) e da M. Simon (*Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie*, Journ. f. Math., 109, 1892) (1); in seguito, l'estensione analoga che, nelle note *On the Theory of the Evolute* (Phil. Mag., 29, 1865) e *On Evolutes and Parallel Curves* (Quart. Journ., 11, 1871) del Cayley stesso, ricevette un'altra teoria nota; poi la soluzione data dal Battaglini (*Nota sui circoli della geometria non euclidea*, Giorn. di Mat., 12, 1874; cfr. Ricordi, *I circoli nella geometria non-euclidea*, Id., 18, 1880) del problema che corrisponde alla costruzione del cerchio che ne taglia tre altri sotto angoli dati e la generalizzazione della *Kreisverwandtschaft* del Möbius (v. pag. 201) dovuta al medesimo geometra (*Sull' affinità circolare non-euclidea*, Giorn. di Mat., 16, 1878) (2); la voluminosa opera di F. Tirelli intesa a rivelare *Le fonti della geometria di Euclide* (Napoli, 1884-86) ed a cui fa seguito il *Saggio di geometria metrico-projettiva* (Salerno, 1888) dello stesso, si propone la determinazione dei teoremi di cui quelli di Euclide possono considerarsi come casi particolari. Più alto è il tema delle note di E. d'Ovidio *Sopra alcuni luoghi ed inviluppi di primo e secondo grado in geometria projettiva*. (Napoli Rend., 14, 1875), *Le proiezioni ortogonali nella geometria metrico-projettiva* (Torino Atti, 11 1876), *Le proprietà focali delle coniche nella metrica proiettiva* (Id., 26, 1891), *Sulle coniche confocali nella metrica proiettiva* (Ivi) e *Teoremi sulle coniche nella metrica proiettiva* (Ivi), di cui le tre ultime hanno dei punti di contatto colla nota dello Story *On Non-Euclidian Properties of conics* (Am. Journ., 5, 1883). Del d'Ovidio va anche ricordato lo *Studio sulla geometria proiettiva*

(1) V. anche: de Zolt, *Saggio di pangeometria* (Giorn. di Mat., 15, 1877).

(2) Si collegano a queste le memorie del medesimo geometra *Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche* e *Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle quadriche* (Giorn. di Mat., 12, 1874).

(Ann. di Mat., II, 6, 1873) — al quale si può avvicinare la memoria di H. Stahl (1843-1909), *Ueber die Maassfunctionen der analytischen Geometrie* (Berlin. 1873) e l' *Habilitationsschrift* di H. Frahm (Tübingen, 1873) —; aggiungansi ad esso le memorie seguenti: *I complessi e le congruenze lineari nella geometria projettiva* (Id., 7, 1875), *Alcune proprietà dei complessi e delle congruenze lineari in geometria projettiva* (Lincei Mem., II, 3, 1875-76), *Sulle reti di complessi lineari nella geometria metrico-projettiva* (Ivi), *Le serie triple e quadruple di complessi lineari nella geometria metrico-projettiva* (Ivi), nonchè i *Teoremi sui complessi lineari nella metrica projettiva* (Rend. Ist. Lomb., II, 14, 1881), e la nota *Su varie questioni di metrica proiettiva* (Torino Atti, 28, 1893), nella quale, fra l'altro, è trattata la questione del modo di definire il volume in uno spazio di curvatura costante, questione già trattata *ex-professo* nelle note seguenti: G. Loria *Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque* (Giorn. di Mat., 26, 1888); R. S. Ball (1840-1913) *On the Theory of Content* (Dublin Trans., 29, part. V, 1888); M. Simon *Zur Volumenbestimmung in der Lobatschewsky'schen Geometrie* (Math. Ann., 42, 1893). Al Cayley dobbiamo ancora la generalizzazione della teoria delle superficie minime (*Sur les surfaces minima*, C. R., 111, 1890), mentre l'estensione della teoria delle geodetiche fu indicata dal Lüroth, assai prima, nella nota, appunto intitolata *Verallgemeinerung des Problems der kürzesten Linien* (Zeitschr. f. Math., 14, 1868). Il fatto notevole che la teoria degli isoperimetri si conserva in una metrica generale venne rilevato dal Bang (*Nogle Maximumsproblemer i den ikke euklidiske Geometri*, Tidsskrift, V, 5, 1887). Nè va dimenticato il lavoro del de Paolis sopra *La trasformazione piana doppia di secondo ordine e la sua applicazione alla geometria non-euclidea* (Lincei Mem. III, 2, 1878), i cui risultati vennero poi estesi allo spazio dall'Aschieri nella memoria sopra *La trasformazione quadratica doppia di spazio e la sua applicazione alla geometria dello spazio non-euclideo* (Rend. Ist. Lomb., II, 14 e 15, 1881-82).

A sviluppi della teoria di cui ci occupiamo sono destinati: lo scritto del Clifford intitolato *Analytical Metrics* (Quart. Journ., 6, 1865, e 7, 1866), al quale serve di complemento quello postumo *On the Theory of Distances* (Math. Papers, p. 130 164), le memorie di H. Cox *Homogenous Coordinates in Imaginary Geometry* (Quart. Journ., 18, 1881) e *On the Application of Quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different Kinds of Uniform space* (Cambridge Trans., 13, 1882), le note di Cayley *On the Non-Euclidian plane Geometry* (Proc. R. S., 37, 1884) e *Non-Euclidian Geometry* (Cambridge Trans., 15, 1892), ed il lavoro del Réthy intitolato *Die Fundamental Gleichungen der nicht-euklidischen Geometrie auf elementarem Wege abgeleitet* (Arch. der Math., 58, 1882).

Questi scritti conducono naturalmente a citare gl'importantissimi del Bianchi *Sull'applicabilità delle superficie negli spazi di curvatura costante* (Lincei Mem. III, 2, 1878), *Sui sistemi di Weingarten negli spazii di curvatura costante* (Id., IV, 4, 1887), *Sulle supefrcie d'area minima negli spazii a curvatura costante* (Ivi), *Sulle forme quadratiche differenziali indefinite* (Id., 5, 1888), *Sulle divisioni regolari dello spazio non euclideo in poliedri regolari* (Id., V, 2 1893) (1), *Sulle superficie a curvatura negli spazii di curvatura costante* (Torino Atti, 30, 1895) e *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica* (Ann. di Mat., II, 24, 1896): di natura analoga sono le ricerche di G. Fibbi sopra *I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazii di curvatura costante* (Pisa Ann., 1891), ove fra l'altro è generalizzato il celebre teorema di Malus-Dupin (p. 139).

10. Di un altro ordine sono i risultati consegnati nelle note postume del Cifford *Motion of a Solid in Elliptic Space* (Math. Papers, p. 378-384) e *On the Theory of Screws in a Space of Costant Positive Curvature* (Ivi, p. 402-405), in quella del Most, *Neue Darlegung der absolutem Geometrie und Mechanick mit Berücksichtigung der Frage nach den Grenzen des Wellenraumes* (Coblenz 1883) e nelle memorie del Lindemann *Ueber unendlich kleine Bewegungen starrer Körper bei allgemeiner proiectivischer Massbestimmung* (Math. Ann., 7, 1873), ove sono generalizzate le classiche teorie del moto e delle forze. Di questa possono intendersi come proseguimenti i lavori di A. Buchheim *On the Theory of Screws in Elliptic Space* (Proc. L. M. S., 15, 16 e 17; 1884 85), di R. S. Heath *On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space* (Phil. Trans., 175, 1884), e di W Burnside *On the Kinematiks of Non-Euclidian Space* (Proc. L. M. S., 26, 1894). Indirizzo diverso dalla memoria del Lindemann hanno gli *Études de mécanique abstraite* (Belgique Mém., 21, 1870) del de Tilly (1837-1896) (2) e l'*Essai* dello stesso *Sur les principes fondamentaux de la geométrie et de la mécanique* (Bordeaux Mém., II, 3, 1879); analoghe in certo modo a queste ricerche sono quelle che tendono a determinare come si pretenderebbero i fenomeni fisici in uno spazio non-euclideo, fra cui vanno ricordate quelle dello Schering sopra *Die Schwerkraft im Gaussischen Raume* (Götting. Nachr., 1870) (3), del Fresdorf *Ueber die Geometrie und die Potentialfunction im Gaussischen und Riemannschen*

---

(1) È questo un tema che in prosieguo di tempo venne più volte trattato; se non citiamo i lavori ove è svolto, gli è che essi son piuttosto di pertinenza dell'analisi.

(2) Mansion, *J. de Tilly* (Rev. d. quest. Scient. III. 10, 1906).

(3) Notiamo a tale proposito che il Lipschitz narra (Journ. f. Math., 74, 1872) avere Lejeune Dirichlet (1805-1859) fin dal 1850 studiata la legge di gravitazione in uno spazio non-euclideo.

Raum (Diss. Göttingen, 1873), quelle di E. Cesàro riguardanti i *Moti rigidi e deformazioni termiche negli spazii curvi* (Lincei Rend., IV, 4, 1882_2) quelle di E. Padova sopra *La teoria di Maxwell negli spazii curvi* (Id., IV, 5, 1889_1). E qui cade in acconcio far menzione della splendida memoria del Beltrami *Sulle equazioni generali dell' elasticità* (Ann. di Mat., II, 10, 1881), ove è dimostrato essere le equazioni generali dell' elasticità indipendenti dal postulato d'Euclide e sono poi determinate le equazioni dell'isotropia in uno spazio di curvatura costante.

11. Ricorderemo ancora le note commentative del Battaglini *Sulla geometria immaginaria del Lobatschewsky* (Giorn. di Mat., 5, 1867; trad. in francese in Nouv. Ann., II, 7, 1868) e le *Considerations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la géométrie non-euclidienne* del Bouniakowsky (Petersbourg Mém., 18, 1872), quella del Mansion sopra la *Relation entre les distances de cinq points en géométrie non-euclidienne* (Mem. de la Soc. Sc. de Bruxelles, 15, 1892), le *Notes sur la géométrie euclidienne et sur la géométrie non-euclidienne* (Mathésis, II, 1, 1891) dello stesso geometra e quelle del de Tilly *Sur le principe fondamental de la géométrie riemannienne* (Id., 4, 1894), a cui fa seguito l' *Essai de géométrie analytique générale* (Belgique Mém., 17 1892-93), le *Bemerkungen über den Beweis des Satzes von der Winkel-summe des Dreiecks* (Math. Ann., 29, 1887) del Petersen, l'*Elementar-geometrische Ableitung der Parallelenconstruction in der absoluten Geometrie* (Journ. f. Math., 107, 1890) di M. Simon, le osservazioni *Ueber das Parallelen-axiom* (Deutsch. Math.-Ver., 1. 1892) e la *Construction der Tangenten an Kreis und Grenzkreis, und Beweis dass der Lobatschewsky'sche Raum eine doppelt unendliche Menge von Kulgen mit unendlich grossem Radius enthält* (Id., 3, 1894) del medesimo autore. Nè possiamo dimenticare la memoria del Busche *Ueber eine rationale nicht-euklidische Massbestimmung* (Hamburger Mitth., 3, 1892) ove è definita la distanza dei punti di coordinate cartesiane $(x_1\ y_1)$ e $(x_2\ y_2)$ mediante la funzione $(x_2-x_1)+(y_2-y_1)$, e l'angolo di due rette in modo correlativo.

Ma fra tutte le memorie dell' epoca sulla geometria non-euclidea le più importanti sono quella del Segre *Sulle geometrie metriche dei complessi e delle sfere e sulle loro mutue analogie* (Torino Atti, 19, 1883), e le altre, di indole più generale e strettamente collegate alle indagini del Lie, del Poincaré *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie* (Bull. S. M. F., 14, 1887) e *Des fundements de la géométrie* (The Monist 1898). (1)

(1) Questo articolo uscì per la prima volta in inglese; solo dopo la morte dell' autore ne fu pubblicato l'originale in un' opuscolo facente parte della *Bibliothèque de synthèse scientifique* (Paris, s. d.). È da notarsi a questo proposito l' intervento di considerazioni non-euclidee nella omai celebre *Théorie des groupes fuchsiens* (Acta 1, 1882-83) dell' or citato geometra.

12. Le nuove dottrine di cui ci siamo occupati in questo Capitolo furono oggetto di esposizioni metodiche. Le più antiche sono quelle di C. Flye S.te Marie (*Études analytiques sur la théorie des parallèles*, Paris, 1871) e del Frischauf (*Elemente der absoluten Geometrie*, Leipzig, 1855); ad esse seguono quelle del Killing (*Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Leipzig, 1885), del Lindemann (v. le *Vorl. üb. Geom. von A. Clebsch*, 2, Leipzig, 1891), del Klein (v. le Lezioni litografate che già menzionammo) e del Veronese (*Fondamenti di geometria* ecc.) (1); nè va taciuto che coll' opuscolo intitolato *Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie* (Strassburg i. E., 1890) M. Simon si è proposto il lodevole intento di diffondere le nuove idee sulla geometria nelle scuole medie. Aggiungiamo finalmente che nell' *Essai de géométrie analytique générale* (Belgique Mém., 47, 1892) il de Tilly ha suggerito un nuovo punto di partenza per esporre la geometria non-euclidea, il quale, per essere generalmente accettato, abbisognerebbe di qualche ulteriore sviluppo, ciò che non toglie ad esso i pregi di indiscutibile novità che possiede.

Nè alle dottrine medesime mancarono esposizioni storico-critiche. Tacendo dei lavori di Erdmann, Rosanes e Karagiannides che già ci accadde di citare, tacendo anche dello scritto polemico di A. de Commines de Marsilly intitolato *Études sur le «postulatum» d' Euclide et sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* (Ass. fr., 1889), citeremo le *Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie* di J. C. Becker (Zürich, 1870), la memoria di R. Beez *Ueber euklidische und nicht-euklidische Geometrie* (Plauen i. V., 1888), la Diss. di A. Donadt *Das mathematische Raumproblem und die geometrischen Axiome* (Leipzig, 1881) e lo scritto di M. Simon *Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie* (Strassburg, 1891). Vanno uniti a questi lavori la nota del Mansion *Sur les principes fondamentaux de la géométrie, de la mécanique et de l' astronomie* (Paris, 1893), nonchè l' *Essai d' exposition élémentaire des principes fondamentaux de la géométrie non-euclidienne de Riemann* (Mathésis, II, 5, 1895) dello stesso geometra; servì ad esso di complemento l' articolo *Sur les premiers principes de la métagéometrie et de la géométrie de Riemann* (Ivi), a cui si può unire la *Notice* dello stesso autore *sur les recherches de M. de Tilly en méta-géométrie* (Revue des questions scientifiques, 37, 1895).

Da tutto ciò risulta quale considerevole movimento intellettuale sia stato prodotto dalle nuove idee che abbiamo descritte sui fondamenti della geometria: ciò forse non basta ad assicurare un posto duraturo nella storia della scienza a coloro che per primi le formularono e a renderli degni della perenne riconoscenza dei posteri?

---

(1) Si vegga anche: R. Stawell Ball, *The Non-Euclidian Geometrie* (Hermhatena, 9) e l'articolo dello stesso autore *Measurement* nella 9a ed. dell' Enciclopedia britannica.

CAPITOLO XI.

Geometria degli spazi a quantesivogliano dimensioni.

1. La teoria delle varietà comunque estese, o geometria degli spazi a quantesivogliano dimensioni (iperspazi), deve la propria origine al sussidio che l'algebra ricevette dalla geometria dopo che Descartes e Fermat insegnarono (v. pag. 13) ad applicare quella a questa. Invero questo aiuto sembra necessariamente limitato, giacchè soltanto i fatti analitici collegati alle teorie delle funzioni a una, due o tre variabili (ossia a quelle delle forme binarie, ternarie o quaternarie) sono suscettibili di una immediata rappresentazione concreta. Ma lo spirito di generalizzazione, che, come è noto, fu e non cessò di essere pei moderni uno degli stimoli più potenti ed efficaci alla ricerca geometrica, diede ad essi la forza sufficiente per varcare i limiti che la natura sembrava avere posti alle loro facoltà immaginative e parlare di spazi comunque estesi, cioè di spazi analoghi alla retta, al piano ed allo spazio in cui viviamo, ma di cui ogni elemento fosse determinato da un gruppo di numeri composto di quantisivogliano elementi (1). E ne parlarono senza neppure proporsi la quistione se esistano effettivamente tali spazi, sia che la considerassero di pertinenza, più della filosofia e della fisica, che della matematica, sia che si fossero persuasi che la sua so-

---

(1) Chi meriti il nome di scopritore di questo nuovo mondo schiuso ai geometri è difficile dire. Si può osservare però che gli analisti del periodo cartesiano rappresentarono con un « ipersolido » il prodotto di quattro linee D'altronde prima di loro lo Stifel (1486-1567) scrisse a questo proposito, nella sua edizione dell' *Algebra* del Rudolff, alcune frasi assai significanti che K. Fink ha riprodotte a p. 173 del suo *Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik* (Tübingen, 1890). Più tardi Leibniz ha parlato di « rectangule solide et ipersolide » e a Emanuele Kant (1724-1804) non isfuggì la possibilità di una geometria a più dimensioni; « eine Wissenschaft von allen diesen Raumarten », egli scrisse, « wäre unfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte » (*Kant's Werke*, ed. Hartenstein. 1, Leipzig, 1867, p. 22 e seg. Cfr. E. Fink, *Kant als Mathematiker*, Diss. Erlangen, 1889, p. 16). Che anche Gauss avesse un'alta fiducia nella leggitimità e dell'avvenire della geometria a più dimensioni risulta da alcune parole scritte dal Sartorius v. Walterhausen a p. 81 del suo opuscolo, già ricordato, *Gauss zum Gedächtniss* (Leipzig, 1856). Fra i tentativi fatti per estendere l'interpretazione geometrica delle funzioni ad una variabile va anche ricordato, quello fatto dal fisico E. Péclet (1793-1857) nell' *Essai sur l'interprétation géométrique des équations entre un nombre quelconque devariables* (Ann. de mat. 14, 1823), tentativo coronato, a dir vero, da mediocre successo e che subito provocò assennate osservazioni da parte del Gergonne

luzione non potesse appianare le difficoltà analitiche a cui avevano intento lo sguardo. Ed a ragione si comportarono in tal modo, perchè così, senza dar di cozzo in un problema forse insolubile, essi conseguirono il loro intento, quello cioè di avere a propria disposizione delle rappresentazioni (sensibili o sopransibili poco importa, ma estremamente suggestive) di molte argomentazioni algebriche e dei risultati a cui queste conducono. A questo proposito è interessante rilevare che il celebre fisico G. Green (1793-1841) investigando nel 1833 la legge di gravitazione in uno spazio a n dimensione, dimostrò non essere prerogativa dei matematici la considerazione degli iperspazi.

Il primo sviluppo metodico della geometria a più dimensioni venne tentato dal Cayley nei *Chapters in the Analytical Geometry of* n *Dimensions* (Cambridge Journ., 4, 1843), primo germe del più esteso lavoro dello stesso autore intitolato *A Memoir on Abstract Geometry* (Phil. Trans., 160, 1870). Quattro anni dopo la prima pubblicazione del Cayley, e probabilmente senz'averne cognizione, il Cauchy trattò lo stesso tema nell'articolo *Sur les lieux analytiques* (C. R., 24, 1847), il quale sembra non avere molto incontrato il favore del pubblico, e cadde in obblio così completo che fu necessario che il Genocchi, molti anni dopo, ne segnalasse l'esistenza e ne rivelasse il significato, nella già menzionata *Lettre à M. Quetelet sur diverses questions mathématiques* (Belgique Bull., II, 26, 1873).

2. Il medesimo concetto di spazio ad n dimensioni come varietà numerica sta a base della memoria, a noi già nota, di Riemann *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1), la quale, vuoi per l'originalità e l'importanza delle idee che racchiude, vuoi per l'impressione che produsse in tutto il mondo dei geometri, è da considerarsi come fondamentale nell'argomento che trattiamo. A convincersene si rifletta che ivi è proposto un modo per definire e generare le varietà comunque estese, è fatto il primo tentativo di estendere agli spazî superiori l'ordinaria geometria metrica e (generalizzando idee e metodi di Gauss) è introdotta la nozione di curvatura di tali spazî e ne è calcolato il valore.

A chiarire, diffondere, completare le indagini di Riemann contribuì potentemente il Beltrami colla sua giustamente celebre *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* (Ann. di Mat., II, 2, 1868-69), ove, fra l'altro, è dimostrato che in uno spazio di curvatura costante ad n dimensioni ogni linea geodetica è rappresentabile col sistema di $n-1$ equazioni lineari fra le coordinate di un punto. La questione, in certo modo reciproca, di definire uno

(1) Cfr. anche la *Commentatio mathematica*, ecc., che porta il n. 22 in *B. Riemann's Gesammelte mathematische Werke* (Leipzig, 1876).

spazio ad n dimensioni in cui le geodetiche sono rappresentabili in siffatta guisa, fu risolta dallo Schläfli, il quale trovò che un tale spazio è necessariamente a curvatura costante (v. la *Nota alla Memoria del sig. Beltrami « Sugli spazii di curvatura costante »*, Ann. di Mat., II, 5, 1871-73, e la successiva *Osservazione* del Beltrami).

Da questi scritti derivano i seguenti: Schering, *Linien, Flächen und höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Raume* (Götting. Nachr., 1873); S. Newcomb (1835-1909) *Elementary Theorems Relating to the Geometry of Space of three Dimensions and of Uniform Positive Curvature in the Fourth Dimension* (Journ. f. Math., 83, 1877); F. W. Frankland, *On the Simplest Continuous Manifoldness of Two Dimensions and of Finite Extent* (Proc. L. M. S., 8, 1877); W. Killing, *Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krummung* (Journ. f. Math., 86, 1879) e *Die Rechnung in den nicht-euklidischen Raumformen* (Id., 89, 1880); T. Craig (1855-1900) *Note on the Projection of the General Locus of Space of Four Dimensions into Space of Three Dimensions* (Am. Journ., 2, 1879) e *On Certain Metrical Properties of Surfaces* (Id., 4, 1882); Vahlen, *Sur la surface de Fresnel* (Nouv. Ann., III, 14, 1895) (1). Nello stesso indirizzo sono scritte la memoria del Page, *Transformations Groups in Space of Four Dimensions* (Annals of Mathematicis, 9, 1894-95), l'opera del Killing dal titolo *Die nicht-euklidischen Raumformem in analytischer Behandlung* (Leipzig, 1885) — a cui fa seguito la memoria dello Schur, *Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen* (Math. Ann., 27, 1886) —, l'articolo di E. Cesàro sopra *Le deformazioni infinitesime degli iperspazî* (Napoli Rend., II, 9, 1895) e le note più elementari del de la Rive *Sur l'emploi d'une quatrième dimension* (C. R., 120, 1895), e *Sur l'emploi d'une quatrième dimension en géometrie analytique* (Archives des sciences phisiques et naturelles de Genève, 33, 1895).

3. Il concetto di spazio a più dimensioni come varietà numerica si ritrova anche nei tentativi di estendere a quantesivogliano variabili quelle ricerche che pel nostro spazio descrivemmo nel Cap. dedicato alla geometria differenziale. Ne porgono notizia le memorie dello Schläfli, *Ueber das Minimum des Integrals* $\int \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}$, *wenn die Variabeln* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *durch eine Gleichung zweiten Grades gegenseitig von einander abhängen* (Journ. f. Math., 43, 1852), del Beltrami *Sulla teoria generale dei parametri differenziali* (Bologna Mem., II, 8, 1869) e del Ricci *Sulla teoria degli iperspazii* (Lincei Rend., V, 4, 1895_2);

(1) Ivi è ottenuta l'equazione della superficie delle onde in uno spazio a quantesivogliano dimensioni.

congeneri sono quelle numerose ed importanti sull'estensione della nozione di curvatura, di cui le più cospicue sono consegnate nei lavori seguenti (1): Christoffel, *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (Journ. f. Math., 70, 1869); Lipschitz (1832-1903) *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von* n *Differentialen* (Ivi), *Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff ecc.* (72, 1870), *Ausdehnung de Theorie der Minimalflächen* (Id., 78, 1874), *Beitrag zur Theorie der Krümmung* (Id., 81, 1876), *Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface* (C. R., 82, 1876, e Journ. f. Math., 81, 1876) e *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften* (Berliner Ber., 1882); Kronecker, *Ueber Systeme von Functionem mehrer Variabeln* (Id., 1860); Lie, *Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungstheorie des gewöhnlichen Raumes entspricht* (Götting Nachr., 1871) e *Zur Theorie eines Raumes von* n *Dimensionen* (Ivi; cfr. anche Klein, *Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Ann., 5, 1872) (2); Suworoff, *Sur les caractéristiques des systèmes de trois dimensions* (Bull. Sc. math., 4, 1873); Beez, *Ueber das Krummungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung* (Math. Ann., 7, 1874), e *Zur Theorie des Krümmungsmaasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 20, 1875, 21, 1876, e 24, 1879; v. anche la monografia già citata *Ueber euklidische und nicht-euklidische Geometrie*, Plauen i. V., 1888); Jordan, *Généralisrtion du théorème d'Euler sur la courbure des surfaces* (C. R., 79, 1874); Allé, *Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses* (Wiener Ber., 74, 1876); Voss, *Zur Theorie der Transformation der quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten* (Math. Ann., 16, 1880) G. Ricci, *Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche* (Ann. Mat. II. 12, 1884); A. Brill, *Bemerkung über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen* (Math. Ann., 26, 1886) (3) Hoppe, *Erweiterung einiger Sätze der Flächentheorie auf* n *Dimensionen* (Arch. der Math., II, 3, 1886); Pieri, *Intorno ad un teorema dei sigg. Betti e Weingarten* (Giorn. di Mat., 24, 1886 (4); Schafstein, *Aus-*

(1) Parecchi di esse possiedono anche molto valore dal punto di vista analitico.

(2) In questi scritti di Lie e Klein si trova fra l'altro la generalizzazione del teorema di Dupin (v. p. 139) e di altri analoghi.

(3) Fra i risutati ottenuti in questo lavoro è degno di particolare menzione l'accertamento del fatto che una varierà a $n > 2$ dimensioni, immersa in una a $n+1$ dimensioni, in generale non può deformarsi *in quest' ultima* senza rotture nè duplicature; lo potrà però, generalmente parlando invadendo uno spazio a più di $n+1$ dimensioni.

(4) Ivi è esteso allo spazio di n dimensioni il teorema che dice essere un'ellisse o un'iperbole il luogo de' punti per cui è costante la somma o la differenza delle distanze da due punti fissi.

dehnung eines die geradlinigen Strahlensysteme betreffenden Problems auf die n *dimensionale homogene Raumform* (Diss. Bonn, 1888); Volterra, *Delle variabili complesse negli iperspazii* e *Sulle funzioni di iperspazii e sui loro parametri differenziali* (Lincei Rend. IV, 5, 1891, I), Berzolari, *Sulle equazioni differenziali delle quadriche in uno spazio ad* n *dimensioni* (Id., V. 5. 1896$_1$). Aggiungiamo che al Mehler siam debitori di alcune osservazioni importanti *Ueber die Benutzung einer vierfachen Mannigfaltigkeit zur Ableitung orthogonaler Flächensysteme* (Id., 84, 1878), al Cesàro di una memoria sopra *Le formole di Codazzi negli iperspazii* (Napoli Rend., II, 8, 1894), nonchè di interessanti ricerche *Sulla geometria intrinseca degli spazii curvi* (Napoli Mem., II, 6, 1894), ed al Puchta di una nota *Ueber die allgemeinstein abwickelbaren Räume. Ein Beitrag zur mehrdimensionalem Geometrie* (Wiener Ber., 101, 1892).

Ad estendere a spazi di quattro o n dimensioni la geometria differenziale delle curve tendono molti scritti, di cui basti qui ricordare i seguenti: C. Jordan, *Sur la théorie des courbes dans l'espace a* n *dimensions* (C. R., 79, 1874); H. Fromm, *Ueber die Krümmungsverhältnisse einer Kurve im* n*-fach ausgedehnten homogenen Raum von verschwindendem Krümmungsmasse* (Diss. Bonn, 1878); G. Brunel, (1856-1900) (1) *Sur les propriétés métriques des corubes gauches dans un espace linéaire à* n *dimensions* (Math. Ann., 19, 1882); Hoppe, *Ueber dreifach gekrümmte Curven und deren Parallelen* (Arch. der Math., 64, 1880), *Principien der* n*-dimensionalen Curventheorie* (Id., II, 6, 1888), *Fundamentalaxen der mehrfach gekrümmten Linien* (Id., 11, 1892), e *Osculiriende Kugel nebst den analogen Gebilden für* n *Dimensionen* (Id., 12, 1893); Pirondini, *Sulle linee a tripla curvatura nello spazio euclideo a quattro dimensioni* (Giorn. di Mat., 28, 1890); G. Landsberg (1865-1912) *Zur Theorie der Krümmungen eindimensionaler, in höheren Mannigfaltigkeiten enthaltener Gebilde* (Journ. f. Math., 114, 1894).

Ancora: il teorema di Liouville intorno alle trasformazioni conformi del nostro spazio, di cui facemmo menzione in nota precedente, fu esteso dal Beez, il quale, nella nota *Ueber conforme Abbildung von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 20, 1875), dimostrò che le uniche rappresentazioni di uno spazio ad $n > 2$ dimensioni che conservino gli angoli sono l'eguaglianza, la simmetria, la similitudine e la trasformazione per raggi vettori reciproci generalizzata; mentre siamo debitori al Wolstenholme del teorema che dice essere in generale $\frac{n}{n-2}\{(n-1)^4-1\}$ il numero delle normali di una super-

(1) P. Barbarin, *George Brunel* (Enseign. math. 3, 1901); P. Duhem (1861-1916) *Notice sur le vie et les travaux de G. Brunel* (Bordaneri Mem. VI, 2, 1903).

ficie d' ordine n in uno spazio a d dimensioni che passano per un punto dato (*Educational Times*, 10, 1868).

Finalmente il Betti, il Tonelli, il Dyck ed il Poincaré studiarono con buon successo le questioni attinenti alla connessione di uno spazio comunque esteso. I lavori in cui essi esposero i loro risultati sono rispettivamente: *Sopra gli spazii di un numero qualunque di dimensioni* (Ann. di Mat., II, 4, 1870-71), *Sulla connessione degli spazii* (Lincei Rend., IV, 6, 1890$_1$), *Beiträge zur Analysis situs*, II, *Aufsatz* (Math. Ann., 37, 1890), *Sur l' analysis situs* (C. R., 115, 1892).

Aggiungiamo essere stato dimostrato con opportuni esempii da G. Brunel (*Note sur l' analyse indéterminée et la géométrie à* n *dimensions*, Bordeaux Mém., III, 2, 1886) e da A. Puchta (*Ueber ein Satz von Euler-Brioschi-Genocchi*, Wiener Ber., 96, 1887) che la considerazione di spazii superiori abilita a risolvere anche certe questioni di teoria dei numeri. In un altro campo dell'analisi venne pure sfruttata la geometria a n dimensioni, cioè nello studio delle sostituzioni lineari su due variabili complesse: chi vuole convincersene consulti la nota di P. del Pezzo *Sui gruppi Kleineani a due variabili* (Napoli Rend., II, 5, 1893).

4. Non abbiamo ancora parlato dell' esteso *Essai sur la géométrie à* n *dimensions* del Jordan (Bull. S. M. F., 3, 1875; cfr. il sunto inseritone in C. R., 75, 1872), ove è tentata una metodica generalizzazione della geometria metrica, trattata mediante coordinate cartesiane; abbiamo differito a citarla sino a questo momento perchè al termine di essa è intrapresa la generalizzazione a spazi comunque estesi della cinematica dello spazio euclideo, ed è appunto ora che noi intendiamo dar notizia dei tentativi fatti per estendere alcune importanti discipline fisico-matematiche agli spazi di curvatura costante. Fra essi spetta il primo posto al problema dei tre corpi, di cui si occupò il Lipschitz nel ben noto lavoro intitolato *Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung* (Journ. f. Math., 74, 1872; cfr. *Extension of the Planet-problem to a Space of* n *Dimensions and of Costant Integral Curvature*, Quart. Journ., 12, 1874). Seguono ad essa in ordine di tempo le investigazioni di E. Schering sopra *Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Räumen* Götting. Nachr., 1873) (1), e quelle intorno alla cinematica degli iperspazi, i cui risultati si apprendono dagli scritti del Clifford, *On the Free Motion under no Forces of a Rigid System in an* n*-fold Homaloid* (Proc. L. M. S., 7, 1876), e del Beltrami, *Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante* (Bull. Sc. math., 11,

(1) Cfr.: Opitz, *Einige Sätze über die Anziehung in mehrfach augedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Räumen* (Diss., Göttingen, 1881).

1876); ad esse si collegano la memoria del C. J. Monro (1833-1882) *On Flexure of Spaces* (Proc. L. M. S., 9, 1878), la dissertazione di L. Scheeffer (1859-1885) *Ueber Bewegungen starrer Punktsysteme in einer ebenen* n *fachen Mannigfaltigkeit* (Berlin, 1880), nonchè le memorie del Killing, *Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen* (Journ. f. Math., 98, 1885), dello Schur *Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses* (Math. Ann., 27, 1886) e *Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume* (Id., 28, 1887), di F. N. Cole, *On Rotations in Space of Four Dimensions* (Am. Journ., 12, 1890), e di P. H. Schoute, *Le déplacement le plus général dans l'espace à* n *dimensions* (Ann. de l'Éc. pol. de Delft, 7, 1891) e *On the Order of the Groups related to Anallgmatic Displacements of the Regular Bodies in* n*-dimensional Space* (Brit. Ass., 1894), di F. Schottky, *Ueber die analytische Auflösung der Aufgabe der Rotation eines festen Körpers im vierdimensionalen Raume* (Berliner Ber., 1891), dello Stäckel *Ueber die Bewegung eines Punktes in einer* n*-fachen Mannigfaltigkeit* (Math. Ann., 42, 1893), e *Ueber Biegungen von* n*-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten* (Journ. f. Math., 113, 1893), e di E. Cesàro sopra *Le deformazioni infinitesime degli iperspazii* (Napoli Rend., II, 9, 1895) e *Sulle equazioni dell' elasticità negli iperspazii* (Lincei Rend., V, 3, 1894_2).

Di indole più analitica sono gli scritti seguenti: Cayley, *A Memoir on Prepotential* (Phil. Trans., 165, 1875); Kronecker, *Ueber Potentiale* n*-facher Mannigfaltigkeiten* (Coll. math., 1881); Tonelli *Sopra la funzione potenziale in uno spazio di* n *dimensioni* (Ann. di Mat., II, 10, 1882); Hoppe, *Anziehung eines der Kugel analogen Gebildes von* n *Dimensionen auf einen Punkt* (Arch. der Math., II, 4, 1886), e *Das* n*-dehnige* (n + 1)*-Eck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen* (Id., 5, 1887); Voss, *Ueber ein Theorem der analytischen Mechanick* (Math. Ann., 27, 1886); T. C. Lewis, *Application of Geometry of four Dimensions to determine Moments of Inertia of Bodies without Integration* (Quart. Journ. 16, 1879).

5. La geometria cartesiana, specialmente se trattata mediante coordinate ortogonali, è, in certo modo, rispetto alla geometria analitica in generale, quello che la geometria elementare di Euclide è rispetto alla geometria pluridimensionale. Come dalle formole e dai calcoli della geometria cartesiana nacquero, lasciando indeterminato il numero delle variabili, le investigazioni di geometria ad *n* dimensioni indicate nei nn. prec., così dalla geometria di Euclide si assurse ad una geometria elementare degli spazi ad *n* dimensioni, ammettendo la possibilità di considerare delle varietà differenti dal nostro spazio, non per l'intima struttura, ma soltanto pel numero delle loro dimensioni, e quindi di studiare in essi delle figure analoghe a quelle che formano il primo campo delle ricerche del geometra.

Tale generalizzazione in molti casi non si può compiere agevolmente d'un tratto, ma può effettuarsi senza gravi difficoltà accrescendo successivamente di un'unità il numero delle dimensioni dello spazio su cui si opera. Donde la ragion d'essere di molti lavori concernenti la geometria dello spazio a quattro dimensioni, i quali, oltre all'importanza intrinseca che possiedono, devono venire ricordati per essere il primo passo verso risultati ben più generali. Fra essi citeremo quelli del Rudel che si riferiscono a *Sich kreuzende Ebene zweier Räume* (Blätter für das bairische Gymnasial und Realschulwesen, 13, 1877) ed a *Congruenz und Symmetrie* (Ivi), la *Berechnung einiger vierdehniger Winkel* (Arch. der Math., 67, 1881) dell'Hoppe, a cui serve di complemento la *Numerische Berechnung der Winkel von vier Dimensionen* (Id., 69, 1883) dello stesso autore; di questo vanno ancor ricordate le osservazioni *Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionengeometrie* (Id., 68, 1882), e le note intitolate: *Relation zwischen fünf Elementartetratopen mit vier unabhängigen Grössen*, *Tetratop auf beliebiger Basis*, e *Partielles Maximums eines Elementar-Tetratops* (Id. 69, 1883). Va ancora notata l'estensione allo spazio a quattro dimensioni della relazione scoperta da Descartes ed Eulero fra il numero degli spigoli, dei vertici e delle facce di un poliedro, a cui pervennero Durège (*Ueber Körper von vier Dimensionen*, Wiener Ber., 83, 1881), Hoppe (*Regelmässige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen*, Arch. der Math., 67, 1881) e Poincaré (*Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres*, C. R., 117, 1893), che poi la generalizzarono a spazi lineari qualunque. Ma fra tali ricerche le più interessanti sono quelle che guidarono alla determinazione del numero e della struttura delle figure dello spazio a quattro dimensioni che sono analoghe ai poliedri regolari dell'ordinaria geometria; essa è dovuta a W. J. Stringham (1847-1909), il quale anzi nel suo scritto sull'argomento (*Regular Figures in n-dimensional Space*, Am. Journ., 3, 1880) si spinse sino a considerare l'analoga questione in ispazi lineari a quantesivogliano dimensioni. Altrettanto fecero H. Scheffer (1820-1903) nell'opera *Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen* (Braunschweig, 1880), l'Hoppe, vuoi nella nota poco dianzi citata, vuoi in quella intitolata *Die regelmässigen linear begrenzten Figuren jeder Anzahl von Dimensionen* (Arch. der Math., 68, 1882), il Rudel negli scritti *Von den Körpern höherer Dimension* (Kaiserlautern, 1882) e *Ueber eine Gattung von Körpern höherer Dimension* (1887), V. Schlegel (1843-1905) nella sua lunga e pregevole *Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde* (Abh. der

Leopoldinischen Akademie, 44, 1883) (1), il Puchta nell' *Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper in Räumen von beliebigen Dimension* (Wiener Ber., 90, 1884; in continuazione all' *Analytische Bestimmung regelmässiger convexen Körper im Raume von vier Dimensionen* Id. 89, 1884), O. Biermann nell'articolo *Ueber die regelmässigen Körper höherer Dimension* (Id., 90, 1884), e M. Brückner nel lavoro che tratta *Die elemente der vierdimensionalen Geometrie mit besonderen Berücksichtung der Polytope* (Jahresberichte des Vereins für Naturkunde zu Zwickau, 1893). Soggetti analoghi hanno i seguenti scritti: Biermann, *Ueber die regelmässigen Punktgruppen in Räumen höherer Dimension und die zugehörigen linearen Substitutionen mehrer Variabeln* (Wiener Ber., 95, 1887); Hess, *Ueber die regulären Polytopen höherer Art* (Sitzungsber. der Ges. zur Bef. der gesamm. Naturwiss. zu Marburg, 1885); H. Schoute, *Sur trois divisions régulières de l' espace à* n *dimensions* (Ass. fr., 1894). Più modesti intendimenti hanno gli scritti di Forhhammer *Pröver paa geometrie med fire dimensioner* (Tidsskrift, IV, 5, 1881), dell' Hoppe *Innere Winkel aller regelmässigen linear begrenzten Figuren von vier Dimensionen* (Arch. der Math., 68, 1882) di T. P. Hall, *The Projection of Fourfold Figures upon a Threeflat* (Am. Journ., 15, 1893), e dello Schoute *Regelmässige Schnitte und Projectionen des Achtzelles und des Sechszehnzelles im vierdimensionalen Raume* (Amsterdam Versl., 2, 1894) e *Regelmässige Schnitte und Projectionen der Vierundzwanzigzelles im vierdimensionalen Raume* (Ivi); i quali ci porgono l'occasione di notare come le proiezioni sul nostro spazio dei primi quattro corpi regolari dello spazio a quattro dimensioni siano state costruite dallo Schlegel e formino oggi una delle più curiose fra le Serie di modelli della celebre Collezione della casa L. Brill. Lo stesso geometra si è poi occupato di illustrare con figure opportune anche la

(1) Cfr. anche le note dello stesso autore *Sur un méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à n dimensions* (Palermo Rend., 5, 1891), e *Ueber Projectionen der mehrdimensionalen régelmässigen Körper* (Deutsch. Math.-Ver., 2, 1891-92).

Dalle prime delle citate memorie dello Schlegel togliamo la descrizione dei sei solidi regolari dello spazio a quattro dimensioni:

I. Fünfzell = Pentaedroid, limitato da 5 tetraedri, con 10 facce, 10 spigoli e 5 vertici in ciascuno dei quali concorrono 4 corpi. II. Sechszehzell = Exadecadroide; limitato da 16 tetraedri con 32 facce, 24 spigoli e 8 vertici in ognuno dei quali concorrono 8 corpi. III. Sechshundestzell = Hekakosioedroid; limitato da 600 tetraedri con 1200 facce, 720 spigoli e 120 vertici in ciascuno dei quali concorrono 20 corpi. IV. Vierundzwanzigzell = Ikosatetraedroid; limitato da 24 ottaedri con 96 facce, 96 spigoli e 24 vertici in ciascuno dei quali concorrono 4 corpi. V. Achtzell = Oktaedroid, limitato da 8 esaedri con 24 facce, 32 spigoli e 16 vertici in ognuno dei quali concorrono 4 corpi. VI. Hundertzwanzigzell = Hekatonikosaedroid; limitato da 120 dodesaedri con 720 facce, e 1200 spigoli e 600 vertici in ciascuno dei quali concorrono 4 solidi. Si corrispondono per dualità I e IV, II e V, III e VI.

teoria delle figure magiche di 2,...., 5 dimensioni (v. Katalog, II, 6 e l'articolo *Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à* n *dimensiones*, Bull. S. M. F. 20, 1892 (1).

La teoria delle figure regolari ci ha fatto quasi involontariamente ritornare nel campo degli spazi a quantesivogliano dimensioni, in cui ora rimarremo per citare i seguenti lavori che hanno por iscopo di estendere concetti, proposizioni, o problemi di geometria elementare: Borchardt, *Ueber die Aufgabe des Maximum welche die Bestimmung des Tetraeders vom grössten Volume bei gegebenem Flächeninhalt der Seitenfläche für mehr als drei Dimensionen entspricht* (Berliner Abh., 1866); Rudel, *Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie* (Bamberg, 1877); Pilgrim, *Ueber die Anzahl der Theile in welche ein Gebiet* k^{ter} *Stufe (Grassmann) durch* n *Gebiete* $(k-1)^{ter}$ *Stufe getheilt werden kann* (Zeitschr. f. Math., 24, 1879); Hoppe, *Einfachste Sätze aus der Theorie der mehrfachen Ausdehnungen* (Arch. der Math., 64, 1879) *Ueber den Winkel von* n *Dimensionen* (Id., 66, 1881), *Drei Sätze für Inhaltsberechnung in der mehrdimensionalen Geometrie* (Id., 69, 1883); *Erweiterung zweier Sätze auf* n *Dimensionen* (Id., II, 6, 1887), *Erweiterung der Sätze über Tetraeder dessen Höhen sich in einem Punkte schneiden, auf mehr Dimensionen* (Id. 9, 1890), e *Ueber Congruenze und Symetrie der Gebilden von beliebig vielen Dimensionen* (Ivi); Study, *Ueber Distanzenrelationen* (Zeitschr. f. Math., 27, 1882); Schlegel, *Quelque théorèmes de géométrie à* n *dimensions* (Bull. S. M. F., 10, 1882), *Ueber die verschiedenen Formen von Gruppen, welche* r *beliebige Punkte im* n-*dimensionalen Raum bilden können* (Arch. der Math., II, 10, 1891), e *Ueber congruente Raumteilungen* (Ivi), e *On the Problem of the Minimum Sum of the Distances of a Point from Given Points* (Bull. of Am. Math. Soc., II, 1, 1894-95); Mehmke, *Ausdehnung einiger elementarer Sätze über das ebene Dreieck auf Räume von beliebig viele Dimensionen* (Arch. der Math., 70, 1883); R. Müller, *Ueber eine gewisse Gleichung* $2n^{ten}$ *Grades, deren Specialfälle* $n=2$ *und* $n=3$ *beim Normalenproblem der Ellipse und des Ellipsoides auftreten* (Diss. Berlin, 1884); P. Cassani (1832-1905) (2), *Geometria pura euclidea degli spazi superiori* (Atti Ist. Ven., VI, 1 e 2, 1885), *Geometria pura euclidiana ad* n *dimensioni* (Giorn. di Mat., 23, 1885), *Sugli angoli degli spazii lineari* (Lincei Rend., IV, 1, 1885), *Gli angoli degli spazii lineari* (Ivi), *Sulla geometria pura euclidiana ad* n *dimensioni* (Att. Ist. Ven. VII, 5, 1893-94), e *Sugli angoli degli spazi lineari in un ambiente a più dimensioni* (Ivi), G. Castelnuovo, *Angoli di due spazii contenuti nello*

(1) Cfr.: Harmuth, *Ueber polydimensionale Zahlenfiguren* (Arch. der Math., 69, 1882).

(2) G. Ricci, *Commemorazione del prof. Pietro Cassani.* (Atti Ist. Ven., 66, 1907).

spazio a n *dimensioni* (Atti Ist. Ven., VI, 3, 1885); E. Cesàro, *Alcune misure negli iperspazii* (Giorn. di Mat., 24, 1886; cfr. *Mathematical Papers by W. K. Clifford*, London, 1882, p. 605 e seg.); Rahusen, *Sur quelques propriétés des déterminants, appliquées à une question de géométrie à* n *dimensions* (Ann. de l'Éc. Pol. de Delft, 4, 1888), ove sono studiate le figure congruenti o simmetriche negli spazi lineari qualunque.

6. Alle considerazioni precedenti se ne possono riattaccare altre che hanno attinenza con le indagini il cui scopo è la spiegazione matematica dei fatti naturali.

La più antica a noi nota è l'osservazione che segue, fatta nel 1827 da Möbius (1): supposta l'esistenza di una quarta dimensione, scompare una differenza inesplicabile fra il piano e lo spazio ordinario, la quale consiste in ciò che, mentre nel piano due figure di un piano simmetriche rispetto ad una retta possono portarsi a coincidenza, altrettanto non può farsi per due figure solide simmetriche rispetto ad un piano; questa disparità di comportamento non esiste più ove si ammetta che lo spazio nostro possa ruotare attorno ad un suo piano invadendo uno spazio a quattro dimensioni, per poi ritornare alla posizione primitiva, come nello spazio ordinario si ammette la rotazione di un piano attorno ad una sua retta.

Similmente Klein fece notare (Math. Ann., 9, 1876, p. 478, ultimo capoverso) che, passando per lo spazio a quattro dimensioni, una curva intrecciata può trasformarsi in altra che non lo sia, osservazione questa che si trova svolta ed illustrata nelle note seguenti: Hoppe, *Gleichung der Curve eines Bandes mit unauflosbaren Knoten nebst Auflösung in vierter Dimension* (Arch. der Math., 64, 1879). *Bemerkung betreffend die Auflösung eines Knotes in 4^ter Dimension* (Id., 65, 1880), Durège, *Ueber die Hoppe'sche Knotencurve* (Wiener Ber., 1880), e Schlegel, *Ueber die Auflössung des Doppelpunckles einer ebenen Curve im dreidimensionalen Raume, und ein mit dieser Curve zusammenhängendes Problem der Mechanik* (Zeitschr. f. Math., 28, 1883).

Inoltre S. Newcomb, prendendo le mosse dall'osservazione fatta da Zöllner che una quarta dimensione renderebbe possibili certi movimenti che altrimenti riescono inconcepibili, ha mostrato, nella *Note on a Class of Transformations which Surfaces may undergo in Space of more tham Three Dimensions* (Am. Journ., 1, 1878), che, ove esistesse una quarta dimensione, si potrebbe trasformare una superficie materiale in modo che la faccia interna divenisse esterna e viceversa.

Finalmente il Veronese fece rilevare (nella sua Prolusione che tratta *Dei*

(1) V. la chiusa del § 140 dell'opera *Der barycentrische Calcul.*

principali metodi in geometria, Padova, 1882) la possibilità di estrarre un corpo da un ambiente chiuso, passando per lo spazio a quattro dimensioni.

Questi risultati incoraggiarono alcuni scienziati a spiegare certi altri fenomeni coll'ipotesi dell'esistenza di uno spazio a quattro dimensioni nel quale il nostro fosse contenuto. Ad es. il Clifford, ammettendo che questo fosse di curvatura variabile, potè spiegarne alcuni di luce e magnetismo, dei quali prima non si riusciva a rendersi ragione (1); in modo analogo F. Zöllner (1834-1882) si sforzò di giustificare la conservazione dell'energia (2); e più recentemente R. de Saussure, con analoghi intenti, compose una nuova *Théorie des phénomènes physiques et chimiques* (Archives des Sciences naturelles de Genève, 1891); della stessa indole è lo scritto di data meno recente del Bresch *Der Chemismus im Lichte mehrdimensionalen Raumanschauung* (Leipzig, 1882). Devo aggiungere anche l'indicazione dei rapporti che si vollero stabilire fra lo spiritismo e la teoria che ci occupa? (3).

7. Come la geometria cartesiana diede origine alla geometria metrica degli spazî lineari qualunque, così l'ordinaria geometria analitico-projettiva generò la geometria projettiva degli spazî a quantesivogliano dimensioni, la quale trovò il proprio fondamento analitico nella teoria delle forme algebriche con quantesivogliano variabili.

Il più antico lavoro a noi noto in quest'ordine d'idee è quello del Cayley intitolato *Analytical Researches connected with Steiner's Extension of Malfatti's Problem* (Phil. Trans., 162, 1852), il cui ultimo paragrafo contiene lo sviluppo dell'osservazione seguente: « several of the formulae of the preceding sections of this memoir apply to any number of variables ». Più espliciti furono lo Schlafli nel proporre una *Erweiterung des Satzes, dass zwei polare Dreiecke perspectivisch liegen, auf eine beliebige Zahl von Dimensionen* (Journ. f. Math., 65, 1866), il Beltrami nello scrivere l'esercitazione analitica *Su alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner* (Bologna Mem., III, 5, 1875), C. Segre nella nota *Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques* (Id., 24, 1884), G. Loria in quelle *Su una generalizzazione delle proprietà involutorie del quadrangolo e del quadrilatero completi* (Rend. Ist. Lomb., II, 18, 1885), *Sulle curve razionali normali in uno spazio a* n *dimensioni* (Giorn.

(1) Così asserì il Sylvester nel discorso tenuto nel 1869 all'Associazione Britannica pel progresso della scienza. V. anche: Clifford, *Il senso comune nelle scienze esatte* (Milano, 1886), p. 255 e seg.

(2) *Ueber die Natur der Kometen* (Leipzig, 1872), p. 305-312.

(3) Essi trovansi descritti al termine della memoria dello Schlegel *Ueber Entwickelung und Stand der n-dimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der vierdimensionalen* (Abh. der Leopoldinischen Akademie, 22, 1886).

di Mat., 26, 1888) e *Intorno alle curve razionali d'ordine* n *dello spazio a* n — 1 *dimensioni* (Palermo Rend., 2, 1888), e il Voss nel suo studio *Ueber Poncelet-Zeuthen'sche Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades eingeschrieben sind* (Math. Ann., 26, 1886).

Ma il lavoro più cospicuo in quest' indirizzo è la grande memoria del Nöther *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen* (Math. Ann., 2, 1870), destinata a servire di fondamento ad una teoria delle corrispondenze univoche fra due spazî lineari qualunque; ad essa fanno degno riscontro le *Recherches de géométrie à* n *dimensions* dall' Halphen (Bull. S. M. F., 2, 1873), ove è estesa a varietà qualunque la rappresentazione monoidale proposta da Cayley per le curve gobbe (v. Cap. III, n. 2), ed è dimostrato l' importante teorema: « se si considerano in uno spazio a d dimensioni due varietà, una d' ordine μ e dimensione m, l'altra d' ordine ν e dimensione n, la loro intersezione è una varietà d' ordine $\mu\nu$ e dimensione $m+n-d$, purchè sia $m+n \geqq d$ e le due varietà non abbiano comune una varietà d' ordine $\geqq m+n-d+1$ » (1).

Grazie ai temi che trattano citeremo qui le note di S. Kantor *Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à* n *dimensions* (Bull. S. M. F., 8, 1880), *Sopra le trasformazioni quadratiche periodiche nello spazio a* n *dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 27, 1894) e *Sopra le caratteristiche delle trasformazioni quadratiche dello spazio a* r *dimensioni* (Ivi), e l' articolo di J. Brill *On certain general Properties of Points Transformations* (Quart. Journ., 27, 1895), nel quale è estesa ad uno spazio lineare qualunque una proposizione nota per il piano; uno scopo analogo ha la nota del Berzolari, *Sulle corrispondenze algebriche* $[M_1, M_2, \ldots, M_r]$ *fra* r *punti di uno spazio lineare di quantesivogliano dimensioni* (Lincei Rend., V, 4, 1895₂).

8. Che però la geometria projettiva degli spazî superiori si possa trattare anche senza il sussidio costante di coordinate, osservò per il primo il Cayley, sino dal 1846, nella sua nota *Sur quelques théorèmes de la géométrie de position* (Journ. f. Math., 31), ove è messo in luce quanto conveniente sia considerare gli spazî a più dimensioni quando si vogliano determinare le proprietà di alcune configurazioni (2). Questa stessa idea geniale si ritrova, con tutti gli sviluppi che comporta, nella I sezione della fondamentale memoria di G. Veronese *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* (Math.

---

(1) V. anche: Nöther, *Zur Eliminationstheorie* (Math. Ann., 11, 1877).

(2) Si vegga tutto il brano del § 1 che segue il VII teorema.

Ann., 19, 1882) (1), dalla quale veramente si può far datare l'erezione a dottrina individuale della geometria projettiva sintetica degli iperspazî (2). Di tale memoria la II sezione concerne le corrispondenze projettive (collineari e reciproche) fra due iperspazî; la III le quàdriche a quantesivogliano dimensioni (3), la IV insegna ad estendere a spazî lineari qualunque le relazioni fra le caratteristiche di una curva che pel piano scoprì Plücker (v. pag. 40) e per lo spazio Cayley (v. pag. 113; v. anche la nota preliminare intitolata *Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Raume von* n *Dimension stattfinden*, Math. Ann., 18, 1881); ivi inoltre l'autore svolse ricerche i cui germi furono del Clifford consegnati nell'importante lavoro *On the Classification of Loci* (Phil. Trans., 168, 1878), nel quale le considerazioni sintetiche e le applicazioni delle funzioni trascendenti si alternano per rivelare la generalizzabilità di molti teoremi noti per le curve dello spazio nostro (4). L'ultima sezione del lavoro del Veronese insegna la generazione di curve, superficie, ecc., mediante sistemi projettivi, e la illustra sopra molti esempî.

Come complementi di questa memoria sono da riguardarsi la nota dello stesso matematico *Sopra la geometria descrittiva a quattro dimensioni* (Atti Ist. Ven., V, 8, 1882), ove il noto metodo della projezione centrale viene esteso agli spazî lineari di quattro dimensioni (altrettanto si potrebbe evidentemente fare per spazî superiori), e quella che tratta *Di una costruzione della superficie del 4° ordine dotata di una conica doppia* (Att. Ist. Ven., VI, 2, 1884) ove tale superficie è considerata per proiezione della intersezione di due quà-

---

(1) Cfr. anche l'articolo del medesimo autore *Alcuni teoremi sulla geometria a* n *dimensioni* (Lincei Trans., III, 5, 1880-81).

(2) Dalla or citata sezione della memoria del Veronese deriva la *Dimostrazione della formola:*

$$\binom{p}{r-1} + \binom{q-1}{1}\binom{p}{r} + \binom{q-1}{2}\binom{p}{r+1} + \binom{q-1}{3}\binom{p}{r+2} + \dots = \binom{p+q-1}{q+r-2}$$

mediante la geometria a n *dimensioni* esposta dallo stesso geometra in Atti Ist. Ven., VI, 2, 1883-84.

(3) Nella determinazione degli spazi lineari contenuti in una di esse, il Veronese trovò valido aiuto nella nota del Cayley: *On the Superlines of a Quadric Surface in Five-dimensional Space* (Quart. Journ., 12, 1873).

(4) Notiamo in particolare, nel capitolo sulle curve razionali d'ordine *n* dello spazio a *n* dimensioni, l'estensione della proprietà di ogni conica di dar luogo ad un sistema polare e di ogni cubica di dar luogo ad un sistema nullo; la notiamo per osservare che essa fu ritrovata assai dopo da P. Cassani, che la fece conoscere nella nota *Un teorema generale sulle linee normali degli spazi dispari* (Lincei Rend., IV, 2, 1886,); cfr. anche A. Brambilla, *Intorno alle curve razionali in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 19, 1886).

Un giudizio sulla memoria di Clifford meno favorevole dell'ordinario leggesi nella nota a pag. 547 del già citato (v. pag. 47) *Bericht* di Brill e Nöther.

driche dello spazio a quattro dimensioni (1), nonchè il lungo e assai notevole lavoro intitolato *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del 4° ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario* (Lincei Mem., III, 19, 1884) (2).

9. Numerose ed importanti sono le investigazioni che derivano dagli scritti or citati dal Veronese e che ne completano (in qualche caso ne correggono) i risultati.

Così un complemento alle generalità è offerto dalla nota del Bertini *Sulla geometria degli spazii lineari in uno spazio ad* n *dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 19, 1886), e da *Alcune considerazioni elementari sull' incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni* (Palermo Rend., 2, 1888) di C. Segre; dalla nota di questo geometra *Sur un théorème de la géométrie à* n *dimensions* (Math. Ann., 30, 1887), dalla *Determinazione del numero degli spazii che segano più rette in uno spazio a* n *dimensioni* (Lincei Rend., IV, 5, 1889,) fatta dal Castelnuovo, e dalle osservazioni che menzionammo nella chiusa del n. 3 del Cap. VII (pag. 214).

Quali continuazioni della II sezione sono del pari da ritenersi i seguenti notevoli lavori: C. Segre, *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Lincei Mem., III, 19, 1884; cfr. *Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche*, Giorn. di Mat., 22, 1884), *Sugli spazii fondamentali di un' omografia* (Lincei Rend., IV, II, 1886,) e *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta* (Torino Mem., II, 37, 1885); Aschieri, *Sulla trasformazione omografica generale di uno spazio lineare di specie qualunque* (Rend. Ist. Lomb., II, 18, 1885) e *Delle corrispondenze lineari reciproche in uno spazio lineare di specie qualunque* (Id., 19, 1886); Bertini, *Le omografie involutorie in uno spazio lineare a qualsivoglia numero di dimensioni* (Ivi), *Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque* (Id., 20, 1887), e *Sulla scomposizione di certe omografie in omologie* (Torino Atti, 22, 1887); Bordiga, *Corrispondenza di polarità negli spazii superiori* (Atti Ist. Ven., VI, 3, 1886); P. Predella, *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni* (Ann. di

(1) È il medesimo punto di partenza scelto dal Segre nella sua memoria in Math. Ann., 24, che citammo a pag. 94 e che qui ci corre l'obbligo di ricordare come appartenente pel metodo, se non pei risultati, al ramo di geometria che or ci occupa.

(2) La figura ivi studiata s'incontra in moltissime ricerche, e si suole da molti con ragione chiamare «superficie di Veronese».

Mat., II, 17, 1889), e *Sulla teoria generale delle omografie* (Torino Atti, 27, 1891-92); Castelnuovo, *Su certi gruppi associati di punti* (Palermo Rend., 3, 1889); F. Enriques, *Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazii lineari ad* n *dimensioni* (Lincei Rend., IV, 6, 1890$_2$), *Le omografie cicliche negli spazii ad* n *dimensioni* (Giorn. di Mat., 30, 1892) e *Le omografie armoniche negli spazii lineari ad* n *dimensioni* (Ivi); E. Waelsch, *Ueber binäre Formen und die Correlationen mehrdimensionalen Räume* (Monatshefte, 6, 1895).

Alla III sezione della memoria del Veronese si collegano strettamente lo *Studio* del Segre *sulle quàdriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Torino Mem., II, 36, 1884 (1); le *Ricerche* dello stesso *sui fasci di coni quàdrici in uno spazio lineare qualunque* (Torino Atti, 19, 1884), quelle del Bertini *Sui fasci di quàdriche in uno spazio ad* n *dimensioni* (Lincei Rend., IV, 2, 1886$_2$) e *Sugli spazi lineari delle quàdriche a un numero pari di dimensioni* (Torino Atti, 30, 1895); finalmente quelle di P. del Pezzo *Sulle quàdriche ad* (n — 1) *dimensioni polari reciproche di se stesse rispetto ad un' altra* (Napoli Rend., 24, 1885) e sopra *Alcuni sistemi omaloidici di quàdriche nello spazio di quattro dimensioni* (Id., III, 1, 1895).

Anche la nota del Segre *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (Torino Atti, 19, 1884) — ove le rigate di genere zero vengono classificate e rappresentate in modo analogo a quello che Armenante e Clebsch (v. pag. 215) avevano insegnato per lo spazio ordinario — è un importantissimo complemento delle prime ricerche di Veronese (2). Le indagini ivi condotte a buon termine furono poi generalizzate dall'autore in due direzioni differenti; in primo luogo, come analoghe delle rigate (serie semplicemente infinite di rette) è lecito riguardare le serie semplicemente infinite di spazî lineari, e in secondo luogo si possono considerare le rigate di genere superiore a 0; alla prima generalizzazione si riferisce la nota *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* (Torino Atti, 21, 1886) e *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazii* (Lincei Rend., IV, 3, 1887$_2$); alla seconda le *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* (Torino Atti, 21, 1886) e le *Recherches*

(1) Ivi in particolare sono determinati esattamente tutti gli spazî lineari di una quadrica di quantesivogliano dimensioni. Si noti che anche il Segre, come il Veronese, fece ampio uso della proiezione stereografica che il Klein aveva dianzi generalizzato nella sua memoria (da noi citata a p. 305) dei Math. Ann., 5.

(2) Cfr. anche Bordiga, *Rappresentazione piana della superficie rigata normale* (Atti Ist. Ven., VI, 4, 1886).

générales sur les courbes et les surfaces reglées algébriques (Math. Ann., 30, 1887, e 34, 1889) (1).

Anche la teoria delle curve degli spazî superiori (2) venne coltivata dopo Veronese; lo provano gli scritti seguenti: Fine, *A Theorem respecti g the Singularities of Curves of multiple Curvature* (Am. Journ. 1887); Segre, *Sulle curve normali di genere* p *dei varii spazii* (Rend. Ist. Lomb., II, 12, 1888); Castelnuovo, *Geometria sulle curve ellittiche* (Torino Atti, 24, 1888), *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere* (Lincei Rend., IV, 5, 1890_1), *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Torino Atti, 24, 1889), *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche* (Palermo Rend., 3, 1889), *Osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Lincei Rend., IV, 7, 1891_2) e *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Palermo Rend., 7, 1893); Bertini, *Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica* (Torino Atti, 26, 1890); G. Fano, *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque* (Torino Mem., II, 44, 1893).

10. I lavori di quest' ultima categoria, assieme ad altri del Segre, del Bertini, del Castelnuovo e dell' Enriques che nominammo altrove, sono ingredienti essenziali di una nuova diramazione della geometria, costituita dalle ricerche intorno alla geometria di una serie semplicemente infinita di punti di uno spazio lineare qualunque, e comprendente in particolare la teoria delle serie lineari ivi contenute, delle involuzioni, delle corrispondenze fra gli elementi di un tale ente, ecc. Essi sono compendiati nelle memorie del Bertini e del Segre che citammo a pag. 47-8, e preparano una « geometria sull' ente algebrico a quantesivogliano dimensioni », nella quale non si tiene alcun conto del numero delle dimensioni dello spazio ambiente e si dà importanza, meno alle proprietà projettive, che a quelle le quali sono invarianti di fronte a trasformazioni birazionali (3).

Qui intanto ci corre l' obbligo di avvertire che nella letteratura matema-

(1) V. le note preliminari: *Nuovi risultati sulle rigate algebriche di genere qualunque* (Torino, Atti, 22, 1887) e *Intorno alla geometria su una rigata algebrica* (Lincei Rend., IV, 3, 1887_2).

(2) Fra le applicazioni di tale teoria va notato lo studio *Intorno ai punti singolari delle curve algebriche* del del Pezzo (Napoli Rend., II, 6, 1893), ove tali punti sono ottenuti mediante opportune proiezioni.

(3) Se a questo generalissimo ramo di scienza non abbiano dedicato uno speciale Capitolo — nel quale avrebbe dovuto trovar posto molto di quanto esponemmo nei Cap. II, III e IV — fu per meglio uniformarci all' uso generalmente adottato nell' epoca di cui ora ci occupiamo.

tica odierna non mancano le ricerche sulle varietà non lineari e di dimensione maggiore di uno degli spazi superiori. Basti infatti ricordare, oltre i frammenti *Sullo spazio di quattro dimensioni* e *Sulla teoria degli spazii a più dimensioni* inserite fra le *Memorie di geometria di Ettore Caporali*, gli scritti di P. del Pezzo, *Sulle superficie d'ordine* n *immerse nello spazio di* n + 1 *dimensioni* (Napoli Rend., 24, 1885), *Sugli spazii tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni* (Id., 25, 1886), *Sulle proiezioni di una superficie e di una varietà dello spazio ad* n *dimensioni* (Ivi), *Intorno ad una proprietà fondamentale delle superficie e delle varietà immerse negli spazii a più dimensioni* (Id., II, 1, 1887) e *Sulle superficie del* n^{mo} *ordine immerse nello spazio di* n *dimensioni* (Palermo Rend., 1, 1884-87); poi quelli di E. H. Moore, *Extensions of certain Theorems of Clifford and of Cayley on the Geometry of* n *Dimensions* (Trans. of the Connecticut Academy, 7, 1885) e *Algebraic Surfaces of which every Plane Section is Unicursal in the Light of* n- *Dimensional Geometry* (Am. Journ., 10, 1887); C. Rodenberg, *Ableitung der Polareigenschaften algebraischer Mannigfaltigkeiten auf darstellend-geometrischem Wege* (Math. Ann., 26, 1885); A. Brambilla, *Un teorema nella teoria delle polari* (Torino Atti, 22, 1887); Ascione, *Sulla Hessiana di una varietà dello spazio a quattro dimensioni* (Giorn. di Mat., 31, 1893); Segre, *Sulla forma Hessiana* (Lincei Rend., V, 4, 1895_2) e *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* (Torino Atti, 31, 1896).

Avvertasi ancora che i metodi del Veronese furono applicati dal Bordiga nei seguenti lavori (ed in altri che si trovano da noi citati altrove): *Studio generale della quartica normale* (Atti Ist. Ven., VI, 4, 1886); *Di alcune superficie del 5° e del 6° ordine che si deducono dallo spazio a sei dimensioni* (Ivi); *La surface du 6e ordre avec six droites* (C. R., 102, 1886); *Nouveaux groupes de surfaces à deux dimensions dans les espaces à* n *dimensions* (Ivi); *La superficie del 6° ordine con 10 rette nello spazio* R_4 *e le sue projezioni nello spazio ordinario* (Lincei Mem., IV, 3, 1887) e *Di una certa superficie del 3° ordine* (Atti Ist. Ven., VI, 5, 1888).

Una speciale ed importante categoria di varietà venne considerata contemporaneamente dal Segre e dal Castelnuovo; i risultati ottenuti a tal proposito dal primo si leggono nella nota *Sulla varietà cubica con dieci punti doppii dello spazio a quattro dimensioni* (Torino Atti, 22, 1887) e nella più estesa memoria *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario* (Torino Mem., II, 39, 1888); quelli a cui pervenne il secondo nei due scritti: *Su una congruenza del 3° ordine e 6a classe dello spazio a quattro dimensioni e sulle* *sue proiezioni nello spazio ordinario* (Atti Ist. Ven., VI, 5, 1888) e *Sulle congruenze del 3º ordine dello spazio a quattro dimensioni* (Id., 6, 1889). A questi collegansi i lavori di G. Bordiga *Di una certa congruenza del terzo ordine e della sesta classe dello spazio ordinario* (Lincei Rend., IV, 6, 1890,) e *Congruenza del 4º ordine della 2ª classe nello spazio a quattro dimensioni* (Atti Ist. Ven., VII, 5, 1894).

Ancora: il Segre nella nota intitolata *Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazii superiori* (Palermo Rend., 2, 1888) considerò i stistemi di ∞^{n-1} rette dello spazio a *n* dimensioni, trovandone le proprietà analoghe alle proprietà focali delle congruenze dello spazio ordinario, mentre il Castelnuovo colle sue *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* (Atti Ist. Ven., VII, 2, 1891) gettava le basi della geometria analitica della varietà composta dalle rette di uno spazio a quattro dimensioni; un tema congenere ha la memoria del Bordiga *Dei complessi in generale nello spazio a quattro dimensioni ed in particolare di alcuni di primo ordine. Loro proiezione e rappresentazione nello spazio ordinario* (Id., VI, 6, 1888), di cui alcune proposizioni abbisognano di correzioni; a questi lavori si può avvicinare lo *Studio su alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni* (Ann. di Mat., II, 21, 1893) di G. Fano.

Anche altre ricerche della ordinaria geometria furono estese a spazî lineari qualunque. Così, per iscopi analitici, il Bianchi (1), in un lavoro *Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung* (Math. Ann., 17, 1880; cfr. W. Fr. Meyer, *Ueber die elliptische Curve fünfter Ordnung des Raumes von vier Dimensionen*, Id., 26, 1886) e più generalmente il Klein nella memoria *Ueber die elliptischen Normalcurven der* N^{ter} *Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der* N^{ten} *Ordnung*, (Leipziger Abh., 1885), si occuparono delle curve ellittiche, mentre W. Wirtinger, lavorando in analoga direzione, arrivò a scrivere un notevole lavoro *Ueber eine Verallgemeinerung der Theorie der Kummer'schen Fläche und ihrer Beziehungen zu den Thetafunctionen zweier Variabeln* (Monatshefte, 1, 1890).

Una applicazione analitica della geometria a più dimensioni è svolta nelle note di G. Fano *Sopra alcune considerazioni geometriche che si collegano alla teoria delle equazioni differenziali lineari* (Lincei Rend., V, 4, 1895,), *Sopra certe curve razionali di uno spazio qualunque e sopra certe equazioni differenziali lineari, che con queste curve si possono rappresentare* (Ivi), *Sulle equazioni differenziali lineari del 4º ordine che definiscono curve*

(1) V. la memoria di G. Fubini e A. M. Bedarida, *Luigi Bianchi e la sua opera scientifica* (Ann. di mat. (4) VI, 1929) uscita durante la stampa del presente volume.

contenute in superficie algebriche (Ivi) e *Sulle equazioni differenziali lineari d' ordine qualunque, che definiscono curve contenute in superficie algebriche* (Ivi).

Si sono pure cominciate a trattare le questioni di forma analoghe a quelle di cui ci occupammo nel Cap. VI: gli scritti di F. Klein *Ueber Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abel'schen Functionen* (Götting. Nachr., 1892) e *Ueber Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalcurve der* φ (Math. Ann., 42, 1892) rappresentano forse un primo passo verso un fecondo campo d' indagini; un altro la nota di V. Eberhard *Ein Satz aus der Topologie* (Math., Ann. 36, 1890), ove i risultati esposti da Steiner nella nota *Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes* (Journ. f. Math., 1, 1826) e da S. Roberts in quella *On the Figures formed by the Intercepts of a System of Straight lines in a Plane and on Analogous in Space of Three Dimensions* (Proc. L. M. S., 19, 1888) ricevettero un' ampia e importante generalizzazione.

La rappresentazione delle forme binarie sulle curve razionali fu già estesa alle curve degli spazî superiori, come si apprende dagli scritti di E. Waelsch *Ueber eine geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen* (Wiener Ber., 100, 1891) e *Zur Construction der Polargruppen* (Ivi), e di L. Berzolari *Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Ann. di Mat., II, 21 1893). Delle ricerche di geometria numerativa negli spazî superiori abbiamo già parlato nel n. 11 del Cap. IX; qui aggiungiamo come alcuni risultati dello Schubert siano stati confermati da O. Landsberg nelle sue *Untersuchungen über die Gruppen einer linearen fünffachen Mannigfaltigkeit* (Diss. Breslau, 1889).

Inoltre la geometria metrico-projettiva degli spazî superiori venne ampiamente trattata da E. d' Ovidio nella memoria intitolata *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quantesivogliano dimensioni e di curvatura costante* (Lincei Mem., III, 1, 1876; cfr. anche Math. Ann., 12, 1877), ove è abilmente sfruttato il metodo di Clebsch (v. la memoria *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie*, Götting. Abh., 17, 1872) per determinare mediante coordinate gli spazî lineari subordinati ad uno spazio lineare qualsivoglia (1). Più tardi G. Fontené, in un opuscolo su *L'hyperspace à* (n — 1) *dimensions* (Paris, 1892), ha generalizzato il punto di partenza, epperò i risultati del d'Ovidio: mentre questi suppose che nello spazio a *n* dimensioni considerato una medesima quàdrica sia l'assoluto cayleyano de' punti

(1) Ad una speciale questione di geometria metrico-projettiva è consacrata la già citata nota di G. Loria, *Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque* (Giorn. di Mat., 26, 1888).

e l'assoluto degli spazi a $n-1$ dimensioni, l'or citato geometra francese suppose che questi due assoluti siano, il primo il luogo dei punti che in una correlazione generale stanno sugli spazî corrispondenti, il secondo l'inviluppo di questi spazî.

Da ultimo la ricerca di un sistema di postulati indipendenti che serva caratterizzare pienamente uno spazio lineare qualunque, sì che se ne possa dedurre la rappresentazione dei punti di questa col mezzo di coordinate, venne consigliata come importante dal Segre (Riv. di Mat., 1, 1891, p. 60-61), e compiuta contemporaneamente dall'Amodeo, nella nota intitolata *Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria projettiva di un* S_r (Torino Atti, 26, 1891; cfr. anche l'articolo *Sulla linearità delle varietà ad un numero qualunque di dimensioni*, Riv. di Mat., 2, 1892), e da G. Fano, nel lavoro *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni* (Giorn. di Mat., 30 1892); più tardi essa venne ripresa dal Pieri, il quale dedicò ad essa la nota sopra *Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazii* (Riv. di Mat., 6, 1896).

Argomenti affini trattano le note dello Zindler, *Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in unserem Raume*; *lineare Complexe und Strahlensysteme in denselben* (Wiener Ber., 101, 1892) e *Synthetische Gewinnung geometrische linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension* (Journ. f. Math., 111. 1893), e gli *Appunti di geometria ad* n *dimensioni* di P. del Pezzo (Giorn. di Mat., 31 1893). Del resto un'esposizione metodica degli elementi della geometria ad n dimensioni è uno dei principali intenti dei già citati *Fondamenti di geometria* del Veronese.

11. I procedimenti seguiti nei lavori ora ricordati per giungere agli spazii comunque estesi sono o essenzialmente analitici, oppure hanno come fondamento l'ipotesi che, al di fuori dell'ordinario nostro spazio a tre dimensioni, esistano altri punti. Ma, già da tempo, Plücker ha osservato come l'ordinaria geometria guidi naturalmente a concepire varietà a quantesivogliano dimensioni. Basta, infatti, scegliere come elemento del nostro spazio una figura, per definire la quale occorra un numero di coordinate superiore a tre, perchè lo spazio medesimo ci appaia come una varietà avente più di tre dimensioni; così, ne avrà tre se si prende il punto o il piano, quattro se si sceglie la retta o la sfera, sei se si preferisce il cerchio, otto o nove se si assume per elemento la conica o la quàdrica, e così via. Questo concetto è meno astratto dei precedenti, epperò meno di essi presta il fianco alla critica. Ad esso deve la vita la geometria della sfera che, specialmente per opera del Lie, già si è costituita a dottrina autonoma; esso diede origine anche alla geometria dello spazio di cerchi, di cui sono buoni elementi i lavori seguenti: Koenigs, *Contribution à la théorie du cercle dans l'espace* (Toulouse Ann., 2, 1888); Cosserat, *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace cerclé* (C. R., 106, 1888), *Sur l'emploi du complexe linéaire de droites dans l'étude des système linéaires de cercles* (Ib.) e *Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace* (Toulouse Ann., 3, 1889), ed è da presumersi conduca presto o tardi alla geometria dello spazio di coniche, della quale il fondamento analitico si trova nelle note di W. Spottiswoode, *On the Eighteen Coordinates of a Conic in Space* (Brit. Ass., 1880) e *On the Twenty-one Coordinates of a Conic in Space* (Proc. L. M. S., 10, 1889), della quale sono ottimi preliminari le note del Montesano *Sopra un sistema lineare di coniche nello spazio* (Torino Atti, 27, 1892) e *Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio* Napoli Rend., III, 1, 1895), e quella del Pieri *Sopra alcune congruenze di coniche* (Id., 28, 1893).

Lo stesso concetto si trova applicato nella già citata memoria di Cayley *On Curves which Satisfy given Conditions* ed in altra del Salmon pure nota ai nostri lettori; esso si ritrova, esposto ancora più esplicitamente dallo Spottiswoode, nelle note *Sur la représentation des figures de géométrie à n dimensions par les figures corrélatives de géométrie ordinaire* (C. R., 71 1875) e *Nouveaux exemples de la representation, par des figures de géométrie, des conceptions analytiques de géométrie à n dimensions* (Ivi); l'or menzionato geometra non solo ritrovò il metodo di Clebsch (cfr. pag. 281) per rappresentare mediante coordinate gli spazii lineari contenuti in un dato spazio (v. la *Note sur la représentation algébrique des lignes droites dans l'espace*, C. R. 76, 1873), ma scrisse un lavoro *On the 48 Coordinates of a Cubic Curve in Space* (Proc. R. S., 31, 1881), di cui dovrà tener conto il futuro fondatore della geometria dello spazio delle cubiche gobbe. Nè si può tacere come parecchi dei lavori del Reye sui sistemi di superficie (1) sembrino scritti per illustrare con esempi svariati e convincenti le idee di Plücker. D' altronde, non si può forse dire che questi abbia avuto un precursore in Lagrange, quando si ricorda avere questo grande geometra asserito (2) che « on peut regarder la mécanique comme une géométrie à quatre dimensions, et l' analyse mécanique comme une extension de l' analyse géométrique » ?

---

(1) V. specialmente la nota *Ueber lineare Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen* (Journ. f. Math., 82, 1877), nonchè quelle posteriori *Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenbüschel und collinearer Bündel oder Räume* (Id. 104, 106 e 108, 1889-91).

(2) *Théorie des fonctions analytiques* (Paris, Parairial an V, p. 223).

CAPITOLO XII.

Raccogliendo i dispersi.

1. Se il lettore già provetto volge lo sguardo a quanto finora esponemmo dovrà riconoscere che molte ed importanti categorie d'investigazioni matematiche non si trovarono sul nostro cammino, perchè non seppero trovar posto in alcuno dei gruppi nei quali furono distribuiti i lavori di cui abbiamo discorso.

Un punto su cui non potemmo arrestarci fu a descrivere i progressi compiuti dai metodi di geometria analitica. Riparando alla involontaria omissione osserviamo che un notevole perfezionamento ai procedimenti cartesiani fu arrecata da D. Chelini, introducendo sistematicamente e abilmente sfruttando i concetti di projezione ortogonale e di risultante di più segmenti. Sfortuna volle che gli scritti relativi (*Saggio di geometria analitica, trattata con nuovo metodo*, Roma 1838; *Sull'uso sistematico de' principii relativi al metodo delle coordinate rettilinee*, Raccolta scientifica, Roma 1849) abbiano avuta scarsissima diffusione; in conseguenza questa innovazione parve assoluta novità quando la si apprese dall'*Analytische Geometrie* Leipzig 1882) di R. Baltzer, al quale certamente sfuggirono i lavori del nostro egregio connazionale. Più radicali furono i mutamenti arrecati alla geometria analitica dal Plücker, in pubblicazioni già dianzi citate (p. 30), e quelli che risultarono dalla introduzione delle coordinate projettive. Queste furono ottenute da Chasles, assoggettando ad una trasformazione omografica le ordinarie cartesiane (v. il *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science* a cui serve d'introduzione l'*Arperçu historique*), direttamente da Staudt (v. il § 29 dei *Beiträge zur Geometrie der Lage*) e più completamente dal Fiedler (*Ueber die projectivischen Coordinaten*, Wolf Zeitschr., 15, 187, oppure l'opera *Die darstellende Geometrie*), il quale inoltre mise in chiara luce come la maggior parte dei sistemi di coordinate noti ed altri analoghi siano casi specialissimi di quello projettivo.

Egual sorte toccò alle indagini moderne sulla trigonometria sferica (E. Study, *Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen;* (Leipziger Abh., 20, 1893) e al metodo della projezione centrale, che, suggerito incidentalmente dal Cousirney (*Géometrie perspective*, Paris, 1828), fu svolto magistralmente dal Fielder, il quale ne fece la base di tutta la geometria descrittiva e dimostrò essêre desso il germe di pressocchè tutti gli altri noti sistemi di rappresentazione (1).

(1) Per maggiori particolari v. G. Loria, *Storia della geometria descrittiva* (Milano, 1921).

Nè trattammo del metodo della notazione simbolica, vuoi perchè esso è piuttosto un ausiliare pel geometra, che un oggetto delle sue indagini, vuoi perchè la storia di tale metodo è compresa in quella teoria delle forme, che venne altrove narrata da mano maestra (W. Fr. Meyer, *Bericht über den gegenwärtigen Stand der projectiven Invariantentheorie* Deutsch. Math.-Ver., 1, 1890-91).

Passai sotto silenzio la dottrina degli invarianti differenziali, così profondamente studiata dall' Halphen (*Sur les invariants différentiels* Thèse, Paris, 1878; *Sur les invariants différentiels des courbes gauches*, Journ. Éc. pol., 47ᵉ cah., 1880; *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* Acta, 3, 1883, ecc.), dal Lie (*Ueber Differentialinvarianten* Math. Ann., 24, 1884) e dal Sylvester (*Lectures on the Theory of Reciprocants* Am. Journ., 8, 1886), quantunque essa si presti a molteplici applicazioni geometriche, perchè essa oscilla fra la geometria e la teoria delle equazioni differenziali, ma inclinando verso quest' ultima.

2. Invano chiesero un posto nella presente rassegna le interessanti ricerche di « geometria cinematica » (1) con cui il Mannheim si sforzò di tener desto nella patria di Chasles lo spirito di ricerca geometrica pura; ma qui devesi segnalare una nuova volta la grande opera riassuntiva intitotata *Principes et développement de géométrie cinématique* (Paris, 1894), dalla quale si apprende quanto contribuì il citato geometra francese allo sviluppo di una interessantissima diramazione della geometria, che fu studiata da Roberval, da Huygens e de la Hire, ed ebbe, in tempi più recenti a cultori, oltre Chasles (*Note sur les propriétés générales de deux corps semblables, placés d'une manière quelconque dans l'espace, et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre,* Bull. de Férussac, 14, 1830, e Corr. math., 7, 1832; *Construction graphique des tangentes et des rayons de courbure des courbes géométriques*, Bull. de Férussac, 13, 1830; *Propriétés géométriques du mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace*, C. R., 16, 1843; *Propriétés relatives au déplacement fini dans l'espace d'une figure de forme invariable*, Id., 51 e 52, 1861; cfr. i già citati *Mélanges de géométrie pure* del de Jonquières), l' Aronhold (*Kinematische Mittheilungen. Grundzüge der kinematischen Geometrie*, (Verh. des Vereins zur Beförd. des Gewerb. in Preussen, Berlin, 1872), lo Schönemann (1812-1868) (*Ueber die Construction von Normalen und Normalebenen gewisser krummer Flächen und Linien*, Journ. f. Math., 90, 1880; cfr. Geiser, *Ueber einen fundamentalen Satz aus der kine-*

(1) È questo un nome proposto nel 1859 dal Terquem e poi generalmente adottato.

matischen Geometrie des Raumes, Ivi) ed A. Schoenflies (*Zur Theorie der Bewegung starrer Systeme*, Journ. f. Math., 98, 1885, e *Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung*, Leipzig, 1886) (1) — Come questi furono considerati di pertinenza della meccanica, epperò ci sfuggirono fino ad ora, gli studi del Reye sui momenti d' inerzia (*Trägheit sund höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen*, Journ. f. Math., 72, 1870) benchè essi pure siano stati fecondi di notevoli verità geometriche (v. pagg. 88 e 92).

Fra le applicazioni della geometria incliniamo ad ascrivere eziandio le ricerche intorno alle probabilità geometriche, compendiate dallo Czuber nell' opuscolo intitolato appunto *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte* (Leipzig, 1884).

3. Sotto silenzio passarono anche le memorabili indagini del Lindemann (*Ueber die Zahl* π, Math. Ann., 20, 1882) (2), le quali condussero a concludere che il rapporto della circonferenza al diametro non può essere radice di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali, epperò menarono a spiegare il famoso enigma che presentava la quadratura del circolo, a sciogliere il quale centinaia di generazioni di geometri avevano sciupato tempo e fatica (3); risultato questo che c' induce a ricordare la costruibilità con riga e compasso, dimostrata da Gauss, di tutti i poligoni regolari il cui numero di lati è primo e della forma $2^{2^n}+1$ (*Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig, 1801; cfr. Richelot, *De resolutione algebraica aequationis* $X^{257}=1$, *sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata*, Journ. f. Math., 9, 1832; Staudt, *Construction des regulären Siebenzehnecks*, Id., 24, 1842; Schröter, *Zur v. Staudt'schen Construc-*

(1) Non si può dimenticare che l' utilità di considerazioni cinematiche in ricerche geometriche emerge anche dall' *Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral* (Paris, 1861-63) del Lamarle, dalla grande opera del Darboux sulla geometria differenziale (cfr. anche la Diss. di X. Antomari, *Application de la méthode cinématique à l'étude de surfaces réglées; mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions*, Paris, 1894), nonchè dall'opera del Peano sopra le *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino, 1887).

(2) Delle semplificazioni che ricevettero le argomentazioni del Lindemann da parte di altri illustri geometri non è qui il caso di fare una completa enumerazione, tanto più che esse sono riassunte nelle *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare* tenute a Gottinga da F. Klein, (tradotte in italiano da F. Giudice, Torino, 1896) e in altre opere più recenti.

(3) Già nel secolo scorso Lambert (Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1761) aveva dimostrata la irrazionalità di π e Legendre chiuse la dimostrazione di quella di π^2 con queste fatidiche parole: « Il est probable que le nombre π n' est pas même compris dans les irrationnelles algébriques, c'est à-dire, qu'il ne peut pas être la racine d'une équation algébrique d'un nombre fini de termes dont les coëfficients sont rationnels; mais il parait très difficile de démontrer rigoureusement cette proposition; nous pouvons seulement faire voir que le carré de π est encore un nombre irrationnel » (*Élém. de Géom.*, nota IV).

tion des regulären Siebzehnecks, Id., 75, 1873; Affolter, *Zur Staudt-Schröter'schen Construction des regulären Vielecks*, Math. Ann., 6, 1873; Hermes *Ueber die Theilung des Kreises in* 65537 *gleiche Theile*, Götting. Nachr., 1894)

Non abbiamo parlato della geometria del triangolo — in cui s' illustrò H. Brocard — (1937-1846) e delle teorie derivate perchè quella e queste appartengono ad un gruppo d' indagini che, almeno nella loro prima fase di sviluppo, occuparono un posto più umile di quelli in cui si trovano i rami da noi discorsi (1). Se lo stesso facemmo per la logica matematica — cioè per quella disciplina intravveduta da Leibniz, coltivata con tanto successo dal Boole e che trovò in Italia un apostolo fervente nel Peano — gli è che, se si prescinde dal saggio di questo *I principii di geometria logicamente esposti* (Torino 1889), le applicazioni di essa alla geometria appartengono ad un' epoca posteriore a quella di cui stiamo ragionando.

4. Altrettanto non può ripetersi per il « metodo delle equipollenze » di Bellavitis (2) e per il metodo dei quaternioni » di Hamilton (3); però, malgrado gli sviluppi che ricevettero (4), non si può ancora asserire che tali metodi abbiano palesata così generale utilità da meritare un posto nell' arsenale degli strumenti costanti del geòmetra (5). Arrestiamoci un momento ancora sui

---

(1) Il lettore desideroso di ragguagli sull' argomento ricorra, fra l'altro, all'*Esquisse historique sur la marche du développement de la géométrie du triangle* (Ass. fr., 1889) del Vigarié.

(2) V. la *Sposizione del metodo delle equipollenze* fatta dal Bellavitis stesso in Mem. Soc. XL, 25, II parte, 1854; cfr. anche la nota dello stesso *Sulle origini del metodo delle equipollenze* inserita in Mem. Ist. Ven., 19, 1876; inoltre Laisant, *Théorie et applications des équipollences* (Paris, 1887).

(3) Di questo esistono due esposizioni da parte dell' inventore — *Lectures on Quaternions* (Dublin, 1853) e *Elements on Quaternions* (London, 1866)— e molte altre posteriori che non giova qui enumerare essendo in gran parte indicate nella Nota bibliografica che precede l' *Introduction à la méthode des quaternions* (Paris, 1881) del Laisant.

(4) V. oltre a due memorie citate a pag. 188, gli articoli seguenti: Chace, *On a certain Class of Cubic Surfaces treated by Quaternions* (Am. Journ., 2, 1879); Story, *Note on the proceding Paper* (Ivi); Stringham, *The Quaternion Formulae for Quantification of Curves, Surfaces and Solids, and for Barycentres* (Ivi); Chapman, *Application of Quaternions to Projective Geometry* (Id. 14, 1891); P. Molenbroek, *Over de toepassing der Quaternionen op de mechanica en de naturkunde* (Amsterdam Versl., 1893; R. Beez, *Zur Theorie der Vectoren und Quartenionen* (Zeitschr. f. Math., 41, 1896). Si consultino anche le due opere: Molenbroek, *Avendung der Quaternionen auf die Geometrie* (Leiden, 1893) e A. Mc. Aulay, *Utility of Quaternions in Physic* (London, 1894).

(5) Per maggiori particolari storici rimandiamo il lettore al V. Abschnitt del vol. 2° della *Synopsis der höheren Mathematik* (Berlin, 1894) dell' Hagen. Soltanto osserviamo che, non soltanto Bellavitis e Hamilton, ma anche Ganss ed Argand, nel proporre la ben nota rappresentazione geometrica dei numeri complessi, ebbero un precursore in C. Wessel matematico danese il cui notevole scritto venne di recente analizzato da C. Juel nell' articolo *Bedgjrelse for en Afhandling of Landmaaler Caspar Wessel fra 1799* (Nyt Tydsskrift for Math., 6, 1895).

quaternioni, non tanto per segnalare l'estensione che essi ottennero dal Sylvester (*Lectures on the Principles of Universal Algebra*, Am. Journ., 6, 1884), giacchè essa sembra di pretta pertinenza dell'analisi, quando per citare le trasformazioni che essi subirono per opera di A. Macfarlane (1851-1913) (v. gli scritti: ***Principles of the Algebra of Physics***, Proc. American Ass. for Advancement of Science, 11, 1891; ***The Imaginary of Algebra***, Ib., 12, 1892; ***The Fondamental Theorems of Analysis Generalized for Space, On the Definitions of the Trigonometric Functions*** e ***The Principles of Elliptic and Hyperbolic Analysis***, Math. Congress et Chicago, 1893), le quali, benchè abbiano trovato in Inghilterra una gagliarda opposizione (1), pure sembrano meritevoli della considerazione dei geometri.

5. Il metodo di Hamilton ha punti di contatto molteplici e intimi con quelli di Grassmann, benchè questi possiedano una vastità e una profondità maggiori, epperò siano stati maggiormente svolti e più spesso usati.

E qui cade in acconcio di osservare come nella breve storia che abbiamo tessuto delle battaglie che i geometri in questi ultimi tempi combatterono e vinsero, raramente incontrammo il nome di Grassmann (2), e sempre ne parlammo di sfuggita; gli è che la forma pienamente generale ed assai astratta in cui egli per due volte espose i proprî concetti (3) rendendoli ai più inaccessibili, li privò di esercitare la benefica influenza di cui erano capaci. Grassmann fu un solitario nella matematica e fu mestieri che L. Cremona (***Solution des Question 494 et 499, méthode de Grassmann et propriétées de la cubique gauche***, Nouv. Ann., 19, 1860) e Clebsch (nella precitata necrologia di Plücker) ne additassero il valore perchè i geometri si decidessero a meditarne le opere. Alla diffusione delle proprie idee contribuì in parte il Grassmann medesimo mettendo in luce le coincidenze fra i suoi scritti ed altre produzioni moderne (4), in parte lo Schlegel coll'opera *System der Raumlehre. Nach den*

---

(1) Cfr. i vol. 47-49 del periodico inglese ***Nature***; inoltre: Hyde, ***Macfarlane Algebra of Physics*** (Annals of Mathematics, 7, 1892-93); Knott, ***Recents Innovations in Vector Theory*** (Proc. of the R. Society of Edinburgh, 19) e ***The Quaternions and his Depreciators*** (Proc. of the Edinburg math. Society, 11, 1892).

(2) V. Schlegel, ***Hermann Grassmann. Sein Leben und seine Werks*** (Leipzig, 1878; ***Hermann Grassmann, Sein Leben und seine mathematisch-physikalische Arbeiten*** (Math. Ann., 14, 1879: A. Favaro, ***Della vita e degli scritti fisico-matematici di Ermanno Grassmann*** (Bull. Bonc. 11, 1878); F. Engel, ***Grassmann's Leben*** (*H. Grassmann's Gesemmelte malg. und phys. Werk*, 3, II Tl. 1911).

(3) ***Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend*** (Leipzig, 1844; II Auff., lvi, 1378); ***Die Ausdehnungslehre*** (Berlin, 1862).

(4) V. oltre a memorie già menzionate: ***Geometrische Analyse geknüpft ad die von Leibnitz erfundene Charakteristik*** (Leipzig, 1847), ***Die newere Algebra und die Ausdehnungslehre*** (Math. Ann., 7, 1874), ***Die Mechanik und die Principien der Ausdehnungslehre*** (Id., 12, 1877); ***Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre*** (lvi), ***Verwendung der Ausdehnungslehre für die Polarentheorie und den Zusammenhang algebraischer Gebilde*** (Journ. f. Math., 84, 1878).

Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in derselben dargestellet (Leipzig, 1872 e 1875), ma più ancora coloro che dei metodi di Grassmann fecero nuove esposizioni o ulteriori applicazioni; quali siano le più cospicue si apprende dal seguente elenco di scritti usciti durante gli anni che stiamo considerando: Schlegel, *Ueber neuere geometrische Methoden und ihre Verwandtschaft mit der Grassmann' schen Ausdehnungslehre* (Zeitschr. f. Math., 24, 1879) e *Introduction aux méthodes géométriques de H. Grassmann* (Progreso, 2, 1892); Mehmke, *Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene* (Diss. Tübingen, 1880), *Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe Grassmann'scher Methode* (Math. Ann., 23, 1884), *Ueber eine allgemeine Construction der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven und eine neue Begründung der Fundamentalsätze der Flächentheorie* (Riv. di Mat., 2, 1892), *Ueber die Änderung des Hauptkrümmungen einer Fläche bei einer beliebigen Raumtransformation* (Ivi), *Kleine Beiträge zu den Anwendungen der Methode von Grassmann* (Zeitschr. f. Math., 37, 1892); Grassmann (Hermann jr.) (1857-1921) *Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven und krummen Flächen* (Halle u. S., 1886, 1888, 1893) e *Punktrechnung und projettive Geometrie* (Ivi, 1894, 1896, 1898); Caspary, *Ueber die Erzeugung algebraischer Raumcurven durch veränderlichen Figuren* (Journ. f. Math., 100, 1887) e *Sur les courbes gauches* (Bull. Sc. mat, II, 9, 1887); Carvallo, *Exposition d' une méthode de M. Caspary pour l' étude des courbes gauches* (Bull. S. M. F., 15, 1887) e *La méthode de Grassmann* (Nouv. Ann., III, 11, 1892; Peano, *Calcolo geometrico secondo l' Ausdehnungslehre di H. Grassmann* (Torino, 1888) e *Gli elementi di calcolo geometrico* (Torino, 1891); E. W. Hyde, *The Directional Theory of Screws* (Annals de Matematics 4, 1888) e *The Directional Calculus, based upon the Methods of Hermann Grassmann* (Boston, 1890); E. Müller, (1861-1927) *Die Liniengeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre* (Monatshefte, 2, 1891), *Die Kugelgeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre* (Id., 3, 1892 e 4, 1893) e *Anwerdung der Grassmann'schen Methoden auf die Theorie der Curven und Flächen zweiten Grades* (Journ. f. Math., 115, 1895); Gentry, *Discussion par la géométrie vectorielle d'une quadrique circonscrite à un elipsoïde donné* (Nouv. Ann., III, 13, 1894) (1). Come prova che il Grassmann conquistò finalmente nella falange dei geometri il posto di cui ha diritto,

(1) Maggiori dati bibliografici si troveranno nell' articolo dello Schlegel sopra *Die Grassmann'sche Ausdehunngslehre* (Zeitschr. f. Mat., 41, 1896), e nell'*Elenco bibliografico sull' « Audehnungslehre » di H. Grassmann*, in Riv. di Mat., 5, 1895.

citeremo la pubblicazione, fatta sotto gli auspici dell' Accademia sassone, delle opere complete di questo grande geometra, fisico e filologo.

6. Malgrado le innumerevoli imperfezioni esistenti nel precedente quadro dello stato della geometria nel Secolo XIX, se il lettore lo esamina nel suo complesso, sarà indubbiamente compreso da profonda ammirazione constatando, non soltanto lo sviluppo enorme che tale scienza subì nella seconda metà di esso (dire che in tale periodo il patrimonio geometrico si è raddoppiato, non è esagerazione), non soltanto per il rigore a cui si è aspirato e si è in gran parte raggiunto nelle investigazioni di geometria, ma eziandio per l'aspetto nuovo, più vago e snello, più seducente ed espressivo che esse vennero man mano assumendo.

Le figure geometriche, che un tempo apparivano rigide ed immobili, direi quasi prive di anima, ottennero dalla teoria delle trasformazioni una vitalità insperata, grazie alla quale esse si mutano l'una nell'altra, svelando così delle parentele dianzi sconosciute e stabilendo delle relazioni che non si erano nemmeno sospettate.

Inoltre, mentre un tempo si credeva che noi, esseri a tre dimensioni e viventi in uno spazio in cui non riusciamo a percepire che tre dimensioni (1), fossimo condannati a studiare eternamente soltanto le varietà ad un numero di dimensioni non maggiore di tre, ora ci è lecito, fors' anco doveroso, di liberarci da tale idea come pericoloso pregiudizio (2); e la folla di lavori geniali che ci si schierano dinnanzi agli occhi, fanno accorto chiunque non torca volontariamente l' occhio dal nuovo sole dell' importanza di questo progresso.

Infine l' aspra guerra, impegnatasi sullo scorcio del secolo XVIII e continuata nella prima parte del successivo, fra la geometria e l' analisi potevasi considerare come per sempre finita alla fine del XIX; nè l'una nè l'altra delle discipline belligeranti avendo riportata una decisiva e completa vittoria, ma ognuna avendo dimostrato la capacità di agire in modo completamente autonomo e indipendente, perfino i più recalcitranti, furono costretti ad ammettere che ciascuna è in grado di sostenere da sola vittoriosamente qualunque lotta per la conquista di nuovi veri. Agli innumerevoli scritti in cui alcuni matematici troppo esclusivi dichiararono, più o meno esplicitamente, soltanto l'analisi esser degna di fede incondizionata, assoluta, completa, può contrapporsi la confessione del Sylvester, che ogni qualvolta egli arrivò al fondo di qualche questione matematica,

(1) Si vegga a questo proposito l'interessante discussione che si trova in principio della I Giornata dei *Dialoghi sopra i due massimi sistemi del mondo* del Galilei.

(2) Cfr. l'esposizione degli studi sopra tale argomento fatta da A. Nagy nell'articolo *Sulla recente questione intorno alle dimensioni dello spazio* (Rivista Italiana di Filosofia, Anno V, 1, 1890).

senti di avere toccata una base geometrica (1). Alla *Mécanique analitique*, ove Lagrange constatava con gioia mal repressa di essere riuscito ad evitare qualunque figura (2), fa splendido riscontro un eccellente trattato di meccanica portante il motto « geometrica geometrice ». (3). Ai secolari servigi che l' Algebra prestò alla Geometria si possono contrapporre i vantaggi senza numero e senza pari che quella ritrasse da questa (4). E di questo stato di pace, che G. Cramer augurò circa due secoli fa, nel quale la scienza del numero e quella dell' estensione sono animate da un alto spirito di nobilissima emulazione, ha per conseguenza che ogni progresso dell' una portò seco o indusse un progresso dell' altra; esso corrisponde a una condizione generale della scienza tutta (anzi forse lo rispecchia), giacchè durante il secolo XIX, come notò lo Spencer, le varie discipline funzionarono come arti ausiliarie le une rispetto alle altre, il che non deve stupire perchè « lo spirito nostro non progredisce gran fatto senza il sussidio di segni e di immagini, e quando cerca di penetrare per la prima volta in questioni difficili, non ha di soverchio di questi due mezzi e di quella forza che spessissimo esso trae soltanto dal loro concorso » (5); è stato inoltre osservato con piena ragione che « quando si medita sulla storia delle matematiche applicate, si è realmente condotti ad attribuire le loro scoperte più cospicue, i loro più decisivi progressi, all'alleanza dell' analisi e della geometria. Ed i lavori, dovuti all' uso esclusivo di uno di questi strumenti, appaiono, allora, come preparazioni o perfezionamenti, in attesa dell' epoca che sarà fecondata dalla loro riunione » (6).

(1) Questa dichiarazione, assieme ad altre asserzioni congeneri, si legge nel discorso pronunciato nel 1869 dinnanzi all' Associazione britannica per l' Avanzamento della scienza.

(2) « On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une démarche régulière et uniforme ». Op. cit., Préface.

(3) Si allude qui all'opera di A. Schell *Theorie des Bewegung und der Kräfte* (II Aufl., Leipzig 1879); con criteri analoghi è scritta la *Theoretische Mechanick* (Leipzig 1878-79) del Somoff.

(4) V. fra l' altro: Minkowski, *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, 1894).

(5) Poinsot, C. R., 6, 1838, p. 807.

(6) Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (Paris, 1859), p. XIII-XIV.

[illegible]

[illegible] durante il secolo XIX, [illegible]

[illegible]

LIBRO II.

Progressi compiuti dalla geometria in quest' ultimo trentennio.

CAPITOLO XIII.

I. Preliminari.

1. Nel corso del primo trentennio del presente Secolo gravi perdite vennero subite dal manipolo dei combattenti per la ricerca del vero matematico, in conseguenza della deplorata scomparsa di molti fra coloro a cui le scienze esatte sono debitrici dei più memorabili progressi da esse compiuti nella seconda metà del Secolo precedente.

L'Italia piange tuttora la successiva scomparsa (1897, 1900, 1903) della nobile triade costituita da Francesco Brioschi, Eugenio Beltrami e Luigi Cremona, nonchè la più recente (1906) tragica fine di Ernesto Cesàro, nel fiore di una meravigliosa attività scientifica; ad esse seguirono la deplorata morte di Giuseppe Veronese (1917), Ulisse Dini (1918), Corrado Segre (1924) e Luigi Bianchi (1928).

La Germania, non ancora rimessa dal cordoglio cagionatele dalla dipartita di L. Kronecker, vide scomparire (1907) il sommo analista C. Weierstrass, poi (1919) T. Reye e R. Sturm, degni eredi della tradizione geometrica steineriana, e finalmente H. A. Schwarz e F. Klein (1925), dei quali è superfluo ricordare le alte benemerenze scientifiche.

L'Inghilterra, non appena compiuto il lutto per la morte di A. Cayley, vestì gramaglia in memoria dell'altra gloriosa triade costituita da J. J. Sylvester (1897), G. Salmon (1904) e W. Thomson (Lord Kelvin) (1907).

Ancora: non solo la terra che li vide nascere, ma l'intero mondo matematico pianse l'improvvisa scomparsa di S. Lie (1899), dal quale ancora molto potevasi ragionevolmente attendere, di G. Fiedler (1912), tanto benemerito per gli studi geometrici, e G. H. Zeuthen (1920), sommo sia quale matematico che come storico della scienza.

E la Francia dopo i tre grandi analisti G. Bertrand, C. Hermite e C. Jordan (1900, 1901, 1922), si vide tolti H. Poincaré (1912) e G. Darboux (1917), che lasciarono orma così profonda in tanti rami dello scibile matematico.

A dimostrare l'alta stima di cui erano circondati questi spiriti magni stanno le edizioni deliberate e in parte eseguite delle loro opere complete; raccogliendo in un tutto la produzione scientifica di Betti, Brioschi, Beltrami e Cremona, di Kronecker, Schwarz, di Klein, Lie e Grassmann, di Sylverster, Halphen e Poincaré non solo si è provveduto a rendere ad essi un debito omaggio, ma si è efficacemente contribuito a prolungare e difendere la loro benefica influenza (1).

2. Malgrado questi e altri deplorevoli vuoti verificatisi nelle sue file, la coorte dei matematici in attività di servizio procedette animosa e fidente sotto la guida degli antichi e di nuovi capitani, consolidando e accrescendo l'avito patrimonio; ne è prova il fatto che si può dire non esista alcuno dei campi che abbiamo percorso nel nostro I Libro che non siasi arricchito di nuovi prodotti, a tacere di provincie di nuovo acquisto.

A dimostrare la verità di tale asserto è destinato quanto ci apprestiamo a narrare; ma una prova ce n'è subito offerta da un capitolo della geometria che, per le sue modeste proporzioni e per l'ardore con cui fu coltivato da tanti eminenti, poteva ritenersi ormai esaurito; alludiamo ai « poligoni di Poncelet » e più generalmente ai « problemi di chiusura ». Quella scoperta del celebre matematico francese e le altre ad essa analoghe sono state confermate in tanti modi, vuoi in generale, vuoi in casi speciali, che si poteva credere a nessuno pungesse vaghezza di congegnarne nuove dimostrazioni; che tale previsione sia stata smentita dai fatti emerge dalle seguenti memorie (2): J. Neuberg (1841-1926 (3) *Sur un théoreme de Poncelet* (Mathésis, II, 5, 1895); J. Thomae, *Ueber den Zusammenhang zweischen den Steiner' schen und den Poncelet'-schen Polygonen* (Leipziger Ber., 47, 1895); K. T. Vahlen, *Ueber Steiner'sche Kugelkette* (Zeitschr. f. Math., 41, 1896); R. Pyrkosch, *Ueber Poncelet'sche*

(1) Siami lecito esprimere il voto che non si tardi più oltre a pubblicare le Opere complete da altri grandi, che tuttora attendono, quali Chasles, Bellavitis, Genocchi e Clebsch.

(2) Va aggiunto che dell'applicazione delle funzioni ellittiche ai poligoni di Poncelet è fatto cenno nella recente *Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gabiete der elliptischen Functionen, nebst Anwendungen* (Leipzig, 1905) di J. Thomae e che dai detti poligoni sono consacrate varie pagine dei *Principes de géométrie analytique* (Paris, 1917) di G. Darboux.

(3) L. Godeaux, *Joseph Neuberg* (Mathésis 40, 1926).

Dreiecke, besonders, solche, welche confocalen Kegelschnitten ein und umschrieben sind (Diss. Breslau, 1897); K. Schober, *Ueber besondere symmetrische Punktsysteme zweiten Grades und Poncelet'sche Vierecke* (Monatshefte, 9, 1898); G. Humbert, *Sur les polygones de Poncelet* (Bull. S. M. F., 27, 1899); M. Lelieuvre, *Sur les polygones de Poncelet* (Enseignement, 2, 1900) e *Sur certaines rélations involutives* (C. R., 137, 1901); M. Weill, *Sur une classe de polygones de Poncelet* (Bull. S. M. F., 29, 1901); C. Neumann, *Ueber eine neue Methode zum Beweise der sogenannten Schliessungstheoreme* (Leipziger Ber. 53, 1901); E. Duporcq, *Sur certaines extensions du théorème de Poncelet* (Nouv. Ann. IV, 2, 1902); A. Mannheim, *Note de géometrie* (Id.); G. Fontené, *Sur une figure de l'espace déduite des polygones de Poncelet* (Id.); A. Emch, *Applications of elliptic functions to problems of closure* (Colorado Studies, 1902; P. Kokott, *Zur Theorie der Ponceletschen Polygone* Progr. Sagan, 1903) P. Maennchen, *Ein neues Schliessungsproblem* (Arch. der Math., III. 4, 1903), *Elementares Beweis des Schliessungsproblem beim Kegelschnittsbüschel* (Id.); *Neue Schliessungsproblem* (Id., 7, 1904) e *Einfacher Beweis und Verallgemeinerung eines Steinerschen Satzez* (Ivi); C. Habicht, *Die Steinerschen Kreisreihen* (Diss., Bern., 1904); K. Rohn, *Das Schliessungsproblem von Poncelet und einige Erweiterung*, (Leipz. Ber. 60, 1908 e Deutsch. Math. Ver. 22, 1913; L. L. Lindelöf (1827-1908), *Sur les polygons de Poncelet-extrait d'un ouvrage posthume* (Acta Soc. Fennicae, 35, 1909); G. Darboux, *Sur une extension des théorèmes de Poncelet relatifs aux polygenes inscrits ou circonscrits à des coniques* (C R. 162, 1916); G. Fontené, *Sur une extension des polygones de Poncelet* (Bull. S. M. F., 44, 1916); H. Liebmann, *Elementargeometrischer Beweis des Ponceletschen Schliessungssatzes* (Münch. Ber. 1916); J. Thomae, *Zum Ponceletschen Schliessungsproblems* (Leipz. Ber. 69, 1917) e *Die Liebmannsche Formel für das Ponceletsche Dreiek* (Id., 70, 1918); H. Lebesgue, *Exposé géométrique d'un mémoire de Cayley sur les polygenes de Poncelet* (Toulouse Ann. III, 13, 1922); K. Petr, *Über die Ponceletschen Polygone* (Monatshefte, 18, 1907); T. W. Chaundy, *Poncelet's poristic polygons* (Proc. L. M. S. (II, 22, 1924, e 25, 1926); L. Schleiermacher, *Das chliessungsproblem für das Viereck und die Metrik des Kegelschnittes* (Jahresber. Deutsch. Math. Ver., 37, 1928); W. Fr. Meyer, *Über das Schliessungsproblem der Kegelschnitte und seine Beziehnug zu den elliptischen Funktionen* (Berl. math. Ges., 27, 1928).

Tentativi più o meno felici di generalizzare la nozione di poligoni di Poncelet a figure a tre dimensioni si trovano nei seguenti scritti (cfr. inoltre § 3, n. 4 e § 4, n. 2 del presente Libro); G. Fonténé, *Sur la correspondance biforme; extension des polygones de Poncelet* (Nouv. Ann. III, 16, 1897), *Sur* *des polyèdres mobiles comparables aux polygones de Poncelet* (Id. III, 18, 1899), *Sur l'extensions à l'espace du théorème de Poncelet par des polyèdres de genre un.* (Bull. S. M. F., 32, 1904) e *Contours variables inscrits à une cubique gauche, circonscrits par le plans de leurs angles à une surface réglée du troisième ordre* (Nouv. Ann. IV, 4, 1904); R. A. Roberts, *On a certain doubly infinite systems of inscribed and circumscribed figures in space* (Quart. Jour 29, 1897); G. Kohn (1859-1922) (1) *Ueber raumliche Poncelet'sche Polygone* (Wiener Ber, 106, 1897); G. Humbert, *Sur les tétraèdres inscrits et circonscrits aux quadriques* (Bull. S. M. F., 32, 1904); R. Bricard, *Sur l'extension à l'espace du théorème de Poncelet* (Nouv. Ann., IV, 4, 1904); A. Deltour, *Sur les polyedres de genre un* (Ivi). Per il metodo adoperato collegasi ai problemi di chiusura la memoria di K. Schweting, *Anwendung der elliptischen Funktionem auf eine geometrische Aufgabe* (Crelle, 131, 1906), che qui citiamo finendo la presente enumerazione.

3. Prima di chiudere questo breve esordio giova dare alcuni ragguagli complementari intorno ad altri due temi che ci occuparono nel Cap. I, cioè la teoria degli immaginari (cfr. la memoria storica di A. Ramorino, *Gli elementi immaginari della geometria*, Giorn. di mat., 35 e 36, 1897-98 e il volume di J. L. S. Hatton intitolato *The Theory of the Imaginary in Geometry Together mith the Trigonometry of the Imaginary*, Cambridge 1920) e le idee di Staudt. Riguardo a quella noteremo che — all'infuori della teoria escogitatane da A. Mouchot (*La réforme cartésienne étendue aux diverses branches des mathématiques pures*, Paris, 1876; *Les nouvelles bases de la géométrie superieure*, Paris, 1892) e che non incontrò gran favore presso i matematici — vennero suggerite parecchie nuove rappresentazioni reali por gli enti complessi, delle quali è agevole avere esatta notizia ricorrendo alla memoria di E. Busche, *Ueber eine reale Darstellung der imaginären Gebilde einer reellen Ebene und einige Anwendungen davon auf die Zahlentheorie* (Journ. für Math., 122, 1900), nella base legata ad alcune idee esposte di C. Segre nel suo noto lavoro sopra *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* (Math. Ann., 40, 1892) ed offrente delle notevoli applicazioni alla teoria dei numeri; vanno anche ricordati il lavoro di J. L. Coolidge, *A purely geometric representation of all points in the projective plane* (Trans. Amer. M. S., 1, 1900) e *Differential geometry of the complex Plane* (Id. 23, 1922) nonchè il I. Fascicolo (Leipzig. 1911) delle *Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände des Geometrie* di E. Study e le note di G. Guareschi, *Sulla geometria di una forma quadratica e di una forma di Hermite a variabili co-*

(1) E. Müller, *Gustav Kohn* (Monatshefte 32, 1922).

niugate (Torino Atti, 41, 1906) e di J. Grünwald *Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie* (Monatshefte, 17, 1906).

Indirizzo totalmente diverso hanno le indagini compiute da M. Pieri (*Nuovi principii di geometria projettiva complessa*, Torino, Mem. II, 55, 1905 e Torino. Atti 41, 1906) per stabilire la geometria degli elementi immaginari indipendentemente da qualsiasi rappresentazione reale e da ogni appoggio alla geometria reale. E riguardo alle idee direttive del sistema Staudtiano, attrarremo l'attenzione del lettore sull'estensione del concetto di « Wurf » immaginata da G. Kohn (*Ueber die Erweiterung eines Grundbegriffes der Geometrie der Lage*, Math. Ann., 46, 1895), della quale lo stesso geometra ha poi fatto notevoli applicazioni (*Die homogene Coordinaten als Würfcoordinaten*; Wiener Ber., 104, 1895; *Ueber den Wurf von sechs Punkten der Ebene*, id., 114, 1905) allo studio delle rette di una superficie cubica ed alle bitangenti di una quartica piana.

II. — Teoria delle curve piane algebriche. (1)

4. Il costante interesse dei matematici per questo inesauribile capitolo della geometria è attestato anzitutto dalle nuove esposizioni metodiche che ne furono fatte, di cui ricordiamo le seguenti: H. Wieleitner, *Theorie der algebraischen Kurven höherer Ordnung* (Leipzig, 1905); H. Hilton, *Plane algebraic Curves* (Oxford, 1900); G. Sanguli. *The Theory of plane Curves* (Calcutta, 1925) (2).

Un indirizzo totalmente nuovo nelle ricerche sulle curve algebriche è ad-

---

(1) Cfr. G. Loria, *Aperçu sur le developpement historique de la théorie des courbes planes* (Verh. I. Math. Kongress, 1897); H. Wieleitner, *Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für der Zeitabschnitt* 1890-1904 (Progr. Speyer, 1904-05) lavoro preludente all'opera citata nel testo; inoltre gli articoli seguenti dell' Encich. mat.: L. Berzolari, *Theorie de ebenen algebraischen Kurven*; G. Kohn e G. Loria, *Sperielle ebene algebraische Kurven* (3, II, Tl., 1 Häfte).

Per le curve trascendenti *speciali* rimandiamo, oltre alle opere citate in principio del n. 8 del presente Cap., all'articolo di G. Scheffers, *Besondere transcendente Kurven* nel III Bd. dell' *Encykl. math. Wiss.* (1903), all' opuscolo di L. Brande, *Les coordonées intrinsèques, théorie et applications* (Paris, 1914) e alle posteriori memorie di H. von Koch (*Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*; Arkiv för Mathematik, I, 1904) e E. Cesàro (*Remarques sur la courbe de von Koch*; Napoli Atti, II, 12, 1905). Riguardo ad una *teoria generale* di esse, va notato che la maggior parte di quelle note hanno un gran numero di proprietà comuni, provenienti dalla possibilità di collegarle a curve algebriche analoghe alle polari, Hessiana, ecc. delle curve algebriche: veggasi: G. Loria, *Le curve pan-algebriche* (Prager Ber., 1901) e *Curve speciali algebriche e trascendenti* (Milano, 1929).

(2) Anche la modesta « Sammlung Göschen » contiene due volumetti sopra le *Algebraische Kurven*. La prima edizione (Leipzig 1909-1911) è dovuta a E. Beutel, la seconda (Leipzig 1914 e 1919) a H. Wieleitner.

ditato nella memoria del Poincaré *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques* (Journ. de Math., V, 7, 1901), ov'è intrapreso uno studio delle trasformazioni razionali a coefficienti interi delle curve algebriche, le cui equazioni sono pure a coefficienti interi; si tratta, come dichiara l'autore, « plutôt d'un programme d'études qu'une véritable théorie », ma di un geniale programma che è da augurarsi venga completamente svolto; un passo in tale direzione è rappresentato dal *Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie* di B. Levi (Torino Atti, 41, 1906), mentre altri furono compiuti da J. v. Sz. Nagy con i due lavori *Ueber arithmetischen Eingeschaften algebraischer Kurven* (Ungar. Ber. 26, 1913) e *Zur arithmetischen Theorie des ternären Gleichungen von höheren Geschlechte* (Math. Ann., 73, 1913).

Le condizioni per lo spezzamento di una curva (o di una superficie) algebrica furono assegnate da O. E. Glenn (*The Theory of degenerate algebraic Curves and Surfaces,* Amer. J. 32, 1910).

Dei « covarianti differenziali » (analoghi agli invarianti differenziali) tratta la memoria di R. F. Gwyther, *On the differential covariants of plane curvers, and the operator employed in their developement* (Phil. Trans., 184, 1893), mentre importanti sviluppi analitici connessi alla teoria che ci occupa trovansi in: P. Gordan, *Das Zerfallen der Curven in gerade Linien* (Math. Ann., 45, 1894), E. Wölffing, *Das Verhalten der Steiner'schen, Cayley'schen und anderer covarianten Curven in singulären Punkten der Grundcurve* (Zeitschr. f. Math., 40, 1895), e M. Stuyvaert, *Sur les points singuliers des lieux géométriques* (Liège, Mem., III, 6, 1904). Di una speciale rappresentazione analitica delle linee piane trattò A. Perna nella nota *Le equazioni delle curve in coordinate complesse coniugate* (Palermo Rend., 17, 1903) e a svolgere le conseguenze di un'idea originale di Laguerre quella di Camilla Decio intitolata: *Studio dell'equazione mista di una curva piana algebrica* (Pavia Riv., 1° sem. 1905). Maggiore novità ed importanza possiedono i bei lavori di H. E. Timerding, *Ueber den Zusammenhang ebener algebraischer Kurven mit quadratischen Formen* (Math. Ann., 55, 1901) e di A. Hurwitz *Sur quelques applications géométriques de la série de Fourier* (Ann. Éc. norm., III, 19, 1902). Non più di una fugace menzione faremo delle assidue ricerche analitiche di S. Mangeot sulla « simmetria » (Ann. Ec. norm., III, 18, 1897 e 15, 1898; Nouv. Ann., III, 17, 1893; Bull. S. M. F., 25, 1897) delle curve (e superficie) algebriche; mentre invece attrarremo l'attenzione del lettore sopra gli studi intorno alla rettificazione delle curve, compiuti da G. Humbert (*Quelques propriétés des arcs des courbes algébriques, planes ou gauches;* Journ. de math., V, 1, 1895), in continuazione di altri anteriori (*Sur les arcs des courbes planes algébriques,* Journ. Ec. pol., 57, cah., 1887), dai quali emerse la esistenza in ogni curva algebrica di infiniti sistemi di archi a somma algebrica. Di indole analitica sono pure le *Nouvelles recherches sur les courbes invariantes par une transformation* (X, Y, n. x, y') Ann. Ec. norm. III, 25, 1908) di. S. Lattès (1875-1918).

5. Notiamo ora come in questi ultimi tempi siasi avvertita una diminuzione nell'interesse che un tempo si sentiva per lo studio puramente sintetico delle figure che ci occupano, onde assai esiguo è il numero dei relativi lavori. O. Zimmermann in un breve lavoro *(Ueber die Ordnung der Enveloppe solcher ebenen Curvenreihen, deren Individuen sich in Gruppen von je w ordnen lassen, welche den Punkten einer Geraden projectiv sind*, Journ. f. Math., 116, 1896) ha suggerita una modificazione di cui abbisogna un teorema di Cremona; M. de Franchis ha scritto un lavoro *Sopra una teoria geometrica delle singolarità di una curva algebrica piana* (Palermo Rend., II, 1897); H. Oppenheimer *(Ueber Die Doppelpunkte der algebraischen Curven;* Zeitschr. f. Math., 41, 1896) e C. F. Küpper *(Projective Erzegung der Curven n-ter Ordnung Curven;* Math. Ann., 46, 1896) hanno approfondite la generazione di una curva mediante fasci projettivi di curve di ordini inferiori (1); L. Berdon *(Mémoire de géométrie. Théorie des divisions hétérographiques. Théorie des courbes algébriques)*. Bull. Soc. phil., IX, 6, 1904) si è proposto di costruire una teoria delle curve algebriche analoga a quella ideata da Chasles per le coniche; L. Crelier *(Construction et génération des combes de $(n+1)^e$ dégré et de la $(n+1)^e$ classe;* Enseignement. 8, 1906) si occupò della generazione mediante due fasci di raggi o due punteggiate complanari in corrispondenza (1. n); F. Figuemont *(Généralisation du théorème de Chasles sur la génération des coniques*, Id. 25, 1926) propose generare una curva algebrica mediante n fasci di raggi $M_1 + \lambda_1 N_1 = 0, \ldots, M_n + \lambda_n N_n = 0$ nell'ipotesi che fra i parametri λ_i passi una relazione plurilineare. Argomenti analoghi sono svolti nelle memorie di B. Kaliaum *Über die Erzeugung krummer projectiven Gebilde, deren Träger unikursaler Plankurven sind* (Wien Ber. 122 e 123, 1913-14) e A. Plamiker *Erzeugniss projektiver Involutionen hiberen Grades deren Träger unikursal Gebilde Sind*, Id., 125 e 126, 1916-17); G. Aguglia ha svolta una teoria sintetica delle polari nella memoria di geometria pura intitolata *La curva Φ_n^2 relativa ad un sistema lineare ∞^2 e le sue applicazioni ad una teoria sintetica delle curve polari* (Palermo, 1904). Uno scritto meno recente di H. Thieme *(Rein geometrische Theorie der binären Formen 2. Ordnung.* Arch. der Math, III, 10, 1896) mostra es-

(1) Giova notare a questo proposito, con F. Engel, che tale metodo di generazione, prima che da Chasles e Jonquières, era stato segnalato e studiato da Grassmann.

sere egli rimasto fedele alle idee direttive della sua produzione scientifica (cfr. p. 58 e 90). Finalmente i metodi del Kötter (p. 52) furono svolti ed applicati da J. Rey Pastor nella seguente memoria (scritta nel 1912): *Teoria geométrica de la polaridad en las figuras de primera y segunda categoria* (Mem. de la R. Acad. de Madrid, Ser. II, T. 8, 1929).

Maggiore importanza si annette tuttora ai metodi per effettuare le costruzioni geometriche; ne fanno fede gli articoli seguenti, in diretta connessione con quelli ben noti (p. 11) dello Smith e del Kortum: F. London, *Die geometrische Constructionen dritten und vierten Grades, ausgeführt mittelst der geraden Linie und einer festen Curve dritter Ordnung.* (Zeitschr., 41, 1896) e *Ueber kubischen Constructionen* (Deutsch. Math.-Ver., 4, 1897); Th. Vahlen, *Ueber kubische Konstruktionen* (Arch. der Math., III, 3, 1902) e l'opera del titolo *Konstruktionen und Approssimationen in Systematischer Darstellung* (Leipzig, 1911).

6. Malgrado il sempre maggior predominio della geometria proiettiva sulla geometria metrica, le proprietà delle curve relative alla retta all'infinito ed ai punti ciclici del piano non vennero trascurate. Ne fa fede anzitutto la Diss. di R. de Saussure, *Sur la génération des courbes par roulement* (Genève, 1895); ne fanno fede gli scritti contenenti sviluppi relativi ai teoremi generali di Newton, Carnot e Liouville (p. 34), fra cui ci limitiamo a citare i seguenti: A. Demoulin, *Quelques propriétés du système de deux courbes algebriques planes* (Belgique Bull., III, 23, 1892); A. Gob, *Applications du théorème de Carnot* (Ass. fr., Besançon, 1893) e *Sur les courbes algébriques* (Mathésis, II, 5, 1895); P. Deleus, *Sur une généralisation d'un théorème de Newton* (Nouv. Ann., III, 12, 1893); C. Michel, *Remarques sur quelques theorèmes géneraux de géométrie métrique* (Nouv. Ann., III, 19, 1900); M. d'Ocagne, *Sur les barycentres cycliques dans les courbes algébriques* (Bull. S. M. F., 30, 1902); B. Sporer, *Ueber geradlinige Transversaler algebraischer Kurven* (Wien. Ber. 123, 1914), H. Lebesgue, *Sur les diamètres rectiliques des courbes algébriques* (Bull. S. M. F., 49, 1921).

A teoremi enunciati da Steiner (*Ges Werke*, T. II, p. 663) si riferisce la Diss. di R. Molke, *Ueber diejenigen Satze J. Steiner's welche sich auf die durch einen Punkt gehenden Transversalen einer Krummen n-ter Ordnung beziehen* (Breslau, 1897) ed al sistema di due curve quella di B. Sporer *Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier algebraischen Curven* (Tübingen, 1890). Una notevole applicazione di considerazioni stereometriche allo studio delle curve polari e delle curve satelliti di una data linea piana si trova nella Diss. di H. de Vries, *Over de restdoorsnede van twee volgens* *eene vlakke kromme perspektivische kegels, en oves satelliet-krommen* (Amsterdam 1901); mentre l'applicazione di un noto metodo di rappresentazione dei punti dello spazio dovuto al Fiedler, ai circoli tangenti ad una curva piana leggesi nella memoria dello stesso autore: *Anwendung der Cyklographie auf die Lehre von der ebenen Curven* (Amsterdam Verhand., 8, 1904).

Un piccolo gruppo di lavori ha come germe la nota (p. 35) estensione data da Plücker alla nozione di « fuoco di una conica »; eccone i componenti: P. H. Schoute. *Sur les focales planes d'une courbe plane à un ou plusieurs axes de symetrie* (C. R., 125, 1897); W. A. Versluys, *Focales des courbes planes et gauches* (Amst. Akad. Verhandl., 8, 1903); O. Zimmermann *Ueber die Brennpunkten, die Leitlinien* (1) *und die Orthogonale* (2) *einer ebenen algebraischen Kurve beliebiger Klasse* (Journ. f. Math., 126, 1903); R. A. Roberts, *On foci and confocal p'ane curves* (Quart. Journ., 35, 1904) A. G. Brunel devesi poi la nozione di « vertice » di una curva piana (punto di massima o minima curvatura) e la determinazione del numero ($8n$-12) dei vertici di una curva razionale (Bordeaux Mém., IV, 3, 1893; mentre di curve analoghe alle polari tratta la Diss. di H. R. Hugi, *Begleitkurven eines Punktes in Bezug auf eine Kurve n-ter Ordnung* (Bern 1900).

Ma le ricerche metriche più generali ed importanti sulle curve algebriche sono quelle di G. Humbert *Sur le théorème d'Abel et quelques unes de ses applications géométriques* (Journ. de Math., V, 3 e 5, 1887 e 1889) e *Sur les courbes cycliques de direction* (Id., 4, 1888), le quali vennero rtprodotte da P. Appel e E. Goursat nella loro ben nota *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* (Paris, 1895) e genialmente estese da J. Hadamard nel suo notevolissimo *Mémoire sur l'élimination* (Acta, 20, 1896).

7. Nel passare a dir qualche cosa delle ricerche compiute intorno alle proprietà delle curve che non si perdono per proiezione, faremo cenno anzitutto della rappresentazione dei punti complessi di una curva algebrica sopra le rette di una congruenza, alla quale G. Sforza (1858-1927) (*Origine geometrica delle superficie di Riemann*, Regio Emilia, 1900) pervenne ispirandosi noti lavori di F. Klein (Math. Ann., 7 e 10). Citeremo poi una dimostrazione, indicata da L. Berzolari (*Sulla determinazione d'una curva e d'una superficie algebrica e su alcune questioni di postulazione*), Rend. Ist. Lomb., II, 47, 1914), della possibilità di scegliere sopra una curva d'ordine n, $\frac{n(n+3)}{2}$ punti tali che per essi non passi alcun altra curva dello stesso ordine; è un'argomentazione

(1) Nome dato alla congiungente dei punti di contatto di due tangenti condotte da un fuoco.
(2) Luogo dei vertici degli angoli retti circoscritti ad una curva.

a cui cresce pregio l'applicabilità ad altre questioni congeneri (cfr. S. Cherubino, *Sopra un metodo di postulazione* (Rend. I. L, II. 48, 1915).

Vanno ancora segnalate varie nuove dimostrazioni che furono proposte per tutte od alcune fra le formole di Plücker: con considerazioni stereometriche le stabilì A. Beck nelle memorie *Ueber den Schnitt zweier Kegel und über eine Steiner'scher Aufgabe betreffend ebene Curven* (Wolf Zeitschrift, 38 1893) e *Construction der Schmiegungsebene der Schnittcurve zweier Kegel* (Zeitschr. f. Math., 41, 1896); servendosi invece di superficie di Riemann una di dette formole venne dimostrata da W. Weiss (1859-1904) (1) nella sua *Bemerkung über die Abzälung der Wendepunkte der algebraischen Curven* (Monatsefte, 11, 1890); uniamo a queste lo scritto di O. Zimmermann, *Neue Ableitung der Plückerschen Gleichungen nebst einigen direkten Bestimmung der Doppeltangenten ebener algebraischen Kurven beliebiger Ordnung* (Journal f. Math., 123, 1901) e l'articolo di Hilda Hilton, *Note on plane curves* (Mess., 34, 1904). Una definizione di « ordine di una curva algebrica » mediante un birapporto si apprende dalla nota G. B. Guccia sopra *Un théorème sur les courbes algébriques planes d'ordre* n (C. R., 142, 1906); l'articolo di W. Bouwman *Die Plückerschen Zahlen der Abweichungscurve* (Math. Ann., 49, 1897) risolve la questione di determinare le caratteristiche plückeriane del luogo dei centri delle coniche che hanno con una data curva algebrica un contatto di quarto ordine; finalmente le caratteristiche plückeriane di una certa curva covariante ad un fascio di curve d'ordine qualunque (2) si trovano determinate nella nota di J. de Vries, *Some properties of pencils of algebraic curves* (Amsterdam Versl., 1906).

Maggiore generalità possiedono gli studi sulle singolarità delle curve piane algebriche dovuti a J. L. Coodlige; egli, non soltanto volse il proprio sguardo al caso in cui si tratti di curve reali, introducendo concetti e distinzioni importanti, nelle memorie *The meaning of Plücher's equations fer a real curve* e *The characteristic numbers of a real algebraic ,plane curve* (Palermo Rend, 40 e 42, 1915 e 1917), ma proseguendo nelle ricerche iniziate da V. Snyder (*Construction of plane curves of given order und genus having distinct double points*, Bull. A. M. S., II, 15, 1903) e S. Lefschetz *(On the exstence of loci with given singularities*, Trans. A. M. S., 14, 1913) per invertire le formole di Plükher, giunse (*On the existence of curves with assigned singularities* Bull. A. M. S. II, 28, 1922) al seguente risultato: « Il numero massimo di cuspidi che può avere una curva dell'ordine n e del genere p,

---

(1) E. Wälsch, *Wilhelm Weiss* (Monatshefte, 16, 1905; Deutsch. Math.-Ver., 14, 1905).

(2) Se A è un punto base del fascio, esso avrà un m-esimo tangenziale rispetto ad una curva qualunque del fascio stesso: ora è il luogo di tali punti che il de Vries studia sinteticamente.

quando $n \geq 2p + \sqrt{8p+9}$, è dato $\frac{3}{2}\left[(n-2)+2p\right]-\frac{1}{2}$; lo stesso massimo, nell' ipotesi che sia $n \leqq 2p+1+\sqrt{8p+1}$, è espresso da

$$\frac{3}{2}\left[(n-2)+2p\right]$$

Esistono curve dell' ordine n e del genere p, aventi un numero qualunque di cuspidi inferiore al massimo suddetto ». Complementi a questi lavori trovansi nella nota dell' Hollkroft, *Singularities of Curves of given order* (Id. 29, 1923).

Altre ricerche, prevalentemente analitiche, sui punti singolari si trovano nei seguenti lavori: M. Nöther, *Consecutive und coincidirende Elemente einer algebraischen Curve* (Chicago Cong. Pap., 1896) e *Die singulären Elemente der algebraischen Kurven* (Math. Ann., 56, 1903); W. Köstlin, *Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven* (Zeitschr. f. Math,. 41, 1896); C. Segre, *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie* (Lincei Rend., V, 6, 2° sem. 1897); E. J. Manchester, *Ueber Singularitäten ebene Curven* (Diss. Tübingen, 1899); J. C. Fields, *Relations between the branch-points* (1) *and the double points of an algebraic curve* (Math., Ann., 73, 1913); A. B. Basset, *On the Hessian, the Steinerion and the Cayleyan* (Quart. Journ., 47, 1916); E. W. E. Jung. *Singuläre Punkte ebener algebraischer Kurven* (Id., 34, 1921); H. Kapferer, *Uber die Multiplizität der Schnittpunkte von zwei algebraischen Kurven* (Deutsch. Math. Ver. 32, 1923) (2).

8. Le questioni ivi studiate hanno molteplici punti di contatto con quelle sulle intersezioni di curve che trovansi trattate metodicamente ed a fondo nella memoria di C. Segre, *Le molteplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche, con alcune applicazioni ai principii della teoria di tali curve* (Giorn. di mat., 36, 1898), nonchè col lavoro di Charlotte Angas Scott, *A proof of Nöther's fundamental theorem* (Math. Ann., 52, 1899). *Un' estensione delle formole di Plücker per mezzo del principio di corrispondenza di Chasles* fu indicato (Giorn. di mat., 53, 1915) da E. Panzi, mentre H. Kapferer e Emmy Nöther diedero la *Nothwendige und hinreichende Multiplizitätbedingung zum Notherische Fundamentalsatz der algebraischen Funktionen* (Math. Ann., 97, 1927).

Ad un carattere delle curve piane non contemplato nelle formole di Plücker si riferiscono i tre lavori: M. Haure, *Recherches sur les points de Weierstrass d'une courbe plane algebrique* (Ann. Ecc. Norm., III, 13, 1896); C. Se-

(1) Punti di diramazione.

(2) In un certo senso analoghi alle caratteristiche plückeriane di una curva sono certi numeri considerati da H. T. Burgess (*The circular Numbers for a plane Curve*, Ann. of Math., II, 13, 1912) i quali sono invarianti rispetto a un' inversione.

gre, *Intorno ai punti di Weierstrass di una curva algebrica* (Lincei Rend., V, 8, II, 1899); Isabella Cipolla, *Sul numero dei punti di Weierstrass fra loro distinti di una curva algebrica di genere* p (Id., V, 14, I, 1905) e *I punti di Weierstrass sopra una curva algebrica* (Pisa, Ann. 1907); i punti in questione sono almeno p — pli pel corrispondente gruppo normale g^{p-1}_{2p-2} ed erano stati considerati dall'Hurwitz nel suo ben noto lavoro *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich* (Math. Ann., 41, 1892); il numero trovatone del Segre si trova diminuito negli scritti della Cipolla.

Questi ultimi scritti concernono le proprietà delle curve, che non si perdono per trasformazioni cremoniane, onde appartengono al campo d'indagini a cui la teoria delle curve algebriche è debitrice dei più decisivi progressi da essa compiuti in questi ultimi due tempi; alludiamo alle applicazioni geometriche delle teorie delle funzioni abeliane e delle funzioni algebriche (v. p. 47) (1).

Molti dei relativi lavori concernono i gruppi di punti, alcuni procedono per via geometrica, altri sfruttano il calcolo, altri ancora (quelli del Macaulay) tendono a riporre in onore, debitamente generalizzandoli, concetti e metodi del Sylvester (cfr. Salmon-Fiedler, *Anal. Geometrie der höheren ebener Curven;* Leipzig, 1873, p. 164): ricordiamone i principali e prima d'ogni altro la poderosa *Theorie des algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abel'sche Integrale* di K. Hensel e G. Londsberg (Leipzig, 1902); W. Weiss, *Ueber eine algebraische Theorie der Schaaren nicht-adjungierten Berührungscurven, welche zu einer algebraischen Curve gehören* (Wiener Ber., XCIX, 1890; CII, 1893) e *Ueber die Curven welche eine algebraische Curve an mehreren Stellen und in höheren Ordnung berühren* (Monatshefte, 7, 1896); F. S. Macaulay, *Points-groups in relation to curves* (Proc. L. M. S., 26, 1895), *Points-groups in a plane and their effect in determining algebraic curves* (Id., 29, 1898), *On the intersections of plane curves* (Bull. Amer. M. S., II, 4, 1898), *The theorem of residuation, being a general tractement of the intersection of plane curves at multiple points* (Proc. L. M. S., 31, 1895), *The theorem of residuation. Noether's theorem and the Riemann-Roch theorem* (Id.), *Extensions of the Riemann-Roch theorem in plane geometry* (Id., 32, 1900), *On a method of dealing with the intersections of plane curves* (Trans. Amer. M. S., 5, 1904); G.

(1) Veggansi le recenti opere seguenti: F. Enriques e O. Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni*, (Bologna, I, 1915; II, 1918; III, 1924) e *Courbes et fonctions algebriques d'une variable* (Paris, 1927). F. Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie, deutsch.* von Löffler (Leipzig, 1921); *Trattato di geometria algebrica*, T. I, (Bologna, 1927). Inoltre il resoconto di O. F. Banos intitolato *Estudios fondamentales de geometria sobre las curvas algébricas* (Revista de la R. Acad. de Madrid, II, 3, 1920).

Küpper, *Bestimmung der Minimalbasis* B *für eine irreducible* μ*-fache Manningfaltigkeit von Curven n-ter Ordnung* C (Monatshefte, 6, 1895), *Zur Theorie der algebraischen Curven* (Id.) e *Die primitiven und imprimitiven Specialgruppen auf* C_p^n (Prager Ber., 1897); G. A. Scott, *Note on adjoint curves* (Quart. Journ., 28, 1896), *On the intersections of plane curves* (Bull. Amer. M. S., II, 4, 1808), *Studies in the transformation of plane algebraic curves* (Quart. Journ., 29, 1898, e 32, 1900) e *On a recent method for dealing with the intersection of plans curves* (Trans. Amer. M. S., 3, 1902); F. Enriques, *Un' osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* (Palermo Rend., 10, 1896); H. Burckhardt, *Zur Theorie der linearen Schaaren von Punktgruppen auf algebraischen Curven* (Götting. Nachr. 1896); J. Sommer, *Ueber die Bestimmung ausgezeichneter Punktgruppen auf Curven vom Geschlecht* p (Diss. Tübingen, 1898); Miss. F. Hardcastle, *A theorem concerning the special systems of points-groups on a particular type of base curve* (Proc. L. M. S., 29, 1898) e *Some observations on the modern theory of points-groups* (Bull. Amer. M. S., II, 4, 1898); H. W. Richemond, *Note on the inflexions of plane curves with double points* (Proc. L. M. S., 33, 1901); G. Castelnuovo, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Lincei Rend., V, 15, I, 1906); R. Torelli (1884-1915) (1) stesso titolo (Atti Ist. Ven., 67, 1908), *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica* (Palermo Rend., 37, 1914) e *Dimostrazione di una formola di de Jonquières e suo significato geometrico* (Id., 21, 1906; si tratta di una relazione che leggesi nel T. LXVI, del Journ. f. Math.); A. Comessatti, *Sulle curve doppie di genere qualunque e particolarmente sulle curve ellittiche doppie* (Mem. Torino, II, 60, 1910) e *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Palermo Rend. 35, 1913); E. S. Allen, *Su alcuni caratteri di una serie algebrica e la formola di de Jonquières per serie qualsiasi* (Id., 37, 1914); G. Castelnuovo, *Sulle curve che posseggono una infinità continua di corrispondenze algebriche* (Scritti d' Ovidio, 1913); B. Gambier, *Systèmes linéaires de courbes algébriques de degré donné admettant un groupe donné de points bases* (Ann. Ec. norm., 41, 1924); K. Petri, *Ueber Specialkurven* (Math. Ann., 93, 1925).

All' applicazione degli indicati concetti nello studio delle corrispondenze (in particolare delle involuzioni) esistenti fra i punti di una o due curve son consacrati i lavori seguenti: G. Castelnuovo, *Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica* (Torino Atti, 28, 1893);

(1) F. Severi, *Ruggiero Torelli* (Bull. bibl. e stor., 18, 1916).

R. Torelli, stesso titolo (Atti Ist. Ven. 67, 1908); G. Humbert, *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques* (Journal de math., IV, 10, 1894; cfr. Painlevé, *Note au sujet du mémoire précédent*, Ivi): B. Sporer, *Eine neue Ableitung des Satzes von Cayley-Brill über Punktsysteme auf einer algebraischen Curve* (Zeitschr. f. Math., 39, 1894); G. Scorza, *Sopra le corrispondenze* (p, p) *esistenti sulle curve di genere* p *a moduli generali* (Torino Atti, 35, 36, e 42, 1900, 1901 e 1907); M. de Franchis, *Sulle corrispondenze algebriche fra due curve* (Lincei Rend., V, 12_1 1903); H. Burckhardt, *Sur le principe de correspondance* (C. R., 126, 1898) (1); F. Severi, *Sopra alcune proprietà aritmetiche delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*, (Torino Atti, 48, 1913); O. Chisini, *Le corrispondenze* [2, 2] *fra curve algebriche* (Ann. di mat., III, 24, 1915); C. Rosati, *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica* (Torino Atti, 51, 1916), *Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* (Id., 53, 1918), *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di due curve algebriche* (Ann. di mat., III, 28, 1918) e *Nuove ricerche sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* (Id., III, 31, 1922); V. Snider e F. R. Sharpe, *The construction of algebraic correspondenses between two algebraic curves* (Trans. A. M. S., 22, 1821); J. Vital de Porte, *Irrational involutiones in algebraic Curves* (Amer. Journ., 40, 1918); B. Gambier, *Théorème du reste de Brill et Noether* (Ann. Ec. Norm., 42, 1925).

9. Vanno ora ricordati i seguenti scritti relativi ai sistemi lineari di curve di un piano: M. Bernhard, *Ueber lineare Schaaren von Curven und Flächen* (Diss. Tübingen, 1897; composta con materiali in parte forniti dal Brill); Carlotte Angas Schott, *Note on linear systems of curves* (Nieuw Arch., II, 3, 1898); M. de Franchis, *Riduzione dei fasci di curve piane di genere* 2 (Palermo Rend., 13, 1899), *Riduzione dei sistemi lineari* ∞^k *di curve piane di genere* 3, *per* $k > 1$ (Id.) e *Sulle reti sovrabbondanti di curve piane di genere* 2 (Ivi); S. Kantor, *Neue Aequivalenztheorie für die linearen System rationalen, elliptischer und hyperelliptischer Curven in der Ebene* (Monatshefte, 10, 1899); E. Bertini, *Sui sistemi lineari di grado zero* (Lincei Rend., V, 10, 1° sem. 1901); G. Ferretti (1879 - 1903), *Sulla riduzione all' ordine minimo dei sistemi linari di curve piane irriducibili di genere* p: *in particolare per i valori 0, 1, 2, del genere* (Palermo Rend., 16, 1902); G. B. Guccia, *Sulle curve*

(1) È ivi dimostrato che una corrispondenza (α, β) sopra una curva di genere p ammette al più $(\alpha + \beta)(p + 1)$ coincidenze.

algebriche piane. Sulle superficie algebriche (Id.) (1). Notisi poi che delle eleganti considerazioni stereometriche del Caporali (v. p. 55) fece un' applicazione nuova L. Berzolari nella nota *Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto, oppure si oscalano* (Torino Atti, 31, 1896).

10. Passeremo ora a segnalare le più recenti ricerche fatte sulle curve algebriche per qualche ragione particolarizzate, osservando anzitutto che chi voglia oggi formarsi un concetto di quali siano le curve speciali (algebriche o non) sino ad ora studiate può ricorrere alle due opere seguenti, premiate nel 1899 dall' Accademia delle Scienze di Madrid: G. Loria, *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte* (Leipzig, 1902; II ed., 1910-11; I ed. italiana, Milano 1930); F. Gomes Teixeira, *Tractado de las curvas especiales notables* (Memorias de la R. Acad. de Madrid, 22, 1905; in francese nei volumi IV e V delle *Obras sobre de matematicas*). Più tardi apparvero: F. Ebner *Leitfaden der technisch wichtigen Kurven* (Leipzig, 1906); J. de Vargas y Aguirre, *Catalogo general de curvas* (Mem. Ac. d. Madrid, 1908); H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig, 1909); Brocard et Lemoyne, *Courbes géométriques remarquables (courbes speciales) planes et gauches* T. I (Paris, 1919).

Riguardo alle curve algebriche di grado più basso dopo le coniche, va subito fatta menzione di tre pubblicazioni speciali che le concernono; eccone i titoli: W. Binder, *Theorie der unicursalen Plancurven vierten bis dritter Ordnung in synthetischer Darstellung* (Leipzig. 1896); A. B. Basset, *An elementary treatise on cubic and quartic curves* (Cambridge, 1901); F. Dumont, *Introduction à la géométrie du troisième ordre* (Annecy, 1905); E. Bailley,

(1) Giova qui notare come alla nozione di curva piana (e di superficie) corrisponda nelle forme di prima specie quella di gruppo di punti ed a quella di sistema lineare quella di involuzione di specie k. Non è quindi disdicevole far qui menzione delle perseveranti e fruttifere indagini fatte su tale importante soggetto da F. Deruyts (v. anche p. 223) coi seguenti lavori: *Notes sur les groupes d'éléments communs à deux involutions* (Belgique Bull., III, 26, 1893), *Sur les groupes d'éléments neutres communs à un nombre quelconque d'involutions* (Id., 27, 1894), *Note sur les groupes neutres à éléments multiples associés des involutions unicursales* (Id., 35, 1898), *Note sur les éléments neutres de l'involution et leurs applications aux courbes gauches* (Ivi), *Sur la détermination des éléments neutres d'espèce quelconque* (Id., 36, 1898), *Sur quelques propriétés des courbes gauches* (Ivi; questo scritto come il precedente concerne gli spazi lineari comunque estesi) *Sur quelques propriétés des polygones inscrits aux courbes gauches* (Ivi). Alle involuzioni si riferiscono eziandio questi altri lavori: M. Genty, *Sur les involutions linéaires; sur les systèmes colinéaires des suites cycloprojectives de deuxième espèce* (Bull. S. M. F., 21, 1893); G. B. Guccia, *Due proposizioni relative alle involuzioni di specie qualunque dotate di singolarità ordinarie* (Palermo Rend., 8, 1894) e *Sulle involuzioni di specie qualunque dotate di singolarità ordinarie* (Ivi); F. Gerbaldi, *Sulle involuzioni di specie qualunque* (Id., 9, 1895).

Géométrie synthétique des unicursales de troisième classe et de quatrième ordre (Paris, 1920); H. S. White, *Plane curves of third order* (Cambridge, 1926).

La proprietà importantissima delle cubiche espressa dal teorema di Salmon (p. 54) fu dimostrata nuovamente da E. Goursat (*Sur le théorèm de Salmon*, Nouv. Ann. III, 115, 1906), A. C. Dixon (*A projective proof on the anharmonic property of tangents to a plane curve*; Mess. II, 26, 1906) e V. Jamet (*Sur le théorème de Salmon, concernant les cubiques planes*; C. R. du II Congrès des math., 1901).

Nuove applicazioni della teoria delle forme debbonsi a W. L. G. Williams (*Fundamental Systems of formal modular seminvariants of Ternary Cubics* Trans. A. M. S. 22, 1921).

Anche l'antica questione di costruire il nono punto comune a due cubiche passanti per otto dati punti fu nuovamente e non senza frutto studiata da E. Lange (*Zeichnung des neuten Schnittpunktes zweier Curven dritter Ordnung* Progr. Wismar, 1893), mentre F. Schottky (*Ueber die neun Schnittpunkte zweier ebenen Curven dritter Ordnung*; Journ. f. Math., 119, 1898) e H. M. Taylor (*On the intersections of two cubics;* Proc. L. M. S., 29, 1898) si giovarono dell'analisi più elevata per lumeggiare l'interdipendenza tra i punti base di un fascio di cubiche. Notevole per novità ed importanza è la ricerca compiuta da J. Thomae nella memoria *Wann hat eine durch neun Punkte gegebene Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt?* (Zeitschr. f. Math., 40, 1895), la quale, pel metodo usato, collegasi all'altra del medesimo autore *Projectiver Beweis einiger elementaren Sätze aus der Theorie der ebenen kurven dritter Ordnung* (Leipziger Ber., 35, 1902). Analoghi procedimenti trovansi sfruttati nei lavori seguenti: G. Beyel, *Darstellung der Curven dritter Ordnung und Klasse aus zwei Reciprocitäten* (Zeitschrift f. Math., 38, 1893) e *Construction der Curven dritter Ordnung aus neun gegebenen Puncten und Construction des neuncten Punctes zu acht Grundpunkten eines Büschel von Curve dritter Ordnung* (id. 40, 1895); B. Sporer *Ueber einige besonderen Curven des dritten Grades und solche der dritten Klasse* (Zeitschr. f. Math., 40, 1895) e *Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkten eines Kegelschnittes und einer Curve dritten Grades* (Id.); W. H. Blythe *On the geometry of cubic curves and cubic surfaces* (Ed. Times, 74, 1901); K. Rohn, *Beiträge zur Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipz. Ber., 58, 1906) e *Konstruction der ebenen Kurven 3. Ordnung aus 9 beliebigen Punkten mit Hülfe des Lineals* (Deutsch. Math. Ver. 16, 1907); S. Jolles, *Die synthetische Polarentheorie der ebenen kubischen Kurven* (Arch. Math. Phys. III, 14, 1909); L. Castels, *Etudes sur la génération des cubiques planes* (Bélgique Mém. II, 7, 1922);

F. Kölmel *Über birationale dualistische Transformationen und Grassmann-sche Erzeugung von ebenen Kurven dritter Ordnung* (Deutsch. Math. Ver. 26, 1917); H. Berliner, *Involutionssysteme zu des Ebene des Dreiescks* (Braunschweig, 1914).

La rappresentazione parametrica dei punti di una cubica generale fu nuovamente stabilita da C. Juel *(Ueber die Parameterbestimmung von Punkten auf Curven zweiter und dritter Ordnung;* Math. Ann. 47, 1896) e da J. Thomae *(Parameterdarstellung der Kurven dritter Ordnung,* Leipz. Ber., 61, 1909 e 62, 1910) e applicata da V. Rouquet alla *Démonstration d' un théorème sur les cubiques planes* (Toulouse Mém., IX, 5, 1893).

Un notevole progresso nella teoria algebrica delle forme ternarie cubiche e delle curve da esse rappresentate viene costituito da una quaterna di memorie di H. S. White *(Conics and cubics connected with plane cubics by certain concariant relations; Plane cubics und irrational covariant cubics)* e P. Gordan *(Formentheoretische Entwicklung der in Herrn White's Abhandlung über Curven dritter Ordnung enthaltenen Sätze; Die Hesse'sche und die Cayley'sche Curve),* tutte inserte nel t. I (1900) delle Trans. Amer. M. S. ed ispirate dalla *Lettre adressée à M. Hermite* da D. Hilbert (Journ. de math., IV, 4, 1888). Giova qui citare anche lo scritto di J. Thomae, *Ueber orthogonale Invariante und Kovariante bei Kurven dritter Ordnung mit unendlich fernen Doppelpunkte* (Leipzig er Ber., 55, 1903), che servì di punto di partenza alle indagini di R. Dölle sugli *Orthogonale Invarianten der Circularkurven 3 Ordnung* (Diss Jena, 1905).

Un' applicazione della nota generazione di Grassmann (p. 55) leggesi nell' articolo *On the degeneration of a cubic curve* (Proc. L. M. S. 28, 1927), di H. M. Taylor, mentre lo studio delle proprietà delle cubiche piane in una metrica qualunque trovasi, almeno iniziato, nel lavoro di H. F. Stecker *Non-euclidian properties of cubics* (Amer. Journ., 22, 1900 e 24, 1902): riguardo alle proprietà metriche euclidee delle stesse curve vanno ricordate la memoria di J. Walker, *On the diameters of the plane cubics* (Phil. Trans. 179, 1889) e quelle di R. A. Roberts, *On certain properties of the plane cubics curve in relation to the circular points at infiny* (Amer. Journ. 23, 1901, e 24, 1902). Dei poligoni collegati ad una cubica piana trattarono nuovamente H. S. White (*Inflexionale lines, triplets and triangles associated with the plane cubic*; Bull. Amer. M. S. II, 4, 1898), G. Scorza *(Sopra le figure polari delle curve piane del 3° ordine*, Math. Ann., 51, 1898), G. Manfredini, *(Sui quadrangoli coniugati di una cubica*, Giorn. mat., 39, 1903), A. C. Dixon (*On plane cubics*, Proc. L. M. S., 34, 1902), W. Burnside, *On the Hessian Configuration and its Connection with the Group of 360 Plane Col-*

lineations (Proc. L. M. S. II, 4, 1906), M. Oppenheimer, *Ueber Dreiecks-und Vielecksysteme als Träger der Kurve dritter Ordnung* (Monatshefte 20, 1909); B. M. Turner, *Plane Cubics with a given quadrangle of inflexions* (Amer. Journ. 44, 1922), L. C. Cox, *The finite Group of Birational Transformations of a Net of Cubics* (Id. 39, 1917).

Prima di lasciare questo tema ricorderemo ancora questi altri scritti: M. Disteli, *Ueber die Stellen innigster Berührunh einer ebenen Curve dritter Ordnung mit einer ebenen Curve n-ter Ordnung* (Zeitsch. f. Math., 38, 1893); H. Bremiker, *Sur la transformations des courbes algébriques en général et sur celle des courbes du troisième ordre en particulier (d'après des cours de M. Weierstrass et de M. Bruns)* (Progr. Berlin, 1899); H. Oppheneimer, *Ueber die durch Punktpaarsysteme einer C_3 veranlassten Kurven und ihre Zusammenhänge* (Monatshefte, 12, 1901); P. Patrassi, *Le corrispondenze collineari del fascio sizigetico in sè stesso* (Giorn. mat., 40, 1902); R. A. Roberts, *On certain confocal systems of curves of the third and fourth class cutting orthogonaly* (Quart. Journ., 34, 1904); F. Gomes Teixeira, *Sur la théorie des cubiques circulaires et des quartiques bicirculaires* (Ann. di Mat., III, 11, 1905).

11. Con non minore ardore delle curve piane del terz' ordine vennero studiate quelle del quarto, ma il mistero che avvolge la configurazione dei loro flessi, non è ancora stato squarciato: J. Grassmann nella sua Diss. *Zur Theorie der Wandepunkte, besonders der Curven vierter Ordnung* (Berliu, 1875) aveva creduto di esser giunto a scoprire che qualunque conica passante per cinque flessi di una quartica generale ne contiene altri tre; ma l' inesattezza di questa proposizione fu avvertita sperimentalmente da F. Klein (v. Math. Ann., 10, 1876, p. 397), ispezionando le figure disegnate dal Beer (v. nota a p. 169) e dimostrata razionalmente da A. Terracini (*Sui punti di flesso delle quartiche piane generali*, Torino, Atti, 58, 1924).

Le principali proprietà delle curve in questione trovansi raccolte in una monografia di E. Ciani (*Le curve piane di quart' ordine* Giorn. Mat. 48, 1910); la quale però non dispensa chi intende approfondirne la conoscenza di ricorrere agli scritti concernenti questioni speciali relative, fra cui ricordiamo i principali a noi noti. Osserveremo anzitutto avere E. Laguerre (*Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géometrie plane*, C. R. 78, 1874) ed indipendentemente da lui E. Bertini (v. la nota *Le tangenti multiple della Cayleyana di una quartica piana generale;* Torino Atti, 32, 1896) scoperto che le Cayleyana di una quartica generale non ha che 21 tangenti quadruple e nessun' altra tangente multipla, ed avere G. Scorza avvertito esistere 36 quartiche di cui una data quartica è il covariante S di Clebsch (v. la nota *Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali*; Math. Ann. 52, 1899). Nuovi studi sugli aggruppamenti formati dalle bitangenti di una delle curve in questione leggonsi nelle seguenti memorie: M. Nöther, *Note über die 7-Systeme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung gehen* (Math. An. 46, 1895); E. Ciani, *Le bitangenti della quartica piana studiate mediante le configurazioni di Kummer* (Rend. Ist. Lomb. II, 31, 1898; Ann. di Mat. III, 2, 1899) e *Sopra una certa configurazione di punti e rette relative alla quartica piana* (Rend. Ist. lomb., vol. cit.); H. E. Timerding, *Ueber die Gruppirung der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung* (Journ. f. Math., 122, 1900); C. Rosati, *Alcune considerazioni intorno al metodo di Hesse per lo studio delle bitangenti di una curva piana del quart' ordine* (Giorn. di mat., 38, 1900). Collegate a queste ricerche sono quelle attinenti alle coniche pluritangenti ad una quartica dovute a E. Ciani (*Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana*: Rend. Ist. Lomb., II, 28, 1895) e G. Fontené (*Sur les dégénérescences des 63 systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique*; Bull. S. M. F., 27, 1899). Altre questioni relative alle quartiche generali son consegnate nei seguenti scritti: W. Binder, *Die Undulationen ebener Curven* C_4 (Wiener Ber. 106-107, 1897-98); G. Scorza, *Sopra la teoria delle curve polari delle curve piane del 4° ordine* (Ann. di mat., III, 2, 1899); G. Manfredini, *Sui pentagoni coniugati ad una quartica e sugli esagoni coniugati ad una quintica* (Giorn. di mat., 40, 1902); M. Long, *On Geiser's Method of generating a plane Quartic* (Proc. I. M. S. II, 9, 1911); M. Bateman, *The quartic Curve and its inscribed Configurations* (Amer. Journ., 36, 1914); T. Cohen, *The asymptotic Equation and satelite Conis of the plane Quartic*; (Id. 39, 1917).

Ampie classi di quartiche sono studiate nei seguenti lavori: E. Ciani, *Le quartiche piane projettive a sè stesso* (Palermo Rend., 28, 1909) e *Le quartiche piane invertibili* (Giorn. mat. 57, 1919); A. Emch, *On plane algebraic Curves which are invariant under a quadratic Cremona transformation* (Tohoku, 21, 1922).

12. Delle quartiche con un punto doppio si occupò di recente J. de Vries (*La quartique nodale*, Arch. Teyler, II, 9, 1904), mentre gli studi sopra quelle binodali vennero nel periodo che stiamo studiando proseguiti nelle memorie seguenti: O. Richter, *Die Berührungskegelschnitte der ebenen Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten* (Progr. Leipzig, 1894; cfr. pag. 65); J. Thomae, *Untersuchungen über zwei-zweideutige Verwandtschaften und einige*

Erzeugnisse derselben (Leipzig Abhandlungen 21, 1895); H. W. Richemond, *On the inflexion of a binodal quartic curve* (Quart. Journ., 32, 1900; ivi è dimostrato che i 12 flessi di detta curva *non* appartengono alla stessa cubica); J. Fraser, *A metod of reduction of a quartic surface possessing a nodal conic to a canonical form. With an application of the same metod to the reduction of a binodal quartic curve to a canonical form* (Proc. Irish Acad., 24, 1904); R. A. Roberts, *On polygons inscribed in a binodal quartic and circumscribed about a conic* (Mess., 34, 1905); H. Bateman, *The double tangents of a binodal quartic* (Ann. Journ. 35, 1913).

Finalmente delle quartiche razionali si occuparono H. W. Richemond e T. Stuart (*The inflexion conic of a trinodal quartic curve;* Proc. L. M. S., II, 1904), nonchè A. B. Basset (*On certain conics connected whit trinodal quartics* (Amer. Journ., 26, 1904). In particolare di quelle con singolarità straordinarie trattano: I. H. Neeley, *A note on the rational quartic curve with cusps and ondulations* (Bull. Amer. math. Soc. 34, 1928) e *Concerning covariants fornas of the rational plane quartic with compreund singularitios* (Id, 35, 1929). Allo stesso devesi uno sguardo alla teoria delle quartiche razionali (*The rational plane quartic cunae* (Bull. of the Carnegie Institute of Technologie, January 1929).

13. Neppure la tanto studiata ipocicloide triscupide venne abbandonata dai geometri; valgano a provarlo i seguenti scritti: G. Stiner, *Zur Construction der Steiner'schen Hypocycloide* (Monatschefte, 6, 1895) e *Die dreimal berührenden Ellipsen der Steiner'schen Hypocykloide* (Progr. St. Gallen, 1899); W. Godt, *Ueber den Feuerbach'schen Kreis und die Steiner'sche Curve vierter Ordnung und dritter Klasse* (Deutsch. Math.-Ver. 4, 1894-95); P. Serret, *Sur l'hypocycloide de Steiner* e *Sur l'hypocyloide à trois rebroussements* (C. R., 125, 1897; cfr. S. Kantor, *Réclamation de priorité*, id. 126, 1898); Bücking, *Die Seitensymmetriegeraden des Dreiecks; als besonderen Fall die Steiner'sche Curve des Dreiecks* (Archiv., II, 16, 1898); F. Morley, *Orthocentric properiies of the plane n–line* (Trans. Amer. M. S., 4, 1903; J. Neuberg, *Notes sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (Liège Mem., III, 6, 1906), A. Gob, *Notes sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (Id., III, 4, 1902) e *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (Id., III, 6, 1906); J. Thomae, *Ueber den Steiner'schen Strahlbüschel* (Leipz. Ber. 63, 1911; Leipz. Abh. 35, 1916); A. Longhi, *Sulle quartiche piane tricuspidate* (Giorn. di mat. 63, 1925); H. Böhmel, *Ueber eine Erweiterung des Steinerschen Strahlen-büschels* (Deutsch. Math. Ver., 36, 1927).

Chiuderemo queste notizie relative alle quartiche ricordando alcuni scritti concernenti alcune altre speciali di tali curve: E. Ciani, *La quartica di Caporali* (Napoli Rend. III, 2, 1896), *I vari tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche* (Palermo Rend. 13, 1899) e *Un teorema sulla quartica di Klein* (Rend. Istit. Lomb., II, 38, 1900); L. Berzolari, *Sulla lemniscata proiettiva* (Rend. Ist. Lomb., II, 37, 1904); R. A. Roberts, *On the plane quartic curve with a centre and the corresponding cone* (Mess., 44, 1905).

14. Una teoria delle curve generali del 5° ordine è tuttora un desiderio; alcuni materiali per comporla vennero forniti da A. B. Basset con le note *On some properties of quintic curves* (Quart. Journ., 34, 1904) e *Compound singularities of quintic curves* (Id., 36, 1905) e J. F. Tracey con la memoria *Covariant curves of the plane rational quintic* (Amer. Journ. 36, 1914); mentre per quelle razionali e ellittiche si hanno due lavori di P. Field (*On the form of unicursal quintic curves*, Amer. Journ., 26, 1904) e *Quintic curves for wich $P=1$*; Id., 27, 1905). A speciali curve del detto ordine e del seguente si riferiscono i seguenti lavori: T. F. Nichols, *The generation of certain curves of the fifth and sixt orders* (Mathem. Review, 1, 1896-97); J. Cardinaal, *La conchoïde elliptique et les courbes qui en dérivent* (Arch. Teyler, II, 8, 1902); F. Morley, *On a plane quintic curve* (Proc. L. M. S., II, 2, 1904); W. R. Westrepp Roberts, *Some properties of a certain quintic curve* (Dublin Proc., 24, 1902); G. Bauer, *Von der Kurve 6. Ordnung, welche der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitten ist. welche durch vier Punkte gehen* (Münchener Ber., 35, 1905); E. Ciani, *Le quintiche piane autoprojettive* (Palermo Rend., 36, 1913); R. M. Winger, *Solf-projettive rational curves of the fourth and fifth orders* (Amer. Journ., 36, 1914); E. Rowe, *Invariants of the rational plane quintic and of any rationale Curve of ode order* (Trans. A. M. S., 16, 1915); W. Müller, *Die rationale Kurve fünfter Ordnung in fünf-vier-drei- und zwei-dimensionalen Raum* (Diss. Leipzig, 1910), *Die rationale Quintik der Ebene aus des 5-dimensionalen Raum aus gesehen* (Giorn. mat., 60, 1922) e *Zur Geometrie des binären Formennetzes fünfter Ordnung* (M. Z., 24, 1925); A. H. Tappan, *Plane sextic Curves invariant under birational transformations* (Amer. Journ. 37, 1915).

Di curve di ordine qualunque, ma per qualche ragione specializzate trattarono E. Bertini (*Quand'è che due curve piane dello stesso ordine hanno le stesse prime polari?* Torino Atti, 33, 1897), O. Hermann (*Ueber algebraische Curven, die sich beliebig eng an gegebene Curvenpolygone anschliessen*; Progr. Leipzig. 1897), Anaide Grassi (*Sulle curve di ordine* n *e in particolare sulle quartiche che ammettono coniche apolari;* Giorn. di Math., 38, 1900) e

L. Brusotti (*Sulle curve piane razionali dotate di tre punti d' iperosculazione* (1); Rend. Ist. Lomb., II, 37, 1904).

15. Passando alle curve, non di ordine, ma di genere determinato, faremo menzione della nuova dimostrazione data da W. F. Osgood (*A geometric proof of a fundamental theorem concerning unicursal curves*; Bull. Amer. M. S. II, 2, 1896) per un noto teorema del Lüroth (cfr. Mat. Ann., 9, 1876) e quelle date da E. Fabry (*Sur les courbes planes unicursales*; Ann. Ec. norm., III, 13, 1896) e A. Schmitz (*Die rationalen ebenen Kurven*; Prog. Münnerstadt, 1898) per alcune proposizioni di Clebsch (Journ. f. Math., 64); svariate considerazioni leggonsi nella memoria di K. Rohn, *Ein Beitrag zu den rationalen Kurven und ihren Berührungskurven* (n — 3) *ter Ordnung* (Leipzig. Ber. 67, 1915). Invece dal punto di vista costruttivo alcune curve razionali si trovano studiate nella Diss. di G. Stiner, *Ueber Curven vom Geschlecht Null* (Zurich, 1890).

Riguardo alle curve ellittiche e iperellittiche furono investigate le corrispondenze che possono stabilirsi tra i lor punti da T. Brodén (*Ueber Correspondenzen auf elliptischen Curven*; Stockholm Orfver., 1893), S. Kantor (*Les correspondences dans les courbes elliptiques déduites géométriquement*, Torino Atti, 29, 1893; *Sur les courbes hyperelliptiques portant des correspondences univoques*, Palermo Rend., 9, 1825), C. Küpper (*Die ultraelliptischen Curven* C_p^n. $p > 1$, Prager Ber., 1896), *Curventheoretisches*, Id., 1898), R. Torelli (*Sulle involuzioni irrazionali nelle curve iperellittiche*, Palermo Rend., 19, 1895, e *Sulle curve di genere due contenenti una involuzione ellittica*, Napoli Rend. III, 17, 1911), A. Wiman, (*Ueber die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte* $p = 3$, *welche eindeutige Transformationen in sich zulassen*, Stockholm, Ofv., 1895 e *Ueber die algebraischen Curven von den Geschlechtern* $p = 4$, 5, *und* 6, *welche eindeutigen Transformationen in sich besitzen*, Id.). J. V. Mc. Kelvey, *The group of birational Transformations of algebraic Curves of genus 5* (Amer. Journ. 34, 1912), S. Cherubino, (*Sulle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali singolari in sè*, Torino Atti 49, 1914, e *Sulle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali di 2ª specie in sè*, Id. 50, 1915). Chiuderemo ricordando alcuni dei lavori concernenti le curve k - gonali: C. Küpper *Ueber k-gonalen Curven* C_p^n *n-ter Ordnung und vom Geschlect* p (Prager Ber., 1895-96), *Ueber Beziehungen zwischen polygonalen und Raumcurven* (Id., 1896) e *Ueber k-gonale Curve* C_p^n *n-ter Ordnung vom Geschlecht* $p > 1$ (Monatshefte, 8, 1897); F. Amodeo, *Coup d'oeil sur les courbes algébriques au point de vue de la gonalité* (C. R. II. Congrès des math., 1901); L. Cavazzoni, *Una osservazione sulle curve trigonali* (Rend. Ist. Lomb., II, 34, 1901).

(1) Sono le curve studiate per primo da Lamé (v. pag. 71).

III. — Teoria delle superficie algebriche.

16. La ricerca delle proprietà delle superficie algebriche è forse quella che più ha assorbita l'attività dei geometri in questi ultimi tempi, tanto che una bibliografia da tempo annunciato (1) relativa a tali figure (ed alle curve sghembe) comprende non meno di 3715 numeri! Alcune di tali indagini hanno un carattere esclusivamente analitico: tali sono quelle del Mangeot sulla simmetria, parte delle quali vennero già citate nel § precedente (v. inoltre *Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu' une surface d' ordre quelconque soit de révolution,* Nouv. Ann., III, 16, 1897), quelle di E. Delassus, *Sur les surfaces algébriques passant par l' intersection de plusieurs surfaces algébriques* (Bull. sc. math., II, 21, 1897) e quelle ben più generali ed importanti del Forsyth sopra *The differential invariants of space* (Phil. Trans, 202, 1904). Poche altre concernono questioni metriche; limitiamoci a citare la nuova (cfr. p. 79) determinazione fatta dal Pieri *(Di alcune questioni metriche circa le superficie algebriche,* Giorn. di mat., 35, 1897) del numero degli ombelichi di una superficie algebrica, l'applicazione della teoria delle superficie polari allo studio della curvatura, fatta dallo Stuyvaert (*Sur la courbure des lignes et des surfaces;* Belgique Mém., 55, 1898), la semplificazione indicata da H. Maschke (*On superosculations quadric surface*, Trans. Amer. M. S., 5, 1902) alle condizioni assegnate nel 1873 da Hermite (nel suo *Cours d'analyse*) pel contatto fra una superficie ed una quadrica e l'estensione della definizione di ombelico proposto da A. Gallestrand *(Zur Kenntniss der Kreispunkte,* Acta 28, 1904).

17. Passando nel campo proiettivo noteremo anzitutto una definizione di ordine, analoga a quella a noi nota data per le curve piane suggerita dal Guccia (*Un théorème sur les surfaces algébriques d'ordre* n; C. R. 142, 1906) ed una nuova definizione geometrica delle superficie polari segnalata da A. Dominioni (*Su certe superficie di contatto e su una definizione sintetica delle superficie polari*; Giorn. di mat., 43, 1905); osserveremo poi che, come proseguimento allo studio delle rette aventi con una data superficie contatti assegnati, fu iniziato quello delle analoghe coniche (M. Bottasso (1878-1918) *Sopra le coniche bitangenti alle superficie algebriche;* Ann. di mat., III, 8, 1903).

Numerose ed importanti sono le ricerche intorno alla struttura dei punti e delle linee singolari delle superficie, ed all'influenza su di essi esercitate da trasformazioni univoche dello spazio; i loro risultati si leggono nei seguenti

(1) J. E. Hill., *Bibliography of surfaces and twisted curves* (Bull. Amer. M. S., 3, 1897).

lavori: C. Segre, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie* (Ann. di mat., II, 25, 1896); B. Levi, *Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio per trasformazioni quadratiche* (Ivi, II, 26, 1897), *Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche* (Torino Atti, 33, 1897 cfr. *Sur la résolution des points singuliers des surfaces algébriques;* C. R., 134, 1902), *Intorno alla composizione dei punti generici delle linee singolari delle superficie algebriche* (Ann. di mat., III, 2, 1899) e *Sulla trasformazione dell'intorno di un punto per una corrispondenza birazionale fra due spazi* (Torino Atti, 35, 1900); E. Wölffing, *Die singulären Punkte der Flächen* (Zeitschr. f. Math., 42, 1897); M. Pannelli, *Sulla riduzione delle singolarità di una superficie algebrica per mezzo di trasformazioni birazionali dello spazio* (Ann. di mat., II, 25, 1897); E. Geck, *Ueber die singulären Punkte algebraischer Flächen* (Diss. Tübingen, 1900); L. Pilgrim, *Binomische und trinomische Näherungsflächen algebraischer Flächen* (Böklen Mitth., II, 7, 1905); A. B. Basset, (autore di *A Treatise on the Geometry of surfaces*, Cambridge, 1910) *On the singularities of surfaces* (Quant. Journ., 37, 1906), *Singular Lines and Curves on Surfaces* (Id., 39, 1908), *A Revision of the Theories of Twisted Curves and of singular Tangent Planes to anautotomic* (1) *Surfaces* (Id. 40, 1909), *Singular Tangent Planes to autotomic Surfaces* (Id. 41, 1909), *Singular Tangents to Surfaces* (Id. 43, 1911), *The oscnodal Transformations and Hypertacnodes* (Id. 47, 1916); P. Hudson, *Curves of simple Contact on algebraic Surfaces* (Math. Ann. 73, 1912) e *Curves of Contact of any Order on algebraic Surfaces* (Proc. L. M. S., II, 11, 1912).

A speciali punti singolari delle superficie si riferiscono i seguenti scritti: E. Wölffing, *Ueber die « Close punkte » und « Offpunte » Cayley's* (Böklen Mitt., II, 2, 1900); B. Levi, *Punti doppi uniplanari delle superficie algebriche* (Torino Atti, 40, 1904); E. Geck, *Ueber uniplanare Knotenpunkte* (Böklen Mitt., II, 6 e 7, 1904-905).

L'importante questione della trasformazione di una superficie in altra dotata soltanto di singolarità ordinarie fu nuovamente studiata da O. Chisini (*La risoluzione delle singolarità di una superficie mediante trasformazioni birazionali dello spazio*, Bologna Mem. VI, 8, 1921) e G. Albanese (*Trasformazione birazionale di una superficie algebrica in un'altra priva di punti multipli*, Palermo Rend., 43, 1924).

L'utilità delle matrici nello studio di alcune classi di superficie (e di altre

(1) Nome dato a una superficie priva di punti e linee multiple.

figure) algebriche fu posta in luce da M. Stuyvaert *(Cinq études de géométrie analytique*, Gand, 1908; *Algèbre à deux dimensions*, Ivi 1920).

Da ultimo, un problema algebrico connesso ai punti singolari delle superficie è trattata da L. Berzolari nella memoria *Sulle intersezioni di tre superficie* (Ann. di mat., II, 24, 1896), e un' applicazione di funzioni trascendenti è fatta conoscere nella memoria di F. Schottky, *Ueber einige Kurven—und Flächengleichungen, die mit der Algebra der Thetafunktionen zusammenhängen* (Journ. f. Math. 146, 1916).

18. Tre superficie algebriche dello stesso ordine determinano una rete che ammette una « curva jacobiana », la quale venne studiata da M. Pannelli *(Sulla Jacobiana di una rete di superficie algebriche;* Giorn. di mat. 41, 1903, 42, 1904 e 55, 1907); invece il contegno della « superficie Jacobiana » di quattro qualunque superficie algebriche in un comune punto multiplo fu indagato da A. Levi *(Sulle singolarità della Jacobiana di quattro superficie;* Torino Atti, 31, 1896; Giorn. di mat. 34, 1896) e F. Gerbaldi *(Un teorema sulle singolarità della Jacobiana di quattro superficie algebriche.* Palermo Rend., 10, 1896). Congenere è il contenuto della memoria del Pannelli *Sul numero delle superficie di un fascio dotate di un punto doppio* (Palermo Rend. 36, 1913).

Altre questioni relative a sistemi lineari di superficie vennero risolte da L. Lo Monaco-Aprile *(Sopra una curva gobba luogo di certi punti parabolici di una rete di superficie, generale, dell' ordine* n; Palermo Rend., 12, 1898; *Sulla superficie luogo dei punti di contatto di 1° ordine delle superficie di un fascio con quelle di una rete, generali, e sue applicazioni*, Id., 18, 1904; *Sopra alcuni problemi di contatto relativi a superficie e a curve gobbe algebriche*, Ivi), C. Mineo *(Sulla curva luogo dei punti di contatto delle superficie di un fascio d' ordine* n *con le superficie di un fascio d' ordine* n; Id., 17, 1903; cfr. Stuyvaert, *Sur la courbe lieu des points de contact des surfaces de deux faisceaux*, Ivi; e *Sul luogo dei punti parabolici delle superficie di un fascio*, Id., 21, 1906) e G. Aguglia *(Sulla superficie luogo di un punto in cui le superficie di tre fasci toccano una medesima retta*, Id., 20, 1905).

19. Maggiore unità di scopo, e in gran parte anche di metodo, presentano le indagini ispirate dal desiderio di stabilire una teoria generale delle superficie algebriche e dei sistemi di curve tracciate su di esse; considerate nel loro insieme esse sembrano costituire il più cospicuo progresso realizzato dalla geometria in questi ultimi tempi, ed il loro pregio aumenta osservando che così si è in pari tempo ottenuta una solida base per la teoria delle funzioni algebriche di due variabili indipendenti (1). Le prime fasi di sviluppo di tali studi vennero da noi già segnalate (p. 76); in esse, come nelle seguenti, si notano due distinti indirizzi, uno prevalentemente geometrico, preferito dagli Italiani, le cui scaturigini si trovano però nella fondamentale memoria di Brill e Nöther (v. p. 47), l'altro di preferenza analitico seguìto dalla scuola di E. Picard. Il II vol. (1906) della *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes*, scritta da quest'ultimo in collaborazione col Simart, contiene, oltre una esposizione metodica dei risultati da lui ottenuti, una succosa nota di G. Castelnuovo e F. Enriques ove sono compendiati lucidamente i concetti e le proposizioni più essenziali da essi stabiliti (2). Ad essa ci sia lecito rimandare i nostri lettori, e per dare una idea dello svolgimento storico della dottrina in questione diamo in una Nota alla fine dell'attuale § l'elenco cronologico dei più cospicui lavori relativi sino a quell'epoca.

Mentre in tutte le ricerche testè ricordate non si fa alcuna distinzione fra elementi reali e elementi non reali, essa serve di fondamento ai lavori di A. Comessatti che ci affrettiamo a segnalare come di notevole importanza: *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale* (Math. Ann. 72, 1912); *Sulla connessione delle superficie razionali reali* (Ann. di mat. III, 23, 1915).

20. Intimamente ed indissolubilmente collegate a queste geniali ricerche sono gli studi sopra alcune superficie, abbastanza generali, ma sotto qualche aspetto specializzate dovuto a F. Enriques (*Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche*, Lincei Rend., V, 5, 1896; *Le superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 2$, Id., 6_1 1897; *Sulle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 3$, Ivi; *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali*, Id., 7_1 1898 e Math. Ann., 52, 1899; *Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali*, Ivi; *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, Palermo Rend., 20, 1905; *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè stesse*, Ivi; *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, Mem. Soc. XL, III, 14, 1906) e E. Picard (*Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment*

---

(1) H. F. Baker, *On some Recent Advances in the Theory of algebraic Surfaces* (Proc. L. M. S. II, 12, 1913); G. Castelnuovo e F. Enriques *Grundeigenschaften der algebraischen Flächen* e *Die algebraischen Flächen vom Gerichtspunkt der binationalen Transformationen* (Encykl. math. 3, II Tl., I Hälfte).

(2) Si vegga anche l'articolo di S. White nelle *Lectures an mathematics delivered from September 2 to 5, 1913, befare members of the Amer. math. Soc*, (New-York, 1905).

par des fonctions uniformes de deux paramètres Bull. S. M. F., 28, 1900), a P. Painlevé *(Sur les surfaces qui admettent un groupe infini discontinu de transformations birationnelles;* C. R., 126, 1898), a G. Castelnuovo insieme all' Enriques (*Sur une classe de surfaces algébriques*, C. R. 131, 1900), a S. Kantor *(Sur les surfaces qui possedent une série non linéaire de courbes rationnelles;* Ivi), ad A. Berry (*Sur les surfaces du quatrième degré qui admettent une intégrale de différentielle totale de première espèce,* C. R., 129, 1899 (1); *On quartic surfaces which admit integrals of the first kind of total differential,* Cambridge Trans., 18, 1900; *On certain quintic surfaces which admit integrals of the first kind of total differentials,* Id. 19, 1902, e 20, 1903), a H. Lacaze (*Sur la connexion linéaire de quelques surfaces algébriques;* (Toulouse Ann., II, 3, 1902), ad U. Amaldi *(Determinazione delle superficie algebriche, su cui esistono più di due fasci di curve algebriche unisecanti;* Lincei Rend., V, II, 1902), ad A. Maroni, (*Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi,* Torino Atti, 38, 1903; *Intorno alla determinazione dei sistemi lineari di curve sopra le superficie rigate algebriche,* Rend. Ist. Lomb., II, 36, 1903), ad M. de Franchis (*Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve,* Palermo Rend., 20, 1895), a J. Eiesland, *On certain Class of algebraic Translation surfaces* (Amer. Journ. 29, 1907), a G. Bagnera e M. de Franchis, *Sopra le superficie algebriche che hanno le coordinate del punto generico esprimibili con funzioni meremorfe quadruplicemente periodiche di due parametri* (Lincei Rend. V, 16, 1907), a F. Enriques e F. Severi, *(Intorno alle superficie iperellittiche* (Ivi) e *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (Acta 32, 1909, e 33, 1910) (2), a G. Bagnera e M. de Franchis, *Le superficie le quali ammettono una rappresentazione mediante funzioni iperellittiche di due argomenti* Mem. Soc. XL, III, 15, 1908); a G. Scorza, *Le superficie a curve sezioni di genere 3* (Ann. di mat., III, 16, 1909, e 18, 1910), a G. Fano, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari* (Palermo Rend., 29, 1910), a L. Godeaux, *Mémoire sur les surfaces algébriques de genre zero et bigenre un* (Bull. S. M. F., 43, 1915), a C. H. Sisam, *On surfaces containing a system of Cubic that de not constitute a Pencil* (Amer. Journ. 41, 1913) e *On Surfaces containing two Pancils of Cubic*

(1) E' ivi dimostrato che, di superficie dell' indicata specie, oltre i coni e due segnalate da Poincaré et Picard, ne esistono altre tre.

(2) Memoria che nel 1907 ottenne il Premio Bordin dall' Accademia delle scienze di Parigi. Si connettono a questo lavoro i seguenti scritti di Margherita Piazzolla - Beloch *Intorno alla iperellittività di certe superficie con 18, 14 punti doppie* e *Sulle immagini proiettive delle superficie iperellittiche di rango 2* (Palermo Rend. 50 e 51, 1926-27).

curves (Ivi), a N. Spampinato, (*Le trasformazioni birazionali periodiche sulle superficie iperellittiche con due fasci di curve ellittiche*, Ann. di mat., III, 36, 1921, *Intorno alle involuzioni situate sopra le superficie iperellittiche con due fasci di curve ellittiche*, Id. 31, 1922, e *Le involuzioni sulle superficie iperellittiche generate da gruppi di trasformazioni delle superficie in sè*, (Note e Mem., 2, 1924) a M. Verzi, *Sulla costruzione delle superficie iperellittiche cicliche* (Palermo Rend. 43, 1924), a G. Marletta, (*Delle superficie algebriche con infinite coniche*, Palermo Rend. 40, 1915) e a E. G. Togliatti, (*Sulle superficie algebriche con infinite coniche*, Lincei Rend. V, 24, 1915_2).

21. Scrivendo quanto precede abbiamo quasi involontariamente abbandonato il campo delle superficie algebriche generali per entrare in quello delle superficie speciali, nel quale rimarremo per descrivere le migliorie e gli incrementi delle nostre cognizioni sulle superficie di ordine determinato.

Cominceremo, naturalmente, dalle quàdriche, segnalando in primo luogo l'articolo di O. Staude, *Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven* nel III Vol. dell' *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*.

La costruzione di tali superficie fu nuovamente (1) studiata da K. Rohn (*Die Construction der Fläche zweiten Grades durch neun gegebene Punkte;* Leipziger Ber., 46, 1894), H. Liebmann, (*Ueber die Construction der Fläche zweiten Grades aus neun gegebenen Punkte;* Zeitschr. f. Math., 41, 1896), J. Kleiber (*Zur Construction einer Fläche zweiten Grades aus neun Punkte*, Ivi), J. Thomae (*Lineare Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten*, Leipziger Ber., 49, 1897), il quale estese un suo antico procedimento (v. p. 84) al caso in cui alcuni dei punti dati sono immaginari (v. anche la nota dello stesso autore *Zur Hesse'schen Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten;* Zeitschr. f. Math. 43, 1898), E. Kötter (*Construction der Oberflache zweiter Ordnung, welche neum gegebene Punkte enthält;* Deutsch. Math. V e 9, 1901), A. Adler (*Zur Konstrukuction der Fläche zweiten Grades aus neus gegebenen Punkten*, Wiener Ber., 110, 1901) e C. Méray (*Construction de la surface du second ordre déterminée par neuf points ou neuf plans tangents;* Nouv. Ann., IV, 6, 1906). Una questione più generale trovasi trattata nell'articolo di H. Neumann, *Construction eine Fläche zweiter Ordnung F, aus neun ihr conjugierten Flächen zweiter Klasse* Φ_2 (Mo-

(1) Per le ricerche anteriori si vegga, oltre il testo (p. 84), H. Bogehold, ***Historisch-kritische Darstellung der Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkte*** (Diss. Jena, 1898) e C. Klöres, ***Zur Geschichte der Steiner'schen Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung*** (Diss. Rostock, 1903).

natshefte, 11, 1900); mentre della determinazione dell'ottavo punto base di una rete di quadriche venne nuovamente (v. p. 83) studiata da K. Rohn (*Einige Beiträge zum Problem des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiten Grades;* Leipziger Ber., 53, 1901; *Beiträge zur Bestimmung des achten Schrittpunktes von drei Flächen zweiten Grades*, Id. 60, 1908) e H. Neumann (*Die acht associerten Schnittpunckte von drei Flächen zweiten Ordnung*; (Math. Ann., 73, 1912).

Di generazioni projettive delle quadriche trattano i seguenti scritti: W. Vogt, *Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene* F^2 *erzeugen* (Arch. Math. Phys. III, 13, 1908); F. Schur, *Über die Erzeugung der Flächen zweiten Grades durch korrelative Bündel* (H. Weber Fest. 1912); F. London, *Die Erzeugung der Flächen zweiter Ordung durch Korrelationen* (Deutsch. M. V., 26, 1917).

Una quadrica s'incontra anche come Hessiana del sistema di cinque piani (C. F. Geiser, *Die konjugerten Kernflächen des Pentaeders*, Zürich. Naturf. Ges., 50, 1905), mentre la Steineriana corrispondente è una superficie di ottavo ordine.

Notevoli ricerche analitiche sulle superficie in questione leggonsi nelle due seguenti memorie: E. Kanser, *The invariant theory of the inversion group: geometry upon a quadric surface* (Trans. Amer. M. S., 1, 1900), O. Staude, *Ueber die Erzeugenden der Flächen zweiter Ordnung* (Archiv. f. Math., III, 9, 1905); mentre un caso speciale della projezione stereografica, già segnalato dal Clifford *(Geometry on ou ellipsoid;* Proc. L. M. S. IV, 1872), fu studiato particolareggiatamente da E. Ascione (*Proiezione ombelicale relativa alle quadriche a punti ellittici*, Napoli Atti, II, 10, 1899).

Le proprietà focali delle quadriche continuarono ad interessare ed occupare i geometri come provano i seguenti scritti: O. Staude, *Die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung* (Leipzig, 1896), *Die Gleichung der Ellipsoide und Hyperboloide als Resolvente der biquadratischen Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen* (Leipziger Ber., 47, 1897) e *Die algebraische Grundlage der Focaleigenschaften der Paraboloide* (Ivi e Math. Ann., 50, 1898); R. Sturm, *Ueber die Jacobi'sche Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades* (Journ. F. Math., 122, 1900 e 140, 1911); E. Grandhaudt *Zur Theorie der Fokaleigenschaften der Krümmungshurven auf den Flächen zweiter Ordnung* (Diss. Rostok, 1901); E. von Weber, *Das imaginäre in der Geometrie der konfokalen Flächen 2. Ordnung* (Münchener Ber., 34, 1904); T. Reye, *Folgerungen aus einene Satze von Bobillier über confocale Flächen zweiten Grades* (Palermo Rend., 22, 1906); C. Servais, *Sur les quadriques homofocales* (Mathésis, III, 7, 1907), e *Sur les points focaux dans les surfaces du* *second degré* (Porto Ann., 2, 1907); W. Fr. Meyer, *Zur Theorie der konfokalen Gebilde zweiten Ordnung* (Leipzig, Ber., 59, 1905).

La determinazione delle « linee di Darboux » (v. p. 138), cioè delle curve di una quadrica in ogni punto delle quali la relativa sfera osculatrice tocca la superficie, fu fatta da A. Pell (« *D* » — *lines on quadrics;* Trans. Amer. M. S., 1, 1900), mentre una particolare deformazione di una rigata di 2° grado venne investigata da F. Schur (*Die Deformation einer geradlinigen Fläche zweiten Grades ohne Aenderung der Längen ihrer Geraden;* Zeitschr. f. Math., 44, 1899) e le relazioni di una quadrica con uno speciale tetraedro lo furono da A. Almeyer nella Diss. *Ueber Tetraeder mit Höhenschrittpunkt bei einer Flächen 2. Ordnung* (Diss. Strassburg 1901).

Ricorderemo da ultimo gli scritti concernenti poligoni o poliedri inscritti o circoscritti rispetto ad una o più quadriche, alcuni dei quali sono prodotti da sforzi per estendere allo spazio le proprietà dei poligoni di Poncelet (v. p. 22) E. Müller, *Ein Satz über Flächen zweiter Ordnung und seine Beziehungen zur Kreisgeometrie der Ebene* (Journ. f. Math. 122, 1900); G. Fontené, *Sur les polyèdres mobiles comparables aux polygones de Poncelet* (Nouv. Ann., III, 18, 1899); G. Kohn, *Ueber eine besondere Lagenbeziehung von zwei Oberflächen zweiter Ordnung* (Monatshefte, 11, 1900) e *Ueber Flächen zweiter Ordnung, welche einander wechselseitig stützen* (Deutsch.-Math. Ver. 15, 1906); R. A. Roberts, *On a certain doubly infinite system of twisted polygons* (Mess. 34, 1904); G. Humbert, *Sur les tétraèdres inscrits et circonscrits à des quadriques* (Bull. S. M. F., 32, 1904); T. Reye, *Ueber Tedraeder, deren Kanten einer Fläche zweiter Ordnung berühren* (Archiv. III, 9 1905 e 16, 1910); K. Rohn, *Zwei Flächen zweiten Grades und die Tetraeder, deren Kanten beide zugleich tangieren* (Leipz. Ber. 61, 1909), *Geschaart — involutorische Lage zweier Flächen zweiten Grades* (Id. 67, 1915), *Kongruente Kegelschnitte und kongruente Fläche zweiten Grades, erstere einem Dreieck, letztere einem Sechsflach einbeschrieben* (Id. 69, 1917), *Beiträge zum Normalenproblem der Flächen 2. Grades* (Id. 70, 1918), *Flächen 2. Grades und Tetraeder mit vier oder sechs berührenden Kanten* (Ivi); R. Sturm, *Die Basen, in Bezug auf welche zwei Kreise oder zwei Kugeln zu einander polar sind* (Arch. Math. Phys., III, 21, 1913); L. Klug, *Ueber Tetraeder, deren Kanten eine Kugel berühren* (Math. Ber. aus Ungarn, 34, 1926), *Die orthocentrische Polartetraeder der Flächen zweiter Ordnung* (Id.) e *Ueber die einer Flächen zweiter Ordnung eingeschriebenen orthocentrischen Tetraeder* (Id.).

A sistemi lineari di quadriche si riferiscono i lavori seguenti: L. Brusotti, *Ricerche sui fasci di quadriche nello spazio ordinario* (Palermo Rend., 27, 1909); C. Bonferroni, *Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha* *dimensione irregolare* (Torino Atti, 50, 1915); G. Loria, *Fasci di quadriche rotonde e curve cartesiane* (Lincei Rend. V, 27, 1918$_1$); S. Jolles, *Die durch eine polare korrelation in sich selbst überführbaren Regelflächen zweiter Ordnung* (Math. Zeit. 26, 1927); O. Staude, *Zur Theorie des Flächenbüschels zweiter Ordnung* (Journ. f. Math. 156, 1926).

22. Sulle superficie del terz'ordine si è di recente acquistato un manuale elementare, che già additammo parlando delle cubiche piane. Il Dumont, che ne è autore (v. anche le note *Sur deux formes particulières de l'équation réduite des surfaces de troisième ordre générales*, Id., 26, 1898, e *Sur l'une des formes canoniques de l'équation des surfaces cubiques*, Nouv. Ann. III, 17, 1898), in particolare erasi dianzi già proposta ed aveva risolta la questione se il noto teorema di Chasles (*Aperçu hist.* Note XX; che afferma la trasformabilità di qualunque curva del terz'ordine in una a centro, fosse suscettibile di estensione allo spazio (*Théorèmes sur les surfaces cubiques analogues au théoreme de Chasles sur les cubiques planes;* Bull. S. M. F., 25, 1897). Un problema elementare di geometria descrittiva (E. Wälsch, *Ueber eine Aufgabe des darstellenden Geometrie*, Monatshefte, 3, 1892; Fiedler, Ivi) convenientemente generalizzato da T. Schmidt (*Ueber das Coincidenzproblem*, Id., 4, 1893), guidò questi (*Ueber trilinear verwandte Felder als Raumbilder*, Id., 6 e 7, 1895-96) a notevoli applicazioni alle superficie (ed ai complessi) di terz'ordine. Altre ricerche sulle stesse superficie diedero i notevoli risultati che leggonsi nelle seguenti memorie: E. Wälsch, *Ueber eine Behandlungweise der Flächen dritter Ordnung* (Deutsch.-Math. Ver., 4, 1897); K. Bobek, *Ueber die Invarianten der Flächen dritter Ordnung* (Monatshefte, 8, 1897); J. I. Hutchinson, *The Hessian of the cubic surface* (Bull. Amer. M. S., II, 5 e 6, 1899-900); T. Reye, *Beziehungen der allgemeinen Fläche dritter Ordnung zu einer kovariante Fläche der dritter Klasse* (Math. Ann., 55, 1901); R. Sturm, *Bemerkungen zu Cremona's Abhandlung über die Flächen dritter Ordnung* (Journ. f. Math. 134, 1908); G. Kohn, *Uber einige Eigenschaften der allgemeine Fläche dritter Ordnung* (Wiener Ber., 117, 1908); H. F. Baker, *Note on the Theory of the cubic Surface* (Proc. L. M. S., II, 9, 1911); A. Lecxon, *On cubic Surfaces: The reduction of a quaternary Cubic from the Sum of six Cubes to the Sum of five* (Id., 7, 1909); A. B. Grieve, *Some points in the Geometry of cubic Surfaces* (Id. 12, 1913); A. Emch, *Some geometric Applications of symmetrie Substitution Groups* (Amer. Journ. 45, 1913); G. P. Sousley, *Invariants and C. variants of the Cremona cubic Surfaces* (Amer. Journ. 39, 1917); Margherita Piazzolla Bellech, *Nuovo metodo per la classificazione delle curve situate sopra superficie cubiche* (Giorn. matem. 59, 1921).

In particolare, delle rette di una superficie cubica si occuparono nuovamente: H. M. Taylor, *On a special form of the general equation of a cubic surface and on a diagram representing the twenty-seven lines on the surface* (Phil. Trans., 185, 1894); J. de Vries, *La configuration formée par les vingt-sept droites d'une surface cubique* (Arch. néer., II, 6. 1901); L. E. Dickson, *The configuration of the 27 lines on a cubic surface and the 28 bitangents to a quartic curve* (Bull. Amer. M. S., II, 8, 1901); W. H. Blythe, *To place a «double-six» in position* (Quart. Journ., 34, 1902); A. Kasner, *The double-six configuration connected with the cubic surface and related group of Cremona transformations* (Amer. Journ. 25, 1903); M. Zacharias, *Ueber die Beziehung zwischen den 27 Geraden auf einer Fläche dritter Ordnung und den 28 Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierter Ordnung* (Diss. Rostock, 1903); W. Burnside, *On the Group of the twenty-seven Lines of a cubic Surface* (Quart. Journ., 40, 1909); A. Wendersen, *The twenty-seven Lines upon the cubic Surface* (Cambridge, 1911); G. T. Benett, *The System of Lines of a cubic Surface* (Proc. L. M. S. 11, 10, 1912); L. Berzolari, *Proprietà caratteristiche della configurazione formata dalle rette e dai piani tritangenti di una superficie del terzo ordine* (Lincei Rend., V, 25, 1916); E. Stenfors, *Die Schläflische Konfiguration von zwölf Geraden einer Fläche dritter Ordnung* (Helsingfors, 1921) e *Ueber die Geradenkonfiguration einer Fläche dritter Ordnung bzw. Klasse* (Acta Soc. Fennicae (13 (A), 1922). La rappresentazione della superficie immaginata da S. Kantor (vedi p. 103) venne nuovamente studiata da F. Morley nella nota *On the geometry whose elements is the 3-point of a plane* (Trans. Amer. M. S., 5, 1904) e altre procedure con lo stesso scopo sono studiate nei due lavori: G. Majcen, *Über eine Abbildung der allgemeinen Fläche 3. Ordnung und einige daraus abgeleitete Eigenschaften der rationalen ebenen Kurven 3. und 4. Ordnung* (Wiener Ber. 117, 1908) e L. Zängl, *Die eindeutige Abbildung der Fläche dritter Ordnung auf eine Ebene* (Id., 124, 1917).

Un passo della celebre memoria premiata di Cremona ricevette notevoli complementi per opera di C. Segre (*Sur la génération projective des surfaces cubiques;* Arch. f. Math., III, 10, 1906), e R. Sturm (*Ueber die Erzeugung der Fläche 3. Ordnung durch kollineare Bündel und trilineare Büschel;* Ivi).

Pure a metodi di generazione delle superficie in discorso si riferiscono le due memorie: S. Jolles, *Der Zusammenhang des Doppelsechs mit der Grassman'sche Erzeugung kubischer Fläche* (Arch. Math. Phys., III, 16, 1910); A. Terracini, *Di alcune superficie del 3. ordine che sfuggono a una generazione data da Steiner* (Giorn. di matem. 49, 1911).

Dati sei punti arbitrari di un piano resta individuata la rappresentazione di una superficie cubica e la superficie stessa; perciò nasce il problema, conoscendo le coordinate di quei sei punti, determinare l'equazione della superficie. Esso fu risolto in modi differenti da A. B. Coble (*The lines and the triple tangents planes of a cubic surfaces*, J. Hopkins Univ. Circulars, 1911) e W. Fr. Meyer (*Ueber ein Eliminationsproblem*, Deutsch. Math. Ver., 36 e 37, 1927-28).

23. Aggiungiamo, prima di abbandonare l'attuale soggetto, l'indicazione dei più cospicui fra gli scritti di data più recente relativi a speciali superficie cubiche: F. Dumont, *Sur les surfaces du troisième ordre qui sont les polaires d'elles-mêmes par rapport à une quadrique* (Bull. S. M. F., 25, 1897; sono superficie rigate o dotate di tre punti biplanari), *Sur les surfaces réglées du troisième degré à un seul côté* (Bull. S. M. F., 26, 1898; è ivi applicato un criterio per distinguere le superficie unilaterali stabilito nella nota di Delaunay, *Sur les surfaces n'ayant qu'un côté et sur les points singuliers des courbes planes*, Ivi), e *Sur les surfaces cubiques ayant un axe de symétrie ternaire et sur les surfaces cubiques possédant des points à indicatrice du trosième ordre* (Id., 28, 1909); A. Sucharda, *Ueber die asymptotischen Curven gewisser Flächen dritter Ordnung mit gewöhnlichen Knotenpunkten* (Monatshefte, 8, 1897); K. Bobek, *Ueber Flächen dritter Ordnung, welche Collineationen in sich zulassen* (Id., 10, 1889); C. Bioche, *Mémoire sur les surfaces du troisième ordre qui admettent pour lignes asymptotiques une cubique gauche* (Bull. S. M. F., 27, 1899); F. C. Ferry, *Geometry on the cubic scroll of the first kind* (Lie Arch., 21, 1889) e *Geometry on the cubic scroll of the second kind* (Amer. Journ., 23, 1901); S. Glaser, *Untersuchung der Flächen dritten Grades welche bei der Abbildung nach der Princip de reciproken Radienvektoren in sich selbst zurückkehren* (Progr. Belin, 1902 e 1903); M. J. van Uven, *La surface cubique de révolution* (Arch. Teyler, III, 8, 1903); A. S. Gale, *On three types of surfaces of the third order regarded as double surfaces of translation* (Bull. Amer. M. S., II, 10, 1904); G. Majcen, *Eine neue Erzeugungsart für verschiedene typische Formen der Flächen 3. Ordnung* (Deutsch-Math. Ver., 14, 1905); J. Krames *Die Regelfläche dritter Ordnung, deren Striktionslinie eine Ellipse ist* (Wiener Ber., 127, 1918), *Die Striktionslinie des Normalenfläche des Torus längs eines Loxodromenkreies* (Id. 128, 1919), *Die Regelflächen dritter Ordnung deren unendlich ferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskulieren* (Id. 133, 1924) e *Ueber das Zerfallen der Striktionlinie von Regelflächen*

(Id., 135, 1926); Margherita Piazzolla Beloch, *Sulle superficie del 3° ordine possedenti curve con circuiti concatenati* (Palermo Rend., 54, 1930).

In particolare alla superficie cubiche che hanno il massimo numero di punti doppi si riferiscono i seguenti lavori: W. H. Salmon, *Some Properties of four-nodal cubic Surfaces, being analogous of Pascal's Theorem and the nine-points Circle in three Dimension* (Arch. Math. Phys. III, 18, 1911); W. E. Timerding, *Über Flächen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten* (Id. 20, 1912); E. Lampe, *Über eine besondere Frage, deren Beantwortung auf eine kubische Oberfläche mit vier Knotenpunkten führt* (Ivi); M. Zacharias, *Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung aus vier Doppelpunkten* (Id. 16, 1911).

24. Mentre la teoria delle superficie cubiche rimase pressochè stazionaria in quest'ult.mo decennio, forse per l'eminente grado di perfezione da essa già raggiunto, sgraziatamente la teoria delle superficie generali del quart'ordine non conseguì cospicui incrementi, forse perchè non venne peranco trovata la via regia capace di guidare alla scoperta delle proprietà di tali notevoli figure, onde può dirsi che l'unico progresso compiuto sia rappresentato dagli studi fatti dal Rohn (in continuazione di quelli sulle superficie cubiche citati a pag. 89) sopra *Die Raumcurven auf den Flächen vierter Ordnung* (Leipziger Ber. 49, 1897).

Numerosi e fecondi furono invece gli studi intorno a varie speciali superficie del IV ordine, la maggior parte anteriormente note. Così la proprietà caratteristica della superficie di Steiner di essere tagliata in due coniche da ogni suo piano tangente, venne nuovamente dimostrata dal Vahlen (*Ueber die Steiner'sche Fläche*, Acta, 19, 1895), mentre il teorema scoperto da Lie (v. la memoria citata p. 97), dell'essere il luogo dei poli di un piano rispetto alle coniche di una superficie di Steiner un'altra superficie della stessa specie, venne confermato da A. Brambilla (*Intorno alla superficie di Steiner;* Napoli Rend., III, 4, 1898), D. Montesano (*Le superficie romana di Steiner;* Id., 5, 1899) e poi, mediante considerazioni iperspaziali, da C. Rosati (1876-1929) (1) (*Sulle superficie di Veronese e di Steiner;* Torino, Atti, 35, 1900). Altri studi sopra la stessa superficie si debbono a E. Lacour (*Sur la surface de Steiner*, Nouv. Ann. III, 17, 1890, e *Reduction à la forme canonique des formules qui donnent, en fonction rationnelle de deux paramètres, les coordonnées d'un point de la surface de Steiner*, Ivi). Le superficie in questione, assieme ad altre superficie di 4° ordine, s'incontra anche trattando analiti-

(1) G. Scorza, *Sull'opera scientifica di Carlo Rosati* (Il Boll di Matem., T. 25, 1929).

camente il problema di costruire un triangolo conoscendone le bisettrici (v. la Diss. di F. Bützenberger (1862-1923), *Ein mit der Theorie algebraischer Flächen zusammenhängendes planimetrisches Problem;* Bern. 1889). Della reciproca della superficie di Steiner si tratta nel lavoro di J. Kniat, *Ein Problem aus der analytischen Geometrie des Raumes* (Progr. Rössel, 1897), ove essa è considerata da un punto di vista analogo a quello prescelto già dall'Eckardt (v. p. 97) e da O. Handel (*Das räumliche Analogon eines Steiner'schen Problems der Ebene;* Breslau, 1877).

Sulla superficie di Kummer, punto di concorso di tante svariate teorie analitiche e geometriche, si possiede da poco un'ottima esposizione metodica, dovuta ad un giovane troppo presto rapito alla scienza, R. W. H. T. Hudson (*Kummer's quartic surface;* Cambrige, 1905). Inoltre furono pubblicate le antiche indagini compiute da C. F. Geiser (*Das räumliche Sechsech und die Kummer'sche Flächen;* Wolf Zeitschr., 41, 1896), per ottenere geometricamente tutti i punti singolari di una superficie di Kummer di cui sono dati sei (cfr. la memoria di H. Weber citata a pag. 98). Altri studi sulla stessa superficie leggonsi nelle seguenti memorie: W. Wirtinger, *Ueber die Beziehung der Kummer'schen Fläche zur projectiven Erzeugung der ebenen Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkt* (Deutsch. Math.-Ver., 4, 1897); G. Humbert, *Sur une génération géométrique de la surface de Kummer* (Palermo Rend. 11, 1897); S. Kantor, *Ueber Collineationsgruppen an Kummer'schen Flächen* (Amer. Journ. 19, 1897, ivi sono determinate le collineazioni che mutano in sè stesse la superficie in questione); J. I. Hutchinson, *The asymptotic lines of the Kummer surface* (Bull. Amer. M. S., II, 5, 1899) e *On some birational transformations of the Kummer surface into it self* (Id. 7, 1901); H. E. Timerding, *Ueber die sechszehn Doppelpunkte und sechszehn Doppelebene einer Kummerschen Fläche* (Math. Ann., 54, 1901); E. Pascal, *Sulla classificazione delle superficie di Kummer* (Rend. Ist. Lomb., II, 38, 1906); H. Bateman, *Kummer's quartic Surface as a Wave surface* (Proc. L. M. S. II, 8, 1910); V. Snyder, *An application of a (1,2) quaternary correspondence to the Kummer and Weddle Surfaces* (Trans. A. M. S. 12, 1911); C. Rosati, *Sulle assintotiche della superficie di Kummer* (Palermo Rend., 35, 1913).

In particolare concernono il tetraedroide di Cayley i seguenti lavori: I. J. Hutchinson, *Note on the tetrahedroid* (Bull. Amer. M. S. II, 4, 1898), J. de Vries, *Ueber ein Abbidulung der Ebene auf eine gewisse Kummersche Fläche* (Monatshefte, 12, 1901) e D. N. Lehmer, *The parametric representation of the tetrahedroid surface* (Amer. Journ. 25, 1903). In quest'ultima memoria la detta superficie è rappresentata col mezzo di funzioni σ; ora un'analoga rappresentazione della superficie delle onde fu investigata da H. Weber (*Darstellung der Fresnel'schen Wellenfläche durch elliptischen Functionen;* Wolf Zeischr., 41, 1896) e E. Lacour (*Sur la surface de l'onde;* Nouv. Ann. III, 17, 1898). A. G. Humbert devesi poi la ***Détermination des courbes algébriques de dégré donné qu'on peut tracer sur la surface de l'onde*** (Bull. S. M. F., 30, 1902); ricorderemo ancora due articoli, uno di A. Mannheim (*Propriété nouvelle de la surface de l'onde;* C. R., 122, 1896), l'altro di E. Lacour (*Sur la surface de l'onde et la surface correspondante d'élasticité;* Nouv. Ann. III, 19, 1900), e del resto rimanderemo il lettore desideroso di maggiori ragguagli all'ottimo *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den Fresnelschen Wellenflche,* compilato con la consueta diligenza da E. Wölffing (Bibl. math., III, 3, 1902). (1)

Rampollano pure dalle classiche ricerche di Kummer le indagini di C. M. Jessop sopra *The quartic surfaces with 14, 15 and 16 nodes* (Quart Journ. 31, 1900), preliminari al volume *Quartic Surfaces with singular Points* (Cambridge, 1916).

Al pari di tali superficie sono esenti da linee singolari quelle che sono studiate nei seguenti lavori: D. Montesano, *Su alcune superficie omaloidiche di 4° e 5° ordine prive di linee multiple* (Napoli Rend., III, 6, 1900); M. de Franchis, *Le superficie irrazionali di 4° ordine di genere geometrico superficiale nullo* (Palermo Rend., 14, 1900); A. Maroni, *Sulle superficie del 4° ordine con soli punti doppi* (Rend. Ist. Lomb. II, 38, 1905); E. Traynard, *Sur une surface hyperelliptique* (C. R., 138 e 140, 1904-05); G. Fano, *Sopra alcune superficie del 4° ordine rappresentabili sul piano doppio* (Rend. Ist. Lomb., II, 39, 1906); J. N. van der Vries, *On Steinerians of quartic Surfaces* (Amer. Journ., 32, 1919); F. R. Sharpe e V. Snyder, *Birational Transformations of certain quartic Surfaces* (Trans. Amer. M. S. 15, 1914) e *Certain quartic Surfaces belonging to infinite discontinues Cremonian groups* (Id. 16, 1915); Margherita Piazzolla Beloch, *Sulle superficie iperellittiche del 4° ordine con 15 e 14 punti doppi* (Palermo Rend. 47, 1923, 48, 1924 e 49, 1925).

25. Delle superficie quartiche a conica doppia trattano la già citata memoria del Fraser e quelle di R. Suppantschitsch, *Ueber Oberflächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt* (Progr. Prag Neustadt, 1904) e di G. Darboux, *Représentation sur un plan de la surface du quatrième or-*

(1) Ai lavori ivi citati va aggiunta una lettera di F. Joachimsthal a Schellbach pubblicata da F. Müller nel T. 20, 1907, p. 76-8 delle *Abhand. zur Gesch. der Mathematik.*

dre qui admet comme courbe double une conique (C. R. 160, 1915); in particolare di quelle aventi per conica doppia il cerchio immaginario all'infinito le due seguenti: P. F. Smith, *On a surface enveloped by spheres belonging to a linear spherical complex* (Trans. Amer. M. S., 1, 1900); C. L. E. Moore, *Classification of the surfaces of singularities of the quadratic spherical complex* (Amer. Journ. 27, 1905); E. Bompiani, *Rappresentazione grafica delle ciclidi di Dupin e delle loro lossodromiche* (Mem. Ist. Lomb. 21, 1914); M. Joung, *Dupin's Cyclide as a selfdual Surface* (Amer. Iourn. 38, 1916); A. Bloch, *Sur les cercles paratactiques et la cyclide de Dupin* (Journ. de math. IX, 3, 1924).

La classificazione delle dette superficie fu di recente effettuata nella Diss. di Ilse Bocgnell *Ueber speziellen Zyklide* (Grefswald, 1926) applicando concetti e metodi di H. Beck (v. la memoria *Ueber konforme Transformationen in Raume*, Journ. f. Math. 155, 1925).

Ad altra superficie con infiniti punti doppi sono dedicate la Diss. di F. Zimmermann, *Untersuchugen über Flächen vierter Ordnung mit einer doppelten Geraden* (Breslau, 1904) e la memoria di G. Majcen, *Die Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgerade und eine besondere Mannigfaltigkeit von Flächen zweiter Ordnung* (Wiener Ber., 121, 1912).

L'antico teorema di Villarceau, secondo cui ogni toro è segato in due circoli da ogni suo piano bitangente, venne completato con l'osservazione che tali circoli sono lossodromiche della superficie (v. A. Mannheim, *Sur le théorème de Schoelcher*, Nouv. Ann., IV, 3, 1903; *Démonstration du théorème de Villarceau*, Ivi). Nuove ricerche sulla superficie (di Weddle) luogo dei vertici dei coni quadrici passanti per sei punti dati (v. p. 103) portano le firme di J. I. Hutchinson (*A special form of a quartic surface*, Ann. of Math., II, 1897) e H. Bateman (*Elementary note on the Weddle surface;* Proc. L. M. S., II, 3, 1905). Anche le superficie isogonali (v. p. 103) furono di nuovo studiate dall'Heffter (*Ueber Modellirung von Isogonalflächen;* Zeitschr., 41, 1896). Nuove specie di superficie biquadratiche invece sono quelle studiate da G. Baumberger (*Die Cassinische Fläche*, Diss. Bern, 1900), A. del Re (*Sopra una superficie del 4° ordine*, Palermo; Rend. 17, 1903; si tratta ivi del « pectenoid » incontrato per la prima volta da R. Stawell Ball nella sua celebre *Theory of screws*) e L. Rémy (*Sur un hessien hyperelliptique*, C. R. 142, 1906: è ivi studiata l'Hessiana di una superficie subica; *Sur les surfaces hyperelliptiques définies par des fonctions intermediaires singulières*, Id.).

Alle rigate di 4° grado si riferiscono i seguenti scritti: L. Rouyer, *Sur les surfaces réglées du quadrième dégré* Toulose, Ann. II, 2, 1900); G. Fonténé, *Sur les surface du quadrième ordre qui ont deux droites doubles*

(Nouv. Ann. III, 19, 1900); F. W. Williams, *Geometry on ruled quartic surfaces* (Proc. Amer. Acad., 36 1900); E. M.Blake, *Two plane movements generating quartic scrolls* (Trans. Amer., M. S., I, 1900); G. Huber (*Die Konkoidenfläche, eine Linienfläche vierter Ordnung;* Monatshefte, 14, 1903); E. Janisch (1868-1915), *Ueber die Berührungshyperboloide der windschiefen Flächen mit Leitkegelschnitt und zwei geraden Leitlinien* (Monatshefte, 10, 1899); E. Weinholdt, *Ueber kinematische Erzeugung von Regelflächen 4. Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 52, 1903); H. Mohrmann, *Die Flächen vierter Ordnung mit gewundener Doppelkurve* (Math. Ann. 89, 1923).

26. La teoria generale delle superficie del quinto ordine è tuttora un desiderio. Ma parecchie speciali superficie di tal fatta diedero origine a un buon numero di lavori, per vari motivi notevoli. Citiamone i principali: S. J. Joly, *The Theory of Linear Vector Functions* (Dublin Trans. 30, 1895, cfr. E. Study, *Geometrie der Dynamen*, Leipzig, 1902, p. 479); D. Montesano, *Le superficie omaloidiche di 5° ordine* (Napoli Rend., III, 7, 1901 e *Nuovi tipi di superficie razionali di 5° ordine* (Id. 13, 1907); A. Pensa, *Sulle superficie razionali di 5° ordine* (Ann. di mat. III, 6, 1901); E. Pascal, *La classificazione delle superficie di 5° ordine con quintica doppia* (Lincei Rend., V, 14, 1905,); W. Jaeckel *Ueber Flächen fünfter Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve* (Diss. Breslau, 1904); J. E. Hill, *On quintic Surfaces* (Math. Review I, 1907); M. de Franchis, *Le superficie più volte irregolari di 5° ordine con punti tripli* (Lincei Rend., V, 15, 1906_2); A. R. Williams, *The Montesano quintic surface* (Bull. Amer. Math. Soc., 34, 1928) e *Rational quintic surfaces with two skew double lines* (Ivi).

Fra tutte le superficie di quint'ordine attrassero maggiormente l'attenzione dei geometri quelle che contengono infinite coniche. Se ne occuparono anzitutto M. de Franchis, *Le superficie irregolari di 5° ordine con infinite coniche* (Lincei Rend. V, 15, 1906_2), C. N. Sisam, *Corcening systems of conics lying on cubic, quartic and quintic Surfaces* (Amer. Journ. 30, 1908) e G. Marletta, *Sulle superficie algebriche con infinite coniche, in particolare su quelle d'ordine 5* (Atti Acc. Gioenia, V. 8, 1915). L'accademia di Berlino — memore che un illustre suo membro, E. E. Kummer, aveva determinato tutte le superficie di quarto ordine contenenti infinite coniche — propose nel 1910, come tema di concorso al premio Steiner, la ricerca analoga per quelle di 5°; il premio fu aggiudicato nel 1922 a E. G. Togliatti (v. *Berliner Ber.* 1922) per un lavoro tuttora inedito, ma costituito da materiali che si trovano in una nota che già citammo e in altri due lavori che stiamo per segnalare.

Delle analoghe superficie dell'ordine immediatamente superiore trattano i seguenti scritti: G. Marletta, *Delle superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche* (Lincei Rend. V. 24, 1915_2): E. G. Togliatti, *Sulle superficie di 6° ordine con infinite coniche* Ivi) e *Le superficie di sesto ordine con infinite coniche* (Mem. Ist. Lomb., 21, 1917).

A questi seguono naturalmente i due lavori di Gelsomina Grimaldi, *Le superficie razionali d'ordine 7 con infinite coniche* (G. di mat. 54, 1916) e *Delle superficie d'ordine 7, con un fascio ellittico di coniche* (Palermo Rend., 42, 1917).

Segnaliamo qui altre superficie di ordine superiore al quinto che vennero investigate: G. Bordiga, *Le superficie razionali di 6° ordine che passano doppiamente per gli spigoli di un tetraedro* (Atti Ist. Ven., 69 1919): G. H. Sisam, *On a rational sextic Surface having a nodal Curve of order 9* (Amer. Journ., 7, 1915), *On sextic Surfaces having a nodal Curve of order 8* (Id. 38, 1916) e *On surfaces doubly generated by Conics* (Quart. Journ. 1916); G. Marletta, *Delle superficie algebriche d'ordine 6 e 7 con un fascio di cubiche ellittiche* (Palermo Rend., 41, 1916, e 42, 1917); J. H. Hill, *On three septic Surfaces* (Amer. Journ. 19, 1897); P. del Pezzo, *Intorno ad una superficie del sest'ordine con nove rette doppie* (Napoli Rend., III, 3, 1897); A. Brambilla (*Sopra una famiglia di superficie dell'ottavo ordine*, Giorn. di mat., 35 ,1897; sono generalizzazioni della superficie di Steiner). Al pari di queste superficie sono dell'8° ordine quelle studiate da E. Traynard (*Sur certaines fonctions thêta et sur quelques-unes des surfaces hyperelliptiques auxquelles elles conduisent*, C. R., 139, 1904), nonchè le superficie « astronomiche » investigate da J. Thomae (*Ueber die durch die leuchtende Sonnenkugel und den Saturnring erzeugte Schattenfläche*, Leipziger Ber., 48, 1896)e Dziobek (*Ueber die Schattenfläche*, Astr. Nachr., 1898), e così dicasi della Steineriana del sistema di cinque piani (C. F. Geiser, *Die konjugierten Kernfläche des Pentaeders*, Wolf Zeit., 50, 1905; la Hessiana di detto sistema è, come dicemmo, una quadrica). Chiudiamo questo elenco con le due seguenti memorie: A. Tummarello, *Nuovi tipi generali di superficie razionali: superficie d'ordine m con retta (m - 3) — pla ed m - r punti tripli* Giorn. mat., 58, 1920; P. Roth, *Ueber die Flächen, die die Punktpaaren zweier und einer algebraischen Kurven abbilden* (Wiener Ber., 129, 1920).

In particolare alle rigate degli ordini 5, 6, 7, si riferiscono le seguenti memorie: C. H. Sisam, *On directrix curves of quintic scrolls* (Bull. Amer. M. S., II, 10, 1903) e *On self-dual scrolls* (Bull. Amer. M. S. II, 8, 1902; v. una correzione indicata dal Wilczynski nello stesso vol.); W. Snyder, *On the form of quintic scrolls* (Bull. Amer. M. S. II, 8, 1902), *On the quintic scrolls having three double conics* (Id., III, 9, 1903), *On the forms of unicursal* *sextic scrolls of genus one*, *On the forms of unicursal scrolls of genus greater than one* (Amer. Journ., 25, 1903), *On the form of sextic scrolls having a rectilinear directrix*, *On the form of sextic scrolls having no rectilinear directrix* (Id., 27, 1905) e *On the quintic scrolls having a tacnodal or oscnodal conic* (Bull. Amer. M. S., II, 11, 1905), J. H. Sisam, *On septic Scrolls having a rectilinear Directrix* (Amer. Journ. 29, 1907); W. F. Williams, *Curves on quintic Scrolls* (Id. 34, 1912); T. Reye, *Die kubische Raumkurve als Leitkurve von Regelflächen dritten bis seschsten Grades* (Journ. f. Math., 152, 1921); A. Terracini, *Su alcune superficie rigate razionali* (Rend. Ist. Lomb., II, 48, 1915); M. Mancinelli, *Sulle superficie rigate che hanno per asintotiche infinite cubiche gobbe* (Ann. di mat. III, 29, 1929); A. Buch, *On certain Class of rational ruled Surfaces* (Amer. Jorn. 42, 1920); C. V. Hanumanta Rao, *Some Considerations en the general Theory of ruled Surfaces* (Proc. L. M. S., II, 19, 1920); E. P. Lane, *Ruled Surfaces with generators one-to-one Corrispondence* (Trans. A. M. S. 25, 1923); G. G. F. James, *Some Formulae for Scrolls and Line-systems in ordinary Space* (Proc. Cambridge M. S., 23, 1926). In particolare di sviluppabili trattano i seguenti lavori: A. Rosenblatt, *Zur Klassifikation der abwickelbaren algebraischen Flächen* (Krakau Anz., 1911); H. Mohrmann, *Ueber die abwickelbaren Flächen der ersten sieben Ordnung* (Deutsch. Math. Ver., 24, 1915); A. Pensa, *Geodetiche sulle rigate sviluppabili generiche e delle superficie coniche* (Torino Atti, 63, 1928).

27. Più generali sono le ricerche di V. Snyder sulle *Asymtotic lines on ruled surfaces having two rectilinear directrices* (Bull. Amer. M. S. II, 5, 1899) e le seguenti di E. J. Wilczynski: *A fundamental theorem in the theory of ruled surfaces* (Math. Ann., 58, 1903), *On ruled surfaces whose flecnode-curve intersect every generator in two coincidents poits* (Trans. Amer. M. S., 5, 1904), *Studies in the general theory of ruled surfaces* (Ivi), *General theory of Curves and ruled Surfaces* (Id., 6, 1905) e *General projective Theory of Space curves* (Ivi e 8-9 1907-08); esse prelusero all'importante opera *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces* (Leipzig, 1906). A rigate razionali si riferisce invece la nota di C. H. Sisam, *On the determination of the properties of the nodal curve of a unicursal ruled surface* (Amer. Journ., 28, 1900).

La ricerca delle linee di stringimento delle rigate fu ripreso, per includervi le superficie costituite da linee isotrope, da H. Beck nella memoria *Ueber Striktionsgebilde* (Deutsch. Math.-Ver., 37, 1928), alla quale fanno seguito alcune *Bemerkungen* di J. Krames, ove sono inserite ampie notizie bibliografiche sull'argomento.

Finiremo questo cenno sulle rigate citando lo scritto di P. Ernst, *Ueber das Küppersche Konoid* (Monatshefte, 17, 1906) e notando che P. Appell ha di recente dimostrato che il cilindroide è l'unica superficie conoide godente la proprietà che i piedi delle perpendicolari calate sulle sue generatrici da un punto qualunque dello spazio stiano in un piano (v. la nota *Propriété caracteristique du cylindroïde*, Bull. S. M. F., 28, 1900; altra dimostrazione in R. Bricard, *Sur une propriété du cilindroïde*, Id., 29, 1901); tale teorema spinse A. Demoulin (*Sur une classe particulière de surfaces réglées*, C. R., 132, 1901) alla ricerca delle rigate tali che il luogo di quei piedi sia una linea, non piana, ma sferica.

28. Le superficie contenenti un numero finito di rette furono nuovamente (v. p. 107) investigate da J. de Vries (*Surfaces algébriques renfermant un nombre fini de droites;* Arch. Teyler, II, 8, 1902) e quelle contenenti parecchie serie di coniche da T. Reye (*Ueber quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittschaaren;* Math. Ann., 48, 1896) ed E. Cosserat (*Sur l'emploi de l'espace à quatre dimensions dans l'étude des surfaces algébriques admettant plusieurs séries de coniques*, C. R., 124 1897). Generalizzando poi la generazione delle rigate mediante il movimento di una retta costantemente segante tre curve, nei seguenti scritti si è intrapreso lo studio delle figure che nascono dall'analogo movimento di una conica o di una cubica: M. Stuyvaert, *Sur les plans qui coupent en des points d'une conique un système de lignes de l'espace* (Belgique Mém., 62, 1902) e *Etude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre* (Diss. Gand, 1903); V. Snyder, *Surfaces generated by conics cutting a twisted quartic curve and an axis in the plane of the conic* (Bull. Amer. M. S., II, 112, 1906).

Ad altra categoria di superficie (non tutte algebriche) importante e non del tutto nuova (v. p. 107) si riferisce la memoria di S. Lie *Bestimmung aller Flächen, die eine continuirliche Schaar von projectiven Transformationen gestatten* (Leipziger Ber., 47, 1895), nonchè quelle di G. Fano (*Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè*, Palermo Rend., 10, 1896, e *Un teorema sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè*, Id., 11, 1897); per la somiglianza del tema ricorderemo qui ancora la nota di U. Amaldi sopra *Le superficie con infinite trasformazioni conformi in sè stesse* (Lincei Rend., V, 10 1901, II). Sviluppi di altre idee di

S. Lie, che risalgono all'anno 1882, leggonsi nel lavoro di A. Peter, *Die Flächen deren Haupttangentencurven linearen Complex angehören* (Lie Archiv., 17 1895); mentre nuova è l'indagine a cui è dedicata la memoria di C. Bioche intitolata *Recherches sur les surfaces algébriques qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche* (Bull. S. M. F., 26, 1898; cfr. una comunicazione preliminare in C. R., 125, 1897). Chiuderemo questo elenco citando le ricerche di Lo Piano, *Intorno ad una superficie dell'ordine* $n+2$ *dotata di una curva doppia dell'ordine* $\frac{1}{2}\, n\, (n-1)+1$ (Napoli Rend., III, 6, 1900) — superficie che appartiene alla categoria delle figure generabili mediante forme fondamentali in corrispondenza univoca (cfr. p. 108) (1) —, le osservazioni di E. Kanser sopra le superficie algebriche $f(x, y, z) = 0$ soddisfacenti l'equazione $\Delta_2 f = 0$ (*Some properties of potential surfaces;* Bull. Amer., M. S., II, 8, 1902) e la memoria di Haton de la Goupilière (1833-1926) *Surfaces nautiloïdes* (Porto Ann., 3, 1908).

Benchè questa sezione della presente opera sia dedicata alle superficie algebriche, pure crediamo opportuno di rilevare come sia stato compiuto un tentativo per dare una certa unità a quanto conoscevasi intorno a svariate superficie trascendenti, dopo di avere osservato che tutte quelle note si possono considerare come superficie integrali di una coppia di equazioni differenziali del seguente tipo:

$$\Sigma\, f_{p,q,r}(x, y, z) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^p \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^q \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^r = 0\,;$$

grazie alla loro analogia con le « curve panalgebriche » furono denominate *superficie panalgebriche* (G. Loria, *Sopra un'estesa categoria di superficie trascendenti*, Rend. Ist. Lomb., II, 44, 1911; E. Turrière, *Sur ler surfaces panalgébriques de M. G. Loria*, 47, 1914).

NOTA BIBLIOGRAFICA
SULLA RECENTE TEORIA DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE

1895. E. Picard. *Sur la théorie des surfaces et des groupes algébriques* (Palermo Rend. 9); F. Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche* (Math. Ann. 46).

1896. C. Segre, *Intorno ad un carattere della superficie e delle varietà superiori algebriche* (Torino Atti, 31, 1896); P. Painlevé, *Sur les transformations biuniformes des surfaces algébriques* (C. R., 122, 1896); G. Castelnuovo, *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Memorie Soc. XL, III, 10), *Sulle superficie di genere* 0 (Ivi; qui sono per la prima

(1) Su queste figure si può anche vedere una memoria (in polacco, ma con un riassunto in tedesco) di A. Plamitzer nel T. XXXV (1928) del periodico *Prace matematyczno-fizyczne*.

volta stabilite le condizioni necessarie e sufficienti per le rappresentabilità di una superficie algebrica su un piano); F. Enriques, *Introduzione alla geometria sulle superficie algebriche* (Ivi), *Sui piani doppi di genere uno* (Ivi; cfr. G. Castelnuovo et F. Enriques, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, Math. Ann., 48); E. Picard, *Sur deux invariants nouveaux dans la théorie générales des surfaces algébriques* (C. R. 122).

1897. E. Picard, *Sur la théorie des surfaces algébriques au point de vue de la géométrie de situation et sur les intégrales des différentielles totales* (C. R., 124); G. Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (Ann. di mat., II, 25 1897) e *Sul genere lineare di una superficie e sulla classificazione a cui essa dà luogo* (Lincei Rend. V, 6, 1° Sem.); F. Enriques, *Sulla irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un'equazione algebrica* f (x, y, v) = 0 *con funzioni razionali di due parametri* (Math. Ann., 49).

1898. E. Picard, *Sur les systèmes linéaires de lignes tracées sur une surface algébrique* (Palermo Rend., 13), *Sur l'impossibilité de certaines séries de groupes de points sur une surface algébriques* (C. R., 126) e *Quelques remarques relatives aux périodes des intégrales doubles et aux cycles à deux dimensions dans les surfaces algébriques* (Ivi); F. Enriques, *Una proprietà della serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare* (Palermo Rend. 13).

1899. E. Picard, *Sur les systèmes linéaires de lignes tracées sur une surface algébrique* (Palermo Rend., 13); F. Enriques, *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare* (Ivi).

1901. G. Castelnuovo e F. Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (Ann. di mat., III, 6).

1902. F. Enriques, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche* (Torino, Atti, 37); F. Severi, *Il genere aritmetico ed il genere lineare in relazione alle reti di curve tracciate sopra una superficie algebrica* (Ivi).

1903. E. Picard, *Sur l'impossibilité de certaines séries de groupes de points sur une surfaces algébrique* (Journ. de math. V, 9), *Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales doubles et leurs rapports avec la théorie des intégrales doubles de seconde espèce* (Ivi); F. Severi, *Sulle relazioni che legano i caratteri invariantivi di due superficie in corrispondenza algebrica* (Rend. Ist. Lomb., II, 36); A. Berry, *A generalisation of a theorem of M. Picard with regard to integrals of the first kind of total differentials* (Acta, 27).

1904. F. Enriques, *Sul gruppo di monodromia delle funzioni algebriche appartenenti ad una data superficie di Riemann* (Lincei Rend., V, 13), *Sur les surfaces algébriques irrégulières* (C. R., 139) e *Sur les surfaces algébriques de genre zéro* (Ivi); E. Picard, *Sur quelques théorèmes relatifs aux surfaces algébriques de connéxion linéaires supérieure à l'unité* (C. R., 139), *Sur un théorème général concernant les surfaces algébriques de connéxion linéaire supérieure à l'unité* (Ivi) *Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques* (Ivi) e *Sur certaines équations fonctionnelles et sur une classe de surface algébriques* (Ivi); G. Castelnuovo *Sur les intégrales de différentielles totales appartenant à une surface irrégulière* (Ivi); F. Severi, *Sur la totalité des courbes tracées sur une surface* (Ivi), *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della seconda specie* (Lincei Rend. V, 13; Math. Ann. 60), *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Torino Atti 39), *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Torino Mem., II, 54).

1905. F. Severi, *Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Lincei Rend., V, 12, II), *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica* Rend. Ist. Lomb., II, 38), *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare* (Palermo Rend. 20), *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (Ann. di mat. III, 12; cfr. C. R., 140); *Sulla differenza tra i numeri degli integrali di Picard della I e della II specie, appartenenti ad una superficie algebrica* (Torino Atti. 40), *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Ivi); E. Picard, *Sur la dépendence entre les intégrales de différentielles* *totales de première et de seconde espèce d'une surface* (C. R., 140) e *Sur une inégalité relative à la connexion linéaire et sur le calcul du genre numérique d'une surface algébrique* (Id. 141); G. Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Lincei Rend., V, 14, 1). *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo* (Palermo Rend., 20), e *Sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (Ivi).

1906. F. Severi, *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degli integrali di Picard* (Palermo, Rend., 21), *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (Math. Ann., 62) e *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* (Atti Ist. Ven., 65); E. Picard, *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Journ. f. Math., 129); G. Castelnuovo e F. Enriques, *Sur les intégrales le première espèce d'une surface d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* (Ann. Ec. norm. III, 22).

1907. R. Torelli, *Sui sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Torino Atti 42).

1908. F. Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (Ann. Ec. norm. III, 25).

1910. F. Severi, *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (Palermo Rend., 30).

1911. H. Poincaré, *Sur les courbes tracées sur une surface algébrique* (Berl. math. Ges., 10); V. Snyder, *Infinite discontinous groups of birational transformations which leave certain surfaces invariant* (Trans. A. M. S., 11); H. W. E. Jung, *Über das numerische Geschlecht einer algebraischen Fläche* (Hamb. Mitth., 5).

1912. H. W. E. Jung, *Über die Zeuthen-Segresche Invariante* (Palermo Rend., 34) e *Über die ausgezeichnete Kurven algebraischer Flächen* (Journ., f. Math., 142); A. Rosenblatt, *Sur certaines classes de surfaces algébriques irrégulières et sur les transformations birationnelles de ces surfaces en elles-mêmes* (Krakau Anz.) e *Algebraische Flächen mit diskontinuirlichen unendlich vielen birationalen Transformationen in sich* (Palermo Rend. 33).

1913. F. Severi, *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie* (Math. Ann., 74); M. de Franchis, *Alcune osservazioni sulle superficie irregolari* (Palermo Rend., 36); A. Rosenblatt, *Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité* $p_g > 2\ (p_a + 2)$ (Id., 35); H. W. E. Jung, *Abhängigkeit des numerischen Geschlecht einer algebraischen Flächen von den Verzweigungkurven* (Hamb. Mitt., 5); L. Godeaux, *Sur les correspondences rationnelles entre deux surfaces algébriques ayant mêmes genres arithmétique et linéaire* (Torino Atti, 43), *Sur les involutions appartanant à une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ (Bull. S. M. F. 41), *Mémoire sur les susfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (Toulouse Ann. III, 5).

1914. R. Torelli, *Un criterio d'equivalenza per le curve di una superficie algebrica* (Torino Atti 49); H. W. E. Jung, *Über die kanonische Klasse einer auf einer algebraischen Flächen liegenden algebraische Kurve* (Schwarz Fest.); L. Godeaux, *Mémoire sur les involutions appartenent à una surface de genre 1* (Ann. Ec. norm., III, 31 e 36).

1915. G. Albanese, *Intorno ad alcuni concetti e teoremi fondamentali sui sistemi algebrici di curve d'una superficie algebrica* (Ann. di mat. III, 24).

1916. H. W. G. Jung, *Über das numerischa Geschlecht* (Hamb. Mitth., 5).

1922. L. Godeaux, *Sur les correspondeces rationnelles entre deux surfaces de genre 1* (Belg. Bull.); A. Comessatti, *Intorno alle superficie irr. con* $p_g > 2\ (p_a + 2)$ *e ad un problema analitico ad esse collegato* (Palermo Rend., 46); H. W. E. Jung, *Kurven auf algebraischen Flächen* (Math. Zeit., 13), *Ebene Schnitte und Berührungskegel einer algebraischen Flächen* (Ivi), *Über die Rückkehr - Wende - und Flachkurve einer algebraische Flächen* (Id. 14), *Über Flächen mit einer Büschel rationaler Kurven* (Math. Ann. 32, 1922) e *Über die Salmonschen Tangenten einer algebraischen Fläche* (Journ. f. Math. 152).

1924. L. Godeaux, *Sur les involutions d'ordre huit appartenant à une sur-*

face de genre un (Belgique Mém., 7); F. Backes, *Etudes de quelques transformations de courbes et de surfaces* (Ivi). H. W. E. Jung, *Algebraische Fläche* (Hannover).

1925. N. Spampinato, *Le trasformazioni birazionali in sè di una varietà abeliana a tre dimensioni* (Catania, Rend. Circ. matem.); A. Comessatti, *Sulle trasformazioni involutorie delle varietà algebriche* (Atti Ist. Ven., 85); Letizia Onali, *Un teorema sulla superficie del minimo ordine passante per una curva sghemba* (Lincei Rend. VI. 1, 1925).

1926. A. Rosenblatt, *Sopra i moduli delle varietà algebriche a tre dimensioni* (Rend. Semin. matem. Roma, 4, 1926).

1927. N. Spampinato, *Le trasformazioni birazionali in sè di qualunque varietà abeliana pura* (Palermo Rend., 51); A. Comessatti, *Sulle trasformazioni involutorie delle varietà algebriche* (Atti Ist. Ven. 87); P. Albanese, *Formole fondamentali della geometria sopra una varietà algebrica* (Ann. di mat. IV, 4).

1928. A. Maroni, *Sulla dimensione dei sistemi lineari sopra le varietà algebriche a* k + 1 *dimensioni contenenti un fascio di* Sk (Id. IV. 5).

1930. A. Maroni, *Sistemi lineari speciali sopra una superficie algebrica composti con una involuzione di coppie di punti* (Atti Ist. Ven. 89); A. Comessatti, *Le involuzioni sulle curve algebriche e il teorema generale di diramazione per le funzioni fuchsiane* (Lincei Mem. VI. 3) e *Sulle trasformazioni birazionali delle curve algebriche interpretate come rotazioni del piano iperbolico* (Ann. di mat. IV. 8).

§ 4. Teoria delle curve algebriche a doppia curvatura

29. Gli studi che vennero fatti nell'ultimo trentennio intorno alla teoria delle curve gobbe algebriche non sono per importanza comparabili a quelli con cui Cayley, Halphen e Nöther diedero ad essa l'impronta che essa era ed è destinata a conservare. Ciò non ostante, la benefica influenza di tali lavori continuò ad essere visibile. A provarlo basti ricordare i già citati lavori del Rohn sulle curve di una superficie di 3° o 4° ordine, nonchè altri dello stesso autore (*Bestimmung der Constantenzahl bei Raumcurven*, Deutsch. Math.-Ver., 5, 1897; *Ueber den Zusammenhang der von Flächen beliebieger Ordnung auf einer Raumcurven ausgeschnittenen Punktgruppen mit denen ihrer Restcurven*, Leipziger Ber., 49, 1897; *Ueber algebraische Kurven*, III Math. Kongr., 1904), di L. Autonne (*Sur la représentation des courber gauches algébriques et sur le nombre des conditions qui expriment qu'une courbe gauche est située sur une surface;* Ann. Univ. Lyon, 1896), di H. Mohrmann (*Modifikation Cagleyscher Formaln für gewundene Kurven auf einem Kegel zweiter Ordnung*, Arch. Math.-Phys., III, 27, 1918) e di M. Legaut (*Sur le courbes gauches algébriques et leurs systèmes de points doubles apparents*, Bull. S. M. F., 54, 1926). La ricerca delle curve autocorrelative fu fatta, limitandosi al caso di linee razionali, da G. Gherardinelli nella memoria *Sulle curve sghembe algebriche con soli due rami autoduali* (Lincei Rend. V, 33, 1924_1). Altri scritti provengono invece dall'applicazione delle funzioni algebriche alla geometria (v. ad es. Krüpper, *Ueber Beziehungen zwischen polygonalen und Raum-*

curven, Prager Ber., 1896), onde rientrano nella categoria degli studi sulla varietà ad una dimensione degli spazi lineari. Un notevole contributo alla geometria numerativa di tali curve è rappresentato da due lavori di L. Berzolari (*Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche;* Rend. Ist. Lomb., II, 33, 1900) e F. Severi (*Sopra le coniche che toccano o secano una o più curve gobbe;* Torino, Atti, 36, 1900-01); però il rigore delle argomentazioni ivi usate essendo stato a ragione sospettato, l'Accademia di Kopenhagen pose a concorso nel 1902 la questione (1) della legittimità di sostituire una curva gobba di ordine *n* con un sistema di curve d'ordine inferiore; e poichè, sgraziatamente, ad essa non fu data risposta alcuna, ai risultati surriferiti venne allora da taluno negato l'ammissione nella raccolta di quelli definitivamente acquisiti dalla scienza. Con altri metodi le stesse questioni furono studiate da G. Marletta (*Per i numeri caratteristici dei sistemi di coniche plurisecanti una curva gobba;* G. di matem., 56, 1918) e Sebastiano Longo (*Sulle coniche plurisecanti una curva gobba;* Atti Acc. Gioenia, 17, 1929).

Citiamo passando un'interpretazione data da S. Kantor alle formole di Cayley ed analoghe (v. la nota *Una nuova interpretazione delle formole di Plücker, Veronese e di altre formole di geometria;* Atti Ist. Ven., 60, 1901), e notiamo come la trasformabilità di ogni curva gobba in altra esente da punti singolari, che già fece oggetto di lavori che citammo a p. 114, fu nuovamente stabilita da B. Levi (*Sulla trasformazione di una curva algebrica in un'altra priva di punti multipli;* Lincei Rend., V, 7, 1898$_1$) e A. del Re (Napoli Rend., III, 7, 1901). Ai punti singolari delle curve sghembe si riferiscono due note di A. Meder (*Ueber einige Arten singulärer Punkte von Raumkurven;* Journ. f. Math. 116, 1906 e *Analytische Untersuchungen singulärer Punkten von Raumkurven*, Id. 137, 1909) ed una di E. Wölffing (*Ueber besondere mehrfache Punkte von Raumcurven*, Böklen Mitth., II ,1, 1899); mentre la condizione affinchè la curva d'intersezione di due superficie abbia per figura correlativa la sviluppabile costituita dai piani tangenti a due superficie venne stabilita dall'Hossfeld (*Beiträge zur Theorie der Raumcurven;* Progr. Eisenach, 1896) in continuazione di sue indagini anteriori. Una nuova definizione di due caratteristiche fondamentali di una curva sghemba trovasi esposto nella nota

(1) Eccone l'enunciato: «L'Accademia chiede una risposta ben giustificata alla questione di sapere se ogni famiglia di curve gobbe — secondo la classificazione ordinaria — contenga della forme-limiti costituite da rette. Nel caso in cui si debba dare risposta negativa a tale domanda, si chiedono ricerche sia sulle condizioni cui deve soddisfare una famiglia per contenerne, sia sopra la eventuale limitazione di alcuni fra i risultati raggiunti servendosi di queste forme limiti». (Bollettino di bibliografia e stor., 4, 1901, p. 63).

di G. B. Guccia, *Sopra una nuova espressione dell'ordine e della classe di una curva gobba algebrica* (Palermo Rend., 21, 1906). Invece ricerche analitiche sulle figure in questione furono compiute da E. Wölffing (*Die Krümmung der Raumcurven in singulären Punkten derselben;* Archiv, II, 14, 1896), A. Brill (*Ueber die Darstellung algebraischen Raumcurven durch eine Gleichung;* Götting. Nachr., 1900, *Ueber algebraische Raumkurven;* Math. Ann., 64, 1907) e G. Loria (*Sui fondamenti della teoria proiettiva delle curve algebriche ghembe;* Palermo Rend., 17 ,1903; ivi la equazione del piano osculatore di una curva sghemba, nelle ipotesi più generali). Da notarsi ancora la memoria di E. J. Wilczynski, *General projective theory of space curves* (Trans. Amer. M. S., 6, 1905) e la recente Diss. di A. Greul, *Ueber Scharen von* ∞^{2n} *Kurven in* R_n I Teill: *Der Fall* $n=2$ (Greifswald, 1905), la quale appartiene all'ordine delle idee che portano il nome di S. Lie; finamente l'*Introduzione alla geometria delle forme binarie* (Math. Ann. 90, 1913) di A. Comessatti.

30. Passando ad occuparci delle curve speciali (1), in primo luogo citeremo gli studi sui sistemi di coniche nello spazio compiuti da M. Pieri (*Sopra alcune congruenze lineari di coniche*, Torino, Atti, 28, 1893), D. Montesano (*Su le congruenze lineari di coniche*, Rend. Ist. Lomb., II, 26, 1893; *Su i varii tipi di congruenze lineari coniche dello spazio*, Napoli Rend., III, 1, 1895; *Le congruenze lineari di coniche nello spazio*, Giorn. di mat. 49, 1911; *I complessi bilineari di coniche*, Napoli Atti II, 15, 1912; *Sulla teoria delle congruenze lineari di coniche nello spazio*, Napoli Rend. III, 26, 1920); E. Timerding (*Ueber lineare Systeme von Kegelschnitten*, Götting. Nachr., 1900) e J. de Vries (*The congruence of the conics situated on the cubic surfaces of a pencil* e *A congruence of order two and class two formed by conics*, Amsterdam Acad., Proc., 1904); *Kongruenzen von Kegelschnitten erster Ordnung und erster oder zweiter Klasse* (Nieuw Arch. II, 10, 1912); L. Godeaux, *Recherches sur les systemes de coniques dans l'espace* (Liege Mem., III, 9, 1912) (2); E. Veneroni, *Sulle congruenze* [21] *di coniche nello spazio* (Rend. I. L., II, 54, 1912), *Tipi particolari di sistemi* [21] *di coniche nello spazio* (Ivi), e *Sulle congruenze* [21] *di coniche che appartengono ad inversioni spaziali* (Id. 55, 1922); C. G. F. James, *On the analytical Representation of Congruences of Conics* (Proc. Cambridge phil. Soc., 21, 1922)

(1) Per maggiori particolari si ricorra a G. Loria, *Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti* (Bologna 1925-26).

(2) Le considerazioni ivi esposte si trovano estese nella memoria *Sulle congruenze lineari di curve piane dotate di una sola curva singolare* (Palermo Rend. 34, 1912).

e *Complexes of Conics and the Weddle Surface* (Id. 22, 1925). Più ampie sono le ricerche di R. A. Johnson sopra *The Conic as a Space element* (Trans. A. M. S., 15, 194), ove per coordinate di una conica si assumono i coefficienti a_{ik} dell'equazione tangenziale di una quadrica nell'ipotesi che essi soddisfino la condizione che sia il determinato $a_{ik}=o$.

Numerosi sono i lavori concernenti le cubiche gobbe. Alcuni ebbero per stimolo il desiderio di estendere allo spazio la nozione di « poligoni di Poncelet »; a tale categoria appartengono due note, l'una di G. Kohn (*Ueber rämliche Poncelet'sche Polygone*, Wiener Ber., 106, 1897), l'altra di G. Fontené (*Tétraèdres, octaèdres, icosaèdres inscrits à une cubique gauche et circonscrits à une quadrique;* Nouv. Ann., IV, 4, 1904). Un notevole complemento ai procedimenti per costruire una cubica gobba venne dato da J. Thomae con la nota *Lineare Konstruktion einer Raumkurve dritter Ordnung aus drei Paaren conjugiert-imaginärer Punkte* (Leipziger Ber., 54, 1904) e nuove applicazioni della rappresentazione della teoria delle forme binarie su gruppi di punti di una tale linea si trovano in memorie di J. Fairon (*Sur la représentation géométrique dans l'espace des formes quadratiques et cubiques binaires*, Liège Mém., III, 5, 1904) e F. P. Lewis (*A geometrical application of the Theory of the binary Quintic*, Amer. Journ. 36, 1914). A poligoni e poliedri connessi alla considerazione di una o più cubiche gobbe (in particolare ai « tetraedri di osculazione »), a corrispondenze su tali curve ed a loro proprietà metriche, si riferiscono molti lavori di cui ci è forza indicare i soli titoli: G. Kohn, *Ueber die kubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten kubischen Raumcurve in vier, fünf oder sechs Punkten berühren* (Wiener Ber., 105, 1896; Math. Ann., 52, 1889), *Ueber die Oktaeder-und Ikosaederlage von zwei kubischen Raumcurven* (Wiener Ber., 108, 1899), *Ueber kubische Raumkurven, welche dasselbe Tetraeder in gleicher Weise zum Schmiegungstetraeder haben* (Monatshefte, 14, 1903); C. Servais, *Sur les imaginaires en géométrie. Application à la théorie des cubiques gauches* (Belgique Mém., 49, 1896); A. Grünwald, *Die Projection einer unebenen Curve dritter Ordnung R_3 und die ebenen Schnittcurven ihrer Trangentenfläche in Zusammenhange mit dem zugehörigen Nullsystem* (Progr. Karolinenthal, 1897); G. Gallucci, *Sui tetraedri inscritti in una cubica gobba* (Napoli Ren., II, 4, 1898); J. de Vries, *Kubische Involutionem I und II Stufe auf kubische Raumcurven* (Nieuw Arch., II, 4, 1899); M. Stuyvaert, *Note sur les cubiques gauches* (Belgique Bull., 1900), *Le théoréme de Chasles rélatif aux cubiques gauches* (Mathésis, II, 10, 1900) e *Sur la sphère osculatrice à la cubique gauche* (Nouv. Ann. IV, 3, 1900); H .E. Timerding, *Sur les lignes* *osculatrices d'une cubique gauche* (Ann. di mat., III, 4, 1900); W. F. Meyer, *Über neue Konfigurationeneigenschaften von kubischer Raumkurven* (Leipziger Ber., 65, 1913) e *Ein grundlegendes Satz von Poncelet über die Brennpunkte der Kegelschnitte und seine Ausdehnung auf kubische Raumkurven* (Deutsch. M. V, 24, 1918); Kippels, *Involutorische Regelschaaren zweiten und Raumkurven dritter und vierter Ordnung im geschaart involutorischen Raum* (Diss. Strassubrg, 1904); L. Berzolari, *Sopra la configurazione di Kummer e il suo intervento nella teoria delle cubiche gobbe* (Lincei Rend. V, 16, 1907_1) S. Jolles, *Zur synthetische Theorie der Raumkurven III Grades k^3 und der Kongrueng C^3_1 ihrer Schmiegungrstrahlen*, *Kubische Raumkurven und biquadratische Regelflächen, die bezüglich k^3 autoconjugiert Sind* (Journ. f. Math., 130, 1905); *Der Buschel kubischer Raumkurven und seine autokonjugate Kurve* (Math. Zeit, 2, 1913); *Eine neue Polarentheorie der Raumkurven dritten Grades* (Id. 5, 1919); T. Reye, *Ueber Beziehungen zwischen symmetrische kubische Raumkurven* (Math. Zeit, 5, 1919); R. Sturm, *Durch Tangenten bestimmte kubische Raumkurven* (Arch. Math. Phys., III, 23, 1914) e *Das System der kubischen Raumkurven mit drei gegebenen Tangenten und seine Ausartungen* (Arch. Math. Phys., III, 27, 1918); F. K. Wakeford, *Chord of Twisted Cubics* (Proc. L. M. S., II, 21, 1922); W. Vogt, *Metrische Untersuchungen der kubischen Hyperbel, insbesondere der gleichseitigen* (Journ., f. Math., 141, 1902); G. Loria, *Le cubiche gobbe aventi ciascuna all'infinito tre punti reali e distinti* (D'Ovidio Scritti); J. Sobotka, *Sur une relation entre quatre secantes doubles d'une cubique gauche* (Bull. intern. de l'Acad. tchèque des Sciences, 1926); T. Kubota, *Einige Säke über Raumkurven dritter Ordnung* (Math. Zeit., 26, 1927).

La ricerca delle forme degeneri di una cubica gobba fu effettuata da A. Brill (*Ueber Raumkurven dritter Ordnung*, Palermo Rend., 25, 1908) applicando considerazioni generali di cui facemmo già menzione (p. 339). Una notevole applicazione delle teorie di Lie leggesi nella nota di A. B. Coble *On the relation between the three-parameters groups of a cubic space curve and quadric surface* (Trans. Ann. M. S., 7, 1906).

Alle cubiche gobbe con tre asintoti a due a due ortogonali si riferisce la nota di C. Bioche *Sur les cubiques gauches équilatères* (Proc. Edinburgh M. S., 13, 1895); giova notare che lo stesso nome era stato dianzi adoperato da H. Krüger (*Ueber eine besondere kubische Raumcurve; die gleichwinklige kubische Hyperbel;* Zeitschr. f. Math., 38, 1903), per le cubiche gobbe tali che le coniche in cui ogni piano osculatore sega la relativa sviluppabile osculatrice sono iperboli equilatere. Invece quelle già studiate da Cremona, Böklen e Fr. Meyer (v. p. 119) formano oggetto del lavoro di H. S. White, *On twisted cubic curves that have a directrix* (Trans. Amer. M. S., 4, 1903). Finalmente si appoggiano in due punti immaginari coniugati del cerchio immaginario all'infinito le curve di cui si parla nei lavori del Beyel, *Der kubische Kreis mit Doppelpunkt* (Zeitschrift f. Mat., 42, 1897) e del Bricard, *Sur une certaine classe de cubiques gauches et sur de systèmes articulés qui s'y rattachent* (Bull. S. M. F., 32, 1904).

Chiuderemo questi cenni facendo menzione degli scritti seguenti concernenti i sistemi di cubiche gobbe: Lelieuvre, *Sur certaines familles de cubiques gauches* (C. R., 117, 1893); Stuyvaert, *Sur une gerbe de cubiques gauches* (Nouv. Ann., III, 19, 1900), *Sur les congruences de cubiques gauches* (C. R., 141, 1905), *Une congruence linéaire de cubiques gauches* (Belgique Bull. 1907) e *Deuxième congruence linéaire de cubiques gauches* (Palermo Rend. 26, 1908); E. Veneroni, *Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe* (Palermo Rend., 16, 1902) e *Su varii tipi di congruenze bilineari di cubiche gobbe* (Rend. Ist. Lomb., II, 37, 1904; E. Meyer, *Ueber Büschel kubischer Raumkurven* (Archiv. III, 11, 1906); G. C. James, *On complex of cubic Curves in ordinary Space* (Proc. Cambridge Phil. Soc. 21, 1923).

Quasi contemporaneamente videro la luce due esposizioni metodiche delle proprietà delle curve in questione: P. W. Wood, *The twisted Cubic, with some Account of the metric Properties of the cubical Hyperbola* (Cambridge, 1913); O. Staude, *Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitten* (Leipzig, 1913).

31. Le quartiche gobbe di I specie vennero investigate da: E. Toeplitz (*Zur Theorie der Wendeberührungspunkte der Raumcurve IV Ordnung I Species;* Progr. Breslau, 1895), J. C. Kluyver (*Concerning the twisted biquadratic;* Am. Jour., 19, 1899), H. S. White (*Twisted quartic curves of the first species and certain covariant quartics;* Ann. of. Math., II, 4, 1903); J. Thomae (*Parameterdarstedllung der Schnittkurre zweiter Ordnung;* Leipziger Ber., 56, 1904, e 60, 1908; A. M. Enders, *Ueber die Darstellung der Raumkurve vierter ordnung vom Geschlecht I duch Thetafunktionen* (Leopoldina, 85, 1906); R. de Montessus de Ballore, *Sur les quarties gauches de première espèce, leurs représentations paramétriques et leurs classification* (Journ. de math., VII, 3, 1917); G. Servais, *Sur les biquadratiques gauches de premiere espèce* (Porto Ann., 8, 1913); H. Mohrmann, *Über die Wendepunktstangentem der Raumkurve vierter Ordnung orster Art* (Math. Zeit., 5, 1919). A una quartica di I specie ben conosciuta, metricalmente specializzata, si riferisce la nota di J. Neuberg *Ueber die Schrötersche*

Raumkurven vierter Ordnung (Arch. Math. Phys., III, 14, 1909) e ad altra l'articolo di G. Loria, *Fasci di quadriche rotonde e curve cartesiane* (Lincei Rend., V, 28, 1919$_1$). In particolare la applicazione delle funzioni biperiodiche allo studio delle coniche sferiche, già indicata dall'Harnack (Math. Ann., 12), trovasi svolta nel lavoro di G. Huber, *Ueber den sphärischen Kegelschnitt und seine abwickelbare Tangentenfläche* (Zeitschr. f. Math., 45, 1900), mentre una generazione cinematica delle stesse curve venne suggerita da F. Bernstein (*Ueber eine neue geometrische-mechanische Erzeugungsweise des Kreises und der spärischen Kegelschnitte;* Zeitschrif. f. Math., 52, 1906).

32. Sulle quartiche di II specie vanno ricordate due monografie, una di H. W. Richemond (*Rational space-curves of the fourth order;* Cambridge Trans., 19, 1900), l'altra di G. Marletta (*Studio geometrico della quartica gobba razionale;* Ann. di mat., III, 8, 1902), e le memorie: G. Frauenfelder, *Büschel von Raumkurven vierter Ordnung zweiter Art mit zwei stationäre Tangente* (Monatshefte, 15, 1904); C. Bioche, *Sur les courbes gauches de 4e ordre et de 4e classe* (Bull. S. M. F., 33, 1905); Pia Locchi, *Su taluni poligoni in relazione con le quartiche gobbe razionali* (Giorn. di mat., 59, 1921); E. Ciani, *Ricerche sopra le quartiche razionali gobbe* (Palermo Rend., 52, 1928); J. de Vries, *Eine gewisse Kongruenzen von rationalen biquadratischen Raumkurven* (Proc. Acad. Amsterdam, 1929).

Applicando un noto procedimento del Brill, Anna Crespi determinò le *Forme di spezzamento delle quartiche gobbe di I e II specie* (Giorn. di Mat. 55, 1917).

Da ultimo cumulativamente alle quartiche gobbe di I e II specie (nonchè alle rigate di quarto grado con cubica gobba doppia) si riferisce la nota dello Stuyvaert, *Quadrilatères de Steiner dans certaines courbes et surfaces algébriques* (Nouv. Ann., IV, 5, 1905).

33. Maggiore novità presentano gli studi recentemente compiuti sulle curve dei due ordini immediatamente seguenti il quarto; i principali sono i seguenti: F. Deruyts (1864-1902) (1), *Sur les configurations formées par les quadrisécantes des courbes gauches rationnelles du sixième ordre* (Belgique Bull., III, 35, 1898); J. de Vries, *On twisted quintics of genus unity* (Amsterdam Ac. Proc., 1900); H. E. Timerding, *Ueber eine Raumkurve fünfter Ordnung* (Journ. f. Math., 123 1901); G. K. Nugteren, *Rationale ruimtekrommen*

(1) Cfr.: *A la mémoire de François Deruyts, 19 fév. 1864 — 22 fév. 1902.* (Bruxelles, 1902).

von de vijfde orde (Diss. Groningen, 1901); E. Ciani, *Sopra le curve gobbe di quinto ordine* (Rend. Ist. Lomb., II, 38, 1905; cfr. le relative *Osservazioni* di L. Berzolari nello stesso vol.), *Sopra alcuni gruppi lineari quaternari dotati di quartica, o di quintica gobba razionale invariante* (Ivi), *Le curve gobbe razionali di quinto ordine invarianti rispetto a gruppi finiti di collineazioni quaternarie* (Ivi), *Le curve razionali di sesto ordine invarianti rispetto a gruppi finiti di collineazioni quaternarie* (Id., 39, 1901) e *Sopra le sestiche gobbe dotate di infiniti piani tritangenti* (Id., 22, 1906); G. Marletta, *Sulle curve razionali del quint'ordine* (Palermo Rend., 19, 1905) e *Sulle quintiche razionali* (Id., 21, 1906); E. C. Colpitts, *On twisted Quintic Curves* (Amer. Journ., 29, 1907) e J. R. Conner, *The rational Sextic and the Cayley symmetroid* (Id., 37, 1915).

Vanno ancora notate le ricerche sulle curve razionali in generale fatte da F. Deruyts (*Note sur les sécantes multiples des courbes gauches rationnelles*, Belgique Bull., III, 35, 1898) e J. de Vries (*Gewisse Kongruenzen von Raumkurven*, Proc. Acad. Amsterdam, 1929), quelle di L. Berzolari *Sulle curve gobbe razionali dotate di piani stazionari singolari* (Rend. Ist. Lomb., II, 39, 1906) e finalmente quelle del Berzolari e del Ciani (Palermo Rend., 24, 1907 e 26, 1908) *Sulle curve razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione*.

CAPITOLO XIV

§ 1. Geometria differenziale (1)

1. Come nell'ordinaria geometria analitica delle curve e superficie algebriche si rispecchia la teoria delle funzioni algebriche, così si può dire che ogni formola ed ogni teorema della geometria differenziale sia il prodotto della risoluzione di un problema di analisi infinitesimale. Onde i notevoli progressi in questi ultimi tempi compiuti da questa disciplina, in particolare i nuovi concetti e i nuovi procedimenti introdotti nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie o a derivate parziali, ebbero per risultati progressi e perfezionamenti rilevanti nella bella disciplina creata da Monge e Gauss. Nel tentare di porgere un adeguato concetto di siffatte migliorie, co-

(1) Generalità al riguardo leggonsi negli scritti: E. Salkowski, *Ueber die verschiedenen Begründungsarten der Differentialgeometrie* (Deutsch. M. V., 21, 1912); W. Wirtinger, *On a general Infinitesimalgeometry in reference to the Theory of Relativity* (Proc. Cambridge Phil. Soc. 22, 1922) e *Allgemeine Infinitasimalgeometrie und Erfahrung* (Hamb. Mitth. 4, 1925).

minceremo coll'indicare le trattazioni metodiche che vennero di recente fatte della teoria che ci occupa, dopo di avere osservato che la letteratura sull'argomento, grazie a una cordiale collaborazione di analisti e geometri, si è in questi ultimi anni siffattamente arricchita, che il quadro che noi stiamo per offrire presenterà lacune e imperfezioni, che il lettore ci vorrà perdonare, considerando la gravità del còmpito che ci siamo assunti.

Oltre a nuove edizioni ed alla traduzione in tedesco delle non mai abbastanza lodate *Lezioni di geometria differenziale* del Bianchi (v. p. 165) vanno citati con onore: L. Raffy, *Leçons sur le applications géométriques de l'analyse (Eléments de la théorie des courbes et des surfaces)* (Paris, 1897); G. Scheffers, *Anwendungen der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie* (I Bd., 1900; II Bd., 1902); V. und. K. Kommerell, *Allgemeine Theorie des Raumkurven und Flächen* (Leipzig, 1903), opera informata a concetti analoghi a quelli che dominano l'opuscolo di H. Stahl e V. Kommerell, *Die Grundformel der allgemeinen Flächentheorie* (Leipzig, 1893); R. von Lilienthal, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (Leipzig, 1908); L. P. Eisenhart, *A Treatise on the Differentialgeometry of Curves and Surfaces* (Boston, 1909); A. R. Forsyth, *Lectures on Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Cambridge, 1912); J. Knoblauch, *Grundlagen der Differentialgeometrie* (Leipzig, 1913); E. Vessiot, *Leçons de géométrie supérieure* (Paris, 1919); C. E. Weatherburn, *Geometry of three dimensions* (Cambridge, 1929); G. Julia, *Eléments de géométrie infinitésimale* (Paris, 1929). A un capitolo della geometria differenziale si riferisce l'opuscolo di W. Fr. Meyer, *Über die Theorie benachbarter Geraden und einer verallgemeinerten Krümmungsbegriff. Eine Ergänzung zu den Lehrbücher der Differentialgeometrie* (Leipzig, 1911). Vanno anche qui citati i seguenti articoli inseriti nel T. III dell'« Encikl. math. »: H. von Mangoldt, *Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Kurven und Flächen;* R. von Lilienthal, *Die auf einer Fläche gezogenen Kurven* e *Besondere Fläche;* A. Voss, *Abbildung und Abwickelung zweier Flächen auf einander;* E. Salkowski, *Dreifach orthogonale Flächensysteme.* Finalmente va ricordata la nuova edizione (Paris, 1910) delle *Leçons sue les systemes orthogonaux et les cordonnées curvilignes* di G. Darboux.

A concetti nuovi (benchè basata sopra una profonda conoscenza della letteratura anteriore) è informata l'esposizione della disciplina che ci occupa fattane da W. Blaschke nei tre volumi delle sue *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Berlin, 1924-29); ivi, fra l'altro, è introdotta e largamente applicata la distinzione delle ricerche sulla superficie i cui risultati sono applicabili *in piccolo* da quelle che servono *in grande*, distinzione che i fatti dimostrarono feconda di importanti conseguenze.

2. Notevoli innovazioni di metodo si trovano nelle *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli, 1896) di E. Cesàro (tradotte in tedesco da G. Kowalewski, sotto il titolo di *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, Leipzig, 1901) (1), alla quale si connettono le seguenti note dell'autore (nonchè altre di cui parleremo trattando della geometria differenziale negli iperspazi): *I numeri di Grassmann in geometria intrinseca* (Lincei Rend., V, 3, 1894_1) *Formole per l'analisi intrinseca delle superficie e delle loro deformazioni infinitesime* (Napoli Rend., III, 7, 1901), *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie* (Ivi), *Per l'analisi intrinseca delle superfici rotonde* (Id., 9, 1903), *Sulla rappresentazione intrinseca delle superficie* (Napoli, Atti II, 12, 1903), *Per l'analisi intrinseca delle figure tracciate sopra una superficie* (Napoli Rend., III, 11, 1905) e *Sulle immagini delle geodetiche nella rappresentazione piana delle superficie* (Napoli Rend., III, 11, 1905).

Il calcolo vettoriale fece buona prova anche nello studio e nella esposizioni delle proprietà infinitesimali delle figure, come apprendesi dai seguenti scritti: J. de Vries, *Les vécteurs dans la géométrie différentielle* (Arch. Musée Teyler, II, 11, 1908); R. Rothe, *Anwendung der Vektoranalysis auf Differentialgeometrie* (Deutsch. Math. Ver., 21, 1912); C. Burali-Forti, *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale generale* (Palermo Rend. 33, 1912), *Equivalenti omografiche delle formole di Frenet; linee e superficie parallele* (Torino Atti, 52, 1917), *Alcuni sistemi di linee su di una superficie* (Id. 53, 1918) e *Linea in ogni cui punto è assegnata una direzione invariabilmente collegata al triedro principale* (Ivi); M. Pieri, *Sui sistemi di* ∞^1 *superficie* (Id. 48, 1913); G. Hessenberg, *Vektorielle Begrüdung der Differentialgeometrie* (Math. Ann., 78, 1917); M. Bottasso, *Problemi sulla determinazione delle linee sghembe* (D'Ovidio Scritti, 1918) e *Generalizzazione della trasformazione di Combescure per le curve* (Torino Atti 53, 1918); F. Sibirani, *Elementi di geometria differenziale* (Milano, 1924).

Altre innovazioni di metodo, ispirate ai concetti informatori del calcolo differenziale assoluto, trovansi praticate nelle *Lezioni sulla teoria delle superficie* (Padova, 1897) di Gregorio Ricci; riserbandoci di additare in opportune occasioni le svariate applicazioni che vennero già fatte di tale metodo, segnaliamo qui subito l'importante memoria di carattere generale di G. Ricci

(1) Cfr. E. Wölffing, *Bericht über der gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Coordinaten* (Bibl. math., III, 1, 1900).

e T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (Math. Ann., 54, 1901) e i due volumi: J. A. Schouten, *Der Ricci-Kalkül* (Berlin, 1924) e T. Levi-Civita, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto* (Roma, 1928).

3. Giova ora distinguere gli scritti concernenti le curve da quelli relativi alle superficie. Fra i primi ricorderemo le nuovi edizioni (II, 1898; III, 1914) dell'*Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung* di W. Schell (v. p. 133), opera che sembra rappresentare in Germania una parte analoga a quella che, nei paesi in cui si parla francese, disimpegna la fortunatissima *Exposition géométrique des propriétés générales des courbes* (Lausanne-Paris, V éd., 1887) di C. Rouchonnet, ed a cui sembra altrove predestinata la Diss. *Analytische theorie der ruimtkrommen* (Leiden, 1899) di J. W. Lem.

Nuove dimostrazioni geometriche delle formole di Frenet-Serret (v. p. 128) vennero suggerite dal Mannheim (*Sur les formules de Frenet*, Bull. S. M. F., 25, 1887) e nuove soluzioni congeneri di alcuni problemi concernenti le curve da W. Schell (*Synthetische Behandlung einiger Probleme über Kurven doppelter Krümmung;* Archiv. f.ä Math., III, 5, 1903). La deformazione delle curve sghembe fu studiata da A. Perna (*Sulle deformazioni infinitesime delle curve;* Giorn. di mat., 36, 1898; *L'imaginario* i *ed i numeri alternati* i, j, k *nello studio delle deformazioni infinitesime delle curve piane e delle curve storte* (Palermo Rend., 12, 1898) e G. Sannia (*Deformazioni infinitesime delle curve inestendibili e corrispondenza pr ortogonalità di elementi;* Palermo Rend., 21, 1906). Di una generalizzazione del problema che guidò alle curve di Bertrand (v. p. 129) tratta la nota di N. J. Hatzidakis *Sur une rélation géométrique entre deux courbes* (Bull. Sc. Math., II, 24, 1900); di importanti questioni analitiche concernente le figure in questione quelle di V. Rouquet intitolata *Recherches des courbes dont le lieu des centres de courbure est donné* (Toulouse Ann., II, 1, 1893) e di E. Salkowski, *Zur Bestimmung aller Raumkurven, für welche zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge eine gegebene Gleichung besteht* (Berl. math. Ges., 1905). Alla determinazione di due curve in corrispondnza univoca tali che il piano osculatore in un punto qualunque dell'una contenga il punto corrispondente nell'altra è dedicato l'articolo di G. Koenigs *Sur un problème concernant deux courbes gauches* (Amer. Journ., 19, 1897), mentre di altri problemi concernenti due curve in corrispondenza trattarono N. J. Hatzidakis in due note su *Trois formules très-générales relative aux courbes dans l'espace* (C. R., 128, 1899; Bull. sc. math., II, 23, 1899), E. Cesàro, nelle sue

Remarques sur certaines questions de géométrie intrinsèque (Mathésis, II, 18, 1900), E. Salkowski (*Eine neue Klasse von Kurvenpaaren*, Deutsch. M. Ver. 30, 1921), E. Spieweck (*Neue Paaren von Raumkurven*, Id. 32, 1923) e R. Laufer (*Analytische Kurvenpaaren*, Math. Ann. 93, 1925). Alla teoria generale delle curve sghembe appartengono poi i lavori di A. Ramorino (*Sopra alcune proprietà delle curve nello spazio in relazione con la loro curvatura e torsione;* Torino, Atti, 32, 1897), P. Epstein (*Raumkurven und Liniengeometrie;* Arch. f. Math., III, 10, 1905), G. Sannia (*Le sviluppate oblique di una curva piana o storta;* Giorn. di mat., 43, 1905), E. Pasquini (*Sulla sviluppabile rettificante e sulla generalizzazione del problema relativo*, Atti Ist. Ven., VIII, 6, 1904), E. Salkowski (*Zur Transformation von Raumkurven*, Math. Ann. 66, 1909, e *Ueber algebraische rektifirzierbare Raumkurven*, Id. 67, 1909), B. Hostinsky *Sur quelques figures determinées par les éléments infiniment voisins d'une courbe gauche* (Jorn. de math., VI, 5, 1909) e *Sur les propriétés de la sphère qui touche quatre plans tangents consécutifs d'une surface développable*, C. R. Congrès Strassburg, 1920) (1), F. Sibirani (*Sulla curvatura delle linee gobbe*, Giorn. di mat., 52, 1914), A. Pensa (*Alcune applicazioni delle formole di Frenet*, Torino Atti, 49, 1914), A. Voss (*Zur Theorie der Kurven in Raume*, München. Ber., 1918), G. Kowalewski (*Uber Differential invariante von Raumkurven*, Jorn. f. Math., 155, 1925), Catherine Gouventak (*Meetkundige orthogonale differential-invarianten von analytischen Krommen*, Diss. Amsterdam, 1927) e A. Myller, (*Courbure normale et courbure géodésique*, C. R., 183, 1928).

Il primo studio sistematico delle curve immaginarie fu fatto da E. Study (1862-1930) nella fondamentale memoria *Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven* (Trans. A. M. S., 10, 1909), alla quale seguono le altre dello stesso autore, pure di grande importanza: *Die natürlichen Gleichungen der analytischen Kurven im euklidischen Raum* (Id., II, 1910), *Minimalkurven und Serret'schen Flächen* (Amer. Journ., 7, 1910) e *Minimalkurven als Orter von Krümmungsmittelpunkte* (Ivi); inoltre J. Wellstein, *Zur Differentialgeometrie der isotropen Kurven* (Sitzber. Acad. Heidelberg, 1924).

---

(1) Fanno seguito a questo articolo i seguenti lavori: G. Loria, *Applicazioni geometriche di una formola di Siacci* (Boll. Un. mat. ital., 2, 1923; ivi è introdotto il nome di «sfera paraosculatrice»); G. Lampariello, *Sulla sfera paraosculatrice di una linea sghemba* (Giorn. di matem., 61 1923); F. Sibirani, *Sulla posizione limite di certe sfere connesse con una curva gobba* (Atti Ist. Ven., 84, 1925); A. Ranum, *Spheres osculating a curve and quasiosculating another curve* (Math. Ann. 101, 1929) e *On spherical and quasi spherical curves* (Ann. di mat. IV, 6, 1929).

4. Passando alle curve speciali (1) richiameremo l'attenzione del lettore sopra l'*Etude géométriques et dynamique des roulettes planes et sphériques* (Journ. Ec. pol. II, 15, 1911), dell'Haton de la Goupilière e sui seguenti scritti: E. Salkowski, *Boträge zur Kenntniss der Bertrandschen Kurven* (Math. Ann. 69, 1910) e *Die Cesàro'schen Kurven* (München Ber. 1911), G. Tzitzeica, *Sur certaines courbes gauches* (Ann. norm., III, 22, 1911); T. Hayashi, *On the Curven whose principal Normals are the binormal of a given Curve* (G. di matem., 54, 1916); rileveremo poi la correzione fatta da A. Demoulin (*Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe;* C. R., 124, 1897) ad un teorema di Lie (cfr. Lie-Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, Leipzig, 1896, p. 308); vanno poi ricordati gli studi fatti da discepoli del Darboux sulle curve di torsione costante algebriche (W. de Tanneberg, *Sur les courbes gauches à torsion costante*, C. R., 137, 1903; Le Vasseur, *Sur les courbes sphériques à torsion costante*, Toulouse Bull., 1, 1898 (2); Fabry, *Sur les courbes algébriques à torsion constante*, C. R., 141, 1906), B. Gambier, *Sur les courbes à torsion constante* (Ann. Ec. norm. III, 36, 1919, e 37, 1920); G. Darmois, *Sur les courbès algébriques à torsion constante* (Toulouse Ann. III, 11, 1920). Citeremo da ultimo i lavori di H. W. Richemond (*On the simplest algebraic minimal curves, and the derived real minimal surfaces;* Cambridge Trans., 19, 1900) e di V. Rouquet (*Des courbes sphériques dont les développantes sont aussi sphériques;* Toulouse Mém. IX, 11, 1902), entrambi concernenti curve gobbe speciali. Notiamo, finalmente che da considerazioni sopra le curve di Bertrand (*On Bertrand's curves*, Science Rep. Imp. Univ. Japan, 10, 1921) T. Takasa fu condotto allo studio di una questione generale importante (*Characteristic properties of space curves, whose curvature and torsion are connacted by a general relation*, Id., 12, 1923).

5. Volgendoci ora alla teoria delle superficie, vanno in primo luogo ricordate le considerazioni cinematiche mediante cui A. Schönflies, continuando sue antiche ricerche (pag. 286), stabilì un gran numero di proposizioni e formole importanti attinenti al ramo di geometria che ci occupa (*Ueber eine neue geometrische Methode im Gebiet der Differentialgeometrie;* Götting. Nachr., 1898; v. anche R. von Lilienthal, *Ueber die Beziehungen der Geometrie der Bewegung zur Differentialgeometrie*, Deusch. Math.-Ver.,

(1) Cfr. l'opera di G. Loria citata a pag. 339, nota 1.
(2) Essendo ivi dimostrata l'inesistenza di curve sferiche a torsione costante, nasce la questione generale di *determinare tutte le superficie contenenti curve a torsione costante*.

11, 1904), la traduzione francese di alcuni importanti scritti di K. M. Peterson 1891-1881) (1) (cioè *Sur les rélations et les affinités entre les surfaces courbes*, 1865, *Sur les courbes tracées sur les surfaces*, 1866 e 1867, e *Sur la déformation des surfaces du second ordre*, 1883, tutti pubblicati in Toulouse Ann. II, 7, 1905) dianzi accessibili soltanto a coloro che conoscono il russo, e l'applicazione alla geometria differenziale di una simbolica analoga a quella in uso nella teoria delle forme algebriche (A. W. Smith, *The symbolic treatement of differential geometry;* Trans. Amer. M. S., 7, 1906).

Quasi tutte le teorie classiche della geometria differenziale ricevettero in questi ultimi tempi qualche miglioramento (2); valga a provarlo il seguente elenco di memorie: E. Cosserat, *Sur la théorie des lignes tracées sur une surface* (Toulose Mém., IX, 7, 1895); J. Knoblauch, *Zur simultanen Transformation quadratischer Differentialformen* (Journ. f. Math., 115, 1894), *Der innere Zusammenhang der flächentheoretischen Grundformeln* (Id., 130, 1905), *Die Biegungs-Invariante und Kovariante von gegebener Ordnung* (Id., 131, 1904) e *Der Gausssche Satz von Krümmungsmass* (Sitzungsber. der Berl. math. Ges., 1904); P. Stäckel, *Beiträge zur Flächentheorie* (Leipziger Ber., 48, 1896); V. Kommerell, *Eine neue Formel für die mittere Krümmung und das Krümmungsmaas einer Fläche* (Zeitschr. f. Math., 41, 1896: in tali espressioni entrano esplicitamente i coseni direttori della normale alla superficie); A. Calinon, *Le théorème de Gauss sur la courbure* (Nouv. Ann. III, 15, 1896; dimostrazione geometrica dell'essere la curvatura gaussiana un invariante di flessione); A. S. Gale, *Examples of non applicable surfaces having the same Gaussian curvature at corresponding points* (Ann. of Math., II, 5, 1904); P. Burgatti, *Sulla torsione geodetica delle linee tracciate sopra una superficie* (Palermo Rend., 10, 1896); E. Goursat, *Sur les lignes asymptotiques* (Bull. S. M. F., 24, 1896); S. Lie, *Zur Geometrie einer Monge'schen Gleichung* (Leipziger Ber., 50, 1898); A. Demoulin, *Sur les rélations entre les éléments infinitésimaux de deux figures homographiques et corrélatives* (C. R., 126, 1898); A. D. van der Harst, *Formeln für die Krümmung eines Systems von ebenen Curven in krümmlinigen Coordinaten e Erweiterung der erhaltenen Resultate auf den Raum* (Nieuw Arch., II, 4, 1899; fra l'altro è ivi ritrovata la formola del Kommerell più sopra citata); G. Gattorno, *Sulle due curve luoghi dei centri di curvatura geodetica e di*

(1) P. Stäckel, *Karl Peterson* (Bibl. math., III, 2, 1900); D. T. Egorov et B. K. Mlodzieiowski, *Notice sur K. M. Peterson, traduit du russe par* E. Davaux (Toulouse Ann., II, 5, 1903).

(2) Giova qui segnalare un'importante questione di principio sollevata dall'Hilbert e risoluta da un suo discepolo (G. Prasad, *Ueber der Begriff der Krümmungslinien;* Götting. Nachr. 1904), quella, cioè, se l'esistenza delle derivate seconde delle funzioni di due parametri, rappresentatrici nel modo consueto una superficie, sia sufficiente per erigere la teoria della curvatura.

curvatura normale di una linea tracciata su una superficie (Giorn. di mat., 37, 1899); E. Borel, *Sur les formules d'Olinde Rodrigues* (Bull. S. M. F., 29, 1901); L. Bianchi, *Sopra una proprietà generale delle linee di curvatura di una superficie* (Lincei Rend., V. 10, 1901_2); A. R. Forsyth, *The fundamental magnitudes in the general theory of surfaces* (Mess., II, 32, 1902; oltre le ordinarie quantità fondamentali di 1° e 2° ordine, vengono introdotte altre del 3°, 4°, ecc.) e *The differential Invariants of Space* (Trans. R. S., 202, 1904); M. Servant, *Sur une extension des formules de Gauss* (Bull. S. M. F., 30, 1902); W. de Tanneberg, *Du problème de Cauchy relatif à une classe particulière de surfaces* (C. R., 137, 1903; il problema di Cauchy consiste nella determinazione le superficie che passano per una data curva ed hanno ivi assegnate normali); P. Cattaneo, *Alcuni teoremi sull'evoluta armonica* (Atti Ist. Ven., 64, 1905); L. P. Eisenhart, *Three particulars systems of lines on a surface* (Trans. Amer. M. S., 5, 1904) e *Associate surfaces* (Math. Ann. 62, 1906); G. Darboux, *Sur la sphère de rayon nul et sur la théorie du deplacement d'une figure invariable* (Bull. Sc. Math., II, 29, 1905) e *Sur les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces* (C. R., 139, 1904); S. Heller, *Untersuchungen über die natürlichen Gleichungen krummer Flächen* (Math. Ann., 58, 1904); J. Knoblauch, *Der innere Zusammenhang der flächentheoretischen Graundformen* (Journ. f. Math., 130, 1905); Lilienthal, *Zur Theorie der äquidistanten Kurven auf eine Fläche* (Id., 62, 1906); P. Calapso, *Sugli invarianti del gruppo delle trasformazioni conformi dello spazio* (Palermo Rend. 22, 1906), *Un problema sui sistemi di linee fra loro coniugate e sulle relative trasformazioni di Laplace* (Ann. di mat., III, 13, 1906) e *Intorno ai sistemi coniugati che col metodo di Laplace si trasformano da entrambi i lati in sistemi coniugati* (Palermo Rend., 31, 1911; L. Bianchi, *Sulle configurazioni di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie* (Palermo Rend., 25, 1908) e *Alcune formule inedite di J. Weingarten con applicazioni* (Lincei Rend., V, 20, 1911_2); A. C. L. Wilkinson, *An Introduction to the Theory of moving Axes with Application to Curves in Space and Curves on Surfaces* (Journ. Ind. M. S., 1911); B. Neuendorff, *Ueber die Kurven auf einer Fläche deren sphärische Bilder grösste Kreise sind* (Journ. f. Math., 148, 1911); J. Karda, *Beiträge zu reinen Differentialgeometrie* (Monatshefte, 24, 1913); P. Stäckel, *Die begleitende Grenzkugel krummer Flächen* (Heidelb. Akad., 1915: supposto che su una superficie sia stabilito un sistema di coordinate curvilinee u, v la sfera in discorso è la posizione limite di quella passante per quattro punti (u, v), (u + h, k), (v, v + k), u + h, v + k); G. A. Bliss, *Generalisations of geodesic Curvature and a Theorem concerning geodesic Trian-*

gles (Amer. Journ., 37, 1915); P. F. Smith, *A Theorem to Space analogous to Cèsaro's Theorem for plane isogonal Systhems* (Trans. A. M. S., 18, 1917); E. Müller, *Duale Gegenstücke zu den flächentheoretischen Sätzen von Meusnier und Euler* (Wiener Ber., 126, 1917); R. Mehmke, *Über die dualen Gegenstücke zu den Sätzen von Meusnier und Euler* (Ivi); K. Ogura, *On the Theory of Stäckel Curvature* (Tohoku, 16, 1919; v. la memoria succitata dello Stäckel); H. Liebmann, *Die Bour'sche Methode der Flächenbestimmung aus dem Linienelement* (München, Ber., 1922); R. Weyrich, *Beiträge zur Theorie der Kurven konstanter geodätischer Krümmung auf krummen Flächen* (Math. Zeit., 16, 1923); W. C. Graustein, *Determination of a Surface by it Curvature and spèrical Representation* (Amer. Journ., 45, 1923); E. Bompiani, *Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie* (Ann. di mat., IV, 1, 1924) e *Corrispondenza fra una superficie e le sue parallele* (Math. Zeit., 24, 1925); M. Winants, *Combien passe-t-il de lignes de courbure par un ombilic?* (Enseign., 24, 1924-25; illustrazione sopra alcuni esempi); V. Strazzeri, *Le normalie e la rappresentazione delle linee di una superficie* (Palermo Rend., 45, 1925); E. Müller, *Punktmittenflächen und eine neue Art relativer Flächentheorie* (Wien. Ber., 134, 1925); A. Demoulin, *La méthode du trièdre biréctangle et quelques unes de ses applications* (Belgique Bull., 1925); Silvia L. Creanga, *Diréctions cyclifiablement conjuguées. Courbes à courbure normale constante* (Thèse, Jassy., 1926), Maria Pastori, *Sulle superficie ortogonali a una congruenza normale di curve* (Rend. I. L., II, 60, 1927); B. Segre, *Le congruenze K e la trasformazione F delle superficie dello spazio ordinario* (Palermo, Rend. 52, 1928).

6. Nuove dimostrazioni delle formole di Mainardi-Codazzi furono date da A. Voss (*Ueber die Grundgleichungen der Flächentheorie;* Münch. Ber., 1927), M. Legally (*Die Verwendung des begleitenden Dreiecks für den Aufbau der naturlichen Geometry* (Id.) e R. Sauer (*Ueberlegungen zu der Grundgleichungen der Flächentheorie*, Ivi, 1928), e *Herleitung differentialgeometrischen Flächeneigenschaften aus Sehnen-dreiecksflächen*, Ivi, 1929). L'erroneità di un enunciato di R. Sturen (Math. Ann., 21, 1883) fu rilevata indipendentemente da P. Stäckel (*Grenzübergänge in der Krümmungslehere;* Deutsch. Math.-Ver., 27, 1918) e F. Sibirani (*Sopra un teorema di Stuam;* Math. Ann., 91, 1924).

Nuovi elementi collegati alla considerazione di un punto di una superficie, su cui sia fissato un sistema di coordinate curvilinee u, v, furono introdotti da S. Lie: per definirli si considerino tre punti consecutivi di una linea u = cost. e le tangenti ivi alle corrispondenti linee v = cost.; esse determinano un iperboloide, di cui un analogo nasce scambiando fra loro i due sistemi di coordinate; questi coincidono soltanto quando la superficie considerata è riferita alle proprie asintotiche; allora risultano reali soltanto se il punto considerato sulla superficie è iperbolico. Si chiamano « quadriche di Lie ». Benchè l'eminente geometra le abbia concepite sino dal 1882 (cfr. *Gesammelte Abhandlungen*, 3, p. 718) la loro equazione fu stabilita assai più tardi da P Franck (*Über die Lie'sche F_2 eines Flächenpunktes*, Berl. M. S. G., 13, 1914) e G. Scheffers (*Ueber zwei mit einem Flächenpunkt verküpfte Flächen zweiten Ordnung* (Id., 14, 1915). Il primo di questi geometri ne fece poi oggetto di studi speciali (v. le due memorie *Zur Diskussion der Gleichung der Lie'sche F_2 eines Flächenpunktes*, Hamb. Mitth., 1914; *Über die paraboloidischen Flächen*, Deutsch. Math. Ver., 23, 1914). L'importanza di questi nuovi elementi fu posta in piena luce nel corso degli studi metodici, di cui parleremo più avanti, relativi alle proprietà infinitesimali delle superficie invarianti rispetto a una trasformazione projettiva; qui citiamo i seguenti scritti che vi si riferiscono: M. Demoulin, *Sur la quadrique de Lie*, (C. R., 147, 1908) e *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux prints caractéristiques* (Id., 170, 1920); L. Godeaux, *Sur les surfaces ayant même quadrique de Lie* (Belgique Bull., 1928) e *Sur les surfaces projectivement applicables ayant même quadrique de Lie* (Porto Ann., 15, 1928).

La teoria gaussiana delle superficie venne estesa da R. von Lilienthal (*Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenschaaren*, Leipzig, 1896) e dall'Issaly (cfr. p. 190 e inoltre: *Sur une formule de Laguerre étendue aux pseudo-surfaces*, Bull. S. M. F., 25, 1897; *Sur une formule d'Enneper et sa corrélative*, Id., 26, 1898, e *Principes fondamentaux de la théorie des pseudo-surfaces. Thèse, Paris*, 1902); questo geometra, sotto il nome di « pseudo-superficie » propose di considerare le figure definite da tre equazioni del seguente tipo:

$$dx = P\,du + Q\,dv,\quad dy = P'\,du + Q'\,dv,\quad dz = P''\,du + Q''\,dv.$$

Ove $P, \ldots, Q''$ sono sei funzioni arbitrarie di u, v; ogni pseudo-superficie è generata da due sistemi variabili di curve, i quali si tagliano solo se si trascurano gli infinitesimi di second'ordine.

7. Numerosi ed importanti sono gli studi di recente compiuti sulla teoria delle linee geodetiche (1), specialmente in vista dell'integrazione della

(1) Per un punto importante della storia di tali linee veggasi G. Eneström, *Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques* (Bibl. math., II, 13, 1899).

loro equazione differenziale; ricorderemo per brevità soltanto i seguenti: J. Hadamard, *Les surfaces à courbure opposée et leurs lignes géodésiques* (Journ. de math., V, 4, 1898) e *Sur la forme des lignes géodésiques à l'infini et sur les géodésiques des surfaces réglées du second ordre* (Bull. S. M. F., 26, 1898); J. Lüroth, *Studien über die geodätische Abbildung* (Math. Ann., 51, 1898; P. Stäckel, *Lineare Schaaren geodätischer Linien* (Id., 56, 1902), *Eine Eigenschaft der geodätische Linien* (Archiv. f. Math., III, 4, 1902) e *Zur Theorie der geodätischen Linien* (Deutsch. Math. Ver., 9, 1901; Nouv. Ann., IV, 1, 1901); W. Wirtinger, *Geodätischen Linien und Poncelet'sche Polygone* (Deutsch. Math.-Ver., 9, 1901); W. Anasimoff, *Sur la théorie de courbes géodésiques* (Ann. Ec. norm., III, 18 e 19, 1901-02); G. A. Bliss, *The geodesic lines of the anchor Ring* (Ann. of math., II, 4 1902); H. Poincaré, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes* (Trans. Amer. M. S., 6, 1905); R. von Lilienthal, *Zur Theorie der geodätischen Linien* (Deutsch. Math. Ver., 28, 1919); H. M. Morse, *A one-to-one Representation of Geodesics on a Suface of negative curvature* (Am. Journ., 43, 1921) e *Recurrent geodesics on a Surface of negative Curvature* (Trans. A. M. S., 22, 1921; E. Kruppa, *Zur geodätischen Krummung und Parallelverschiebung* (Deutcsh. Math. Ver., 37, 1928).

8. La teoria della deformazione sulle superficie compì un memorabile progresso grazie alle memorie che nel 1894 ottennero dall'Istituto di Francia una il Gran premio delle Scienze matematiche, l'altra una menzione onorevole. Sono: J. Weingarten, *Sur la déformation des surfaces* (Acta, 20, 1896; cfr. *Note zur Theorie der Deformation der Fläche*, Id., 22, 1898) e C. Guichard, *Sur la déformation des surfaces* (Journ. de math., V, 2, 1896). Il medesimo tema da vari punti di vista trovasi studiato nelle memorie che seguono: A. Demoulin, *Note sur la détermination des couples de surfaces applicables telles que la distance de deux point correspondants soit constante* (Bull. S. M. F., 23 1895); P. Adam, *Sur la déformation des surfaces* (Ivi), *Théorèmes sur la déformation des surfaces de traslation* (Ivi) e *Sur la déformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure* (Ivi); J. N. Hatzidakis, *Biegung mit Erhaltung der Hauptkrümmungsradien* (Journ. f. Math., 117, 1896); G. Ricci, *Dell'equazione fondamentale di Weingarten nella teoria delle superfici applicabili* (Atti Ist. Ven., VII, 8, 1897); P. Stäckel, *Biegung und conjugierte Systeme* (Math, Ann., 49, 1897); G. Hessenberg, *Ueber die Invarianten linearer und quadratischer binären Differentialformen und ihre Anwendug auf die Deformation der Flächen* (Acta, 23, 1899); B. Calò, *Risoluzione di alcuni problemi sull'applicabilità delle*

superficie (Ann. di mat., III, 4, 1900); L. Bianchi, *Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili* (Ann. di mat., III, 6, 1901) e *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili* (Torino Atti, 40, 1905); S. Bernstein, *Sur la déformation des surfaces* (Math. Ann., 60, 1905); V. Strazzeri, *Le rullette* (1) *storte e applicabilità delle rigate* (Giorn. di mat., 49, 1904); B. Mlodziejowski, *Ueber aufeinander abwickelbare P—Flächen* (Math. Ann., 63, 1906); E. E. Levi (1883-1917) (2) *Sulla deformazione delle superfici flessibili ed inestendibili* (Torino Atti, 43, 1908); M. Picone, *Sulle superficie flessibili ed inestendibili deformabili in rigate* (Ann. di mat., III, 22, 1913); E. Salkowski, *Zum Biegungsproblem der Regelflächen* (Deutsch. Mat. Ver., 22, 1913); L. Bianchi, *Alcune ricerche sul rotolamento di superficie applicabili* (Palermo Rend., 38, 1914); B. Gambier, *Applications de deux surfaces l'une sur l'autre* (Bull. Sc. Math., II, 44, 1920).

9. In particolare vennero compiute vaste ed importantissime ricerche sulle superficie provenienti dal deformare una superficie di secondo ordine; dei lavori relativi, fra cui brillano quelli del Bianchi, ecco i più cospicui: Thybaut, *Sur la déformation de certains paraboloïdes et sur le théorème de M. Weingarten* (C. R., 124, 1897) e *Sur la déformation du paraboloïde et sur quelques problèmes qui s'y rattachent* (Ann. Ec. norm., III, 14, 1897); G. Darboux, *Sur la déformation des surfaces du second dégre, Sur les transformations des surfaces du second dégre et sur le transformations des surfaces à courbure totale constante* (Ann. Ec. norm., III, 16, 1899), *Des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution* (C. R., 139, 1904) e *Sur les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution* (Bull. Sc. math., II, 29, 1905); P. Michel, *Sulle deformazioni del paraboloide di rotazione in relazione alle superficie minime* (Pisa Annali, 13, 1909; memoria che risale al 1902, ma fu pubblicata molto più tardi, come omaggio dell'Università di Pisa a un suo antico alunno, morto durante la recente guerra). C. Guichard, *Sur les déformation des quadriques de révolution* (C. R., 128, 1899), *Sur la déformation du paraboloïde quelconque* (Id., 132, 1901) e *Sur la deformation des quadriques* (Id., 141, 1905, e 142, 1906); M. Servant, *Sur la déformation du paraboloïde général* (Ivi) e *Sur la déformation des quadriques* (Bull. S. M. F., 30, 1902); P. Calapso, *Sulla deformazione del paraboloide di rotazione* (Palermo Rend., 15, 1901) e *Sulla deformazione delle*

---

(1) Ci sia lecito esprimere il desiderio che questo nome bandito venga e che ad esso sia preferito quello di *trocoidi*.

(2) G. Fubini e G. Loria, *Eugenio Elia Levi* (Boll. di bibl. e storia, II, 1, 1918).

quadriche (Id., 16, 1902); L. Bianchi, *Sulle quadriche coniugate in deformazione* (Lincei Rend., V, 12, 1903$_1$), *Intorno alle superficie applicabili sui paraboloidi ed alle loro trasformazioni* (Torino Atti, 38, 1903), *Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche* (Ann. di mat., III, 11 e 12, 1904-05), *Sulla deformazione dei paraboloidi* (Id., 9, 1904), *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi* (Id., 12, 1905), *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde* (Mem. Soc. XL, III, 14, 1905), *Sur la déformation des quadriques* (C. R., 141, 1905) e *Ricerche sulle deformazioni delle quadriche* (Palermo Rend., 22, 1906); E. Estanave, *Construction de surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution définies par M. G. Darboux* (Bull. Sc. math., II, 29, 1905); O. Chieffi, *Sulle deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda e su alcune superficie che se ne deducono* (Giorn. mat., 43, 1905).

Un nuovo impulso alle ricerche su questo importante argomento fu dato dall'averlo nel 1907 scelto l'Accademia di Parigi come tema per il concorso al Gran Premio delle Scienze matematiche; due anni dopo questo fu ripartito fra L. Bianchi e C. Guichard. Del secondo va citato (in aggiunta a quanto precede) il *Mémoire sur la déformation des quadriques* (Mém. Sav. Etr., II, 34, 1909) e del primo devono segnalarsi i seguenti nuovi lavori: *Concerning singular Transformations B_k of Surfaces applicables to Quadrics* (Trans. Am. M. S. 18, 1917), *Ricerche sulle deformazioni delle quàdriche* (Palermo Rend., 22, 1906) e *La costruzione geometrica di Darboux delle superficie applicabili sul paraboloide rotondo* (Ann. di mat., IV, 1, 1924). Sullo stesso argomento si veggano queste altre memorie: G. Manfredini, *Sulla deformazione delle quadriche generali* (Ann. di mat., III, 16, 1909); P. Calapso, *Intorno alle superficie applicabili alle quadriche ed alle loro trasformazioni* (Palermo Rend., 32, 1911) e *Intorno alle superficie applicabili sulla quàdriche ed alle loro trasformazioni* (Ann. di mat., III ,19, 1912; Palermo Rend., 36, 1913); L. P. Eisenhart, *Transformations of Surfaces of Guichard and Surfaces applicables te Quadrics* (Ann. di mat., III, 22, 1914), *Certains continous deformations of Surfaces applicables to the Quadrics* (Trans. A. M. S., 14, 1913) e *Transformations of Surfaces applicables to a Quadric* (Trans. A. M. S., 20, 1919); A. v. Bäcklund, *Über eine Transformations of L. Bianchi* (Ann. di mat., III, 23, 1915); H. Jonas, *Ricerche sulle trasformazioni delle superficie applicabili sul paraboloide iperbolico equilatero* (Id., IV, 2, 1924); A. Signorini, *Sulla permutabilità della trasformazione N colla trasformazione B nella teoria delle superficie applicabili sulle quadriche* (Ann. di mat., III, 17, 1910); B. Gambier, *Surfaces applicables* *sur le paraboloïde de révolution* (Bull. S. M. F., 49, 1921) e *Déformation du paraboloïde de révolution* (Id., 50, 1922).

10. Anche le deformazioni infinitesime delle superficie vennero nuovamente studiate da E. Génty (*Sur la déformation infinitésimale des surfaces;* Toulouse Ann., 9, 1895), A. Voss (*Ueber infinitesimale Flächendeformation*, Deutsch. Math.-Ver., 4, 1896; *Zur Theorie der infinitesimalen Bieungsdeformationen*, Münchener Ber., 27, 1897 e *Beiträge zur Theorie der unendlich kleine Deformartion einer Fläche*, Id., 34, 1904), E. Daniele (*Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed estendibili*, Torino Mem., II, 50, 1901 e *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie di 2° grado;* Torino Atti, 36, 1901), P. Tortorici, *Sulle deformazioni infinitesime delle superfici e sul teorema di permutabilità* (Palermo Rend., 35, 1913), M. Lagally, *Ueber unendlichkleine isometrische Verbiegung einer Fläche mit höherer als erster Nährung* (Math. Ann., 76, 1915). Formano un gruppo a sè gli scritti di H. Liebmann sulla deformazione di alcune speciali superficie; eccone i titoli: *Ueber die Verbiegung von Rotationsflächen* (Leipziger Ber., 53, 1901), *Ueber die Verbiegung der geschlossenen Ringflächen* (Götting. Nach;r., 1901), *Neur Beweis des Satzes, dass eine geschlossene konvexe Fläche sich nicht verbiegen lässt* (Math. Ann., 54, 1901), *Neuer Beweis des Minding'schen Satzes* (Deutsch. Math.-Ver., 12, 1902) e *Bedingte Flächenverbiegung insbesondere Gleitverbiegungen* (Müunch. Ber., 1920).

Di varie corrispondenze fra due superficie trattarono: A. Voss (*Ueber conforme Abbildung*, Math. Ann., 46, 1895); F. Busse (*Ueber diejenige punktweise eindeutige Begiehung zweier Flächenstücke auf einarder bei welcher jeder geodätische Linie des einem eine Linie constantes geodätischen Krümung des andeun entspricht;* Berl. Ber., 1896); A. Voss (*Ueber Krümmung und konforme Transformationen;* München. Ber., 37, 1907); P. Calapso (*Sulle trasformazioni delle superficie isoterme*, Ann. di mat., III, 24, 1915; *Sulla teoria generale delle trasformazioni di Ribaucour e sue applicazioni alla generalizzazione delle trasformazioni di Darboux*, Id., 29, 1920; *Sulle trasformazioni delle superficie di Guichard*, Ivi; *Sulla teoria generale delle trasformazioni delle superficie per inviluppo di sfece*, Ivi); M. Jonas (*Sopra una classe di trasformazioni asintotiche, applicabili in particolare alle superficie la cui curvatura e proporzionale alla quarta potenza della distanza del piano tangente da un punto fisso*, Id., III, 30, 1921); A. Terracini (*Osservazioni sui sistemi isotermi-conjugati che sono permanenti nelle deformazioni di una superficie*, Ivi); P. Tortorici, *Sulle trasformazioni asintotiche delle curve e sulle congruenze W a falde focali rigate*, Palermo Rend., 38, 1914; *Le trasformazioni delle superficie per configurazioni invariabili*, Id., 46, 1922, e *Il problema di Bianchi*, Ivi; eccone l'enunciato: « una superficie rigata data può sempre assumersi come prima falda focale di una congruenza rettilinea W avente per seconda falda focale una superficie rigata; per la determinazione di una tale congruenza si ha a propria disposizione una funzione arbitraria; ora è possibile disporre di tale funzione per modo che la seconda falda della congruenza risulti applicabile alla data?), B. Gambier (*Représentation conforme avec conservation des lignes de courbure et de la valeur absolue du rapport des rayons de courbure principaux*, Ann. Ec. norm., III, 39, 1922 e M. Jonas, *Aufstellung einer Transformationstheorie für eine Klasse aufeinander abwickelbaren Flächen*, Math. Ann., 92, 1924).

11. La nota condizione, scoperta dal Darboux (1866) affinchè una schiera semplicemente infinita di superficie appartenga ad un sistema triplo ortogonale, venne nuovamente stabilita da R. von Lilienthal (*Ueber die Bedingung, unter der eine Flächenschaar einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört;* Math. Ann., 44, 1894), da C. F. Geiser (*Zur Theorie der tripelorthogonalen Flächenssysteme;* Wolf Zeitschr., 43, 1898) e da J. E. Wringht (*An application of the theory of differential invariant, to the triples orthogonal system of surfaces;* Bull. Amer. M. S., II, 12, 1906).

L'essere, come aveva congetturato il Darboux, la sfera l'unica superficie che muovendosi comunque può generare una serie di superficie appartenente ad un sistema triplo ortogonale, fu rigorosamente provato prima dall'Adam (*Sur les systèmes orthogonaux;* C. R., 121, 1895) e subito dopo da E. Goursat (Ivi) e J. Bertrand (*Note sur un théorème de géométrie;* Ivi). Considerazioni iperspaziali vennero usate applicando un'osservazione del Mehler (cfr. pag. 266) all'*Aufstellung eines neuen dreifach ortogonalen Flächensystems* (Wiener Ber., 102, 1893). Un nuovo metodo per stabilire geometricamente il teorema di Dupin fu suggerito da A. Sommerfeld (*Geometrischer Beweis des Dupins'schen Theorems und seiner Umkehrung;* Deutsch. Math.-Ver., 6, 1899) e uno per giungere alle note equazioni di Lamé da J. E. Wrigt (*On Lamé's six equations connected with triply orthogonal systems of surfaces;* Bull. Amer. M. S., II, 12, 1906). Più vasto è il piano della memoria di L .Lévy *Sur le systèmes de surfaces triplement orthogonaux* (Bélgique Mém., 54, 1896), premiata nel 1896 dall'Accademia del Belgio, e così dicasi di quelle posteriori di A. Pellet (*Mémoire sur la théorie des surfaces et des courbes;* Ann. Ec. norm., III, 14, 1897) e C. Guichard (*Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cy-*

cliques; Id., 14, 15 e 20; 1897, 1898 e 1903). In particolare, riguardo ai sistemi ciclici si veda, oltre a questo lavoro del Guichard, quello di L. Bianchi, *Sur les système cycliques, dont les plans enveloppent une sphère* (Id., 19, 1902). I *Sistemi tripli ortogonali le cui superficie sono tutte a curvatura totale costante* vennero determinati da L. Carnera (Giorn. di mat., 39, 1901), mentre l'essere necessariamente costituito da quadriche un sistema triplo le cui superficie di sistemi differenti si tagliano nelle loro asintotiche, fu dimostrato da L. P. Eisenhart (v. i due articoli: *A demonstration of the impossibility of a triply asymptotic system of surfaces* e *Possible triply asymptotic system of surfaces;* Bull. Amer. M. S., II, 7, 1901). Finalmente la determinazione di superficie che, mediante certi movimenti possono generare una serie semplice di superficie appartenenti ad un sistema triplo, forma il tema di lavori di L. Bianchi (*Sur deux classes de surfaces qui engendrent par un mouvement hélicoïdal une famille de Lamé;* Toulouse Ann., 11, 1897) e P. Medolaghi (*Sulle superficie che possono generare due famiglie di Lamé con due movimenti diversi;* Lincei Rend., V, 8, 1899_1).

Altri risultati concernenti i sistemi tripli leggonsi nel volumetto di C. Guichard, *Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmens triples orthogonaux* (Collèction Scientia, Paris, 1905) e nelle memorie seguenti: J. Haag, *Familles de Lamé composées de surfaces égales* (Ann. Ec. norm., III, 27, 1910); L. Bianchi, *Ricerche sui sistemi tripli conjugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche* (Ann. di mat., III, 23, 1915), *Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali derivati per trasformazione di Combescure dai sistemi a curvatura costante* (Id., 24, 1915), *Ricerche intorno ad una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali* (Id., 26, 1917), *Sui sistemi obliqui di Weingarten* (Id., 19, 1910); A. Demoulin, *Recherches sur les systèmes triples orthogonaux* (Liège Mém., III, 11, 1921).

12. Con il ricordo di questi ultimi scritti siamo penetrati nel campo delle superficie speciali, nel quale rimarremo per tutto il resto del presente paragrafo. L'equazione differenziale delle superficie rigate venne recentemente posta sotto una notevole forma da D. Sintzoff (*Note sur l'équation différentielle des surfaces réglés;* Nouv. Ann., II, 14, 1895); mentre altre questioni concernenti le stesse superficie (in particolare le sviluppabili) vennero studiate da V. Rouquet (*Sur une classe de surfaces réglées;* Toulouse Mém., IX, 7, 1895; *Note sur la surface réglée engendrée par une droite faisant partie d'un système invariable*, Id., X, 1, 1901), H. Molins, (*Sur les trajectoires qui coupent, sous un angle constant les génératrices rectilignes d'une surface gauche*, Id., IX, 7, 1895), G. Pirondini (*Sur les trajectoires

isogonales des génératrice d'une surface développables, Journ. f. Math., 118, 1897), A. Viterbi (1873-1917) (1), *Alcune considerazioni sulle superficie rigate* (Rend. I. L., II, 47, 1914) e P. Tortorici, *Intorno ad una classe di superficie rigate* (Ann. di mat., III, 25, 1916) e *Nuovi studi sulle superficie rigate* (Ivi, 27, 1918).

Intorno alle superficie di rivoluzione vanno rammentate le due memorie seguenti: A. Montcheuil, *Détermination des surfaces de révolution admettant une surface de révolution donnée pour surface moyenne* (Bull. S. M. F., 33, 1905) e Z. P. Bouman, *Surfaces de révolution à courbure moyenne constante* (Arch. Teyler, II, 10, 1905).

Delle « superficie W » (di Weingarten), i cui raggi di curvatura in un punto qualunque sono legati da una relazione, si è occupato in questi ultimi tempi L. Raffy (*Contribution à la théorie des surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une rélation;* Bull. S .M. F., 25 1897), il quale in particolare ha cercato quali fra tali superficie sono « di Joachimsthal », cioè posseggano una schiera di linee di curvatura piane (*Détermination des surfaces de Jochimsthal à courbures principales liées par une rélation;* Ann. Ec. norm., III, 20, 1903); invece quelle di dette superficie che sono deformabili in superficie rotonde vennero di recente studiate da A. Tagliaferri (*Sulle superficie W applicabili sopra superficie di rotazione;* Lincei Rend., V, 14, 1905,) e M. Chini (*Sulle superficie W applicabili sopra una superficie di rotazione;* Palermo Rend., 21, 1906).

13. Le più notevoli e studiate fra le superficie W sono quelle di area minima; riguardo ad esse H. Lebesgue (*Sur les transformations de contact des surfaces minima;* Bull. Sc. Math., II, 26, 1902) stabilì tutte le trasformazioni di contatto capaci di mutare una di esse in altra della stessa specie, risultato questo che Lie aveva enunciato sin dal 1880; altre ricerche generali vennero compiute da H. W. Richemond (*On minimal surfaces;* Cambridge Trans., 18, 1900), C. F. Geiser (*Zur Erzeugung von Minimalflächen durch Schaaren von Curven vorgeschriebener Art;* Berl. Ber., 1904), S. Bernstein (*Sur les surfaces minima;* C. R., 141, 1905), e P. Stäckel (*Die kinematische Erzeugung von Minimalflächen;* Trans. Amer. M. S., 7, 1906), A. R. Forsyth (*The range of Minimal surfaces providing a minimal area;* Ann. di mat. III, 21, 1913), E. Study, *Über einige imaginäre Minimalflächen* (Leipz. Ber., 63, 1911; ivi nuove formole per rappresentare analiticamente una delle superficie in questione), F. C. Clapier (*Sur les surfaces minima*

(1) G. Vivanti, *Adolfo Viterbi*, (Boll. di bibl. e stor. II, 1, 1918).

ou élassoïdes, Journ. de mathem., VIII, I, 1918), E. Müller (*Relative Minimalflächen*, Monatshefte, 31, 1921) e L. P. Eisenhart (*Transformations of minimal Surfaces*, Ann. di mat., III, 13, 1906). Quelle che sono elicoidali vennero determinate da M. Falchi (*Nota circa un particolare problema sulle superficie minime;* Giorn. mat., 34, 1896) e quelle deformabili in superficie rotonde furono investigate dall'Haag (*Note sur les surfaces minima applicables sur une surface de révolution;* Bull. Sc. Math., II, 30, 1906). Esistono cinque categorie di superficie minime applicabili su sè stesse; vennero determinate da L. Sinigaglia (*Sulle superficie ad area minima applicabili su sè stesse;* Giorn. di mat., 36 e 37, 1898-99). Alcune superficie minime sono generabili mediante il moto di un cerchio e vennero [illegible]diate da G. Juga (*Die cyclischen Minimalflächen;* Diss. Strassburg, 1[illegible]; *Ueber die Constantenbestimmung bei einer cyclischen Minimalfläche*, Math., Ann., 52, 1899) e alcune per traslazione di tre curve (P. Stäckel, *Bestimmung aller Curven, durch deren Translation Minimalflächen entstehen*, Gotting. Nachr., 1905 ;G. Scheffers, memoria di egual titolo, Ivi). L'inesistenza di superficie minime non piane contenenti infinite iperboli fu dimostrata da M. Peche (*Welche Minimalflächen sind Träger einer Schaar reeller Hyperbel?* Progr. Breslau, 1903). Ancora: altre superficie minime speciali sono considerate negli scritti seguenti: O. Niccoletti (1872-1929) *Sopra un caso speciale del problema di Plateau* (Pisa Ann., 7, 1895); J. Rebs, *Bestimmung aller reellen Minimalflächen, die ein Schaar ebener Curven enthalten, denen auf der Gauss'schen Kugel die Meridiane entsprechen* (Diss. Berlin, 1895) e P. Zeeman, *Une surface minima algébrique du vingtième ordre* (Arch. Teyler, II, 5, 1898; questa superficie ha per geodetica una cardioide). Vanno ancora ricordate le ricerche di F. S. Woods, *Ueber Pseudominimalflächen* (Diss. Göttingen, 1895), G. Hettner, *Ueber die Schwarzsche Minimalfläche* (Schwarz Fest. 1914), E. R. Neovius, *Analytische Bestimmung einiger von Riemann nicht in Betracht gezogenen Minimalflächenstücken, deren Begrenzung von drei geradlinigen Teilen gebildet wird* (Acta Soc. Fennicae, 15, 1920) e J. K. Whittemore, *Spiral unicursal Surfaces* (Trans. A. M. S., 19, 1913) e *Associated minimal Surfaces* (Amer. Journ., 40, 1918).

La generalizzazione del problema di Plateau guidò a superficie soddisfacenti un'equazione differenziale di second'ordine qualunque, immaginate da X. Stouff (1861-1903) (*Sur les rapports entre la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre et la théorie des surfaces;* Ann. Ec. norm., III, 13, 1896); mentre un'altra estensione delle stesse superficie fu suggerita dal Montcheuil (*Etude des surfaces définis par l'équation* R + R' = F (u) + F (u_1); Bull. S. M. F., 26, 1898).

14. Un'altra classe importante di superficie W consta di quelle a curvatura costante; di esse trattano i seguenti lavori: L. Bianchi, *Nuove ricerche sulle superficie pseudosferiche* (Ann. di mat., II, 24, 1896), *Sopra una classe di superficie collegate alle superficie pseudosferiche* (Lincei Rend., V, 5, 1896.), *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* (Ann. di mat., III, 3, 1899), *Sopra una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche* (Id. 18, 1911) e *Sulla teoria delle trasformazioni delle curve di Bertrand e delle superficie pseudosferiche* (Mem. Soc. XL., 18, 1913); F. Busse, *Ueber eine specielle conforme Abbildung der Flächen constanten Krümmungsmasses auf die Ebene; mit einem Anhange enthaltend die Literatur ueber die Flächen constanten Krümmunasmasses* (Diss. Berlin 1896); K. Carda, *Zur Geometrie der Flächen constanter Krümmung* (Wiener Ber., 107, 1898); F. Enriques, *Sopra le superficie e le varietà a più dimensioni le cui geodetiche sono rappresentabili con equazioni lineari;* (Bologna Rend., II, 7, 1903); L. P. Eisenhart, *Surfaces of constant curvature and their transformations* (Bull. Amer. M. S. II, 12, 1906) e *Surfaces with the same spherical Representation of the Lines of Curvature as pseudospherical Surfaces* (Amer. Journ., 27, 1905); G. Prasad, *Uber eine Klasse von nicht analytischen Flächen konstanter positive Gausschen Krümmung* (Math. Ann., 64, 1907); O. Roelcke, *Ueber die Bäcklundsche Transformation der Flächen konstanter Krümmung* (Diss. Greifswald 1907); W. Haak, *Eine Kenngleichung der Flächen konstanten Kümmung-masses* (Math. Zeit., 27, 1927; le dette superficie sono le uniche che si possano rappresentare su un piano in modo che alle geodetiche corrispondano cerchi).

Fra le superficie di curvatura costante si trova la sfera; che, come da tempo è noto, essa sia l'unica superficie di cui tutti i punti sono ombelichi, venne dedotto da teoremi generali sulle equazioni differenziali da C. Bourlet (1866-1913) (*Remarques sur la surface dont tous les points sont des ombilics;* Nouv. Ann., III, 14, 1895); la sfera s'incontra poi anche cercando la superficie di cui la I e II forma fondamentale coincidono con la II e la I di un'altra (v. le note: E. P. Eisenhardt, *Surfaces whose first and second fundamental forms are the second and first respectively of another surface* e *Concerning surfaces whose first and second fundamental forms are the second and first fundamental forms respectively of another surface;* Bull. Amer. M. S., II, 7, 1901).

15. Innumerevoli sono gli altri scritti a noi noti relativi a speciali superficie, non appartenenti alle precedenti categorie; citiamo i seguenti:

L. Raffy, *Qualques propriétés des surfaces harmoniques* (Toulouse Ann., 9, 1895; sono superficie per le quali $ds^2 = [U(u) - V(v)](du^2 + dv^2)$) e *Recherches sur les surfaces isothermiques* (Ann. Ec. Norm. III, 22, 1905 e 23, 1906); Lelieuvre, *Sur les surfaces à génératrices rationnelles* (Ann. de l'Ec. norm., III, 12, 1895; si tratta delle superficie rappresentabili con equazioni della forma: $x = \xi(t, u)$, $y = \eta(t, u)$, $z = \zeta(t, v)$, in cui t entra razionalmente); A. Voss, *Ueber isometrische Flächen* (Math. Ann., 46, 1895); R. Rothe, *Untersuchung über die Theorie der isothermen Flächen* (Diss. Berlin, 1897); G. Darboux, *Sur les surfaces isothermiques* (Ann. Ec. norm., III, 16, 1897; sono superficie tali che le loro linee di curvatura formano un sistema isotermo); C. Guichard, *Sur les surfaces isothermes* (C. R., 130, 1900; cfr. P. Calapso, *Alcune superficie di Guichard e le relative trasformazioni*, Ann. di mat., III, 11, 1905); L. Raffy, *Recherches sur les surfaces isothermiques* (Ann. Ec. norm., III, 22, 1905, e 23, 1906); G. Pirondini, *Qualques propriétés des surfaces moulures* (Journ. de math., V, 3, 1897); P. Stäckel, *Beiträge zur Flächentheorie* (Leipz. Ber., 50, 1898 e 54, 1902; tratta di elicoidi e superficie spirali, nonchè di quelle che possiedono una sola serie di linee di curvatura); A. Mehling, *Ueber diejenigen Flächen, die aequidistante infinitesimale Biegungen gestatten* (Diss. Würzburg, 1899); A. Waelsch, *Ueber Flächen mit sphärischen oder ebenen Krümmungslinien* (Festschr. Hochschule Brünn, 1899); L. P. Eisenhardt, *Certain surface with plane or spherical lines of curvature* (Amer. Journ., 28, 1906); O. Zoll, *Ueber Flächen mit Schaaren von geschlossenen geodätischen Linien* (Diss., Göttingen, 1901); U. Amaldi, *Sulle superficie che contengono sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici* (Lincei Rend., V, II, 1902_1); M. de Montcheuil, *Sur une classe de surfaces* (Thèse Paris, 1902; concerne le superficie che soddisfano l'equazione differenziale $\dfrac{d^4\xi}{du^2 \cdot du_1^2} = o$, ove u e u_1, sono le note coordinate di Bonnet (1); A. Razzaboni, *Delle superficie nelle quali un sistema di geodetiche sono curve di Bertrand* (Bologna Mem., V, 10, 1904); G. Wiegner, *Ueber eine besondere Klasse von Translationsflächen* (Lie Arch, 16, 1893); R. Kummer, *Die Flächen mit unendlichvielen Erzeugungen durch Translation von Kurven* (Diss. Leipzig, 1894); G. Scheffers, *Das Abel'sche Theorem und das Lie'sche Theorem über Translationsflächen* (Acta, 28,

(1) Cfr. Darboux, *Leçons*, T. I., p. 243.

1904; ivi sono stabiliti dei teoremi di Lie, alcuni dei quali risalgono al 1869; v. anche P. Mercatanti, *Il teorema di Lie sulle superficie che possono in più modi considerarsi come superficie di traslazione;* Giorn. di mat., 44, 1906); A. Wendler, *Ueber die Flächen, welche den partikulären Integral der Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y} = 0$ *entsprechen* (Diss. München, 1900); e *Beiträge zur Theorie der Translationsflächen* (Progr. München, 1904); K. Zorawski, *Notiz über Translationsflächen* (Leipziger Ber., 57, 1905); A. Demoulin, *Sur la théorie des surfaces et des enveloppes de sphères en géométrie anallagmatique* (C. R., 141, 1905) e *Sur les surfaces isothermiques et sur une classe d'enveloppe de sphères* (Ivi); B. Smith, *Certain surfaces admitting continuous deformation with preservation of conjugate lines* (Bull. Amer. M. S., II, 12, 1906); L. P. Eisenhart, *Surfaces analogues to the surfaces of Bianchi* (Ann. di mat., III, 12, 1905); C. Ruggeri, *Le superficie modanate e le deformazioni infinitesime della elicoide* (Giorn. di mat., 43, 1905); A. Voss, *Ueber diejenigen Flächen, welche durch zwei Schaaren von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimalen Rhomben zerlegt werden* (München, Ber., 36, 1906); P. Mercatanti, *Sulle superficie di Bonnet* (Giorn. di mat., 42, 1904; sono superficie per le quali è un piano il luogo dei centri dei segmenti limitati dalle coppie di centri di curvatura principale in ogni punto) e *Superficie sovrapponibili alle proprie parallele* (Id., 45, 1907); A. E. Young, *On certain isothermic Surfaces* (Trans. A. M. S., 8, 1907) e *On a certain Class of isothermic Surfaces* (Id., 10, 1909); U. Sbrana, *Sulle trasformazioni delle superficie a linee di curvatura coincidenti* (Mem. Soc. XL, III, 16, 1908); C. Segre, *Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema conjugato di coni circoscritti* (Torino Atti, 43, 1908) e *Le curve piane di ordine n circoscritte a un* (n + 1) — *latero completo di tangenti ad una conica, e una classe particolare di superficie con doppio sistema conjugato di coni circoscritti* (Id. 59, 1924); I. Favini, *Sulle superficie le cui linee di curvatura tagliano sotto angolo costante le linee di livello* (Giornale di matem., 49, 1911); O. Blumenthal, *Kanalflächen und Enveloppenflächen* (Math. Ann., 70, 1911); P. Funk, *Ueber Flächen mit lauter geschlossene geodätischen Linien* (Id., 74, 1913); L. Berwald, *Ueber die Flächen mit einer einziger Schaar zu einander windschiefer Minimalgeraden* (Münchener Ber., 1913); G. T. Sullivan, *Properties of Surfaces whose asymptotic Curves belong to Linear Complexes* (Trans. A. M. S., 15, 1914); E. J. Wilczinski, *Ueber Flächen mit unbestimmten Directrixcurven* (Math. Ann., 76, 1914); L. P. Eisenhart, *Transformations of conjugate Systems with* *equal points invariants* (Trans. A. M. S., 15, 1914), *Transformations of Surfaces of Voss* (Ivi), *Conjugate Systems with equal tangential Invariants and the transformation of Moutard* (Palermo Rend., 39, 1915), *Surfaces generated by the Motion of an invariable Curve whose points describe straight Lines* (Id., 41, 1916) e *Certain Surfaces of Voss and Surfaces associated with them* (Id., 42, 1917); L. Bianchi, *Sopra una classe di superficie collegate alle congruenze pseudosferiche* (Id., 40, 1915) e *Sulle superficie le cui normali si distribuiscono in una serie di* ∞^1 *iperboloidi rotondi* (Ann. di mat., III, 26, 1917); E. Müller, *Schraubflächen und Strahlengewinde* (Wiener Ber., 125, 1916); P. Calapso, *Intorno agl'inviluppi di sfere, sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura* (Ann. di mat., III, 26, 1917); V. Strazzeri, *Sulle superficie che ammettono per sezioni piane una semplice infinità di curve prefissate* (Palermo Rend., 42, 1917); F. Sibirani, *Sulle superficie che contengono un sistema di* ∞^1 *curve prefissate* (Id., 43, 1919); A. Terracini, *Sulle superficie le cui asintotiche dei due sistemi sono cubiche sghembe* (Atti Soc. Nat. Modena, V, 7, 1920); Barré, *Sur diverses classes de surfaces engendrées par une hélice circulaire* (Bull. S. M. F., 49, 1921); G. Sansone, *Sulle superficie con due famiglie di curve ortogonali deformabili in linee di livello e sopra una proprietà caratteristica delle superficie ad area minima* (Palermo Rend., 46, 1922) e *Sulle superficie deformabili al modo di Bonnet* (Giorn. di mat., IV, 3, 1926); E. Laura, *Sulle superficie contenenti una famiglia prefissata di linee geodetiche ed asintotiche* (Id., 47, 1923) e *Sopra le superficie che ammettono una famiglia di geodetiche giacenti sopra cilindri coassiali* (Atti Ist. Ven., 84, 1926); G. Vitali, *Superficie che ammettono una famiglia di geodetiche di cui sono note le projezioni ortogonali sopra un determinato piano* (Ivi) F. Salkowski, *Zur Theorie der Vosschen und der Guichardschen Flächen* (Math. Zeit. ,20, 1904); A. Demoulin, *Sur les surfaces de Guichard* (Bélgique Bull., 1925) e *Sulle superficie deformabili al modo di Bonnet* (Giorn. di mat., IV, 3, 1926); A. Terracini, *Sulle superficie con un sistema di asintotiche in complessi lineari* (Torino Atti 59, 1924); C. H. Sisam, *On surfaces whose asymptotic curves are cubics* (Quart. Journ., 50, 1926); L. Bieberbach, *Ueber Tchebycheffsche Netze auf Flächen negativer Kümmung, sowie auf einiger weiteren Flächenarten* (Berl. Ber., 1926); Giovanni Ricci, *Le trasformazioni di Christoffel e di Darboux per le superficie rotonde, coniche e cilindriche* (Pisa Ann., II, 1, 1926); A. Voss, *Ueber dreifache Flächensysteme und Ermittelung von Flächen, deren Minimalkurven durch Quadraturen bestimunt sind* (Münch. Abb., 31, 1927); L. Bianchi, *Congruenze di sfere di Ribaucour e superficie di Peterson* (Bologna, 1928); J. Wellstein, *Flächenrisotropen Drehungen und Schraubungen* (Journ. f. Math., 156, 1927).

16. La geometria infinitesimale delle superficie sorse, come vedemmo (p. 127) durante il Secolo XVIII per opera precipua di Monge, subì nel successivo una radicale metamorfosi per merito di Gauss, grazie all'uso costante delle coordinate curvilinee sulle superficie e al metodico impiego delle cosidette quantità fondamentali di I e II ordine; essa si avviò così verso la propria identificazione con la ricerca delle proprietà delle forme differenziali quadratiche, la cui teoria, iniziata da Lipschitz e Christoffel, per merito precipuo di G. Ricci e L. Bianchi, diede al detto ramo quel carattere di unità che è proprio della forma definitiva delle teorie scientifiche. Gli enti considerati e le proposizioni stabilite sono nella massima parte invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni che caratterizzano la geometria elementare, alle quali vanno aggiunte le deformazioni che non esigono rotture o duplicature delle superficie considerate. Sviluppatasi in modo meraviglioso a tutti noto la geometria projettiva, non si tardò a discernere nel corpo della geometria infinitesimale un certo numero di risultati i quali permangono se si sottopone la superficie considerata ad una collineazione arbitraria. Tali sono quelli che concernono le tangenti i piani osculatori e i tetraedri di osculazione (cfr. G. Loria, *Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti*, Bologna, 1925, p. I, p. 14); i piani tangenti, le asintotiche, le tangenti conjugate, nonchè altre tangenti meno palesi segnalate da G. Darboux (*Sur le contact des courbes et des surfaces*. B. Sc. math., II, 4, 1880) e C. Segre (*Complementi alla teoria delle tangenti conjugate da una superficie*, Linc. Rend., V, 17, 1908_2). La folla d'importanti problemi che offriva la geometria infinitesimale gaussiana delle superficie non concesse però ai ricercatori vissuti ne' corso del Sec. XIX di portare al punto di vista projettivo un'attenzione continuata; quantunque il campo da essi coltivato fosse ben lungi dall'essere, al termine di tale secolare fatica, completamente percorso e totalmente esaurito, ciò fu fatto da alcuni di coloro che vissero nel primo quarto del Secolo attuale. Sorse allora una geometria differenziale, che fu detta « projettiva » perchè i concetti e i teoremi che vi s'incontrano sono invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni lineari dello spazio, « affine » nel caso in cui ci si limitò a considerare quelle trasformazioni projettive che lasciano immutata la retta all'infinito del piano o il piano all'infinito dello spazio. Ora è notevole il fatto (il quale milita a sostegno dell'opinione che le più importanti innovazioni sono il prodotto, piuttosto della maturità dei tempi, che de' volere

degli uomini) che il nuovo campo dischiuso ai geometri abbia trovato tre pionieri fra loro indipendenti e sia stato coltivato con procedimenti differenti; per ragioni che risulteranno fra breve, questi indirizzi si possono indicare rispettivamente con gli epiteti *americano*, *italiano* e *tedesco;* e va subito rilevato che, mentre nella geometria differenziale classica poco si parla di curve gobbe e nulla di curve piane, la nuova da queste appunto prendo le mosse. Scendendo a più minuti particolari, osserveremo anzitutto — e ciò a vantaggio di coloro che intendono dedicarsi a questo nuovo ramo di scienza — che ne esistono già trattazioni metodiche in ciascuno degli indicati indirizzi. Già segnalammo (p. 332) l'opera del Wilckzynski, che appunto informa la recente produzione avvenuta negli Stati Uniti d'America; le analoghe italiana e tedesca sono: F. Cech, *I fondamenti della geometria projettivo-differenziale secondo il metodo di Fubini* (Ann. di mat., III, 31, 1922). G. Fubini e E. Cech, *Geometria projettiva differenziale*, due volumi, Bologna, 1926-27; da notarsi che il Fubini aveva già inserita una nota dal titolo « Introduzione alla Geometria projettiva differenziale di una superficie » nella III ed. delle *Lezioni di geometria differenziale* del Bianchi; J. A. Schouten und D. J. Struik, *Einführung in die neuen Methoden der Differentialgeometrie* (Huygens, 1 e 2, 1922-23); W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, II Bd. (Berlin, 1923).

Chi desidera unicamente di formarsi un concetto delle ricerche in discorso può limitarsi a prendere conoscenza dei seguenti scritti: E. J. Wilczynski, *Some Remarks on the historical Developement and the future Prospects of the Differentialgeometry of plane Curves* (Bull. S. A. M. S., 22, 1926); W. Blaschke e K. Redeméister, *Ueber die Entwickelung der Affingeometrie* (Deutsch. Math. Ver. 31, 9122); D. J. Struik, *Ueber die Entwickehung der Differentialgeometrie* (Id., 34, 1925); nè va trascurato l'importante rapporto presentato da E. Cartan al Congresso di Toronto sopra *La Théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle* (Enseign., 24, 1924-25).

17. I principali lavori a noi noti concernenti la nuova geometria differenziale delle curve sono i seguenti: R. H. Fowler, *The elementary Differentialgeometry of plane Curves* (Cambridge, 1921); G. Sannia, *Nuova trattazione della geometria differenziale projettiva-differenziale delle curve piane* (Lincei Rend., V, 31, 1922); J. A. Nyberg, *Projective differential Geometry of rational Cubic Curves* (Amer Journ., 35, 1913); G. Sannia, *Geometria differenziale dei reticolati piani invarianti per un gruppo di colli-*

neazioni (Palermo Rend., 48, 1924); E. Bompiani, *Invarianti projettivi di contatto fra curve piane* (Lincei Rend., VI .2, 1925_2); A. Kawaguchi, *On the projective Differentialgeometry of plane Curves and one-parameter Families of Conics* (Proc. of the Imprer. Academy, Tokyo, 2, 1926; comunicazione preliminare; l'autore assume nel piano come elemento la conica); e *Über projektive Differentialgeometrie* (Tohokn Math. Journ. 28, 1927); G. Sannia, *Nuova trattazione della geometria differenziale projettivo-differenziale delle curve sghembe* (Ann. di mat., IV, 3 1926); S. Ogiwara, *Ueber affine Bertrand'sche Kurven* (Japan. Journ. of Mathem., 4, 1927).

Fra le pubblicazioni recenti nell'indirizzo che dicemmo americano, ricordiamo le seguenti: G. M. Green, *Projective differential Geometry of one-parameter Families of Space-Curves and conjugate Nets of curved Surfaces* (Amer. Journ., 37, 1915 e 38, 1916); A. F. Carpenter, *Some fundamental Relations in the projective differential Geometry of Ruled Surfaces*, Ann. di mat., III, 26, 1917); C. D. Rice, *Invariants of Differentialgeometry by the use of Vector Forms* (Amer. Journ., 41, 1919); E. J. Wilczynski, *Some Generalizations of Geodesics* (Trans. A. M. S., 23, 1922).

18. L'esistenza delle succitate esposizioni metodiche della disciplina di cui parliamo, dovute a Fubini e Cech e al Blashcke ci permette di essere più brevi di quanto saremmo stati ove avessimo dovuto citare i numerosi lavori apparsi in questi ultimi anni, chè il lettore li troverà ricordati e utilizzati in quelle opere di maggior mole; per quanto concerne i contributi dei matematici italiani, nell'opera Fubini-Cech sono coordinati i lavori di Bompiani, Sannia, Terracini, Togliatti, anzi vi si trovano alcune note di Bompiani e Terracini contenenti l'esposizione di risultati da essi conseguiti e il completo elenco delle pubblicazioni da essi fatte. Ivi si trova pure una nota di carattere storico di G. Tzitzeica, nella quale sono ricordati alcuni lavori di più antica data, i quali si trovano coordinati e completati nel notevole volume dal titolo *Géométrie différentielle projéctive des réseaux* (Bucarest-Paris, 1924).

Volendo risalire alle origini della geometria differenziale projettiva fa mestieri citare la nota di G. Fubini, *Definizione projettivo-differenzale di una superficie* (Torino Atti, 49, 1914) nella quale è dimostrato che, come nell'ordinaria geometria differenziale una superficie è definita a meno di movimenti da due forme differenziali binarie quadratiche, i cui coefficienti soddisfano a certe relazioni (formole di Mainardi-Codazzi), così una superficie è definita, a meno di trasformazioni projettive, da forme differenziali, di cui una cubica, fra i coefficienti delle quali passano pure determinate relazioni. Sviluppo e complementi a tale importante scritto si trovano nei tre altri lavori dello stesso autore: *Applicabilità projettiva di due superficie* (Palermo Rend., 41, 1916), *Fondamenti della geometria projettivo-differenziale* (Torino Atti, 43, 1919) e *Nuova trattazione elementare dei fondamenti della geometria projettivo-differenziale di una superficie* (Rend. Ist. Lomb., 59, 1926). Fra gli scritti posteriori nel medesimo indirizzo ricordiamo i seguenti: E. Cartan, *Sur la déformation projéctive des surfaces* (Ann. Ec. norm., III, 37, 1920) e *Sur le problème général de la déformation* (C. R. Congrès Strassbourg, 1920); E. Cech, *L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista projettivo* (Ann. di mat., III, 31, 1922); E. Bompiani, *Coctruzione di invarianti projettivo-differenziali di una superficie*, Lincei Rend., VI, 2, 1925_2); G. Sannia, *Ravvicinamento di geometria differenziali delle superficie: metriche affine, projettiva* (Ann. di mat., III, 31, 1922); Enea Bortolotti, *Su una formula di geometria projettiva differenziale delle superficie e le sue applicazioni alla geometria metrica* (Torino Atti, 63, 1928). Di altri verrà fatta menzione più innanzi, trattando della geometria della retta e degli spazi a più dimensioni.

19. Sulla geometria affine la più antica pubblica manifestazione è rappresentata dal geniale e brillante volumetto di W. Blaschke *Kreis und Kugel* (Leipzig 1916), che tocca altri argomenti (quali i massimi e minimi in geometria e il calcolo delle variazioni) all'infuori di quelli indicati dal titolo. Lo svolgimento cronologico di essa si può seguire nella serie di note (ne conosciamo trentanove) dal comune titolo *Ueber affine Geometrie*, inserite in parte nei Leipz. Ber., in parte nella Math. Zeit., in parte infine nelle Hamb. Mitth.; buon numero di esse sono opera dello stesso Blaschke, ma altre portano le firme di Berwald, Biel, Franck, R. König, Liebmann, Pick, Radon, Reidemeister, Salkowski e Winternitz. Ulteriori sviluppi sullo stesso tema trovansi nei seguenti scritti: Witzenbock, *Ueber affine Geometrie* (Wien. Ber., 127, 1918); G. Sannia, *Geometria affine-differenziale delle curve sghembe* (Torino Atti, 57, 1922); W. Blaschke, *Eine topologische Kennzeichen der Kreise auf die Kugel*, Hamb. Mitth., 3, 1924, e Math. Zeit, 21, 1924; dimostrazione del seguente teorema: I cerchi di una sfera costituiscono l'unico sistema di curve differenziabili, chiuse e senza punti doppi tali che per tre punti della superficie-sostegno ne passi una sola e che due qualunque si taglino in due punti sotto angoli eguali); G. Thomsen, *Zur*

Differentialgeometrie in dreidimensionalen Raume (Deutsch. M. V., 34, 1925) e *Ueber eine liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven Flächentheorie* (Hamb. Mitth., 4, 1925); W. Süss, *Eine karakteristiche Eigenschaft der Kugel* (Deutsch. M. V., 34, 1925; si dimostra che la sfera è l'unica superficie ovale tale che nel suo interno si trovi un punto godente della proprietà che ogni sezione piana prodotta da piani per esso abbia la stessa larghezza) e *Ueber affine Geometrie* (Math. Ann., 96, 1927); S. Nakajima, *Eine charakteristiche Eigenschaft der Kugel* (Jahres. Deutsch. Math. Ver., 35, 1926; dimostrazione del seguente teorema di Süss: la sfera è l'unica superficie ovale di cui tutte le projezioni ortogonali sono curve fra loro simili).

Ancor più di recente hanno vista la luce altri lavori che servono di base a una nuova diramazione della geometria differenziale, a cui a ragione si dà l'epiteto di «conforme»; eccone i titoli: H. Weyl, *Zur Infinitesimalgeometrie; Einordnung der projektiven und der konforme Auffassung* (Götting. Narhr., 1921); E. Vessiot, *Contribution à la géométrie conforme* (Journ. de math., IX, 2, 1923); W. Blaschke, *Sistemi ciclici di curve sopra una superficie* (Lincei Rend., VI, 2, 1925_2). Chi intende conoscerne le ultime fasi di sviluppo ricorra alla serie di note col titolo comune *Ueber konforme Geometrie*, che si stanno pubblicando nelle Hamb. Mitth.; ne conosciamo cinque, tutte pubblicate nei vol. 3. e 4. di tale raccolta, e recanti le firme di G. Thomsen, W. Blaschke e J. Radon.

L'avvenire dirà se i lavori segnalati in questi tre ultimi articoli preludano ad una più estesa disciplina destinata a scoprire e coordinare le proprietà infinitesimali dello spazio che sono invarianti rispetto a una trasformazione cremoniana del piano o dello spazio; a trattarla analiticamente faranno certo mestieri appositi algoritmi, la cui creazione va segnalata agli analisti come un problema forse di grande difficoltà, ma certamente di sommo interesse.

§ 2. Ricerche intorno alla forma delle curve, delle superficie e di altre figure geometriche (1). Analysis situs. Configurazioni.

20. L'importanza attribuita dai matematici alle questioni attinenti all'apparenza esterna di figure definite esattamente è manifestata dal numero e valore delle collezioni di modelli di curve, superficie, ecc. (2), la maggior parte delle quali fecero bella mostra di sè nell'Esposizione annessa al III Congresso internazionale dei matematici (3). Indicheremo ora gli scritti in cui trovansi trattatate le corrispondenti questioni, citando anzitutto i lavori relativi alle cubiche: H. Wiener, *Die Eintheilung der verschiedenen Formen der Kurven und Kegel dritter Ordnung in 13 Gattungen* (Halle a. S., 1901); L. Mohrmann, *Ueber die Büschel von ebenen Kurven dritter Ordnung mit neun reelle Grundpunkten* (Math. Ann., 74, 1913); L. Brusotti, *Sopra un notevole fascio reale di cubiche piane* (Rend. I. L., II, 53, 1920).

Le forme delle curve di terza classe vennero studiate da H. G. Breyer (*De groundvormen der krommen van de derde klasse;* Diss. Amsterdam, 1895), quelle delle quartiche (4) in altre due dissertazioni di laurea, una di Miss Ruth Gentry, (*On the forms of plane quartic curves;* Bryn-Marwr, 1896); l'altra G. Bullard, (*On the general classification of plane quartic curves;* Worcester, 1899). Delle forme delle quintiche e delle sestiche si tratta invece nei seguenti scritti: L. W. Dowlin (*On the form of plane quintic curves;* Math. Review, 1, 1897); P. Field (*On the form of unicursal quintic curves;* Amer. Journ., 26, 1904) e *On the form of plane Quintic curve*

(1) Cfr. G. Feigl, *Geschichtliche Entwickelung der Topologie* (Deutsch. math. Ver., 37, 1928).

(2) Notizie in proposito si troveranno nel *Bollettino di bibl. e storia delle scienze matematiche*: II. (1899) p. 80 e 140; IV (1901) p. 126· IV (1903) p. 32; VII (1904) p. 64, VIII (1905) p. 96. Veggasi inoltre: F. Schilling, *Ueber neue kinematische Modelle zur Verzählungstheorie, nebst einer geometrische Einführung in dieses Gebiet* (Halle a. S., 1904); H. Wiener's *Sammlung mathematischer Modelle herausgegeben von der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner* (Leipzig, 1905). Fra i costruttori di modelli matematici va ricordato con onore Olaus Henrici (1840-1918), un tedesco che passò in Inghilterra la maggior parte della sua vita; ne fu pubblicata una biografia, scritta da F. Lindemann, nel Vol. 36, 1927, del Ber. Deutsch. Math. Ver.

(3) Cfr. *Verhandl. des III Mathematiker-Kongr.* (Leipzig, 1905) p. 717 e seg. In tale esposizione non potè figurare il cimelio descritto nella nota di R. Bonola sopra *Il modello di Beltrami di superficie a curvatura costante negativa* (Boll. di bibl. e storia, ecc., IX, 1906).

(4) Fra le più antiche pubblicazioni relative alla forma delle quartiche ricorderemo le tavole eseguite sotto la direzione del Brill e pubblicate per cura del Politecnico di Monaco nel fascicolo *Graphische Darstellungen aus der reinen und angewandte Mathematik.* I, Heft (Leipzig, 1893).

with five Cusps (Trans. A. M. S., 7, 1906); A. Rosenblatt, *Untersuchungen über die Gestalten der algebraischen Kurven sechster Ordnung* (Krakau Anz., 1910); K. Rohn, *Die ebene Kurve 6. Ordnung mit elf Ovalen* (Leipz. Ber., 63, 1911) e *Die Maximalzahl und Anordnung der Ovale bei der ebenen Kurven sechster Ordnung und bei der Fläche vierter Ordnung* (Math. Ann., 73, 1913); C. Crone, *Sur le courbes planes algébriques du sixième ordre et du genre 2* (C. R. IV, Congrès math., 1916). Considerevole generalità hanno le ricerche esposte nella *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, 1891) del Minkowski (1861 - 1909) (1), il lavoro di H. Brunn, *Ueber verknottete Curven* (Verh. I Math. Kongr., 1897), quello di Charlotte A. Scott, *On the circuits of plane curves* (Trans. Amer. M. S., 3, 1902) e la *Note* della stessa autrice *On the real inflexions of plane curves* (Ivi); finalmente l'articolo di C. Juel, *Ueber einer Beweis der Klein'schen Relation zwischen die Singularitäten enier ebenen algebraischen Kurve* (Math. Ann., 60, 1906). Pure questioni generali trattani i seguenti lavori: V. Ragsdale, *On the arrangement of the Real Branches of plane algebraic Curves* (Amer. Journ., 28, 1906, collegate alla fondamentale memoria dell'Hilbert, Math. Ann., 38); A. Rosenthal, *Ueber die Singularitäten der reellen ebene Kurven*, Habilitationschrift, Leipzig, 1912); W. Blaschke, *Die Minimalzahl der Scheitel einer geschlossenen konvexen Kurve* (Palermo Rend., 36, 1913); W. Vogt, *Uber monotongekrümmte Kurven* (Journ. f. Math., 144, 1914); A. Wiman, *Uber die reellen Züge der ebenen algebraischen Kurven* (Math. Ann., 90, 1923). L'Italia ha partecipato a questo genere di ricerche con una serie di memorie di L. Brusotti, fra cui per brevità ricordiamo soltanto le seguenti: *Serie lineari e corrispondenze sopra una curva di genere* p *dotata di* p+1 *circuiti* (Rend. I. L., II, 43, 1910), *Sulla generazione delle curve piane di genere* p *dotate di* p+1 *circuiti* (Ivi); *Sulla generazione di curve algebriche reali mediante « piccola variazione » di una curva spezzata* (Ann. di mat., III, 22, 1913); *Nuovi metodi costruttivi di curve piane d'ordine assegnato dotate del massimo numero di circuiti* (Rend. I. L., 47-49, 1914-16); *Un teorema sui fasci reali di curve algebriche* (Lincei Rend., V, 28, 1919_2); *Sulle curve piane algebriche reali prive di punti reali* (Ivi); *Discriminanti e fasci nella topologia projettiva del piano* (Rend. I. L., II, 51, 1918); *Curve generatrici e curve aggregate nella costruzione di curve piane d'ordine assegnato dotate del massimo numero di circuiti* (Palermo Rend., 42, 1917); *Sulle curve gobbe algebriche reali a circuiti concatenati* (Ann. di mat., III, 25, 1916); *Sulle coppie di circuiti allacciati e sui loro modelli*

(1) D. Hilbert, *Hermann Minkowski* (Gött. Nachr. 1909).

algebrici (Lincei Mem., VI, 3, 1928). A questi lavori si collega la nota di G. Biggiogero *Sulle curve piane algebriche, reali che presentano massimi d'inclusione* (Rend. I. L., II, 55, 1922), mentre la nota di A. Ferrari *Intorno allo spezzamento delle linee parallele alle curve algebriche* (Lincei Rend., V. 4, 1905$_2$) risolve una questione speciale, ma interessante. Una bella applicazione di un teorema d'algebra alle questioni di realtà delle bitangenti di una quartica piana o delle rette di una superficie cubica si apprende dalla nota di E. Maillet, *Sur le équations de la géometrie e la theorie des substitutions* (C. R. 138, 1904).

21. Molte ed importantissime investigazioni ebbero per punto di partenza la questione, sollevata dal Jordan, se o quando una curva piana decomponga il proprio piano in due distinte regioni; esse toccano la « teoria degli insiemi di punti » (1) e però interessano in pari grado gli analisti ed i geometri. Fra i lavori relativi emergono quelli di A. Schönflies, fra cui basti qui ricordare i seguenti: *Ueber einen Satz aus der Analysis situs* (Gölting. Nachr., 1896 e 1899), *Ueber einen grundlegenden Satz der Analysis situs* (Id., 1902), *Beiträge zur Theorie der Punktmengen* (Math. Ann., 58, 1903, e 59, 1904) e *Ueber die geometrischen Invarianten der Analysis situs* (Gotting. Nachr., 1904). Si collegano a questi le seguenti memorie: W. F. Osgood, *Ueber einen Satz des Herrn Schönflies aus der Theorie der Functionen zweier reellen Veränderlichen* (Götting. Nachr., 1900); F. Bernstein, *Ueber einen Schönflies'schen Satz aus der Theorie der stetigen Functionen zweier reellen Veränderlichen* (Ivi); F. Riess, *Ueber einen Satz der Analysis situs* (Math. Ann., 59, 1904); G. A. Bliss, *The exterior und interior of a plane curve* (Bull. Amer. M. S., II, 10, 1904) e *A proof of the fundamental theorem of analysis situs* (Id., 12, 1906); O. Veblen, *Theory of plane curves in non-metrical analysis situs* (Trans. Amer. M. S., 6, 1905). Un saggio di estensione allo spazio ordinario, anzi a tutti gli spazi lineari, di tali risultati leggesi nella nota di L. D. Ahmes, *On the theorem of analysis relating to the division of the plane or space by a closed curve or surface* (Bull. Amer. M. S., II, 10, 1904).

Prima di lasciare il piano citeremo la Diss. di W. Büchel, *Zur Topologie der durch eine gewöhliche Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades definierten Kurvenschaar* (Hamb. Mitth., 14, 1904): inoltre ci corre l'obbligo di rilevare che gli studi recenti intorno alle funzioni di

(1) Cfr. l'articolo *Mengenlehre* di A. Schönflies nel T. I. dell'*Encîklopädie der math. Wiss.*, il pregevole volume *The theory of sets of points* di W. H. Young e Grace Young (Cambridge, 1906) e molti articoli inseriti nella rivista polacca *Fondamenta Mathematicae*.

variabili reali hanno segnalato alcune imperfezioni e lacune che presenta il concetto generale di curva; quali esse siano e quale sia un modo per correggerle si trova ampiamente esposto nella memoria di K. Menger dal titolo *Grundzüge einer Theorie der Kurven* (Math. Ann., 95, 1926).

22. **Sulla topologia delle curve sghembe** non possiamo citare che i seguenti articoli: H. Brunn, *Ueber scheinbare Doppelpunkte von Raumcurven* (Deutsch. Mathem. Ver., 3, 1894); E. Pascal, *Le varie forme delle curve storte di 6° ordine intersezioni complete di quadriche e cubiche* Rend. Ist. Lomb., II, 38, 1905), strettamente legato a lavori di F. Klein (Math. Ann., 42, 1892; Götting. Nachr., 1892); O. Chisini, *Sulla forma delle quartiche gobbe di I specie e delle curve ellittiche normali* (Rend. I. L., II, 53, 1920); Margherita Piazzola Beloch, *Sulla configurazione delle curve situate sopra quàdriche, e, in particolare, sulla configurazione delle curve algebriche sghembe col massimo numero di circuiti* (Lincei Rend., V, 22, 1913_2); J. v. Sz. Nagy, *Über die reellen Züge algebraischen ebenen und nicht algebraischen gewundenener Kurven n-ter Ordnung* (Id., 78, 1917).

Sulla forma delle superficie in generale le più recenti ricerche a noi note sono quelle di F. Brunel (*Analysis situs. Recherches sur les réseéaux;* Bordeaux Mém., IV, 5, 1895), H. S. White (*Numerically regular reticulations upon surfaces of deficiency higher than 1;* Bull. Amer. M. S., II, 2, 1896; *The construction of special regular reticulations on a closed surface*, Id., 4, 1858); E. W. Davis (*Note on a special regular reticolation*, Ivi; S. Finsterwalder (*Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation;* Deutsch. Math.-Ver., 6, 1899).

Altre concernono speciali superficie; così su quelle cubiche in generale, oltre un opuscolo di W. H. Blythe (*On models of cubic surfaces*, Cambridge, 1905; cfr. gli articoli dello stesso autore *On the construction of models of cubic surfaces*, Quart. Journ., 29, 1897; *On models of cubic surfaces*, Id., 32;, 1900), vanno ricordati gli scritti, aventi scopi più limitati, di H. M. Taylor, *On tre Construction of a Model showing the 27 lines on a cubic surface* (Cambridge Trans., 18, 1900), di P. Stäckel, *Ueber das Modell einer Fläche dritter Ordnung, die das Verhalten einer krummen Fläche in der Nähe eines parabolischen Punktes darstellt* (Zeitschr. f. Math., 51, 1904) e di R. Sturm, *Ein und zweischaltigkeit von Flächen 3. Ordnung* (Journ. f. Math., 153, 1922); nè vanno dimenticate le indagini di V. Snyder, *On the Forms of quintic scrolls* (Bull. Amer. M. S., II, 7, 1902); *On the Form of sextic Scrolls having a rectilinear Directrix* (Ann. Jurn., 27, 1905) e *On the Form of sextic Scrolls having no rectilinear Directrix* (Ivi);

di F. Severi *Sulla forma delle rigate cubiche* (Atti Ist. Ven., 62, 1903) e di R. Torelli, *Sulle proprietà di connessione delle superficie monoidali* (Napoli Atti, II, 14, 1911). Riguardo alle superficie di 4° ordine, osserveremo che la classificazione delle superficie di Kummer, già compiuta dal Rohn (v. p. 98), fu confermata, in base ad altri pricipii, da E. Pascal nel già ricordato suo scritto *Sulla classificazione delle superficie di Kummer* (Rend. Ist. Lomb., II, 38, 1905). Ricerche topologiche sopra altre superficie dello stesso ordine leggonsi nelle note di D. Hilbert, *Über die Gestalt einer Fläche vierter Ordnung* (Götting. Nachr., 1909) e K. Rohn, *Die Maximalzahl von Ovalen bei einer Fläche vierter Ordnung* (Leipz. Ber., 63, 1911). Delle superficie « unilatere » (1) rigate (in particolare sviluppabili) N. Delaunay ha dato le equazioni generali (*Sur les surfaces n'ayant qu'un côté et sur les points singuliers des courbes planes;* Bull. S. M. F., 26, 1898); finalmente delle singolarità di una superficie che si incontra nella fisico-chimica (2) si è occupato D. G. Kortweg (*Sur les points de plissement et les plis correspondants dans le voisinage des bords de la surface de van der Waals;* Arch. néerl., II, 8, 1903).

Alle questioni di forma trovasi applicate la moderna teoria delle superficie algebriche nei seguenti lavori di A. Comessatti: *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale* (Math. Ann., 73, 1912); *Sulla connessione delle superficie razionali reali* (Ann. di mat. III, 23, 1915); *Sulle connessione delle superficie algebriche reali* (Id. IV, 5, 1928).

Un cenno a parte, altamente onorevole, va fatto dalle geniali ricerche che da un trentennio va compiendo C. Juel (3) sulle curve piane «grafiche» e sulle figure analoghe dello spazio; sono indagini che potrebbero dirsi « qualitative », non avendo come fondamento alcuna rappresentazione analitica degli enti considerati; esse, oltre al possedere un notevole valore geometrico, presentano un grande interesse filosofico, giacchè provano l'attitudine del metodo matematico ad assumere un andamento meno rigido di quello sotto cui erasi dianzi manifestato. Nell'impossibilità di addentrarci in minuti particolari, indichiamo i principali lavori relativi: *Indeling i Laeren on de grafiske Kurver, avec un résumé en Français* (Kjöbenhavn

(1) Giova qui notare con P. Stäckel (*Die Entdeckung der einseitigen Flächen;* Math. Ann., 52, 1899) che la scoperta di tali superficie fu fatta contemporaemen'e (1858) da Listing e Möbius.

(2) Ostwald, *Lehrbuch der allgemeinen Chemie, Verwandschaftlehre*. I Teil (Leipzig, 1896-1902), p. 1033 segg.; Duhem, *Traité élémentaire de mécanique chimique;* t. IV (Paris, 1899) p. 101 e segg.

(3) Cfr. P. Montel, *Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel* (Bull. Soc. math., 48, 1924).

Mém., VI, 10, 1899); *Ueber nicht-analytische Raumkurven* (Deutsch. Math. Ver., 16, 1907); *Note on ikke analitisk Omdreingsflade* (Nyt. Tids., 20, 1909; si tratta di una superficie generata dalla rotazione di una curva grafica); *Om simplex cyklische Kurven* (Kjöbenhav Mém., VII, 8, 1911); *Ueber Elementarfläche* (Deutsch. Math. Ver., 22, 1913); *Uber die verallgemeneinerte Steiner'sche Fläche*, Id., 24, 1915; è una superficie non-analitica tagliata da ogni suo piano tangente in una coppia di ovali); *Die elementare Ringfläche vierter Ordnung* (Kjöbenhavn Mém., VIII, 2, 1918); *Note über die paaren Zweieke einer ebenen Elementarkurven vierter Ordnung* (Id., 13, 1920); *Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten* (Ivi); *Uber Flächen von Maximalindex* (Id., 5, 1923-24); *Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung* (Kjobenhavn Mém., II, 1924); *Sätze über ebene ein-und mehrteiligen Elementarkurven vierter Ordnung* (Math. Ann., 76, 1915); *Einleitung in die Theorie der Elementarflächen dritter Ordnung* (Ivi; in questo lavoro dimostrasi come molte proprietà della configurazione delle rette di una superficie cubica algebrica sussistono per le analoghe non-algebriche); *Ueber die Kongruenz zweiten Grades und die Kummersche Fläche* (Acta, 49, 1926).

23. Dell'*analysis situs* nel senso riemanniano (1) tratta la memoria postuma di E. B. Christoffel *Querschnittstheorie* (Math. Ann., 55, 1902). D'altronde alcune acute osservazioni critiche consegnate in una dissertazione di laurea (P. Heegard, *Forstudien til en topologik teori for de algebraiske fladers samenhang;* Kopenhagen, 1898) indussero il Poincaré a riprendere i suoi studi (v. nota a pag. 174) sull' *analysis situs; i nuovi* risultati a cui egli pervenne sono consegnati nei seguenti lavori: *Complément à l'Analysis situs* (Palermo Rend., 13, 1899); *Second complément à l'Analysis situs* (Proc. L. M. S., 32 1900); *Sur certaines surfaces algébriques. III complément à l'Analysis situs* (Bull. S. M. F., 30, 1902); *Sur les cycles des surfaces algébriques* (Journ. de Math., V, 8, 1902); *Cinquième complément à l'analysis situs* (Palermo Rend., 18, 1904; cfr. anche la nota *Sur la connéxion des surfaces*, C. R., 133, 1901).

Un indirizzo originale e più chiaramente analitico hanno gli studi di H. Brunn, il cui più notevole frutto è il saggio *Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwerthsatzes zur Ovaletheorie* (Berlin, 1905); di indole analoga è la Diss. di L. D. Ames, *An arithmetical treatment of some problems in analysis situs* (Amer. Journ., 27, 1905).

(1) Cfr. i Cap. XVI e XVII della *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* Leipzig, 1901, di W. Ahrens.

All'*Analysis situs* fu già dedicato uno speciale articolo nell'*Encykl. math.*, dovuto a due specialisti in materia: il Dehn e l'Heegard (III Tl. Bd., I Th., 1 Hälfte). Una esposizione metodica della stessa materia è rappresentato nell'articolo di O. Veblen *Analysis situs*, inserita nella II parte di *The Cambridge Colloquium* (New York, 1922). Aggiungiamo qui l'indicazione di altri lavori sullo stesso tema: A. M .Dehn, *Ueber die Topologie des dreidimensionalen Raumes* (Math. Ann., 69, 1910); P. Heegard, *Sur l'«Analysis situs»* (Bull. S. M. F., 44, 1910); G. Landsberg, *Beiträge zur Topologie geschlossener Kurven mit Knotenpunkten und zur Kronecker'schen Charakteristikentheorie* (Math. Ann., 70, 1911); H. Brunn, *Über die Bausteine der Analysis situs* (Arch. Math. Phys., III, 22, 1913); J. W. Alexander II, *A Prof of the invariance of certain Constants of Analysis situs* (Trans. A. M. S., 16, 1915); G. Andreoli, *Nuova dimostrazione del teorema di Poincaré sulle caratteristiche topologiche di una superficie* (Rend. I. L., II, 48, 1915); H. Weyl,*Strenge Begründung der Charakteristicketheorie auf zweiseitigen Flächen* (Deutch. Mat., V, 25, 1916); R .L. Moore, *On the fundations of plane Analysis situs* (Trans. A. M. S., 17, 1916); A. Rosenthal, *Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua* (Müunch. Ber., 1919); R. L. Moore, *Concerning a Set of Postulates for plane Analysis* (Trans. A. M. S., 20, 1919); B. von Kerekjarte, *Ueber die Browerschen Fixirpunktsätze* (Math. Ann., 80, 1919-20; i lavori del Brouwer si trovano in C. R. 168, 1919, e 171, 1920; altri di lui e de J. Nielsen sono inseriti nei Vol. 80-82, 1919-20, dei Math Ann.); G. Andreoli, *Invarianti topologici ed equivalenza delle superficie* (Giorn. di mat. 59, 1921); H. Tietze, *Beiträge zur allgemeinen Topologie* (Math. Ann., 88, 1921, e 91, 1923).

24. - Un nuovo impulso è stato impresso dall'Hilbert agli studi di cui è parola con una memoria ormai già celebre (*Ueber Flächen von konstanter Krummung;* Trans. Amer. M. S., 1, 1901) intesa a provare l'impossibilità, già presupposta dal Genocchi (cfr. p. 253, nota 2), di rappresentare l'intero piano di Lobatschewsky sopra una superficie di curvatura costante negativa (rappresentazione di Beltrami; v. p. 253). Tale indirizzo è visibile nei seguenti scritti: H. Liebmann, *Eine neue Eigenschaft der Kugel* (Götting. Nachr., 1899: « la sfera è l'unica superficie analitica regolare a curvatura co stante positiva »), *Beweis zweier Sätze über die Bestimmug von Ovaloiden durch die Krümmungsmass oder die mittlere Krümmung für jede Normalenrichtung* (Ivi), *Ein Satz über endliche einfach-zusammenhängende Flächen negativer Krümmung*, Leipziger Ber., 52, 1900) e *Ueber die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung* (Math. Ann., 53,

1900); W. Boy, *Ueber die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen* (Diss. Gött., 1901) e *Ueber die Abbildung der projektiven Ebene auf eine im Endliche geschlossener singularitätsfreie* Fläche (Gött. Nachr., 1901), G. Prasad, *Ueber die Hilbert'schen Sätze in der Theorie del Flächen konstanter Gaussischen Krümmung* (Math. Ann., 61, 1905), E. Holmgren, *Sur le surfaces à courbure constante négative* (C. R., 134, 1902; altra dimostrazione del surriferito teorema di Hilbert), e *Ueber eine Klasse von partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung* (Math. Ann., 57, 1903); G. Lüktemeyer, *Ueber den analytischen Charakter der Integrale von partiellen Differentialgleichiungen* (Diss. Göttingen, 1902).

Prima di lasciare questo genere di studi, noteremo che il « problema dei quattro colori » (1) fu ancora studiato da P. J. Heawood (*On the four colour map theorem;* Quart. Journ., 29, 1897), A. C. Dixon (*On map colouring;* Mess., II, 32, 1902), P. Wernicke (*Ueber den kartographischen Vierfarbensatz;* Math. Ann., 58, 1903), C. de Polignac (*On elements connected each by one or the other of two reciprocal relations;* Amer. Journ., 26, 1904) e A. Errera, *Du coloriage des cartes et de qualques questions d'analysis situs*, Thése (Bruxelles, 1921).

25. Sulla teoria dei poliedri si possiede oggi uno speciale trattato, cioè: M. Brückner, *Vielecke und Vielflächе. Theorie und Geschichte* (Leipzig, 1900). Vennero poi felicemente compiute notevoli ricerche sull'argomento del Minkowski (*Allgemeine Lehrsätze über die convexe Polyeder*, Götting. Nachr., 1897; *Volumen und Oberflächen*, Math. Ann., 57, 1903, ecc.) il quale ad es., ha trovato esser centrato qualunque solido convesso costituito da poliedri a centro. D'altronde L. Lindelöf, continuando le ricerche (v. p. 29, nota 1) che gli valsero nel 1880 dall'Accademia di Berlino il premio Steiner, compose notevoli *Recherches sur les polyèdres maxima* (Acta Soc. Fennicae, 24, 1898); anche il Cesàro proseguì antichi suoi studi (v. p. 175) con le memorie *Des polyèdres superposables à leur image* (Belgique Mém., 53, 1898) e *Sur quelques propriétés des polyèdres non superposables à leur image* (Ivi). Assidue ricerche sulle varie forme dei poliedri sono dovute a O. Hermes (*Ueber Anzahl und Form der Vielflächen*, Progr. Berlin, 1894;

---

(1) V. p. 176; inoltre il Cap. XIX del libro di W. Ahrens, *Mathem. Unterhaltungen und Spiele* (Leipzig, 1901).

Più minuti particolari sull'argomento trovansi nell'articolo dell' Errera *Exposé historique du problème des quatre couleurs* (Periodico matematica, IV, 7, 1927). Riguardo ad una pretesa soluzione di data più antica vedi J. Cook Wilson, *On a supposed solution of the «four colour problem»* (The mathematical Gazette, Luglio 1906).

Verzeichniss der einfachsten Vielflächen, Progr. Berlin, 1896; *Die Formen der Vielflächen*, Journ. f. Math., 120, 1899; 122, 1900; 123, 1901), e M. Brückner ha compiuto delle importanti ricerche che lo condussero a costruire tutta una collezione di nuovi poliedri che poteronsi ammirare nell'esposizione annessa al III Congresso internazionale dei matematici (cfr. la nota preliminare *Ueber die diskontinuirlichen und nicht-konvexen gleicheckig-gleichflächigen Polyeder;* Verh. des III Math. Kongr.) e dei quali ha poi composta una particolareggiata teoria (*Ueber die gleicheckig-glechflächigen, diskontinuirlichen und nichtkonvexen Polyeder;* Nov. Acta, 86, 1906).

Vanno ancora ricordate le *Ricerche intorno ai poliedri ed alle reti autocorrelative* (Atti Ist .Ven., 62, 1903; Per. mat., III, 1, 1904) di A. Andreini; le osservazioni di E. Steinitz, *Ueber ein merkwürdiges Polyeder von einseitigen Gesamtfläche* (Journ. f. Math., 130, 1905); quelle di J. D. Everett, *On a calculus of point assemblage* (Proc. L. M. S., II, 1, 1904); quelle di genere diverso e tutt'affatto nuovo di P. Stäckel e C. Rodenberg sopra le *Geodätische Linien auf Polyederflächen* (Palermo Rend., 22, 1906); finalmente quella di E. Steinitz, *Ueber diejenigen konvexen Polyeder mit n Grundflächen, welche durch n — 4 Schnitte aus einen Tetraeder abgeleitet werden können* (Arch. Math. Phys., III, 14, 1908). Chiuderemo segnalando l'articolo di E. Steinitz *Polyeder und Raumeinteilungen* nell'*Encykl. math.* e i seguenti lavori: A. Rosenthal, *Untersuchungen über gleichflächigen Polyeder* (Nova Acta, 93, 1910); O. Niccoletti, *Sulla equivalenza dei poliedri* (Palermo Rend., 37, 1914); C. Jordan, *Sur la classification des constellations* (Congès Strassbourg., 1920) e *Sur quelques lignes brisées* (Journ. de math., VIII, 3, 1920).

26. - La più studiata delle configurazioni piane, quella che ha per nocciolo l'esagramma di Pascal, non venne abbandonata in quest'ultimo decennio: lo provano i lavori di L. Klug (*Die Configuration des Pascal'schen Sechseckes in Allgemeinen und in vier speciellen Fällen*, Kolozvar, 1898; e *Staudt's Untersuchungen über das Pascal'sche Sechseck und einige sich daran anschliessende Bemerkungen;* Monatshefte, 10, 1899) e F. Lindemann (*Ueber das Pascal'sche Sechseck;* Münchener Ber., 1902).

Altrettanto dicasi di quella costituita dai flessi di una cubica (W. Burnside, *On the Hessian configuration and its connection with the group of 360 plane collineations;* Proc. L. M. S., II, 3, 1906) e di quella, non meno notoria, costituita dai punti ed i piani singolari della superficie di Kummer, della quale si occuparono E. Bertini (*Sulle configurazioni di Kummer* *più volte tetraedroidali;* Rend. Ist. Lomb., II, 29, 1898), E. Ciani (*Sopra la configurazione di Kummer;* Giorn. di mat., 34, 1896, e 37, 1899; *Alcune osservazioni sopra la configurazione di Kummer,* Id., 37, 1899) e V. Martinetti (*Un'osservazione relativa alla configurazione di Kummer,* id., 34, 1896; *Sopra la configurazione di Kummer,* Id., 35, 1897; *Alcune considerazioni sulla configurazione di Kummer;* Palermo Rend., 16, 1902).

Similmente venne nuovamente investigata (E. Stenitz, *Die Geraden der Reye'schen Konfiguration;* Archiv, III, 1, 1901; *Die Konfiguration* $(16_6, 20_5)$, *ihre analytische Darstellung und ihre Beziehung zu gewissen algebraischen Flächen,* Id., 2, 1901) la generalizzazione proiettiva della cf. nascente dal considerare quattro sfere ed i loro centri di similitudine. Delle cf. provenienti da poligoni o poliedri prospettivi o mutuamente inscritti e circoscritti si discorre nei seguenti lavori: G. Bauer, *Von zwei Tetraedern, welche einander zugeich eingeschrieben und umschieben sind* (Münchener Ber., 27, 1897); J. Valyi, *Ueber die Gruppen von mehrfachen perspectivischen Dreiecken in der Ebene* (Monatshefte, 89, 1898); G. Gallucci, *Studio dei tetraedri biomologici, con applicazione alla configurazione armonica ed alla configurazione di Klein* (Napoli Rend., III, 4, 1898 Giorn. di mat., 37, 1899), *Discussione elementare dei casi di pluriomologia dei tetraedri* (Per. di mat., 13, 1898), *I triangoli omologici nello studio del pentaedro* (Napoli Rend., III, 5, 1899), *Risoluzione del problema dei tetraedri iperboloidici* (Id. III, 11, 1905) e *A proposito delle figure iperarmoniche (un teorema sugli n-goni prospettivi)* (Ivi); G. Kohn, *Ueber Tetraeder in schiefperspectiver Lage* (Wiener Ber., 107, 1899); V. Martinetti, *I gruppi di tre tetraedri l'un l'altro inscritti e circoscritti* (Giorn. di mat., 42, 1904) e *Sulle coppie tetraedri reciprocamente inscritti e circoscritti* (Atti Accad. Peloritana, 18, 1903); L. Berzolari, *Sulle collineazioni cicliche del quarto ordine determinate da un tetraedro e sul loro legame con la teoria dei tetraedri desmici* (Rend. Ist. Lomb., II, 31, 1904); W. Fr. Meyer, *Ueber die Möbiussche Figur zweier einander ein-und umschiebenen Tedraeder und die Figur einer einem Tedraeder umschriebenen geradlinigen Fläche zweiter Ordnung* (Math. Zeit., 2, 1918).

Tre rette sghembe e le tre, ognuna delle quali ne incontra due ortogonalmente, determinano una cf. che venne studiata e poi notevolmente generalizzata da F. Morley (*On a regular rectangular configuration of ten linepairs coniugate as to a quadric,* Bull. Amer. M. S., II, 5, 1899); un'altra proviene dalla considerazione di due quaterne di generatrici di diverso sistema di una quadrica e forma il tema dello *Studio della figura delle otto rette e sua applicazione alla geometria del tetraedro ed alla teoria delle con-*

figurazioni (Napoli Rend., III, 12, 1906) del Gallucci; è la stessa studiata da G. Fonténé nella nota *Sur une configurations remarquable dans l'espace* (Bull. S. M. F., 34, 1906), il quqale però la definì partendo da un sistema di otto punti A_{+1}, A_{-1}, B_{+1}, B_{-1}, C_{+1}, C_{-1}, D_{+1}, D_{-1}, tali che stiano nello stesso piano quattro punti quando il prodotto dei corrispondenti segni è positivo. Una terza (estendibile a tutti gli spazi lineari) proviene dalla considerazione di sei punti dello spazio e fu studiata da A. Zoukis nell'articolo *Sur l'hexacoryphe complet* (Journ. de math., V, 8, 1902); mentre delle cf. che nascono dal pentagono gobbo o dal pentaedro trattarono A. Grüttner (*Das Räumliche Fünfeck*, Diss. Breslau, 1903) e E. Ciani (*Sopra la configurazione del pentaedro;* Palermo Rend., 21, 1906).

27. Altre speciali cf. trovansi studiate nei seguenti scritti: J. Feder, *Die Configuration* (12_4, 16_3) *und die zugehörige Gruppe von 2304 Collineationen und Correlationen* (Math. Ann., 47, 1896); G. Lazzeri, *Le configurazioni piane di Caporali* (Per. di mat., 12, 1897); V. Martinetti, *Le configurazioni* (8_4, 8_4) *di punti e piani* (Giorn. di mat., 35, 1897) e *Un gruppo di configurazioni* (9_4, 9_4) *di punti piani* (Atti Accad. Peloritana, 15, 1901); G. Gallucci, *Costruzione di una nuova classe di configurazioni nel piano e nello spazio* (Napoli Rend., III, 10, 1904); E. Mayer, *Ueber eine Konfiguration von Geraden Linien im Raume* (Math. Ann., 65, 1908); L. Berzolari, *Sopra una classe di configurazioni di rette e di piani* (Lincei Rend., V, 25, 1916_2) e *Le configurazioni* (10_6, 14_4) *di punti e piani* (Rend. I. L. II, 51, 1918); K. Rohn, *Kongruente Dreiecke, Dreikante, Vierkante und Tetraeder in perspektiver Lage* (Leipzig. Ber., 71, 1919) e L. Klug, *Ueber zwei Konfigurationen* (Monatshefte, 30, 1920).

Maggiore generalità possiedono i risultati delle seguenti memorie: E. Steinitz, *Ueber die Construction der Configurationen* n_3 (Diss. Breslau, 1894) e *Ueber die Möglichkeit, gewisse Configurationen* n_3 *in einem Zuge zu durchlaufen* (Monatshefte, 8, 1897); K. Zindler, *Eine Methode, aus gegebenen Configurationen andere abzuleiten* (Wiener Br., 105, 1896); E. Hess, *Weitere Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen* (Nova Acta, 75, 1899); R. von Sterneck, *Ueber konvexe Polygone* (Monatshefte, 15, 1904); G. Lazzeri, *Sulle configurazioni nello spazio* (Per. di mat., 15, 1899); R. Tesorone, *Sulle figure iperprospettive piane* (Lanciano 1904; sono ivi enunciati alcuni risultati sopra le coppie di *n*-goni piani *n* volte prospettivi); E. Lasker, *A new Method in Geometry* (Amer. Journ., 30, 1908; è ivi proposto un metodo nuovo appunto per lo studio delle configurazioni); J. A. Barrau, *Sur une classe de diagrammes de configurations* (Giorn. di mat., 47, 1909); G. Gallucci, *Le configurazioni* (Napoli Atti, II, 15, 1911); E. Visconti, *Sulle configurazioni piane atrigone* (G. di Giorn. di mat., 54, 1916); V. Martinetti, stesso titolo (Ivi).

Degli scritti relativi al soggetto di cui ci occupiamo è agevole oggi prendere notizia grazie all'articolo *Konfigurationen* di E. Steinitz nel III Vol. I Th. dell'*Encikl. math.* Sono ad esso posteriori i volumi: G. Gallucci, *Complementi di geometria projettiva. Contributo alla geometria del tetraedro e allo studio delle configurazioni* (Napoli, 1928); F. Levi, *Geometrische Konfigurationen. Mit einer Einführung in die kombinatorische Flächentopologie* (Leipzig, 1929).

Chiuderemo notando come il concetto di configurazione fu esteso sì da comprendere infiniti elementi; per il piano si vegga al riguardo la memoria di H. Graf e R. Sauer, *Ueber dreifache Geradensysteme in der Ebene, welche Dreiecknetze bilden* (München Ber., 1924); per lo spazio le successive: R. Sauer, *Die Raumenteilungen, welche durch Ebenen erzeugt werden, von denen je vier sich in einem Punkte schneiden* (Id., 1925); M. Graf e R. Sauer, *Ueber besondere räumliche Geradenanordnungen derart dass durch jeden Schnittpunkt gleichviele Gerade gehen* (Id., 1926); R. Sauer, *Ueber die allgemeinste räumliche Anordnung gerader Linien zu scheinbaren Dreiecknetzen* (Id. 1927). Che tali studi conducano a risultati relativi ad altri campi apprendesi dall'altro lavoro di R. Sauer, *Flächen mit ausgezeichneten Systeme geodätischer Linien, die sich zu einem Dreiecknetz verknüpfen lassen* (Ivi). Va da ultimo notato che il volume di Eberhard, *Die Grundgebilde der ebene Geometrie* (Leipzig, 1895) contiene lo studio del sistema di n punti di un piano, dal punto di vista della teoria delle sostituzioni, mentre nell'articolo di E. H. Moore, *Tactical memoranda* (Amer. Journ., 18, 1896) leggesi una teoria generale ed astratta delle cf.

§ 3. Geometria della retta nello spazio.

28. Nell'intraprendere l'enumerazione degli scritti recenti intorno alla geometria della retta nell'indirizzo plückeriano, segnaliamo anzitutto le esposizioni fattene da C. M. Jessop nel volume *Treatise on the line complex* (Cambridge, 1903) e da K. Zindler nei due intitolati *Liniengeometrie mit Anwendungen* (I Teil, 1902; II Teil, 1906), ove parecchie pagine sono di pertinenza della geometria differenziale (v. anche la nota dello stesso autore *Zur differentialgeometrie der Linienkomplexe*, Monatshefte, 17, 1906).

Molte idee originali ed importanti sul sistema delle rette dello spazio, si apprendono dalla magistrale opera di E. Study, *Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung de Kräfte und verwandte Gegenstände der Geometrie* (Leipzig, 1902; cfr. il precedente articolo dello stesso autore, *Ein neuer Zweig der Geometrie*, Deutsch. Math.-Ver., 11, 1902). Alcuni di tali concetti si trovano già nella memoria di Joh. Petersen, *Nouveaux principes pour études de géométrie des droites* (Kjöbenhavn Overs., 1898) (1), mentre altre costituiscono la base degli scritti seguenti: E. Müller, *Ein Uebertragungsprincip des Herrn Study* (Archiv. f. Math., III, 5, 1903); E. von Weber, *Zur Geometrie des Kreises im Raum* (Id., I, 7, 1904) e *Ueber die Beziehung zwischen Kegelschnitten und Kreisen und die Theorie des Imaginären* (Monatshefte, 16, 1905); J. Grünwald, *Ueber duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie* (Id., 17, 1906; sono ivi applicati i numeri della forma $u + \varepsilon v$, ove ε è una nuova unità tale che $\varepsilon^2 = 0$); E. Meyer, *Ueber das in der kinematische Geometrie auftretende Nullystem* (Math. Ann., 60, 1905).

29. Alcune difficoltà che s'incontrano nell'applicare le coordinate di rette a questioni geometriche, segnalate da R. Sturm (v. la memoria *Porimatische Aufgaben*, Arch. Math. Phys., III, 24, 1915) furono chiarite da M. Pasch nell'articolo *Ueber quatenäre Linienkoordinaten* (Journ. f. Math., 148, 1918). I fondamenti teorici della geometria della retta furono acutamente investigati da M. Pieri. (*Sui principii che reggono la geometria delle rette*; Torino Atti, 36, 1901). Le rette di un sistema doppiamente infinito di congruenze lineari esauriscono tutte le rette dello spazio; la determinazione dei sistemi ∞^2 di congruenze lineari tali che per ogni retta dello spazio passi una sola congruenza venne effettuata da M. Pieri (*Sopra i sistemi di congruenze lineari che generano semplicemente lo spazio rigato;* Atti Acc. Gioenia, IV, 14, 1901). La rappresentazione delle rette dello spazio sulle coppie di punti di una sfera immaginaria forma il nucleo dei seguenti lavori di R. d. Saussure: *Sur une géométrie de l'espace réglé* (C. R., 123, 1896), *Etude de géométrie cinématiêue réglée* (Amer., Journ., 18, 1896), *Calcul géométrique réglé* (Id., 19, 1897); si può invece far corrispondere ad ogni retta dello spazio l'insieme di un punto ed una retta di un piano fisso (v. B. Mayor, *Sur une représentation plane de l'espace et son application à la statique graphique*, C. R., 135, 1902, e più completamente *Statique graphique des systèmes de l'espace*, Lausanne, 1910; cfr. G Lazzeri, *Introduzione*

(1) Cfr. anche R. W. H. T. Hudson, *A new Method in Line-geometry* (Mess. II, 31, 1902).

a un nuovo metodo di geometria descrittiva, Period. di mat. III, 9, 1912). Inversamente i punti imaginari del piano si possono far corrispondere alle rette dello spazio; nasce cosí una corrispondenza nota da tempo e che il J. L. Coolidge ha studiato nella memoria *A purely geometric representation of all points in the projective plane* (Trans. Amer. M. S., 1, 1900), mentre *La rappresentazione dei complessi e delle congruenze lineari in geometria descrittiva e sua applicazione alla statica grafica* forma il tema di un lavoro di A. del Re (Napoli Rend., III, 10, 1903). Per analogia ricordiamo qui l'articolo di Anna Fischer, *Abbildung der linearen Linienkomplane auf Kegelschnitte in der Ebene* (Deutsch. Math. Ver., 37, 1928).

Un nuovo procedimento di rappresentazione piana di un complesso lineare apprendesi dalla nota di L. Eckardt, *Eine Abbildung des linearen Strahlenkomplexes auf die Ebene* (Wien. Ber., 127, 1918).

30. Nuove dimostrazioni - in prevalenza di natura sintetica - di proprietà dei complessi e di congruenze lineari si leggono nei seguenti lavori, il cui argomento è indicato dal titolo: G. Léry, *Sur les complexes en involution et la surface de Kummer* (Nouv. Ann., IV, 4, 1904); T. Reye, *Ueber die Kongruenz der Hauptachsen eines Komplexbündels* (Math. Ann., 69, 1910), *Ueber die Strahlenkongruenz (2, 2) von Hirst* (H. Weber Festsschrift, 1912), *Beitrag zur Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen* (Math. Ann., 74, 1913) e *Die Symmetrieachsen des Nullraumes und seines linearen Strahlenkomplexes* (Math. Ann., 79, 1918); S. Jolles, *Neue Beweise einiger Sätze aus der Theorie der linearen Complexe* (Journ. f. Math., 130, 1905), *Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen* (Math. Ann., 63, 1907), *Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz* (Journ. f. Math., 134, 1908), *Eine besondere metrische Konstruktion des linearen Strahlenkongruenzen* (Id., 13, 1922) e *Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz* (Math. Zeit., 27, 1927); F. Schur, *Ueber die berürenden Strahlennetze einer Strahlenkongruenz* (Ann. di mat., III, 21, 1913); D. Montesano, *Una estensione del problema della projettività a gruppi di complessi e di congruenze di rette* (Ann. di mat., III, 1, 1898).

La teoria delle forme algebriche trovasi applicata a questioni di concernenti le rette dello spazio nelle note di L. Berzolari, *Sul significato geometrico di alcune identità lineari fra quadrati di forme algebriche* (Rend. I. L., II, 51, 1918) e *Sui complssi covarianti di tre complessi lineari a due a due in involuzione* (Lincei Rend., V, 31, 1922_1).

Una notevole relazione fra la flessione e la torsione di una curva contenula in un complesso lineare venne segnalata da M. F. Egan (*The Linear Complex and a certain Class of twisted Curves;* Proc. Irish. Acad., 29, 1911) e dimostrata da G. Sannia (*Proprietà metriche caratteristiche delle curve di un complesso lineare,* Lincei Rend., V, 23, 1914_1) e G. Loria (*Sulle curve le cui tangenti appartengono ad un complesso lineare;* Giorn. di mat., 63, 1925).

Di una nota rappresentazione del complesso di 2° grado trovansi applicazioni cinematiche nell'articolo di J. Cardinaal, *Ueber die Anwendung der Caporali'sche Abbildung des Strahlencomplexes zweiten Grades auf die Bewegung eines starren Körpers mit Freiheit vierten Grades* (Deutsch. Math.-Ver., 7, 1899).

Nuovi studi e nuovi risultati sui complessi quadratici in generale si leggono nelle seguenti memorie: H. F. Stecker, *Concerning the elliptic* p (g^2, g^3, z) — *function as coordinates in a line complex, and certain related theorems* (Bull. Amer., M. S., II, 8, 1902); T. Reye, *Neue Eigenschaften der Strahlencomplexes zweiten Grades* (Math. Ann., 49, 1877) e *Lehrsätze ueber quadratische Strahlenkomplexe* (Arch. f. Math., III, 6, 1903); C. M. Jessop, *The singular surface of the quadratic complex* (Quart. Journ., 32, 1901) e *A correspondence between lines of cosingular complexes* (Id., 32, 1903); C. J. Joly, *The quadratic screw-system: a study of a family of quadratic complexes* (Dublin Trans., 32, 1903); M. Morale, *Sopra un modo di generale il complesso quadratico di rette* (Caltanisetta, 1906).

L'inesistenza di quadriche rigate in un complesso tetraedrale a superficie singolare *reale* venne stabilita da E. Meyer (*Ueber die in einem Reye'schen Komplexe enthaltenen Regelschaaren;* Math. Ann., 61, 1905). Intorno al medesimo complesso citeremo alcune osservazioni di Timerding (*Some remarks on tetrahedral geometry;* Bull. Amer. M. S., II, 6, 1900), di C. Carrone (*Sopra un nuovo modo di generazione del complesso tetraedrale;* Napoli Rend., III, 7, 1901) e di J. Eisland (*On the algebraic Curves of a Tetrahedual Complex and the Surfaces conjugate to it* (Palermo Rend., 36, 1913) e sopra un caso speciale di esso le indagini di C. Servais (*Sur le complexe des axes d'une quadrique;* Mathésis, III, 3, 1903): T. Schmidt (*Ueber kubische Aufgaben und die konstruktive Behandlung des Achsenkomplexes,* Wiener Ber., 115, 1906) e E. v. Wartburg (*Ueber den Achsenkomplex,* Montshefte, 22, 1911). Di altri speciali complessi quadratici tratta la Diss. di H. Tempel su *Die Einführung elliptischer Koordinaten bei der Spezialfällen des Komplexes zweiten Grades* (München, 1904) e la nota di C. Segre *Di una generazione dei complessi quadratici di rette Battaglini* (Palermo Rend., 42, 1917).

Le tangenti di una quadrica costituiscono un complesso quadratico che venne studiato da un discepolo di R. Sturm (P. Gerlich, *Ueber dei Tangentencomplex der Fläche 2. Grades*, Diss. Breslau, 1905): mentre dei complessi di 2° grado « di rivoluzione » si occupò poco dopo J. de Vries (Amsterdam, Proc., 15, 1906).

Le normali alle curve piane di un sistema semplicemente infinito costituiscono un complesso, il quale è quadratico nei casi determinati da A. Bemporad nella nota appunto intitolata *Complessi di 2° grado costituiti dalle normali ad una serie di curve piane* (Torino Atti, 34, 1899).

Speciali complessi algebrici di grado superiore al secondo diedero materie ai seguenti lavori, di cui dovranno tener conto coloro che vorranno iniziare gli studi sopra i complessi generali dei gradi seguenti i due primi: M. Pieri, *Sul complesso cubico di rette che contiene una stella di raggi e un piano rigato* (Atti Acc. Gioenia; IV, 15, 1903); E. Veneroni, *Sopra certe congruenze di rette e sopra alcune proprietà dei fasci di un complesso generale di terzo grado* (Rend. Ist. Lomb., II, 31, 1898), *Sopra il complesso delle rette polari rispetto ad un fascio di superficie d'ordine qualunque* (Ivi) e *Sopra i complessi del 3° grado costituiti da fasci di rette* (Id., 32, 1899); C. Carrone, *Sopra un complesso di rette del quarto grado* (Palermo Rend., 16, 1902); J. de Vries, *Sur quelques complexes rectilignes du troisième dégré* (Arch. Teyler, II, 9, 1905) e *A group of complexes of rays whose singular surface consist of a scroll and a number of planes* (Amsterdam Acad. Proc., 1906); H. Schaumberger, *Ueber einen besonderen Linienkomplexe vierten Grades* (Diss. Giessen, 1904); J. Neuberg, *Sur quelques complexes de droites* (Ann. scient. da Acad. pol. do Porto); 1, 1906; M. Stuyvaert, *Un complexe cubique de droites* (Torino Mem., II, 63, 1913; è il complesso rappresentato da un'equazione della forma $\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = 0$, ove A, B,.. sono funzioni lineari delle coordinate di una retta); H. Mohrmann, *Ueber eine besondere Klasse von Linienkomplexe* (Math. Zeit., 2, 1913; sono rappresentati da un'equazione omogenea fra le quantità (XA) (BC), (XB) (CA), (XC) (AB), ove in genere con (MN) s'indica l'esanomio il cui annullarsi annuncia l'incidenza delle rette M, N).

31. A tali ricerche sui complessi ne fanno riscontro altre sulle congruenze; si occupò in generale di siffatte figure il Bordiga (*Sulla classificazione delle congruenze;* Lincei Rend., V, 7, 1898$_1$), ottenendo diversamente i risultati di R. Schumacher (v. p. 191); si occuparono invece di congruenze particolari P. Visalli (*Su alcune congruenze della seconda classe;*

Rend. Ist. Lomb., II, 28, 1895; *Sulle congruenze di grado n che si possono rappresentare su di un piano*, Lincei Rend., V. 4, 1905_1, e *Sopra alcune congruenze di grado n dotate di una curva gobba singolare di ordine n*, Ivi), A. Emch (*On the congruences of rays* (3, 1) *and* (1,3); Ann. of math., II, 1897), E. Veneroni (*Sopra una classe di superficie-complesso;* Rend. Ist. Lomb., II, 31, 1898), C. L. Kiefer (*Ueber Strahlenkongruenzen zweiter Klasse fünfter und niedriger Ordnung;* Diss. Strassburg. 1905), W. Baldus, *Ueber die algebraischen Strahlensystem, welche unendlich viele Strahlenbüschel enthalten* (Math. Ann., 71, 1911) e S. Ricca *Le congruenze di Henri Duport* (Giorn. di mat., 59, 1921). Vanno ancora ricordate le ulteriori investigazioni (v. p. 194) di G. Fano sopra le congruenze cubiche (*Nuove ricerche sulle conguenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare*, Torino Mem., II, 51, 1901; *Sopra alcune particolari congruenze di rette del terzo ordine*, Torino Att, 36, 1901; *Le congruenze di rette del 3° ordine composte di tangenti principal di una superficie*, Id., 37, 1902), nelle quali una congruenza è considerata come una « superficie » della « quadrica delle rette »: nè va dimenticato l'articolo di E. A. Weiss, *Ueber die Parameterdarstellung einer von C. Segre betrachteten Kongruenz* (4,4) *mittelst Thetafunktionen* (Sitz. Berl. math. Ges., 27, 1928).

Alla geometria della retta appartengono eziandio le ricerche contenute nella memoria di C. Segre, *I connessi bilineari alternati di coppie di rette* (Palermo Rend., 44, 1920).

32. Un'ampia applicazione alla disciplina in parola di metodi vettoriali leggesi nel volume di A. Demoulin intitolato *Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites (complexes, congruences, surfaces réglées)* (Bruxelles, 1894); ad esso connettesi naturalmente la memoria di M. Pieri *Sulla rappresentazione vettoriale delle congruenze di raggi* (Palermo Rend., 33, 1912).

Dal punto di vista della teoria dei gruppi di trasformazioni, la geometria della retta trovasi studiata in uno degli ultimi lavori di S. Lie (*Liniengeometrie und Berührungstransformationen;* Leipziger Ber., 49, 1897) ed in una recente memoria di U. Amaldi (*Sui complessi di rette che ammettono un gruppo continuo proiettivo;* Palermo Rend., 23, 1907, ove è stabilita l'esistenza di 26 complessi che ammettono un gruppo proiettivo integrabile). Delle ben note ricerche di R. Stawell Ball derivano invece gli studi di A. Grünwald, *Sir Robert Ball lineare Schraubengebiete* (Zeitschitft, 48, 1902) e *Zur Veranschaulichung des Schraubenbündels* (Id., 49, 1903).

Della geometria differenziale dello spazio rigato trattò T. Cifarelli (*Sul-*

l'analisi intrinseca delle congruenze, Giorn. di mat., 36, 1898; *Le congruenze*, Ann. di mat., III, 2, 1899), ottenendo formole importanti che vennero poco dopo applicate da L. P. Eisenhart (*Conjugate linear congruences;* Trans. Amer. M. S., 3, 1902) e *Congruences of the elliptic Type* (Id., II, 1910); U. Sbrana, *Le congruenze* W (cioè con superficie focali rigate) *con superficie media piana* (Palermo Rend., 23, 1907); S. Rossi, *Ein Beitrag zur Differentialgeometrie der Strahlenkongruenz* (Monatshefte, 22, 1911); E. Turrière, *Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné* (Toulouse Ann., III, 11, 1911); C. Segre, *Le congruenze rettilinee* W *aderenti a due superficie rigate* (Torino Atti, 42, 1907) e *Sulle congruenze rettilinee* W *di cui una o ambe le falde focali sono rigate* (Id., 49, 1914); L. Bianchi, *Sulle congruenze rettilinee* W *a parametro medio costante* (Ann. di mat., III, 22, 1914); M. Picone, *Sulle congruenze rettilinee* W (Palermo Rend., 37, 1914, e 39, 1915); A. Terracini, *Sulle congruenze* W *di cui una falda focale è una quadrica* (D'Ovidio Scritti, 1918); Voulet, *Congruences réctilignes qui sont en même temps* W *et de Ribaucour* (Journ. Ec. pol., II, 23, 1923); A. Schur, *Ueber diejenige Strahlensysteme, deren Brennflächen durch die Systemstrahlen isometrisch aufeinander bezogen werden* (Math. Zeit., 19, 1924).

Alla geometria della retta nel senso kummeriano (1) appartengono eziandio i lavori di P. Burgatti, *Sopra alcune formole fondamentali relative alle congruenze di rette* (Lincei Rend., V, 8, 1899_1), di B. Calò *Su alcuni problemi relativi alla deformazione delle congruenze* (Napoli Rend., III, 10, 1904) e di L. P. Eisenhart sulle *Congruences of tangents to a surface and derived congruences* (Amer. Journ., 26, 1904), nonchè quelle destinate a completare od estendere il teorema di Malus-Dupin e che portano le firme di E. Goursat (*Sur un problème relatif aux congruences de droites*, C. R., 129, 1899; *Sur les congruences de normales*, Ivi), A. Demoulin (*Sur une correspondance entre deux espaces réglés*, Ivi), T. Levi Civita (*Complementi al teorema di Malus-Dupin;* Lincei Rend., V, 9, 1901_1), G. Fubini (*Una generalizzazione del teorema di Malus-Dupin;* Boll. Acc. Gioenia, 1904) e H. Weber *Ueber den Satz von Malus für krümmlinige Lichtstrahlen* (Palermo Rend., 29, 1910; cfr. O. Bolza *Bemerkung*, Id., 32, 1911).

33. La geometria differenziale projettiva dello spazio rigato fu in questi ultimi tempi coltivata con impegno ancor maggiore di quanto sia stato fatto seguendo l'indirizzo plückeriano. Alcuni dei lavori relativi furono già ricor-

(1) Per più minuti particolari si ricorra al rapporto di K. Zindler sopra *Die Entwickelung und der gegenwärtigen Stand der differentiellen Liniengeometrie* (Deutsch. Math. - Ver., 15, 1906).

dati trattando della Geometria differenziale in genere, essendosi qui in presenza di uno dei casi in cui la linea di demarcazione fra discipline confinanti è di assai difficile tracciamento. Gli altri non ancora ricordati sono: G. Fubini, *Fondamenti della geometria projettiva-differenziale dei complessi e delle congruenze di rette* (Lincei Rend., V, 28, 1919[1]) e M. T. Ambrosetti, *Determinazione projettiva di una congruenza* W (Id., 29, 1920_2). Chi intende prendere notizia di quanto si conosce al riguardo ricorra alla già citata (p. 367) *Geometria projettiva differenziale* di Fubini-Cech, il cui XI Capitolo è appunto dedicato a tale argomento.

Ma i due matematici che nell'epoca più a noi vicina si consavrarono con maggior impegno e maggior successo alla geometria differenziale dello spazio rigato sono G. Sannia e E. J. Wilczynski. Del primo (a cui si deve lo sfruttamento metodico della rappresentazione parametrica che il Kummer aveva adoperato soltanto per i sistemi doppiamente infiniti di rette) ricorderemo i seguenti scritti: *Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee* (Ann. di mat., III, 15, 1908), *Congruenze rettilinee che possono deformarsi conservando il parametro medio* (Giorn. di mat., 46, 1908), *Saggio di geometria differenziale dei complessi di rette* (Ann. di mat., III, 17, 1910), *Geometria differenziale delle congruenze rettilinee* (Mat. Ann., 68, 1910), *Equazione differenziale delle conguenze* W (Torino Atti, 48, 1913), *Su due forme differenziali che individuano una congruenza o un complesso di rette* (Palermo Rend., 31, 1911, e 33, 1912) e *Nuovo metodo per lo studio delle congruenze e dei complessi di raggi* (Ivi).

Del Wilczynski va ricordata anzitutto la memoria *Sur la théorie générale des congruences* (Belg. Mém., II, 3, 1911), premiata dall'Accademia del Belgio, alla quale fanno seguito gli scritti dello stesso geometra intitolati: *The general Theory of Congruences* (Trans. A. M. S., 16, 1915), *Line-geometric Representation for functions of a Complex variable* (Id., 20, 1919) e *A set of Properties caracteristic of a Class of Congruences connected with the Theory of Functions* (Id., 21, 1920); nonchè gli altri di: G. M. Green (1891-1919) (1) *Memoir on the General theory of Surfaces and Rectilinear Congruences* (Id. Ivi), C. Kendal, *Congruence determined by a given Surface* (Amer. Journ., 45, 1923) e Lulu Hofmann, *Ueber Strahlenkongruenzen die mit analytischen Frunktionen zusammenhängen* (Diss. Zürich, 1927).

---

(1) E. J. Wilczynski, *In memory of Gabriel Marcus Green* (Bull. A. M. S. 26, 1919).

§ 4. Corrispondenze, rappresentazioni, trasformazioni.

34. Il concetto di corrispondenza o trasformazione, a cui la geometria deve la trasfigurazione profonda da essa subita nel corso del Sec. XIX, coll'andare del tempo, lungi dal vedere diminuita od estinta la sua virtù feconda, potè constatare lo straordinario incremento della propria sfera di influenza; sicchè chi volesse tracciare la storia delle sue conquiste dovrebbe disporsi a narrare la storia dei più imporanti rami, non soltanto della geometria, ma di tutta la matematica moderna. Limitandoci a quanto strettamente si collega al nostro tema, cominceremo col segnalare l'egregia opera riassuntiva di R. Sturm, *Die Lehre der geometrischen Verwandschhaften* (quattro volumi, Leipzig, 1908-09) e quelle, di più modeste proporzioni, di K. Doehlemann, *Geometrische Transformationen* (due volumi, Leipzig, 1902 e 1908) e Hilda P. Hudson, *Cremona Transformations in plane and space* (Cambridge, 1927); per un primo orientamento serve l'opuscolo di L. Godeaux, *Le transformations birationnelles du plan* (Mémor. mathém., XXII, 1927).

Occupiamoci ora della letteratura che concerne le trasformazioni proiettive. Quanto segue contempla il piano e lo spazio ordinario. A chi si interessa del campo binario va segnalata la nota di C. Segre su *Un principio di riduzione nello studio delle corrispondenze algebriche* (Lincei Rend., V, 28, 911_2). L'estensione alle stelle delle proprietà focali scoperte dallo Smith e dal Reye (v. p. 197) nei sistemi piani proiettivi, fu indicata da M. Grossmann (*Metrische Eigenschaften reciproken Bündel;* Archiv, III, 9, 1905). La ricerca delle collineazioni dotate di prestabilite proprietà speciali, che vedemmo occupare tanti scienziati, non venne abbandonata (v. ad es. H. S. White, *Collineation in a plane with invariant quadric of cubic curve*, Proc. Amer. M. S., II, 4, 1897; R. G. Wood, *The collineations of space which transform a non-degenerate quadric surface into itself*, Ann. of math., 2, 1901); anzi venne ampliata con la considerazione dei sistemi costituiti da tutte le collineazioni aventi la medesima proprietà; in tale indirizzo sono scritti i seguenti lavori (1): H. B. Newson, *On the group of 216 collineations in the plane* (Kansas Univ. Quart., 10, 1901; sono le collineazioni che trasformano in sè stesso un fascio sizigetico di cubiche piane), *On the group and subgroup of real collineations leaving a tetrahedron invariant* (Ivi), *A new theory of collineations in space* (Ivi), *Types of projec-*

(1) Vanno aggiunte le memorie di E. Ciani e L. Berzolari che citammo al termine del Cap. XIII (p. 344).

tive transformations in the plane and in space (Id., 6, 1897); E. Ciani, *Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie dotate di cubiche gobbe invarianti* (Palermo Rend., 16, 1902) e *Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie, oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari* (Ann. di mat., III, 8, 1902); H. Himpel, *Ueber die Gruppe der 120 Collineationen, durch die ein raümliches Fünfeck in sich selbst übergeht* (Diss. Strassburg, 1903); R. Krause, *Ueber senär-zyklische Kollineationen im Raum* (Diss. Strassburg., 1903) e *Ueber senäre Raumkollineationem* (Arch., III, 9, 1905); E. Meyer, *Ueber die Kollineationen, die auf zwei windschiefen Geraden vorgeschriebene Punktprojectitäten erzeugen* (Math. Ann., 59, 1904); F. London, *Der Iterations-wurf einer ebenen Kollineation* (Archiv., III, 7, 1904); G. Bagnera, *I gruppi finiti di trasformazioni lineari dello spazio che contengono omologie* (Palermo Rend., 19, 1905); R. Bonola, *Ricerche sui sistemi lineari di omografie nello spazio* (Rend. I. L., II, 41, 1908); S. Pincherle, *Sui fasci di omografie* (Ivi); C. C. Bramble, *A Collineation group isomorpich with the Group of the double Tangents of plane Quartic* (Amer. Journ., 40, 1908); T. Reye, *Räumliche Kollineationen, die Involutionen enthalten* (Arch. Math. Phys., III, 19, 1912); E. Müller, *Die achsiale Inversion* (Deutsche. M. V., 26, 1916); H. F. Baker, *On the Reduction of Homograpy to movement in three Dimensions* (Cambridge P. S. Proc., 20, 1920); S. Jolles, *Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen* (Journ. f. Math., 149, 1819); *Die für die Korrelatione eines polares Raumes invarianten linearen Komplexe und die aus ihren gebildeten zwei T. Bündel* (Math. Zeit., 3, 1919), *Partiell inverse und partiell involutorische Kollineationen und die Inzidenzen in zwei kollokalen korrelativer Felder* (Id., 11, 1921); *Allgemeine Kollineationen und ihre Umkehrungen* (Id., 9, 1921); *Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlkongruenz und die beiden Arten winschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen* (Id., 13, 1922); K. Kommerell, *Ueber nicht affine Raumkollineationen* (Deutsch. M, V.. 29, 1920; contiene una nuova classificazione delle omografie, invariante rispetto a trasformazioni ortogonali), *Classifikation der Raumkorrelationen* (Math. Zeit., 10, 1921) e *Affine Raumtransformationen und Affinoren* (Deutsch. Math. Ver., 30, 1921); T. Otra, *Projective Geometry as a Theory of Invariants under double birational Transformation Group* (Tohoku, 10, 1921); A. Kawaguchi, *On Collineation and Correlation* (Japan Journ. of Math., 3, 1927); R. Baldus, *Zur Klassifikation der ebenen und räumlichen Kollineationen* (München. Ber., 9128).

Riguardo alle correlazioni piane va citato il lavoro di S. Kantor, *Ueber die endlichen Gruppen von Correlationem* (Journ. f. Math., 116, 1896), ove la parola «gruppo» è usata in senso speciale, perchè evidentemente le correlazioni, nel piano e nello spazio, non formano un gruppo dal momento che il prodotto di due di esse non è una correlazione, ma una collineazione. Invece alle ricerche di R. Sturm sul problema della proiettività (v. p. 229) connettonsi la Diss. di W. Wogt, *Korrelative Räume bei gegebener Punktkernfläche* (Breslau, 1896) e la memoria di D. Montesano indicata a p. 384.

Prima di lasciare il campo «lineare», nel quale verremo tra breve ricondotti dalle ricerche dovute alla scuola di S. Lie, noteremo i lavori di Guido Hauck in continuazione di quelli citati a p. 223; sono: *Ueber die Beziehungen zwischen drei Parallelprojectionen eines räumlichen System* (Deutsch. Math.-Ver., 11, 1901), *Ueber uneigentliche Projektionen* (Sitzungsber. Berliner Math. Ges., 1, 1902) e *Theorie der parallelprojektiv-trilinear Verwandschaft ebener Systeme* (Journ. f. Math., 128, 1904); della stessa relazione, ma tra forme di prima specie, ha trattato, imponendole un nome nuovo, J. W. Russel nell'articolo *Application of trigraphy* (Proc. L. M. S., 26, 1895).

35. Passando ora alle trasformazioni piane univoche di ordine superiore osserveremo come il teorema (p. 203) che afferma la sostituibilità di qualunque di tali trasformazioni con una successione di trasformaziozni quadratiche (1), venne a ragione revocata in dubbio da C. Segre (*Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche;* Torino Atti, 36, 1901), in base ad una imperfezione della relativa dimostrazione: ma un nuovo metodo di prova immaginatone da G. Castelnuovo (*Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano*, Ivi), fugò la giusta apprensione che in conseguenza aveva invaso i geometri. Più tardi O. Chisini indicò (*Sul teorema di Noether relativo alla decomponibilità di una trasformazione cremoniana in un prodotto di trasformazioni quadratiche*, Atti Soc. Modena, V, 6, 1921) una considerazione atta a salvare il ragionamento del Nöther; ma prima, siccome la critica del Segre veniva a infirmare anche le riduzioni a forme tipiche dei sistemi lineari di curve piane già effettuate, si manifestò la necessità di riprendere *ex novo* la relativa ricerca; ciò fu fatto contemporaneamente da V. Franciosi (*Sulla riduzione delle trasformazioni cremoniane ad un prodotto di trasformazioni quadratiche e sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve irreducibili di genere $p = 0, 1, 2$;* Giorn. di mat., 56, 1918) e D. Nencini (*Sulla classificazione*

(1) Cfr. J. W. Alexander, *On the factorization of Cremona plane Transformations* (Trans. A. M. S., 17, 1916).

aritmetica di Nöther dei sistemi lineari di curve algebriche; Ann. di mat., III, 27, 1918).

Un risultato da tempo ritenuto esatto, esposto in una memoria dal Doehlemann (Math. Ann. 39, 1891), fu da G. Marletta (*Sui punti uniti di una trasformazione piana* (I, I°), Atti Acc. Gioenia, 16, 1928) riconosciuto bisognevole di una modificazione, che A. Bregaglia (*Sui punti uniti isolati di una trasformazione cremoniana piana,* Palermo Rend., 53, 192') ha ingiustamente criticata.

È qui il momento di osservare che se, inspirandosi all'esempio dato dal Poincaré nella teoria delle curve piane (v. p. 343), ci si limita a trasformazioni con coefficienti interi, la proposizione di Nöther non sussiste più e va surrogata con altra che (per un numero qualunque di variabili) venne stabilita da S. Kantor (*Théorème fondamental sur les transformations birationnelles à coefficients entiers;* C. R., 126, 1898), il quale, anche da un altro punto di vista, trattò della sostituibilità di una trasformazione birazionale del piano con altra (v. *Rationale Zerlegung der birationalen Transformationen in ihre Primfactoren,* Monatshefte, 10, 1899).

L'indirizzo aritmetico delle indagini sulle trasformazioni piane segnalato a p. 204, informa anche le belle ricerche di D. Montesano, *Su le reti omaloidiche di curve* (Napoli Rend., III, 11, 1905), sopra *I gruppi cremoniani di numeri* (Napoli Atti, II, 15, 1911), *Sulle curve omologhe in una corrispondenza birazionale piana* (Palermo Rend., 31, 1911) e *Su alcuni problemi fondamentali nella teoria delle corrispondenze cremoniane* (Napoli Rend., III, 34, 1928), (1), le quali guidarono a nuovi importanti risultati; mentre a trasformazioni cremoniane con punti base non tutti indipendenti allude lo scritto di G. Biasi, *Intorno alle trasformazioni cremoniane e ad una geometria analitica di grado superiore che ne deriva* (Sassari, 1904).

36. Una delle più antiche trasformazioni quadratiche note, l'« inversione », ha ricevuto per opera di E. von Weber (*Zur Theorie der Kreisverwandschaft in der Ebene;* Münchener Ber., 31, 1901) un notevole perfezionamento, mentre di un'altra particolare trasformazione quadratica mostrò con applicazioni l'importanza di E. Duporcq (*Sur la correspondance quadratique et rationnelle de deux figures planes et sur un déplacement remarquable;* C. R., 126, 1898). Altri casi sono contemplati nelle *Osservazioni sui punti uniti di una trasformazione quadratica fra due piani sovrapposti* (Napoli Rend., III, 10, 1904) di P. del Pezzo e nella nota di E.

(1) V. anche Mlodziejowski, *A propos des tables de nombres Crémoniens des 21 premiers ordres* (Recueuil de la Soc. math. de Moscou, 31, 1922-4).

Ciani *Sopra alcuni gruppi notevoli di trasformazioni quadratiche piane* (Palermo Rend., 42, 1917).

Due speciali trasformazioni univoche involutorie vennero segnalate e sfruttate da G. Stiner (*Zwei involutorische Transformationen mit Anwendungen;* Wolf Zeitschr., 40, 1895), mentre nuovi studi sulle involuzioni piane furono felicemente compiuti da G. Ferretti (*Sulla generazione delle involuzioni piane di classe zero e uno;* Palermo Rend., 17, 1903).

Le trasformazioni periodiche diedero materia ad ulteriori ricerche da parte di S. Kantor (*Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene*, Journ f. Math., 114, 1894); *Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene*, Acta, 19, 1895; *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transfomationen in der Ebene*, Berlin, 1895) e di altri, che i risultati di tali indagini rettificarono o completarono (A. Wiman, *Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen*, Math. Ann. 48, 1899, e G. Bohlmann, *Continuirliche Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene*, Götting. Nachr., 1896). Mediante considerazioni stereometriche certi sistemi di trasformazioni piane sono studiati nella nota di D. Montesano *Su alcuni sistemi razionali di trasformazioni cremoniane* (Giorn. di mat., 41, 1903). Dello stesso geometra ricorderemo, come notevoli, le memorie *Su i quadri caratteristici delle corrispondenze birazionali piane* (Napoli Rend., III, 21, 1915 e 24, 1918) e *Su le corrispondenze birazionali piane semisimmetriche* (Ivi). Hilda P. Hudson ha poi trattato dei *Double invariants Points and Curves of Cremona plane Transformations* (Palermo Rend., 50, 1926) e G. Marletta della *Determinazione, mediante coppie di punti omologhi, di alcune trasformazioni piane* (Atti Acc. Gioenia, 16, 1928).

37. Riferendo proiettivamente i punti di un piano alle coniche passanti per due punti fissi nasce una trasformazione (1, 2), che può ottenersi proiettando una quadrica, prima da un punto di essa e poi da un punto esterno (H. Liebmann, *Die einzweideutigen projectiven Punktverwandschaften der Ebene;* Diss., Jena, 1895). Più generale è la corrispondenza fra le coordinate proiettive di due punti omologhi di un piano, della quale trattò C. Delin nella sua Diss., *Ueber zwei ebene Punktsysteme, die algebraisch auf einander bezogen sind* (Lund, 1893). Di corrispondenze (2, 2) trattano due lavori di G. Marletta (*La trasformazione quadratica* (2, 2) *fra piani* e *Le trasformazioni cubiche* (2, 2) *fra piani*) inseriti nel vol. 17 (1903) dei Palermo Rend.; mentre un'importante questione relativa alle corrispondenze (1, *n*) venne risoluta da A. Bottari in due lavori di egual titolo (*Sulla*

razionalità dei piani multipli [x, y; F (x, y)]; Ann. di mat., 2, 1899; Giorn. di mat., 41, 1903), prima nella ipotesi che *n* sia un numero primo e poi in generale. Si connettono pel soggetto a tali ricerche e pel metodo alle indagini sulle funzioni algebriche, altre memorie di F. Enriques (*Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)}=1$; Lincei Rend., V, 7, 1898,), G. Castelnuovo e F. Enriques (*Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi;* Palermo Rend., 14, 1900) e M. de Franchis (*I piani doppi dotati di due o più differenziali totali di prima specie;* Lincei Rend., V, 13, 1904,).

Riuniamo qui, finendo, un elenco di lavori concernenti varie specie di trasformazioni piane: H. Beck, *Ein Seitenstück zur Möbiusschen Geometrie der Kreisverwandschaften* (Trans. A. M. S., 11, 1910); J. R. Conner, *Multiple Correspondences determined by the rational plane Quintic curve* (Id., 13, 1912); P. P. Boyd, *On the perspective Jonquières Involutions associated with the* (2, 1) *ternary Correspondence* (Amer. Journ., 34, 1912); F. M. Morgan, *Involutorinial Transformations* (Id., 36, 1913); F. E. Allen, *The cyclic Involutions of third Order determined by Nets of deficiency 0, 1 and 2* (Quart. Journ., 45, 1914); V. R. Barraco, *Sulle trasformazioni piane* (2, 2) *involutorie* (Giorn. di mat., 54, 1916); F. R. Sharpe and V. Snyder, *Types of* (2, 2) *point Correspondences between two Planes* (Trans. A. M. S., 18, 1917); E. Veneroni, *Sulle corrispondenze piane simmetriche* (2, 2) (Rend. I. L., II, 56, 1917, e 58, 1918); A. M. Howe, *The Classification of Plane Involution of general* (2, 3) *Correspondence between two Planes* (Ivi), *On* (2, 3) *compound Involutions* (Id., 43, 1921) e *Plane Involutions of Order four* (Id., 44, 1922).

Alla teoria di speciali trasformazioni piane (e dello spazio) si riferiscono alcuni importanti lavori francesi, che si trovano lucidamente riassunti nella memoria di J. Hadamard intitolata *Recientes progress de la geometria analagmatica* (Rev. matem. hispano-americana, II, 2, 1927).

38. Ricerche di carattere generale sulle trasformazioni razionali dello spazio sono esposte nelle seguenti memorie: Margherita Belloch (ora Piazzolla), *Sulle trasformazioni birazionali nello spazio* (Ann. di mat., III, 16, 1909, ove sono dimostrati e applicati risultati inediti di G. Castelnuovo); M. Pannelli, *Sopra una proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario* (Lincei Ren., V, 19, 1910,, e 20, 1911,) e *Sopra alcune relazioni fra gli elementi fondamentali di due spazi in corrispondenza birazionale* (Rend. I. L., II, 47, 1914); Hilda P. Hudson, *On fundamental Points in Cremona Space transformations* (Ann. di mat., III, 19, 1912); D. Montesano,

Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio (Lincei Rend., V, 27, 1918, e 31 1921) e *Principio di estensione della teoria delle corrispondenze birazionali dello spazio* (Napoli Rend., III ,27, 1921) e *Su la teoria generale delle corrispondenze birazionali fra i punti dello spazio* (Napoli Atti, 17, 1926). Un carattere generale hanno pure gli studi di J. W. Young e F. M. Morgan, *The Geometries associated with a certain System of Cremona Group* (Trans. A. M. S., 17, 1916), di A. B. Coble, *Cremona Transformations and Applications to Algebra, Geometry and Moduln functions* (Bull. A. M. S., 28, 1922) e A. Emch, *On Surfaces and Curves which are invariant under involutory Cremona Transformations* (Amer. Journ., 48, 1926).

Scendendo a particolari trasformazioni spaziali, osserveremo in primo luogo che la notevole proprietà dell'inversione scoperta da Liouville (vedi p. 217, nota) venne con vari mezzi riconfermata da A. Giacomini (*Sulla inversione per raggi vettori reciproci;* Giorn. di mat., 35, 1897), G. Darboux (*Sur les transformations conformes de l'espace à trois dimensions;* Arch. der Math., III, 1, 1901), T. J. Bromwich (*Conformal space transformations*, Proc. L. M. S., 33, 1901) e K. von der Mühl (*Ueber konforme Abbildungen im Raum*, Ges. Basel, 16, 1905); la stessa trasformazione venne notevolmente generalizzata dal Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4, Paris, 1896, p. 79) e la risultante corrispondenza fu studiata da W. Burnside (*On composite inversion and allied transformations;* Mess., II, 32, 1903). La nozione di « genere di una trasformazione razionale » (p. 220) si ritrova applicata nella nota di D. Montesano, *Su due trasformazioni razionali ed involutorie dello spazio* (Rend., Ist. Lomb., II, 30, 1897); invece la ricerca delle trasformazioni razionali tali che il complesso costituito dalle congiungenti le coppie di punti corrispondenti sia di specie prestabilita, venne fatta in tre nuovi casi da D. Montesano (*Sulle trasformazioni univoche dello spazio che determinano complessi quadratici di rette;* Rend. Ist. Lomb., II, 25, 1892; i complessi in questione sono specializzati, giacchè contengono sempre un fascio di rette), M. Pieri (*Sulle trasformazioni razionali dello spazio che individuano complessi di tangenti;* Giorn. di mat., 33, 1895) e Grazia Macrina Calderera (*Le trasformazioni razionali dello spazio inerenti ad una cubica sghemba*, Palermo Rend., 18, 1904). Invece complementi ad un lavoro di G. Loria (v. p. 218 nota 2) leggonsi nella memoria di R. Sturm *Ueber diejenigen Cremonaschen Verwandschaften, bei denen Ebenen des einen Raumes allgemeine Flächen 3. Ordnung im anderem entsprechen* (Deutsch. Math. Ver., 14, 1905). Le trasformazioni birazionali i cui sistemi omaloidici son formati da coni vennero determinate da P. Del Pezzo (*Le trasformazioni coniche dello spazio;* Napoli Rend., III, 2, 1896); altre da K.

Döhlemann (*Ueber eine einfache eindeutige Raumtrasformation dritter Ordnung;* Münchener Ber., 24, 1894), M. Bonicelli (*Sopra una trasformazione birazionale dello spazio del 3° grado e una classe di superficie razionali del 6° grado;* Giorn. di mat., 40, 1902) e W. Wallstraff (*Ueber eine besondere Cremonasche Transformation*, Diss. Breslau, 1903); finalmente mediante considerazioni iperspaziali molte altre vennero costruite e studiate da U. Perazzo (*Sulla incidenza di rette piane e spazi ordinari in uno spazio a cinque dimensioni e su alcune corrispondenze birazonali fra piani e spazi ordiari;* Torino Mem., II, 54, 1904). Maggiore generalità offrono le ricerche di S. Kantor consegnate nella memoria: *Theorie der periodischen kubischen Transformationen eines Raume* R_3 *welche keine Fundamental curven erster Art besitzen* (Acta, 21, 1897), intesa a preludere ad una teoria generale delle trasformazioni periodiche dello spazio.

Come facemmo trattando delle trasformazioni univoche piane, indicheremo qui gli scritti ove sono investigate speciali trasformazioni birazionali dello spazio ordinario: D. Montesano, *Sulle corrispondenze birazionali dello spazio che determinano complessi di tangenti* (Napoli Rend., II, 13, 1907), *Su alcuni tipi di corrispondenze cremoniane spaziali collegat. alle corrispondenza birazionali piane di ordine* n (Id., 27, 1921) (1) e *Le iperomografie dello spazio con indici eguali* (Napoli Atti II, 18, 1930; i corrispondenti sistemi omaloidici sono costituiti dalle superficie cubiche passanti per due rette sgembe e quattro loro quadrisecanti); Hilda P. Hudson, *On the 3-3 birational Transformation in three Dimensions* (Proc. L. M. S., II, 9, 1910 e *On cubic Space Transformations* (Amer. Journ., 34, 1912); A. Tumarello, *Le trasformazioni birazionali monoidali* [n, n²] *dello spazio* (Napoli Rend., III, 17, 1911); Teresa Castelli, *Studio di una particolare trasformazione cubica dello spazio con applicazione a talune superficie del quarto e quinto ordine* (Giorn. di mat., 54, 1916); T. L. Wren, *Some Applications of the two-three birational Space transformation* (Proc. L. M. S., II, 15, 1906); H. F. Baker, *Note on Mr. Wren Paper* (Ivi); J. R. Connor, *Correspondences determined by Bitangent of a Quartic* (Amer. Journ., 38, 1916); Giovanna Aroldi, *Le trasformazioni birazionali dello spazio determinate dalla più generale superficie del quart'ordine dotata di conica doppia* (Giorn. di mat., 53, 1920); A. G. Nobile, *Le trasformazioni birazionali di genere uno dello spazio* (Id., 59, 1921); V. Snyder e F. R. Sharpe, *Space Involutions defined by a Web of Quadrics* (Trans. A. M. S., 19, 1918) e *The* (1, 2) *Correspondence associated with the cubic Space involution of Order two* (Id.,

(1) A questa memoria si collegano alcuni lavori di Maria del Re inseriti nei più recenti volumi di Napoli Rend.

25, 1923); V. Snyder, *Problems in involutorial Transformations of Space* (Bull. A. M. S., 30, 1924), *Further types of involutorial Transformations which leave each cubic Surface of a Web invariant* (Amer. Journ., 46, 1924), e *The simplest involutional transformation contained in a line-complex* (Bull. A. M. S., 36, 1930), J. O. Obsborne, *A study of the rational involutorial Transformation in Space which leave a web of Sulfaces invariant* (Ivi); Marian M. Torrey, *Classification of monoidal Involutions having a fixed tangent Come* (Id., 47, 1926).

39. Irrazionale, e già studiata da C. Segre (v. p. 101), è la trasformazione oggetto della memoria *Ueber die quadratische Transformation, durch welche die Ebene des Raumes in ein System von Flächen zweiter Ordnung mit gemeinsamen Poltetraeder übergeführt werden* (Ann. di mat., III, 1, 1898) di H. E. Timerding, geometra a cui si deve anche uno scritto, *Ueber ein quadratisches Nullsystems* (Id., 2, 1899). *Le trasformazioni (2, 2) quadratiche e cubiche di spazio* diedero oggetto ad una memoria di G. Marletta (Atti Acc. Gioenia, IV, 17, 1904). Delle idee di Laguerre, che trovansi esposte in memorie riunite nel II volume delle *Oeuvres* (Paris, 1905) di questo eminente geometra, è agevole oggi prendere notizia grazie all'ottimo *Treatise on the Circle and the Sphere* di J. L. Coolidge (Oxford, 1916). Le idee stesse trovansi ulteriormente svolte nei seguenti scritti: P. F. Smith, *On a Transformation of Laguerre* (Ann. of moth., II, 1, 1900); R. Bricard, *Sur la géométrie de direction* (Nouv. Ann., VI, 6, 1906); W. Blaschke, *Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene und Raume* (Monatshalft, 21, 1910), *Ueber die Laguerresche Geometrie orientierter Geraden in der Ebene* (Arch. Math. Phys., III, 18, 1911) e *Ueber die Geometrie von Laguerre* (Hamb. Mitth., 1924 e 1925; Math. Zeit., 24, 1925 e 25, 1926); H. Schatz, *Ueber die Geometrie von Laguerre* (Hamb. Matth., 1926).

In un gruppo di memorie la teoria dei connessi (nel piano e nello spazio) è studiata da vari punti di vista; eccole: E. von Weber, *Ueber Linienconnexe* (Götting. Nachr., 1896; sono ivi investigate le figure rappresentate da un'equazione biomogenea fra le coordinate kleiniane di due rette dello spazio); E. H. Timerding, *Ueber die eindeutigen quadratischen Transformationen einer Ebene* (Math. Ann., 53, 1900); L. Autonne, *Sur les formes quaternaires à deux séries des variables. Applications à la géométrie et au calcul intégral;* Belgique Mém. cur., 59, 1901) e *Sur les substitutions crémoniennes de l'espace.* I. (Journ. Ec. pol., II, 8, 1903); M. Stuyvaert, *Recherches rélatives aux connexes de l'espace* (Belgique Mém. cour., 61, 1902); E. Veneroni, *Sui connessi bilineari fra punti e rette nello spazio ordinario* (Torino Mem., II, 51, 1902); E. Kasner, *On the point-line as element of space: a study of the corresponding bilinear connex* (Trans. Amer. M. S., 4, 1903). L'importante memoria di C. Segre *Sulle corrispondenze quadrilineari tra forme di prima specie e su alcune loro rappresentazioni spaziali* (Ann. di mat., III., 29, 1920) ha un tema indicato dal titolo.

Notiamo da ultimo che l'operazione mediante cui ad una curva od una superficie si fa corrispondere le pedale o l'antipedale venne di recente studiata come speciale trasformazione cremoniana, fra elementi eterogenei del piano o dello spazio (v. la memoria di G. Loria, *Le trasformazioni pedali e antipedali, nel piano e nello spazio;* Per. mat., 22, 196-07).

40. La celebre trasformazione ideata da Lie per collegare la geometria della retta nello spazio alla geometria delle sfeee fu nuovamente oggetto di ricerche, come emerge dal seguente elenco: P. Frank: *Ueber die imaginäre Berührungctransformation von Lie, welche Gerade Linie in Kugel überführt* (Hamb. Mitth., 4, 1906); J. L. Coolidge, *The metrical aspect of the Line-Sphere Transformation* (Trans. A. M. S., 12, 1911); H. Liebmann, *Die Liesche Geraden-Kugeltransformation und ihre Verallgemeinerung* (München. Ber., 1915); M. Fouché, *Sur la transformation de Lie* (Bull. S. M. F., 45, 1917).

In generale dei metodi ideati da quel grande si può oggi formarsi un chiaro concetto grazie all'opera *Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von* S. Lie *und* G. Scheffers, sgraziatamente destinata a rimanere incompleta (I. Bd., Leipzig, 1896) (1); i metodi stessi vennero in questi ultimi tempi ampiamente applicati e sviluppati, come dimostrano i seguenti scritti, alcuni dei quali contengono svolgimenti di concetti del celebre geometra norvegese, mentre altri sono intesi a stabilire teoremi relativi a speciali trasformazioni di contatto, senza ricorrere alla teoria generale: H. B. Newson, *Continuous groups of projective transformations treated synthetically* (Kansas Univ. Quart., 4, 1896), *Continuous groups of circular transformations* (Bull. Amer. M. S., II, 4, 1897) (2), *A new theory of collineations and their Lie groups* (Amer. Journ., 24, 1902) e *Trasformazioni proiettive ad un parametro e loro gruppi* (Giorn. di mat., 43, 1905); A. Emch, *Projective groups of perspective collineations in the plane, treated syinthetically*

---

(1) Un frammento del II vol. fu trovato fra le carte lasciate dal Lie e pubblicato da F. Engel nel vol. 59 (1904) dei *Math. Ann.*

(2) Le corrispondenze ivi trattate sono quelle che Möbius chiamava «Kreisverwandschaften» e che nelle Nouv. Ann., 18, 1859, p. 167, sono designate col nome di «ciclografia», nome questo che ha oggi un altro significato (v. p. 211).

(Kansas Univ. Quart., 5, 1896); G. Fano, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni proiettive* (Palermo Rend., 10, 1896), *Ueber Gruppen insbesondere continuirliche Gruppen von Cremona Trasformationen der Ebene und des Raumes* (Monatshefte, 9, 1898), *I gruppi di Jonquières generalizzati* (Torino Mem., II, 48, 1898), *Sopra alcuni gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntuali dello spazio* (Lincei Rend., V, 7, 1898,), *Le trasformazioni infinitesime dei gruppi cremoniani tipici dello spazio* (Ivi) e *I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio* (Ann. di mat., II, 26, 1897); M. Noether, *Ueber continuirliche Gruppen von Cremonaschen Transformationen* (Deutsch. Math.-Ver., 5, 1897); E. O. Lovett, *Invariants of curves and surfaces of the second degree by group of motions and the group of similitudes* (Ann. of. math., 11, 1896), *Certain classes of point transformations in the plane* (Bull. Amer. M. S., II, 4, 1897), *On the general theory of anarmonics* (Proc. L. M. S., 29, 1898; sono ivi chiarite, coll'aiuto dei metodi di Lie, certe idee del Clifford esposte in una nota che risale al 1866 e che venne inserita nei *Math. Papers*., p. 110); J. M. Page, *The general transformation of the group of euclidian movements* (Ann. of math., 12, 1898); K. Zorawski, *Ueber infinitesimale Transformationen der Ebene, welche gewisse geometrische Bedingungen genügen* (Monatshefte, 12, 1901); U. Amaldi, *Contributo alla determinazione dei gruppi continui finiti dello spazio ordinario* (Giorn. di mat.,; 39 e 40, 1901-02) *I gruppi continui reali di trasformazioni conformi dello spazio* (Torino Mem., II, 55, 1905) e *Sui gruppi continui infiniti di trasformazioni di contatto dello spazio* (Id., II, 57, 1906); G. Fubini, *Sui gruppi di proiettività* (Licei Rend., V, 13, 1904,); B. Schilling, *Eine neue Bestimmung aller Berührnugs-Transformatonen der Kreise in der Ebene* (Journ. f. Math., 154, 1926); L. Berwald, *Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano* (Boll. Un. matem. ital., 6, 1927; ivi l'elenco di lavori precedenti congeneri di G. Kowalenski).

CAPITOLO XV

§ 1. Geometria numerativa

1. Problemi di geometria numerativa s'incontrano in tutti i rami dell'odierna geometria (non differenziale), specialmente nella teoria delle curve e superficie algebriche, nella geomtria della retta ed in quella degli spazi comunque estesi: di essi venne o verrà fatto cenno nei relativi paragrafi del presente Libro: qui giova soltanto far menzione della scoperta fatta da

G. H. Zeuthen di *Le principe de correspondance pour une surface algébrique* (C. R., 143, 1906) (1) e di due lavori, uno dei quali (Palatini e Giambelli, *Prodotto di due condizioni caratteristiche relative a piani d'un iperspazio*; Torino Atti, 36, 1901) porge la desiderata soluzione di un problema assai generale che s'incontra applicando i metodi di Schubert, mentre l'altro (G. Z. Giambelli, *La teoria delle formole d'incidenza e di posizione speciale e le forme binarie*; Id., 40, 1905) stabilisce un ponte fra due rami della matematica che sembravano destinati a rimanere estranei l'uno all'altro.

Quello che fa ancora mestieri notare si è come da tempo siano sorti dei dubbi giustificati intorno al rigore dei metodi dello Schubert (cfr. p. 338) ed in particolare sulla legittimità del «principio della conservazione del numero». Essi furono pubblicamente manifestati da D. Hilbert nel 1900, quando nella celebre sua conferenza intitolata *Problemi matematici*, tenuta a Parigi durante il II Congresso internazionale dei matematici, annoverò la seguente questione fra quelle degne della attenzione dei matematici: « Determinare rigorosamente i numeri della geometria numerativa, fissando in modo più preciso i limiti della loro validità, e, in particolare, fare ciò pei numeri che lo Schubert ha trovati mediante quel principio del suo calcolo numerativo che si chiama della posizione speciale o della conservazione del numero ». La necessità di una soluzione di questo problema venne confermata da molteplici esempi suggeriti da G. Kohn (*Ueber das Princip von der Erhaltung der Anzahl*; Archiv. f. Math., III, 4, 1903) ed E. Study (*Ueber das sogenannte Princip der Erhaltung der Anzahl*, Id., III, 8, 1905; *Ueber das Princip der*

---

(1) Si connette a tale principio il tema di concorso proposto nel 1903 dall'Accademia danese delle Scienze e che — non essendo stato, per quanto ci consta risolto — giova qui riferire come stimolo a nuove ricerche: «Sino dal 1865 il Salmon ha stabilito per le superficie piane un principio di corrispondenza che, quando i punti di un piano si corrispondono reciprocamente, permette di assegnare i punti che coincidono coi loro corrispondenti. Più tardi tali ricerche furono estese in modo da comprendere tutti i casi ordinari in cui tutti i punti di una curva siano uniti («curva di coincidenza») e Schubert, nel suo *Kalkül der abzählenden Geometrie*, ha radunate tali determinazioni in un più completo sistema di formole. Inoltre, nei *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (Ottobre 1906) Zeuthen ha mostrato come le formole di corrispondenza nel piano potevano estendersi ad una superficie arbitraria e che allora esse si riattaccano agli invarianti numerici delle superficie in modo analogo a quanto fa la formola di Cayley-Brill per le corrispondenze fra punti di una curva. Ma tali ricerche si possono spingere più oltre. Così, per quanto concerne il piano, importa non solo conoscere l'ordine della «curva di coincidenza» e la classe della curva-inviluppo che a quella si connette (inviluppo delle rette che congiungono le coppie di punti coincidenti); ma è anche necessario conoscere i numeri dei punti e delle tangenti singolari di tali curve per dedurne il numero dei punti ognuno dei quali coincide con più di uno dei punti corrispondenti. Altre questioni si presenteranno poi trattando tale questione algebricamente. L'Accademia, desiderando incoraggiare siffatte ricerche, ricompenserà con una medaglia d'oro «*un lavoro che completi mediante nuovi risultati la teoria di un piano ed una superficie i cui punti si corrispondano reciprocamente*».

Erhaltung der Zahl, Verh. III, Math.-Kongr., 1905 e Leipzig. Ber., 68, 1916, *Nebst eine Bemerkung von* K. Rohn) e R. Sturm, *Das Princip des speziellen Lage* (Anh. f. Math., III, 12, 1907, e 22, 1913). Da questi scritti emerge ad evidenza quanto cosparso di pericoli sia il cieco uso di quel principio (1). Come si potesse risolvere il problema di Hilbert per una vasta categoria di problemi si apprende dall'articolo di M. Caspar intitolato *Abzählung bezüglich des Strahls im n-dimensionalen Raum* (Math. Ann., 59, 1904). Ancora più vasta portata posseggono le investigazioni del Giambelli (*Sul principio della conservazione del numero;* Deutsch. Math.-Ver., 13, 1904, e Porto Ann., 4, 1909), le quali condussero ad un nuovo enunciato di quel principio, applicabile con sicurezza in determinate circostanze (2) e calmarono le apprensioni di coloro che per un tempo temettero doversi giudicare indimostrate la maggior parte delle proposizioni della geometria numerativa; risulta invece da quelle ricerche essere acquisite alla scienza tutte le formole relative al problema degli spazi secanti (v. G. Z. Giambelli, *Risoluzione del problema degli spazi secanti*, Torino Mem., II, 52, 1902) e quelle d'incidenza e posizione speciale, cioè quelle che formano la base della geometria proiettiva degli spazi lineari ad un numero qualunque di dimensioni. I più profondi fra i posteriori studi sull'argomento sono dovuti a F. Severi, che ad esso dedicò tre importanti memorie (ove è introdotto il concetto di «riducibilità»), cioè: *Sul principio della conservazione del numero* (Palermo Rend., 33, 1912), *Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche* (Atti Ist. Ven., 75, 1916) (3) e *Riflessioni intorno ai problemi numerativi concernenti le curve algebriche* (Rend. I. L., II, 54, 1921) (4).

Chi voglia conoscere i principali metodi della geometria numerativa ha oggi a propria disposizione l'eccellente trattato di H. G. Zeuthen, *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie* (Leipzig, 1914), originato dall'articolo dello stesso autore *Abzählende Methoden*, inserito nel III vol. dell' Encykl. math. Chi aspiri soltanto a conoscere la geometria numerativa nell'estensione datale da Chasles e impratichirsi con le relative procedure, ricorra al volume di T. Lemoyne, *Les lieux géométriques en Mathématiques spé-*

---

(1) Uno sforzo per evitarlo in un caso è rappresentato dalla Diss. di S. Weiss, *Anzahlbestimmung für das Strahlennetz* (*lineare Kongruenze*) (Breslau, 1907), collegata al lavoro del Martinetti citato, p. 188, n.

(2) V. anche il succitato scritto sopra *La teoria delle formule d'incidenza, ecc.*

(3) Memoria in parte critica contro il lavoro del Giambelli, *Le applicazioni del principio della conservazione del numero e l'indirizzo di H. Schubert* (Palermo Rend., 40, 1915).

(4) V. anche G. Albanese, *Sulle condizioni perchè una curva algebrica riducibile si possa considerare come limite di una curva algebrica irriducibile* (Palermo Rend. 52, 1918).

ciales, avec application du principe de correspondance et de la théorie des caractéristiques à 1400 problèmes de lieux et d'enveloppes (Paris, 1923).

§ 2. Geometria non-euclidea [1]

2. L'interesse costante per tutto ciò che tocca la geometria non-euclidea è dimostrato dai postumi onori resi a coloro che ne furono i creatori (basti qui ricordare i premi periodici che portano i nomi del Lobatschewski e dei Bolyai), a rendere i quali propizia occasione fu offerta dai centenari della loro nascita. Altra e non meno utile manifestazione di tale interesse è offerta dalle indagini storiche e critiche che vennero felicemente compiute su tale argomento, le più cospicui delle quali sono consegnate negli scritti seguenti: G. Bruce Halsted, *Some salient points in the history of non-euclidian and hyper-space geometry* (Chicago Papers, New-York, 1896; ivi è segnalato Philip Kelland come altro scopritore indipendente della geometria non-euclidea); A. Vassilief (1853-1929) *N. J. Lobatchefskij. Rede. Aus dem russischen übersetzt von* F. Engel (Zeitsch. f. Math., Hist.,-lit. Abth., 40, 1895); *Eloge historique de N. J. Lobatschevsky; traduit du russe par* M.lle A. Fichtenholtz (Paris, 1896) e *Lobatchchefskij's Ansichten ueber die Theorie der Parallellinien vor dem Jahre 1826* (Deutsch. Math.-Ver., 4, 1897); F. Klein, *Zum ersten Vertheilung der Lobatschewsky-Preis.-Gutachten, betreffend den III Band der Theorie des Transformationsgruppen von S. Lie* (Math. Ann., 50, 1898); Fr. Schmidt (1827-1901) (2), *Lebensgeschichte des ungarischen Mathematikers Johann Bolyai de Bolya k. k. Hauptmann im Geniecorps* (Abh. zur Gesch. der Math., 8, 1898) e *Mittheilungen ueber Johann Bolyai* (Deutsch. Math.-Ver., 4, 1897); P. Stäckel, *Mittheilungen aus dem Briefwechsel von Gauss und W. Bolyai* (Götting. Nachr., 1897), *F. A. Taurinus* (Abb. zur Gesch. der Math., 9, 1899), *F. L. Wachter, Ein Beitrag zur Geschichte der nicht-euklidische Geometrie* (Math. Ann., 54, 1900), *Die Entdeckung der nichteuklidische Geometrie durch Johann Bolyai* (Ung. Ber., 17, 1901), *Aus Johan Bolyai Nachlass. Untersuchungen aus der absoluten Geometrie* (Id., 18, 1902), *Johann Bolyais Raumlehre* (Id., 19, 1903); *Die Raumlehre Johann Bolyais* (Math. és. term. értesitö, 1903, 21); P. Stäckel und F. Engel, *Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie* (Math. Ann., 49, 1897); J. Kürschak e P. Stäckel, *Johann's Bolyai « Bemerkungen ueber Nicolaus Lobatschewskijs geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelli-*

(1) Cfr. R. Bonola, *Index operum ad geometriam absolutam spectantium* (nel volume *Joannis Bolyai in memoriam*: Claudiopoli, 1902).

(2) Cfr. P. Stäckel, *F. Schmidt* (Deutsch. Math. - Ver., 11, 1902).

nien » (Ivi); L. Schlesinger, *Neue Beiträge zur Biographie von Wolfang und Johann Bolyai* (Bibl. mathem., III, 4 1903) e *J. Bolyai Festrede* (Deutsch. Math.-Ver., 12, 1903); M. Darvai, *Vita di G. Bolyai* (Atti del Congr. Intern. di sc. stor., 12, 1904); C. Segre, *Congetture intorno all'influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non euclidea* (Torino Atti, 38, 1903); G. Vailati (1863-1909), *Di un'opera dimenticata del P. Gerolamo Saccheri* (Riv. filosofica, 1903; sono ivi segnalati i rapporti della *Logica demonstrativa* del Saccheri col suo *Euclide emendato;* nota ristampata negli *Scritti di Giovanni Vailati*, Firenze, 1911); L. Bieberbach, *Ueber die Entwickelung der nicht-euklidischen Geometrie im 19. Jahrhundert* (Berl. Ber., 1925); B. Petronievics, *N. Lobatscheusky et J. Bolyai. Etude comparative d'un cas spécial d'inventeurs simulthanées* (Revue philos., 1929); J. Pierpont, *Some modern views of space* (Bull. A. M. S., 32, 1926) e *Non-euclidian geometry, a Retrospect* (Id., 36, 1930).

Aggiungiamo qui l'indicazione della pubblicazione del carteggio tra Gauss e Bolyai *senior* (F. Schmidt und P. Stäckel, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai;* Leipzig, 1899), della versione dal russo in tedesco di importanti scritti del Lobatschewsky (N. J. Lobatschefsky, *Zwei geometrische Abhandlungen. Aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von* F. Engel, Leipzig, 1899; N. J. Lobatschefskij, *Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale; aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von* H. Liebman; Abh. zur Gesch. der Math., 19, 1904) (1), della traduzione libera in italiano dell'«opus magnum» del Saccheri (G. Saccheri, *L'Euclide emendato. Traduzione e note* di G. Boccardini, Milano, 1904), pubblicazione di gran lunga superata da quella di G. B. Halsted, *Euclides vindicatus: translated with Introduction and Notes* (Chicago, 1920). Alcuni passi inediti di Gauss concernenti la teoria che ci occupa videro la luce nel T. VIII delle *Gauss Werke* (Göttingen, 1900) e furono poi dottamente commentati da P. Stäckel (*C. F. Gauss als Geometer* nel *IV Heft dei Materialian für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss*, Göttingen, 1918, articolo riprodotto nel T. X, 1923, del *Gauss Werke*). A questo stesso geometra devesi l'importante pubblicazione *W. und J. Bolyai Geometrische Untersuchungen* (Leipzig., 1913).

3. La letteratura relativa alla geometria non-euclidea si è di recente arricchita di alcune trattazioni metodiche fatte, da punti di vista differenti,

---

(1) Sotto gli auspici del Governo russo è ora in corso di stampa una edizione completa delle *Opere del Lobatschewsky*.

da P. Barbarin (*La géométrie non-euclidienne*, Paris, 1902; III ed., 1929 con note di A. Buhl); R. Bonola (1874-1911) (*La geometria non euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo;* Bologna, 1906); H. Liebman (*Nichteuklidische Geometrie*, I ed., Leipzig, 1903, II ed. 1912, III ed. 1925); J. L. Coolidge (*The Elements of non-euclidian Geometry* (Oxford, 1909); H. S. Carlslow, *The Elements of non euclidian plane Geometry and Trigonometry* (London, 1916); F. Enriques, *Conferenze sulla geometria non euclidea* (Bologna, 1918); D. M. Y. Sommerville, *The elements of non-euclidian Geometry* (London, 1919); A. Mac Leod, *Introduction à la géométrie non euclidienne* (Paris, 1922); R. Baldus, *Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Geometrie der Ebene* (Berlin, 1927); H. Mohrmann, *Einführnng in die nicht-euklidische Geometrie* (Leipzig, 1930). Nè possono nè devono essere dimenticata la ricca e diligente *Bibliography of non euclidian Geometry* (London, 1911) del sucitato Sommerville e l'Appendice sopra *Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwickelung* posta da M. Dehn alla nuova edizione (Berlino, 1926) delle *Vorlesungen über neuere Geometrie* di M. Pasch. Si può aggiungere l'articolo *Non-euclidian geometry* del Russell nella IX edizione dell'*Enciclopedia britannica* e le conferenze di F. S. Woods sopra « Le forme dello spazio non euclideo » facenti parte della già citata collezione di *Lectures on mathematics delivered from September 2 to 5 1903 before member of the Amer. Math. Society* (New-York, 1906).

Sul margine della matematica, essendo di indole piuttosto filosofico-critica, sono molti articoli di G. B. Halsted e di P. Mansion (la miglior parte di questi ultimi si leggono raccolti nel volume *Mélanges mathématiques 1883-1898;* Paris, 1898) ed i seguenti lavori: J. Delboeuf, *La géométrie euclidienne sans le postulatum d'Euclide* (Liège Mém., 19, 1897), Bertrand A. W. Russel, *An essay on the fundations of geometry* (Cambridge, 1897; trad. in francese da S. Cadenat, Paris ,1901); L. J. Delaporte, *Essai philosophique sur les géometries non euclidiennes* (Paris, 1904); E. Study, *Die realistische Weltanschauug und die Lehre vom Raum* (Braunschweig, 1914); F. Schilling, *Kongruenz und Bewegung; eine philosophisch-geometrische Bertrachtung* (Math. Ann., 93, 1924). Nè vanno dimenticati molteplici passi delle ormai celebri opere del Poincarè *La science et l'hyphotèse* (Paris) e *La caleur de la science* (Ivi) (1), gli importanti commenti di cui sono ricche le traduzioni fattene in tedesco da F. Lindemann e H. Weber, e le obiezioni

(1) Cfr. anche la nota *Sur la géométrie non-euclidienne* dello stesso autore inserita nella VII ed. (Paris, 1900) del *Traité de géométrie* di E. Rouché e C. de Comberousse.

mosse a quei passi da G. Veronese, nel suo discorso inaugurale *Il vero nella matematica* (Padova, 1905), e da C. Somigliana (Rivista filosofica, 1906). Di indole analoga sono le osservazioni fatte da G. B. Halsted nel lavoro *Darwinism and non euclidiam geometry* (Kasan Mem., II, 6, 1867) e quelle del Lafargue nell'articolo *Oekonomie, Naturwissenschaft und Mathematik* (Die Zeit, 31 marzo 1906), ove, fra l'altro, vengono collegate le ricerche di geometria non-euclidea alla scoperta d'America! (1).

In un lavoro pubblicato a Belgrado nel 1928, un riassunto del quale ha per titolo *Déduction élémentaire des géométrie non-euclidiennes*, B. Petronievics ha ripreso il punto di vista Saccheri-Lambert, mentre in una conferenza sopra *L'espace discret et la géométrie non-euclidienne* (Arch. f. system. Phillosophie, 31, 1928) ha compendiato la sua opera *Principien der Metaplysik* (T. I, 1904 e II, 1912), ove sono gettate le basi di una geometra negante la continuità dello spazio. Una critica distruttiva delle vedute di Kant (v. p. 252) sui fondamenti della matematica, leggesi nell'articolo di J. H. Tummers *Woher die Gewissheit der Axiome der Geometrie* (Huygeus, 7, 1930).

4. Passeremo ora a segnalare alcune delle investigazioni su argomenti speciali di geometria non-euclidea, cominciando da quelle relative alla geometria elementare, avvertendo come parecchie di esse ripetano la loro origine da documenti di recente venuti in dominio del pubblico: G. Semikolenow, *Studien ueber die Geometrie von Lobatschewsky* (Libau, 1893-94); Gérard, *Sur la géométrie non euclidienne. Thèse* (Paris, 1893; cfr. l'articolo dallo stesso titolo in Nouv. Ann., III, 12, 1893, dedicato al teorema di Pitagora in geometria non-euclidea); E. Hess, *Ueber regelmässige Eintheilung der dreidimensionalen spärischen Raumes* (Marb. Ber., 1895); B. Kagan, *Note sur une formule bien connue de la géométrie imaginaire* (Nouv. Ann., III, 14, 1895; si tratta dell'area del triangolo) e *Démonstration nouvelle des équations fondamentales de la géométrie de l'espace de courbure constante régative* (Ivi); C. de la Vallée-Poussin, *Sur la géométrie non euclidienne* (Mathésis, II, 5, 1895; Suppl. ivi, partendo dalla geometria euclidea, ammessa valida nell'infinitesimo, per integrazione si ottengono le tre geometrie); W. Burnside, *On the kinematiks of non-Euclidian space* (Proc. L. M. S., 26, 1895; estensione alla geometria non-euclidea del teorema che afferma la possibilità di surrogare qualunque movimento piano con due

(1) V. anche L. Nelson, *Bemerkungen ueber die nicht-euklidische Geometrie und der Ursprung der mathematischen Gewissheit* (Abhand. der Frie'sche Schule, Neue Folge, Göttingen 1906).

rotazioni di ampiezza π) e *The construction of the straight line joining two given ponts* (Id., 29, 1898; è contemplato il caso in cui uno almeno dei due punti dati stia nella regione ideale del piano); K. Traub, *Der verjüngte Magister Matheseos. Ein Beitrag zur Sphärik und absoluten Geometrie* (Lahr, 1896; se con S (l) si indica l'area del cerchio di raggio l, allora in tutte le tre geometrie, in luogo del teorema di Pitagora, si ha la proprietà espressa dalla formola seguente: S (a) = ½ [S (b + c) + S (b-c)]); F. Macaulay, *John Bolyai's « Science absolute of space »* (Math. Gazette, 1896); B. Sikstel, *Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique* (Arch f. Math., II, 15, 1897); F. Dauge, *Sur la limite vers laquelle tend un certain triangle lobatschefskien* (Mathésis, II, 7, 1897; contiene una correzione ad un teorema di Legendre); J. Andrade, *Sur la réduction des vécteurs et les propriétés métriques* (C. R., 125, 1897; mediante considerazioni cinematiche l'autore giunge alle tre geometrie); M. Simon, *Zur Volumenbestimmung in der Lobatschefsky'schen Geometrie* (Math. Ann., 42, 1893), *Construction der Tangente an Kreis und Grenzkreis, und Beweis dass der Lobatschfsy'schen Raum eine doppel unendliche Menge von Kugeln mit unendlichen grossen Radius enthält* (Deutsch. Math.-Ver., 3, 1894), *Zwei Sätze zur nichteuklidische Geometrie* (Math. Ann., 48, 1897), *Die Geometrie der Zwischenebene (und der Grenzfläche)* (Deutsch. Math.-Ver., 7, 1899) e *Ueber Dreieckconstructionen in der nichteuklidischen Geometrie* (Math. Ann., 51, 1905); F. Engel, *Zur nichteuklidische Geometrie* (Leipziger Ber., 50, 1898); R. Bonola, *Determinazione, per via geometrica, dei tre tipi di spazio iperbolico, ellittico, parabolico* (Palermo Rend., 15, 1901), *Sulle proprietà del quadrilatero trirettangolo nella metrica di Lobacefski-Bolyai* (Rend. Ist. Lomb., II, 37, 1904; lavoro collegato a quello di Engel succitato), *La trigonometria assoluta secondo Giovanni Bolyai* (Id., 38, 1905) e *I teoremi del Padre Gerolamo Saccheri sulla somma degli angoli di un triangolo e le ricerche di M .Dehn* (Ivi; i lavori del Dehn a cui ivi si allude verranno citati tra breve; sullo stesso soggetto vedi: B. Levi, *Sur la géométrie et la trigonométrie sphériques*, Enseign., 7, 1905); P. Barbarin, *Etudes de géometrie analytique non-euclidienne* (Belgique Mém., 40, 1901); H. Liebmann, *Die Konstruktion des geradlinigen Dreiecks der nicht-euklidischen Geometrie aus den drei Winkel* (Leipziger Ber., 53, 1901), *Synthetische Ableitung der Kreisverwandschaften in der Lobatschefskijschen Geometrie* (Id., 54, 1902), *Die Kegelschnitten und die Planetbewegung in nicht euklidischen Geometrie* (Ivi), *Winkel-und Streckentheilung in der Lobatchefskijschen Geometrie* (Arch. f. Math., III, 5, 1902), *Ueber die Begründung der hyperbolischen Geometrie* (Math. Ann., 59, 1904) e *Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und* *neue Begründung der trigometrischen Formelen der hyperbolischen Geometrie* (Id., 61, 1905); H. W. Richmond, *The volume of a terahedron in elliptic space* (Quart. Jorun., 34, 1903); J. Frischauf, *Die Kubatur des Tetraeders* (Ungar. Ber., 20, 1902); F. Haussdorff, *Analytische Beiträge zur nichteuklidische Geometrie* (Leipziger Ber., 51, 1899); F. di Francesco, *Sopra alcune formole elementari di geometria non-euclidea* (Giorn. di mat., 37, 1899); P. Stäckel, *Zur nichteuklidische Geometrie* (Archiv f. Math., III, 3, 1902); E. B. Wilson, *Ueber eine von der Begriffe der Länge unabhängige Definition des Volumen* (Deutsch. Math.-Ver., 12, 1903) e *A generalized conception of area: application to collineation in the plane* (Ann. of math., II, 5, 1903); F. Schur, *Zur Bolyai-Lobatchefskyschen Geometrie* (Math. Ann., 59, 1904); M. Grossmann, *Die Konstruktion des geradlinigen Dreiecks der nicht-euklidischen Geometrie aus den drei Winkeln* (Id., 58, 1904); W. Ludwig, *Projektive Untersuchungen ueber die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie* (Diss., Karlsruhe, 1904); R. Fischer, *Ein Beitrag Zur hyperbolischen Geometrie* (Monatshefte, 16, 1905); H. de Vries, *Central Projection in the geometry of Lobatschewsky* (Amsterdam Ac. Proc., 1906); G. Hessenberg, *Beweis der Desargueschen Satzes aus dem Pascalschen* (Math. Ann., 61, 1905) e *Begründung der elliptischen Geometrie* (Ivi). Più vasto è il campo in cui aggiransi le « nicht-gehaltene Vorträge » di E. Study, *Ueber nicht-euklidische und Linien-Geometrie* (Deutsch. Math.-Ver., 11, 1902), le ricerche di G. Hessenberg, *Ueber einen geometrischen Calcül (Verknüpfungs-Cacül)* (Acta, 29, 1904) e quelle di L. Schlesinger, *Ueber eine Darstellung des Systems der absoluten Geometrie* (Deutsch. Math.-Ver., 14, 1905).

Data più recente hanno questi altri scritti: H. Liebmann, *Begründung der sphärischen Trigonometrie unabhängig vom Parallelpostulat, verbunden mit einer Begründung der hyperbolischen Geometrie* (Leips. Ber., 60, 1908); M. Grossmann, *Die Zentralprojekton in der absoluten Geometrie* (Cambridge Intern. Congress, 1908); D. M. Y. Sommerville, *The pedal line of the Triangle in non-euclidian Geometry* (Ivi); M. S. Carslaw, *The Bolyai Lobatschewsky non-euclidian Geometry* (Proc. M. S. Edinburgh, 28, 1910); O. Hölder, *Streckenrechnung und projektive Geometrie* (Leipzig. Ber., 63, 1911); A. Kneser, *Bemerkungen über die Anzahl der extreme der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nichteuklidischen Geometrie* (H. Weber Festchrift, 1912); H. Berliner, *Ueber zwei neue projektive natürliche Geometrien* (Math. Ann., 79, 1918; come assoluto l'autore assume nel piano un triangolo); E. Freda, *Sul problemi di geometria piana non euclidea* (Giorn. di mat., 51, 1913); G .Scheibner, *Brennpunkte und Asymptote der Kegelschnitte in der nicht-euklidischen Geometrie* (Diss. Bonn, 1921); M. Zacharias, stesso titolo (Berlin. math. Ges., 21, 1922); W. Fr. Meyer, *Ueber die Darstellung und Zusammensetzung nicht-euklidischer Raumbewegungen* (Math. Zeit., 16, 1923); H. Hopf, *Zum Clifford-Kleinsche Raumproblem* (Math. Ann., 95, 1926); W. N. Young, *On a form of the Parallaxiom* (Quart. Journ., 41, 1910; L. Hoffmann, *Die axonometrische Sätze von Kruppa und Pohlke im nicht-euklidischen Raume* (Wien. Ber., 135, 1926); T. Ota, *Die allgemeine eindeutigen Transformationen vom Gesichtspunkt der projektiven Geometrie aus und Aufbau einiger pseudoprojektiven Geometrien* (Mem. College Kyoto); E. H. Neville, *Prolegomena to analytical Geometry in an isotropic euclidian Space of three Dimensions* (Cambridge, 1922); R. Baldus, *Ueber Euler's Dreiecksatz in der absoluten Geometrie* (Hidelberg, Sihber., 1929; esempio di un teorema dell'ordinaria geometria che non sussiste nel piano non-euclideo).

5. Malgrado il valore indiscutibile e grande di parecchi dei risultati conseguiti in alcuni di questi lavori, pure lo scritto che in quest'ultimo decennio, per generale consenso, merita la palma fra quelli concernenti i fondamenti della geometria è quello di Hilbert intitolato *Grundlagen der Geometrie* (pubblicato la prima volta nel 1899 nel *Festschift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals;* VII Aufl., Leipzig., 1930) (1), ove una critica profonda dell'intero edificio geometrico guidò alla concezione di altre geometrie provenienti dalla soppressione, invece che del postulato Euclide, di quello di Archimede (2), o di altri principii. Ben è vero che i risultanti sistemi di verità, mancando di ogni analogia con quello che l'intuizione ci presenta, vennero giudicati immeritevoli di formar parte della geometria, nel senso consueto di tal parola (3); ma ciò poco monta, non essendo questo il primo caso in cui un termine matematico abbia totalmente col tempo mutato il suo senso originario. Ciò che importa si è che le idee dell'Hilbert furono punto di partenza o servirono di stimolo ad importanti indagini da parte di lui stesso o di altri. La deficienza di spazio, ci sforza di esporne qui soltanto un semplice elenco: D. Hilbert, *Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte* (Math. Ann., 46, 1895), *Ueber den Satz von der Gleichheit des Basiswinkel in gleichschenkligen*

(1) Tradotto in francese (Ann. Ec. norm. III, 17, 1900) e in inglese (Chicago, 1902).

(2) In ciò l'Hilbert fu preceduto dal Veronese; v. la nota di questo *La geometria non archimedea. Una questione di priorità* (Lincei Rend., V, 14, 1905).

(3) E. B. Wilson, *The so called fundation of geometry* (Arch. f. Math., III, 6, 1903); P. Mansion, *Le géométrie non archimédienne est-elle une géométrie?* (Brux. Ann., 29, 1905).

Dreieck (Proc. L. M. S., 35, 1903; cfr. Halsted, *The pseudo-definition of the straight line*, Math. Gazete, 1906), *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Math. Ann., 56, 1902) e *Neue Begründung der Bolyai-Lobatscefskijschen Geometrie* (Id., 57, 1903); F. Schur, *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Math. Ann., 55, 1901), *Zur Proportionslehre* (Id., 57, 1903) e *Zur Bolyai Lobatschefskijschen Geometrie* (Id., 59, 1904); M. Grossmann, *Die Konstruktion des geradlinigen Dreicks der nicht-euklidischen Geometrie aus drei Winkeln* (Id., 58, 1904; H. Liebmann, *Ueber die Begründung der hyperbolischen Geometrie* (Id., 59, 1904); L. Balser, *Ueber den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie* (Id., 55, 1901); F. R. Moulton, *A simple non-Desarguesian plane geometry* (Trans. Amer. Math. Soc., III, 1902); E. H. Moore, *On the proiective axioms of geometry* (Ivi); J. Mollerup, *Die Lehre von den geometrischen Proportionen* (Math. Ann., 56, 1902), *Studier over den plane geometris axiomer* (Diss. Köpenhagen, 1903) e *Die Beweise der ebenen Geometrie ohne Benutzung der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel* (Math. Ann., 58, 1903); D. Schor, *Neuer Beweis eines Satzes aus den « Grundlagen der Geometrie »* (Ivi); G. Hamel, *Ueber die Geometrien in denen die Geraden die Kürzesten sind* (Id., 57, 1903; Diss. Göttingen, 1901; cfr. due articoli di C. E. Stromquist e G. A. Bliss in Trans. Am. M. S., 7, 1906); A. Kneser, *Zur Proportionslehre* (Id., 58, 1904); B. Levi, *Teoria geometrica delle proporzioni fra segmenti, indipendente dal postulato di Archimede* (Suppl. Period. mat., 6, 1903); G. Frege e A. Korsell, *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Deutsch. Math.-Ver., 12, 1903); G. Hessenberg, *Neue Begründung der Sphär ik* (Berl. math. Ges., 4, 1905); M. Dehn, *Die Legendre'schen Sätze ueber die Winkelsumme im Dreieck* (Math. Ann., 53, 1900); K. T. Vahlen, *Abstrakte Geometrie* (Leipzig, 1905; cfr. A. R. Schweitzer, *On a fundamental relation in abstract geometry*, Bull. Am. M. S. II, 13, 1907); H. G. Forder, *The fundations of Euclidian Geometry* (Cambridge, 1927); A. Schollmeyer, *Die arithmetischen Grundlagen der projektivan Geometrie* (Deutsch. Math. Ver., 37, 1928); A. Queirós, *Sobre o teorema de Desargues* (Porto Ann., 15, 1928); A. Comessatti, *Geometria non staudtiana* (Boll. di matem., 1930).

6. Per i temi che svolgono, se non pei metodi che usano, si riattaccano a tali scritti le numerose investigazioni fatte di recente sopra tutte le proposizioni costituenti la base della geometria antica e moderna. Emergono fra esse quelle dovute ad M. Pieri, dei cui risultati il lettore può avere notizia ricorrendo agli scritti seguenti: *Sui principii che reggono la geometria di posizione* (Torino Atti, 30 e 31, 1895-96), *Sugli enti primitivi della*

geometria proiettiva astratta (Torino Atti, 32, 1897), *I principii della geometria di posizione composti in sistema logico-deduttivo* (Torno Mem., 48, 1898), *Nuovo metodo di svolgere deduttivamente la geometria proiettiva* (Rend. Ist. Lomb., II, 31, 1898), *Della geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo. Monografia del punto e del moto* (Torino Mem., II, 49, 1899; è ivi mostrato come tutta la geometria possa svolgersi fondandosi sui soli concetti di punto e movimento); *Sur la géométrie envisagée comme un sèstème purement logique* (Bull. du Congrès intern. de phil., 1900); *Circa il teorema fondamentale di Staudt e i principii della geometria proiettiva*, (Torino Atti, 39, 1904; è ivi dimostrato essere quel teorema indipendente dalla continuità della retta); *Nuovi principii di geometria projettiva complessa* (Torino Mem., II, 55, 1905), *Breve aggiunta alla memoria Nuovi principii di geometria projettiva complessa* (Torino Atti, 41, 1906), *La geometria elementare istituita sulle nozioni di « punto » e « sfera »* (Mem. Soc. XL, III, 15, 1908) e *Nuovi principii di geometria delle inversioni* (Giorn. di mat., 49, 1911, e 50, 1912). Trattano soggetti congeneri i seguenti lavori: F. Enriques, *Sui fondamenti della geometria proiettiva* (Rend. Ist. Lomb., II, 27, 1894) (1); G. Fano e F. Enriques, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva* (Palermo Rend., 9, 1895); H. Burckhardt, *Beiträge zu den Untersuchungen ueber die Grundlagen der Geometrie* (Götting. Nachr., 1895); M. Pasch, *Zur projectiven Geometrie* (Math. Ann., 48, 1896); C. Burali-Forti, *Les postulats pous la géométrie d'Euclide et de Lobatschwsky* (Verh. des I Math.-Kongr., 1897); H. G. Zeuthen, *Nouvelle démonstration du théorème fondamental de la géométrie projéctive* (C. R., 125, 1897), *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective* (Ivi) e *Sur le fondement de la géométrie projective* (Ivi); F. Schur, *Ueber den Fundasmentalsatz der projectiven Geometrie* (Math. Ann., 51, 1898); W. M. Story, *Is continuity of space necessary to euclid's Geometry?* (Bull. M. S., II, 4, 1898; l'autore risponde negativamente, costruendo uno spazio quadratico, nel qua'e sono ammesse, oltre le operazioni razionali, l'estrazione di radici quadrate, e mostrando la conseguente effettuabilità di tutte le costruzioni euclidee); H. Duport, *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie* (Bull. S. M. F., 27, 1899); G. Veronese, *Les postulats de la géométrie dans l'enseignement* (Compterendu du II Congrès des math., Paris, 1900); A. Padoa, *Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne* (Ivi); B. Kagan, *Ein System von Postulaten welche die euklidische Geometrie definieren* (Deutsch.

(1) Va anche menzionato, benchè d'indole più filosofica che matematica, il Cap. IV dei *Problemi della scienza* (Bologna, 1906) di F. Enriques, ove è segnalata una notevole connessione fra la geometria proiettiva e il processo della visione fra la geometria metrica e le sensazioni tattili.

Math.-Ver., 11, 1902); E. H. Moore, *On the projective axioms of geometry* (Trans. Amer. M. S., 1902); G. Peano, *La geometria basata sulle idee di punto e distanza* (Torino Atti, 38, 1903); O. Veblen, *A system of axioms for geometry* (Trans. Amer. M. S., 5, 1904); B. Levi, *Fondamenti della metrica proiettiva* (Torino Mem., II, 54, 1904); L. Heffter, *Ueber Anordnung und Aufbau der Geometrie* (Festschrift A. Wüllner gewidmet, Leipzig, 1905); Korselt, *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Deutsch. Math.-Ver., 12, 1903); G. Frege, *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Id., 15, 1906); N. J. Lennes, *Volumes and areas* (Trans. Amer. M. S., VI, 1905); J. Royce, *The Relation of the Principles of Logic to the fundations of Geometry* (Trans. A. M. S., 6, 1905); G. Frege, *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Deutsch. M. V., 15, 1906); A. N. Whitehead, *The Axioms of projective Geometry* (Cambridge, 1906) e *The Axioms of descriptive Geometry* (Id., 1907); E. Meyer, *Flächengleichheit und Volumengleichheit vom projektiven Standpunkt* (Math. Ann., 64, 1907); E. Study, *Beiträge zur nicht-euklidische Geometrie* (Amer. Journ., 29, 1907); R. L. Moore, *Geometry in which the Sum of the angles of every Triangle is two right angles* (Trans. A. M. S., 8, 1907); J. Hielmslev, *Neue Begründung der ebenen Geometrie* (Math. Ann., 64, 1907); B. Levi, *Il teorema di Desargues, il teorema di Pappo e l'esistenza d'una reciprocità o d'una polarità* (Ann. di mat., III, 14, 1907); O. Hölder, *Die Zahlenskala auf die der projektiven Geraden und die indipendente Geometrie dieser Geraden* (Math. Ann., 65, 1908); R. L. Moore, *Sets of metrical Hypotheses for assumption for projective Geometry* (Amer. Journ., 30, 1908); F. Schur, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig, 1909); A. R. Schweitzer, *Note on a System of Axioms for Geometry* (Trans. A. M. S., 10, 1909) e *A Theory of geometrical Relations* (Amer. Journ., 31, 1909, e 35, 1913; in questi lavori sono applicati i metodi dell'algebra della logica); O. Veblen e J. W. Young, *Projective Geometry* (Vol. I, Boston, 1910, Vol. II, id., 1918); A. Rosenthal, *Vereinfachung des Hilbert'schen System der Kongruentenaxiom* (Math. Ann., 71, 1911); W. H. Young, *On the analytical Basis of non euclidian Geometry* (Amer. Journ., 33, 1911); C. Müntz, *Aufbau der gesamten Geometrie auf Grund der proieckliven Axiome allein* (Münch. Ber., 1912); Ch. Müntz, *Das euklidischen Parallelaxiom* (Math. Ann., 73, 1914); E. V. Huntington, *A Set of Postulates for abstract Geometry, expressed in terms of the simple relation of Inclusion* (Id., 73, 1913); F. Rulf, *Ueber die Grundlagenforschung in der Geometrie* (Monatshefte, 24, 1913); E. R. Hedrick e L. Ingold, *A Set of Axioms for Line geometry* (Trans. A. M. S., 15, 1914); M. G. Gabs, *A Set of Postulates for general projective Geometry* (Id., 16, 1915); M. Pasch, *Grundfragen der Geometrie* (Journ. f. Math., 147, 1917);

H. Mallet, *Mémoire sur les éléments et les notions géométriques* (Journ. Ec. pol, III, 11, 20, 1919); R. L. Moore, *On the Lie-Riemann-Helmholtz-Hilbert Problem of the Fundations of Geometry* (Amer. Journ., 41 1919); W. Schwan, *Streckenrechnung und Gruppentheorie* (Math. Zeit., 3, 1919); H. Mohrmann, *Hilbertsche und Beltramische Liniensysteme. Ein Beitrag zur nicht-desarguesehen Geometrie* (Math. Ann., 85, 1922); W. Rosemann, *Der Aufbau der ebenen Geometrie ohne Symmetrieaxiom* (Id., 90, 1923); G. Feigl, *Ueber die elementare Anordnungsätze der Geometrie* (Deutsch. M. V., 33, 1924; è un rapporto); N. Tschetweruchin, *Ueber die Bedeutung des Axioms von Pasch für die linearen Anordnungsaxione* (Deutsch. M. V., 33, 1924); H. Liebmann, *Hilberts Beweise der Sätze über Flächen festen Gausschen Krümmungsmasses* (Math. Zeit., 22, 1925); L. Bierberbach, *Hilberto Satz über Flächen konstanter negativer Krümmung* (Acta, 48, 1926); J. Schouten, *Erlanger Programm und Uebertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie* (Palermo Rend., 50, 1926); W. Süss, *Topologische Kennzeichnung des räumlichen Elementargeometrie* (Tokyo Proc., 2, 1926); Cesarina Boccalatte, *La geometria basata sulle idee di punto e angolo retto* (Torino Atti, 64, 1928).

Un posto a parte meritano i lavori dedicati dallo studio dei sistemi geometrici provenienti dall'abbandono del principio di Archimede; tale indirizzo fu delineato indipendentemente l'uno dall'altro dal Veronese e dall'Hilberto: in conseguenza si hanno due gruppi di lavori gli uni italiani, tedeschi gli altri: ecco i principali di ciascuno: H. Hahn, *Ueber die nichtarchimedische Grössensysteme* (Wien. Ber., 116, 1906); G. Veronese, *La geometria non archimedea* (IV Congr. Intern., Roma, 1908); P. Predella, *Saggio di geometria non archimedea* (Giorn. di mat., 49, 1911, e 50, 1912) e *Sulla struttura dello spazio* (Id., 46, 1913); F. Palatini, *Sopra un'interpretazione della geometria non archimedea* (Rass. di matem., 2, 1922); Ch. Müntz, *Das Archimedische Princip und der Pascalsche Satz* (Math. Ann., 74, 1912); C. Segre, *La geometria projettiva nei campi dei numeri duali*, (Torino, Atti, 47, 1912).

7. Vi è ancora un'altra teoria importante della geometria elementare che solo in questi ultimi tempi e per opera di considerazioni superiori ha raggiunto quell'assetto soddisfacente che Euclide non le aveva dato e che Legendre si era sforzato di raggiungere; alludiamo alla teoria dell'equivalenza di figure piane e solide (1), nella quale esisteva una questione inso-

(1) Cfr. l'articolo di U. Amaldi sopra tale teoria nel volume di F. Enriques *Questioni riguardanti le matematiche elementari* (Bologna, 1927) ed inoltre il rapporto di M. Simon *Ueber die Entwickelung der Elementargeometrie im XIX Jahrhundert* (Leipzig, 1906) p. 116 e seg.

luta della massima importanza, cioè se fosse possibile trattarla per figure limitate da rette e piani, senza invocare considerazioni infinitesimali: M. Dehn, col dimostrare essere ciò impossibile (v. la nota *Ueber raumgleiche Polyeder*, Götting. Nach., 1900 e la memoria *Ueber den Rauminhalt*, Math. Ann., 55, 1902) ha chiuso per sempre (giova almeno sperarlo!) la serie dei tentativi in gran numero fatti per calcolare il volume della piramide senza ricorrere al metodo dei limiti. Prima e dopo che si arrivasse a questa conclusione molte furono le ricerche fatte su quella teoria; le più cospicue leggonsi nei seguenti lavori: M. Réthy, *Ueber endlich-gleiche Fläche* (Math. Ann., 42, 1893) e *Zum Beweis des Hauptsatzes ueber die Endlichkeit zweier ebenen Systeme* (Id., 44, 1894); H. Dobriner, *Bemerkungen dazu* (Ivi), *Der Satz «Congruentes von Congruentem giebt gleichem» in seinem Anwendung auf ebene Flächen* (Ivi); O. Rausenberger, *Das Grundproblem der Flächen-und Rauminhalt* (Math. Ann., Id., 43, 1893); G. Veronese, *Dimostrazione della proposizione fondamentale dell'equivalenza delle figure* (Atti Ist. Ven., 6, 1895), K. T. Vahlen, *Ueber endlichgleiche Polyeder* (Id., 56, 1903); M. Dehn, *Ueber Zerlegung von Rechtecke in Rechtecken* (Id., 57, 1903),*Zwei Anwendungen der Mengenlehre in der elementare Geometrie* (Id., 59, 1904) e *Ueber den Inhalt sphärischer Dreiecke* (Id., 60, 1905); S. O. Schatunowski, *Ueber den Rauminhalt der Polyeder* (Id., 57, 1903); C. Jue', *Ueber das Volumen der Pyramide* (Deutsch. Math.-Ver., 12, 1903); B. Kagan, *Ueber die Transformation der Polyeder* (Math. Ann., 57, 1903) (1). Siaci lecito osservare qui finendo (mancandocene più propizia occasione) che l'essere il cerchio l'area massima fra le isoperimetre, nel piano e sulla sfera, venne solo di recente dimostrato in modo rigoroso da F. Bernstein (*Ueber die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene;* Math. Ann., 60, 1905).

8. Dopo questa quasi involontaria digressione, ritorniamo al tema proprio di questo paragrafo, segnalando i recenti sviluppi che ebbero le idee di Cayley e Klein sulla geometria non-euclidea. Un' esposizione di quelle del primo trovasi nella nota di Charlotte A. Scott. *On the Cayley's theory of*

---

(1) Di questioni concernenti l'equivalenza dei poliedri trovasi cenno anche nel carteggio di Gauss e precisamente nelle lettere che egli scambiò con C. L. Gerling (1788-1864) intorno al 1844. Si vegga infatti il vol. VIII (pubblicato nel 1900) di *C. F. Gauss Werke*, ove si trova (p. 243), tra l'altro, un bel teorema relativo alla decomposizione di un tetraedro in altri dodici che il Gerling stabilì coll'aiuto di F. L. Stegmann (1813-1897); analogo ad esso è uno stabilito dal Darboux (Bull. Sc. Math., II., 24, 1900, I. Parte p. 273), che al pari di quello, sembra destinato ad entrare a far parte di ogni trattato di stereometria. Su di entrambi veggavi: P. Mansion, *Trois théorèmes peu connus sur les plyèdres* (Mathèsis, II, 1, 1901). Dallo Schoute essi vennero già estesi ad uno spazio lineare qualunque: v. *Mehrdimensionale Geometrie*, 2, p. 123.

absolute (Proc. Amer. M. S., II, 3, 1897), mentre una generalizzazione di idee del secondo fu indicata dal G. Fonténé (*Métrique aninvolutive*, Bull. S. M. F., 26, 1898; *Les six équations distinctes du triangle en métrique aninvolutive*, Id., 32, 1904). Sotto il nome di «Hyperbolea» venne poi da C. N. Hinton (*Hyperbolea and the solution of equations;* Bull. Amer. M. S., 11, 3, 1897) studiata la geometria di un mondo piano in cui la distanza tra i due punti (x, y) e (x', y') è data da $\sqrt{(x-x')^2 - (y-y')^2}$. L'essere le proposizioni della geometria piana metrica relazioni fra le figure considerate ed i punti ciclici del piano venne rigorosamente stabilito da E. Study nella nota *Ueber Bewegungsinvariante und elementare Geometrie* (Leipzig. Ber., 48, 1896). Delle quadriche in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante trattarono J. L. Coolidge (*Quadric surfaces in hyperbolic space;* Trans. A. M. S., IV, 1903), R. Bonola (*Proprietà metriche delle quadriche in geometria non euclidea;* Rend. Ist. Lomb., II, 36, 1903) e A. Linneborn (*Die Fokaleigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung in der Riemann'schen Raumform;* Münster, 1903). A sviluppi delle idee originali del Clifford sul parallelismo sono consacrati i seguenti importanti lavori: L. Bianchi, *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica* (Ann. di mat., II, 24, 1890); G. Fubini, *Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici* (Pisa Ann., 9, 1900); J. Petersen, *Géométrie des droites dans l'espace non euclidien* (Kiöben. Oevf., 1900) (1).

Le «congruenze isotrope» dello spazio ellittico (cioè quelle tali che il luogo delle posizioni limiti delle perpendicolari comuni ad una retta della congruenza e a quelle che le sono infinitamente vicine consti di due fasci di rette polari rispetto all'assoluto) furono investigate da J. L. Coolidge (*Les congruences qui servent à représenter les fonctions d'une variable complexe*, Torino Atti, 39 e 40, 1903-04) (2) e L. Bianchi (*Sulla rappresentazione di Clifford delle congruenze rettilinee nello spazio ellittico* (Id., 39, 1903) e *Sopra alcune classi di congruenze negli spazi di curvatura costante* (Ann. di mat., III, 10, 1904).

9. Altre questioni si trovano trattate in note di W. Wirtinger (*Ueber die Rectification algebraischer Curven, insbesondere derjenigen dritter Ordnung bei projectiver Maasbestimmung*, Monatshefte, 5, 1890), E. Cotton (*Application de la géométrie cayleyenne à l'étude géométrique du dépla-*

(1) Cfr. i due articoli di R. W. H. T. Hudson *A new Methid in line Geometry* (Mess. II, 31, 1902) e *Dual Linecoordinates in absolute Space* (Id., 32, 1902).

(2) Cfr. anche le Diss. dello stesso autore *The dual projective Geometry of elliptic und spherical Space* (Greifswald, 1904).

cement d'un solide autour d'un poit fixe; Ann. Ec. norm., III, 30, 1903), K. Kommerell (*Die nicht-euklidische Geometrie und die Trigonometrie auf den Flächen von konstanter Krümmungsmaas;* Böklen. Mitth., II, 3, 1901) e K. Münich (*Ueber nicht-euklidische Cykliden;* Diss. München, 1506); D. M. Y. Sommeville, *Peaucelliers Cell and other Linkages in non-Euclidian Geometry* (Proc. M. S. Edinburgh, 44, 1926).

Chiuderemo questo paragrafo con un elenco di scritti di geometria differenziale non euclidea: C. Guichard, *Sur les surfaces minima non-euclidiennes* (Ann. Ec. norm., III, 13, 1896) e *Sur le propriétes infinitésimales de l'espace non euclidien* (C. R., 141, 1905); A. Whitehead, *The geodesic geometry of surfaces in non-euclidean space* (Proc. L. M. S., 29, 1898); L. Bianchi, *Alcune ricerche di geometria non-euclidea* (Ann. di mat., III, 2, 1899), *Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili* (Lincei Rend., V., 9, 1900_2), *Sui simboli a quattro indici e su la curvatura di Riemann* (Id., 11, 1902_1), *Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazi di curvatura di Riemann* (Id., 11, 1902_1), *Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazi di curvatura costante* (Ann. di mat., III, 4, 1900), *Sulla deformazione delle quadriche di rotazione negli spazi di curvatura costante* (Id., 5, 1901) e *Sopra alcune classi di congruenze negli spazi di curvatura costante* (Id., III, 1904; M. Servant, *Sur quelques applications de la géometrie non-euclidienne* (C. R., 131, 1900); D. Gigli, *Sulle superficie elicoidi e rigate dello spazio ellittico* (Rend. Ist. Lomb., II, 33, 1900); G. Fubini, *Su una classe notevole di superficie nello spazio ellittico* (Atti Ist. Ven. 60, 1901), *Le superficie di Bonnet nello spazio ellittico* (Boll. Accad. Gioenia, 1902-05) e *Sulle coppie di superficie applicabili nello spazio ellittico* (Lincei Rend., V, 13, 1904_1); F. S. Woods, *Space of constant curvature* (Ann. of math., II, 3, 1902); E. Cesàro, *Sui fondamenti della geometria intrinseca non-euclidea* (Lincei Rend., V, 13, 1904^1) e *Fondamento intrinseco della pangeometria* (Lincei Atti, III, 5, 1904-05); P. Mercalanti, *Le superficie di Bonnet nello spazio parabolico indefinito* (Giorn. di mat., 42, 1904; si tratta dello spazio in cui l'elemento lineare è dato $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$); A. Demoulin, *Sur les surfaces de Voss de la géometrie non-euclidienne* (C. R., 140, 1905); U. Sbrana, *Sui sistemi ciclici* (Palermo Rend., 21, 1906); L. Bianchi, *Sopra le deformazioni isogonali delle superficie a curvatura costante in geometria ellittica ed iperbolica* (Ann. di mat., II, 18, 1911); G. Pirondini, *Essai d'une théorie analytique des lignes non-euclidiennes* (Porto Ann., 6, 1910, e 191, 1912); E. Stransk, *Zur Infinitesimalgeometrie der Kurven im elliptischen Raume* (Wien. Ber., 121, 1912); E. Salkowski, *Zur Theorie der Kurven im elliptischen Raume* (Deutsch. M. V., 21, 1912);

A. Signorini, *Le trasformazioni* B_n *delle superficie applicabili sulle quadriche dello spazio ellittico* (Pisa Ann., 12, 1912); B. Baule, *Ueber Kreise und Kugel im Riemanschen Raum* (Math. Ann., 83 e 84, 1921); W. Blaschke, *Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum* (Math. Zeit, 15, 1922); F. Lindemann, *Die nicht-euklidischen Minimalflächen* (München. Ber., 1923); H. Beck, *Zur Lieschen Kugelgeometrie in nicht-euklidischen Raum* (Deutsch. M. V., 32, 1923).

§ 3. Geometria degli spazi a quantesivogliano dimensioni (1)

10. Spento anche l'eco delle accuse di mancanza di solidità volte alla « geometria a più dimensioni » (o più brevemente *ipergeometria*), essa, liberata dall'obbligo di tutelare i propri diritti alla vita, potè proseguire più disinvolta e libera verso il luminoso ideale che le si parava dinanzi ed in conseguenza raggiungere nuovi risultati, che tornano a sommo onore dello spirito umano (2). E così, mentre un tempo i cultori di essa dovevano perder tempo a confutare dei dubbi infondati, nel periodo attuale poterono o consacrarsi completamente a speciali ricerche, o determinare la portata filosofica dell'ultima nata fra le discipline matematiche (v. ad es. H. Schubert, *The fourth dimension. Mathematical and spiritualistic*. The Monist, 3, 1896-97; S. Newcomb, *The philosophy of hyperspace;* Bull. Amer. M. S., II, 4, 1898) o dimostrarne l'utilità per chi voglia spiegare certi fenomeni fisici (v. C. H. Hinton, *The recognition of the fourth dimension;* Washington Bull., 14, 1902), o fare il bilancio dell'accumulata ricchezza (V. Schlegel, *Sur le développement et l'état actuel de la géométrie à* n *dimensions;* Ens., 11, 1900) o risalire il corso dei secoli per scoprire la prima radice della novella pianta (F. Cajori, *Origin of fourth Dimension Concept*, Amer. math. Mouth., 33, 1926 e *Early Proofs of the Impossibility of a fourth Dimension of Space*, Arch. di St. della Sc., 7, 1926) Altro sintomo di tale pacifico stato di cose si trova nelle esposizioni metodiche che vennero già fatte da vari punti di vista della teoria che ci occupa: sotto forma popolare da E. Jouffret (*Traité élémentaire de géomètrie à quatre dimensions et Introduction à la géométrie à* n *dimensions*, Paris, 1903; *Mélanges de géométrie à quatre dimensions*, Id., 1906), dal punto di vista della geometria elementare da P. H. Schoute (*Mehrdimensionale Geometrie;* Leipzig, I Teil, 1902; II Teil,

(1) Cfr. il discorso E. J. Wilczynski, *Some general aspects of modern Geometry* (Bull. A. M. S., II, 19, 1913).

(2) Basti qui ricordare che considerazioni metageometriche intervengono nei fondamenti della relatività generale, creata da A. Einstein.

1905) (1), come estensione della geometria analitica da H. Laurent (*La géométrie analytique générale*, Paris, 1906) e da un punto di vista elevato e moderno da E. Bertini nella sua magistrale *Introduzione alla geometria projettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità* (Pisa, 1907, II ed. Messina, 1923; trad. ted. Vienna, 1924). L'Encik. math. contiene poi un esauriente articolo di C. Segre dal titolo *Mehrdimensionale Geometrie*. Ricordiamo anche l'opuscolo di C. Guichard, *Les courbes de l'espace à n dimensions* (Mémor. mathem., 29, 1927) e il volume recente di D. M. Sommeville, *Introduction to the geometry of n dimensions* (London 1930).

I *Principles of Geometry* di H. F. Baker (Cambridge, 1922-25) insegnano i risultati gradatamente ottenuti sopra i fondamenti della geometria, sulle principali figure geometriche e finalmente applicando considerazioni iperspaziali, come emerge dai titoli che riferiamo dei quattro volumi che costituiscono quell'opera: 1. Fondamenti della geometria; 2. Geometria piana: Coniche, cerchi, geometria non euclidea; 3. Geometria solida: Quadriche, cubiche gobbe, superficie del terzo ordine; 4. Geometria superiore, ossia illustrazione dell'utilità di considerazioni iperspaziali, specialmente di quelle sopra gli spazi a quattro o cinque dimensioni.

11. Scendendo a qualche più minuto particolare noteremo *Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazi* proposto da M. Pieri (Riv. di mat., 6, 1896), una memoria di F. Enriques, *Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in uno spazio a più dimensioni* (Palermo Rend., 12, 1898), quelle di O. Veblen *Finite projective geometries* (Trans. A. M. S. F., 1906) e F. W. Ovens, *The Introduction of ideal Elements and a new Definition of projective n-space* (Id., 11, 1910), di soggetto analogo, e due esposizioni delle prime linee della geometria a più dimensioni fatte una da P. del Pezzo (*Appunti di geometria ad* n *dimensioni;* Giorn. di mat., 31, 1893), l'altra da F. Aschieri (*Fondamenti di geometria analitica;* Modena Mem., II, 11, 1895). La letteratura relativa alla ipergeometria metrica elementare si arricchì, per merito di H. Graf, di un importante lavoro, la *Theorie der vielfachen Kontinuität* (Bern, 1901), memoria postuma di Schläfli, donde emerge che questo eminente geometra non solo precorse, ma si spinse più innanzi de' suoi successori negli studi sui poliedri negli iperspazi. Tale soggetto venne poi trattato da H. W. Curjel (*Note on the regular hypersolids;* Mess., II, 28, 1899) e T. Gossel (*On the regular and*

(1) Sono ivi compendiati o citati lavori precedenti dell'autore, che per brevità noi ci dispensiamo dall'enumerare.

semiregular figures in space of n *dimensions;* Ivi). Di estendere il teorema di Pitagora si occuparono V. Schlegel (*Ueer pytagoraische Lehrsatz im mehrdimensionalen Räumen;* Chicago Pap., 1897) e L. Klug (*Die Verallegemeinerung des Pytagoreischen Lehrsetzes auf den* n*-dimensionalen Raum;* Monatshefte, 10, 1897), mentre K. Kühne (*Die Uebertragung einer geometrischen Theorem auf Mannigfaltigkeiten von geraden Ordnung als Beispiel der Anwendung einer schiefen Determinanten,* Journ. f. Math., 119, 1898), insegnò l'estensione del teorema: « le circonferenze circoscritte ai quattro triangoli che si possono formare con quattro rette di un piano, passano per lo stesso punto ». La generalizzabilità a tutti gli spazi a 2_n dimensioni del teorema sulla somma degli angoli di un triangolo e quella a tutti gli spazi di 2_n-1 dimensioni del teorema sull'eccesso sferico vennero stabilite dal Poincaré (*Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de géométrie;* C. R., 139, 1904; cfr. anche X. Stouff, *Sur la généralisation de la formule de l'aire du triangle sphérique,* Id., 122, 1896). Altre questioni concernenti i poliedri furono trattate da E. J. Nauson (*The content of the common self-coniugate n-gon of two n-ary quadrics;* Mess., II, 26, 1896), E. Hess (*Ueber eine anschauliche Darstellung der regelmässigen Eintheilung des dreidimensionalen sphärischen Raumes;* Marburg. Ges., 1898), H. Schubert (*Ueber die Konstantenzahl der n-dimensionalen Verallgemeinerung des Polyeders;* Deutsch. Mat.-Ver., 11, 1902) e M. Dehn (*Die Eulersche Formel in Zusammenhang mit dem Inhalt in der nicht-euklidischen Geometrie;* Math. Ann., 51, 1905). Vanno ancora qui ricordate la nuova trattazione fatta da G. Loria (*Généralisation d'un problème de minimum classique,* Mathésis, II, 9, 1899) di una questione già studiata da V. Schlegel (v. p. 271), due note di C. J. Keiser (*Concerning the angle and the angular determination of planes in 4-space;* Bull. Amer. M. S., II, 8, 1902) e H. F. Blichfeld (*On the determination of the distance between two points in space of* n *dimensions;* Trans. Amer. M. S., 3, 1902). Sull'estensione a spazi superiori dell'analisi vettoriale si vedano le osservazioni di W. H. Young, *On systems of one-vectors in space of* n *dimensions* (Proc. L. M. S., 29, 1898, nonchè altri due articoli dello stesso autore nel vol. 30, 1893, della stessa raccolta), la memoria di P. Alibrandi, *Sull'estensibilità del metodo dei vettori allo studio dello spazio a* n *dimensioni* (Nuovi Lincei Mem., 20, 1903), le due di A. Pensa, *Geometria assoluta dei vettori e delle omografie vettoriali in un* S_n *euclideo* (Rend. I. L., II, 52, 1919) e *Geometria assoluta delle formazioni geometriche in un* S. *Euclideo* (Atti Ist. Ven., 79, 1920) e quella di A. del Re *Sul carattere invariantivo di certi operatori nell'analisi estensiva ad* n *dimensioni* (Torino Atti, 54, 1919). Finalmente E.

Piccioli rivolse la propria attenzione all'analoga negli iperspazi della geometria del triangolo (*Fondamenti per la geometria dell'n-edro in uno spazio lineare con n-1 dimensioni;* Period. mat., III, 3, 1906).

Altre questioni relative a porzioni di un iperspazio limitato da spazi lineari sono trattate negli scritti seguenti: P. H. Schoute, *On the characteristic numbers of the Polytope* $e_1\, e_2 \dots e_{n-2}\, e_{n-1}\, S\, (n+1)$ *and* $e_1\, e_2 \dots e_{n-2}\, e_{n-1}\, M_n$ *of Space* S_n (Proc. Congr. Cambridge, 1912); G. Sforza, *Ricerche di estensionimetria negli spazi metrico-projettivi* (Acc. Modena Mem., III, 8, 1907) e *Sopra alcuni punti dell'estensionimetria non-euclidea* (Torino Atti, 43, 1908); T. C. Lewis, *Figures in n-dimensional Space analogous to orthogonal Tetrahedra* (Proc. L. M. S., II, 12, 1913); O. Veblen, *Decomposition of an N-space by a Polyhedron* (Trans. A. M. S. 14, 1913); W. Burnside, *Convex Solids in higher Space* (Proc. Cambridge phil. Society, 20, 1921); O. Hölder, *Das Valumen in einer Riemannschen Mannigfatigkeit und seine Invarianteeigenschaft* (Math. Zeit., 20, 1924); D. M. Y. Sommerville, *The regular Division of Space of n-Dimensions and theier metrical Constants* (Palermo Rend., 48, 1924) e *The relations connecting the angle-sums and volume of a polytope in space of n dimensions* (Proc. L. M. S., 115, 1927).

12. All'« analysis situs » degli spazi superiori si riferiscono, tanto alcuni lavori del Poincaré che citammo nel § 2 del Cap. precedente, quanto gli articoli di G. Brunel (1856-1900) (1) *Sur les surfaces et les espaces à un seul côté;* (Bordeaux Procès-Verb., 1895-96; ivi è dimostrata, mediante un esempio la esistenza, negata dal Poincaré, di varietà a n-1 dimensioni unilaterali), di G. Manoury (*Lois cyclomatiques;* Nieuw Arch., II, 3, 1897), P. Wernicke (*Ueber die Analysis situs mehrdimensionaler Räume*; Diss. Göttingen, 1904), di H. Tietze (*Zur analysis situs mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Wiener Ber., 115, 1906, e *Ueber die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten*, Monatshefte, 19, 1908), di C. Thaer (*Umlaufsinne im Raume von beliebig vielen Dimensionen*, Deutsch. M. V. 28, 1919), di H. Künnerth (*Zur topologischen Untersuchung geometrischer Gebilde*, Münch. Ber., 1922), di P. Alexandroff (*Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie*, Math. Ann., 94, 1925), di C. Schverk, (*Die Höchstzahl der reellen Züge einer Raumkurve n-ter Ordnung - Dimensionen*, Diss. Kiel, 1917) e di D. M. Y. Sommerville (*Links and Knotts in Euclidian Space of Dimensions*, Mess., II, 36, 1907).

La proiezione centrale, come metodo di geometria descrittiva, trovasi

(1) P. Duhem, *Notice sur la vie et les travaux de George Brunel* (Bordeaux Mem., VI 2, 1903).

svolta nell'articolo di G. Loria, *Sur quelques problèmes élémentaires de la géométrie déscriptive à 3 et 4 dimensions* (Arch. f. Math., III, 2, 1902) e nuovamente esposta nell'opuscolo di H. de Vries, *Die Lehre der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume* (Leipzig, 1905); mentre altri noti procedimenti per rappresentare su un piano le figure solide vennero esteso allo spazio a quattro dimensioni da G. Carbone (*Rappresentazione steroscopica sullo spazio ordinario dello spazio a quattro dimensioni;* Giorn. di mat., 39, 1901), G. Marletta (*Sulla proiezione quotata, sopra un piano, dello spazio da quattro dimensioni*, Catania, 1904) e A. Torroja y Miret (*Representation grafica de espacios superiors*, Mem. Arc. di Barcelona, 18, 1924). Maggiore generalità ed importanza possiede la nota di U. Perazzo, *Sopra la geometria descrittiva in uno spazio od un numero qualunque di dimensioni* (Torino Atti, 41, 1906). Anche molte pagine dell'opuscolo di L. Eckardt *Konstruktiv Abbildungsverfahren, Eine Einführung in die neueren Methoden der darstellenden Geometrie* (1) (Wien, 1926) concernono lo spazio a quattro dimensioni.

13. Passando dalla geometria descrittiva alla geometria proiettiva segnaleremo i seguenti studi di cui il tema è « correlazioni e collineazioni negl'iperspazi »: P. Visalli, *Sulle collinearità e correlazioni ordinarie ed eccezionali in due spazi a quattro dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 29, 1896); G. Bordiga, *La omografia nello spazio a* n *dimensioni* (Atti Ist. Ven., VII, 8, 1897); G. del Prete (1873-1901), *Le corrispondenze proiettive degeneri* (Rend. Ist. Lomb., II, 30, 1897) e *Le omografie e correlazioni permutabili in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni* (Giorn di mat., 38, 1900); H. Schubert, *Correlative Verwandschaften in* n *Dimensionen* (Deutsch. Math.-Ver., 4, 1897); G. Z. Giambelli, *Il problema della correlazione negli iperspazi* (Mem. Ist. Lomb., II, 19, 1903); L. Autonne, *Sur les droites fondamentales dans les collinéations de l'espace* n-1 *dimensions* (Bull. S. M. F., 33, 1905); S. Medici, *Sulle omologie e correlazioni non singolari in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni* (Giorn. di mat., 44, 1906); R. Weitzenböck, *Ueber einige spezielle Raumkollineationen in* R_4 (Palermo Rend., 31, 1911) e *Zur projektiven Geometrie des* R_4 (Wien. Ber., 21, 1912); P. Roth, *Ueber Korrelationen linearer Räume in sich selbst* (Monatshefte,28, 1917; dimostrazione di un teorema enunciato dal Bertini); E. G. Togliatti, *Su alcune classi di sistemi lineari di reciprocità degeneri tra spazi ad* n *dimensioni* (Torino Atti, 52, 1917) e *Intorno ad un tipo no-*

(1) Trovasi ivi applicato e in parte generalizzato quanto E. Müller espose nel T. I, (Leipzig und Wien 1925) delle sue *Vorlesungen über darstellenden Geometrie*.

tevole di sistemi lineari di reciprocità degeneri tra spazi ad n *dimensioni* (D'Ovidio Scritti, 1918); G. Marletta, *Sistemi lineari d'omografie che sono gruppi* (Palermo Rend., 43, 1919).

Della geometria numerativa degli iperspazi si occupò N. Giampaglia nella memoria *Formole d'incidenza per le coppie « punto e retta », « retta e piano » « punto e piano »* (Atti Acc. Gioenia, IV, 7, 1904) e C. G. F. James nell'altra dal titolo *Formolae for the intersections of line systems in higher space* (Proc. L. M. S., II, 24, 1925).

Ad estendere speciali concetti e teoremi dell'ordinaria geometria di posizione son consacrate le seguenti memorie: G. Kohn, *Uebr die Erweitrung eines Grunbegriffes der Geometrie der Lage* (Math. Ann., 46, 1895), *Die homogenen Coordinaten als Wurfcoordinaten* (Wiener. Ber., 104, 1896) e *Ueber kontrojektiven Figuren* (Id., 125, 1916, e 127, 1918); E. Busche, *Ueber das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden* (Math. Ann., 41, 1893); L. Berzolari, *Sopra un teorema relativo alle collineazioni* (Lomb. Ist., II, 36, 1903; è ivi generalizzato il teorema esposto nella nota di F. London, *Ueber einen Satz aus der Theorie der ebenen Kollineationen*, Math. Ann., 57, 1903), *Sulla omologia di due piramidi in un iperspazio*, Lincei Rend., V, 13, 1904), *Sui sistemi di* n-1 *rette dello spazio ad* n *dimensioni, situate in posizione di Schläfli* (Palermo Rend., 20, 1905) e *Sull'estensione del concetto di tetraedri di Möbius agli iperspazi* (Id., 22, 1906); L. Brusotti, *Teoremi sulle piramidi di* n-1 *vertici dello spazio ad* n *dimensioni* (Id., 20, 1905); E. Nauson, *Space analogous of a theorem of Hesse* (Mess., II, 34, 1904; si allune al noto teorema « se due coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo sono coniugati rispetto ad una conica lo stesso accadrà della restante »; A. Natucci, *Sull'estensione del teorema di Desargues* (Giorn. di mat., 43, 1905) e *Sull'estensione di un teorema di Clebsch* (Ivi); E. Ciani, *Una interpretazione geometrica del gruppo totale di sostituzioni sopra sei elementi* (Ann. di mat., III, 16, 1909); C. L. Moore, *Some properties of Lines in space of four dimensions and their interpretations in the Geometry of the Circle in space of three dimensions* (Amer. Journ, 33, 1911); A. Giusto, *Sulle coppie di piramidi fondamentali di „ mutuamente inscritte* (Giorn. di mat., 50,1912); R. König, *Beiträge zu einer allgemeinen linearen Mannigfaltigkeitslehre* (Deutsch. M. V. 28, 1919).

14. Di proprietà metriche e proiettive delle quàdriche a più dimensioni trattarono di recente: A. del Re, *Sulla successiva proiezione di una varietà quadratica su sè stessa* (Lincei Rend., V, 5, 1896_2); V. Snyder, *Condition that the line common to* (n-1) *planes in an n-space may pierce a given*

quadric surfaces in the same space (Bull. Amer. M. S., II, 4, 1898); R. Rudio, *Ueber die Principien der Variationsrechnung und die geodätische Linien des n-dimensionalen Rotationsellipsoides* (Wolf Zeitschr., 43, 1898); A. da Porto, *Sulla generazione per stelle reciproche delle quadriche ad un numero qualunque di dimensioni* (Giorn. di mat., 37, 1899); C. Rosa *Rappresentazione della quartica base di un fascio di quadriche di* S_r *sopra* S_{2n-2} (Ann. di mat., III, 1, 1898) e *Sugli spazi lineari di dimensione massima contenuti in una quartica base di un fascio di quadriche in uno spazio a dimensioni pari* (Rend. Ist. Lomb., II, 32, 1899); K. Hensel, *Ueber Klassification der nicht homogenen quadratischen Formen und der Oberflächen zweiter Ordnung* (Journ. f. Math., 113, 1899); W. A. Wythoff, *The classification of quadrics in* n*-dimensional space* (Nieuw Arch., II, 4, 1899). J. Sommer, *Focaleigenschaften quadratischer Manigfaltigkeiten im vierdimensionalen Raume* (Math. Ann., 53, 1900) e *Ueber Eigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten in höheren Räumen* (Deutsch. Math.-Ver., 8, 1900; si tratta ivi di ombelichi e geodetiche); U. Concina (1875-1929), *I fuochi delle quadriche in uno spazio lineare metrico ad n dimensioni;* G. di ma., 38, 1900); H. W. Richemond, *On the condition that five straight lines situated in a space of four dimensions should lie on a quadric* (Cambridge Proc., 10, 1900); P. H. Schoute, *Ein besonderes Bündel von drei dimensionalen Räume zweiter Ordnung im Raum von vier Dimensionem* (Deutsch. Math.-Ver., 9, 1901); A. Toxopeus, *De confocale kwadratische ruimten in de ruimte van vier afmetigen;* Niew Arch., II, 6, 1903); G. Fano, *Sul sistema* ∞^3 *di rette contenuto in una quadrica dello spazio a quattro dimensioni* (Giorn. di mat., 43, 1905); R. Bricard, *Sur certains systèmes linéaires, ponctuels et tangentiels, de quadriques* (C. R., 142, 1906); P. Predella, *Ricerche sulle coppie di quadriche in uno spazio ad* n *dimensioni* (Torino Atti, 42, 1917); L. Brusotti, *Ricerche sui fasci di quadriche in uno spazio ad n dimensioni* (Palermo Rend., 23, 1907); K. Dohn, *Der Büschel von Flächen zweiten Grades im Raume* S_n *und ein* (n+1) *- Flach in besonderer Beziehung zu ihm* (Leipzig. Ber., 61, 1909) e *Der Flächenbüschel zweiten Grades in* S_n *und eine gewisse* (n+1) *- Fläche* (Math. Ann., 70, 1911); R. Weitzenböck, *Ueber den Schnitt zweier quadratischen Räume in vierdimensionalen Räume* (Monatshefte, 22, 1911); A. Terracini, *Sulla esistenza di polarità ordinarie che mutano l'una nell'altra due quadriche non degeneri* (Ann. di mat., III, 30, 1921); G. Scorza, *Classificazione metrica delle quadriche in uno spazio ad* r *dimensioni* (Giorn. matem., 64, 1926). Mentre in questi lavori non è di regola fatta distinzione fra elementi reali e elementi immaginari, essa informa la memoria di E. G. Togliatti intitolata:

Questioni di forma e di realità relative a fasci di quadriche in uno spazio ad n dimensioni. (Ann. di mat., III, 30, 1921).

15. Un saggio di estensione delle idee di Plücker sulla geometria della retta allo spazio a quattro dimensioni è dovuto a C. J. Keyser (*The plane geometry of the point in point-space ouf four dimensions;* Amer. Journ., 25, 1903), mentre G. H. Young scrisse *Sulle sizigie che legano le relazioni quadriche fra le coordinate da rette in* S_4 (Torino Atti, 34, 1899), tema che trovasi trattato nella posteriore scrittura di L. Autonne, *Sur les coordonnées plückeriennes des droites dans l'espace à n dimensions* (Journ. Ec. pol., II, 11, 1906). Vanno poi notate le ricerche del Giacomini *Sulla corrispondenza fra la geometria conforme di* S_n *e la geometria proiettiva dello spazio ordinario* (Pisa Ann., 8, 1899), nonchè quelle sui complessi lineari degli spazi superiori e sui sistemi lineari da essi formati dovute a S. Kantor (*Theorie der linear Strahlencomplexe in Raume von r Dimensionen;* Journ. f. Math., 118, 1897; *Die linearen Systeme linearer Strahlenkomplexe in R.*; Wiener, Ber., 112, 1903), F. Palatini (*Sulla rappresentazione lineare dei complessi lineari di rette di uno spazio a quattro dimensioni coi punti dello spazio a nove dimensioni*, Atti Ist. Ven., 59, 1900; *Sui sistemi lineari di complessi lineari di rette nello spazio a cinque dimensioni;* Ivi, 60, 1901), F. Eiesland (*On nullsystems in space of five dimensions and their relation to ordinary space*, Am. Journ., 26, 1904), G. Kowalewski (*Eine carakteristische Eigenschaft der proiektiven Gruppe des Nullsystems*, Leipzig, Ber., 58, 1906), U. Perazzo (*Sopra alcune varietà di rette ed in particolare su vari tipi di complessi cubici*, Torino Mem., II, 59, 1909), G. Marletta, *Sui complessi di rette del primo ordine dello spazio a quattro dimensioni* (Palermo, Rend., 26, 1909), *Sui complessi di rette d'ordine due e della prima specie dell'*S_4 (Giorn. di mat., 50, 1912), *Ricerche sui complessi di rette d'ordine due e della seconda specie dell'*S_4 (Atti Acc. Gioenia, V, 6, 1913) e *Sui complessi di rette dell'*S_4 *d'ordine 2 e di quarta specie e, in particolare, su quello di classe 4* (Palermo Rend., 38, 1914); Maria Miglio, *Nell'*S_4 *una classe di complessi di rette di 3ª specie* (Atti Acc. Gioenia, V, 15, 1926); E. Bompiani, *Contributo allo studio dei sistemi lineari di rette nello spazio a quattro dimensioni* (Atti Ist. Ven., 73, 1914); B. Segre, *Sui complessi algebrici di rette di* S_4 (Lincei Rend., V, 33, 1924_1 e Atti Ist. Ven., 88, 1928); R. Mercuri, *Degli r-complessi di rette dei primi due ordini dell'*S_r (Mem. Acc. Zelanti, IV, 2, Acireale 1930). Si connettono a tali studi quelli di F. Engel sopra *Ein neues dem linearen Complexe analoges Gebilde* (Leipziger Ber., 52, 1900) e L. Autonne, *Sur le connexe linéaire dans*

l'espace à n-1 *dimensions* (C. R., 138, 1904); E. Veneroni, *Sui connessi bilineari fra punti e rette negli iperspazi* (Palermo Rend., 26, 1908); C. M. Sisam, *On algebraic hyperconical Connexes in Space of* r *Dimensions* (Torino Atti, 46, 1911); C. Segre, *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni* (Ann. di mat., III, 27, 1918) e *Sulla geometria delle schiere rigate o regoli e in particolare sui complessi lineari di tali enti* (Ivi).

Nello spazio ordinario vi sono notoriamente due specie di rette immaginarie; il fatto analogo negli iperspazi lineari trovasi descritto nella memoria di O. Fernandez Baños, *Estudios sintetico de los espacios complejos de* n *dimensiones* (Publ. de Laboratorio matem. Madrid, 2, 1917).

16. Alla teoria delle curve negli iperspazi arrecarono contributi notevoli coloro che studiarono le serie semplicemente infinite di punti col sussidio della teoria delle funzioni algebriche; i relativi scritti vennero già segnalati nei §§ 2-4 del Capitolo XIII. Qui va fatta menzione di altri lavori sul medesimo soggetto: L. Berzolari, *Sulle secanti multiple di una curva algebrica dello spazio a tre od a quattro dimensioni* (Palermo Rend., 9, 1895); B. Levi, *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica* (Torino Mem., II, 48, 1898); S. Kantor, *Das Maximalgeschlecht der algebraischen Kurven in* R_r (Acta, 25, 1901); A. Crepas, *Sui piani che secano e toccano delle curve in un iperspazio* (Rend., Istituto Lomb., II, 35, 1902) e *Sulle coniche che secano e toccano delle curve in un iperspazio* (Id., 36, 1903); F. Severi, *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio* (Torino Mem., II, 51, 1901) e *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Torino Atti, 38, 1903); M. de Franchis, *Sulle varietà* ∞^2 *delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* (Palermo Rend., 17, 1900); A. Tanturri, *Alcune equazioni funzionali ed il numero dei gruppi neutri di seconda specie in una serie lineare* (Torino Atti, 39, 1904); G. Z. Giambelli, *Sulle varietà rappresentate coll'annullarsi i determinati minori contenuti in un determinante simmetrico od emisimmetrico generico di forme* (Torino Atti, 21, 1906); *Sul luogo dei punti di contatto delle ipersuperficie di due dati sistemi lineari* (Palermo Rend., 23, 1907) e *Risoluzione del problema generale numerativo per gli spazi plurisecanti di una curva algebrica* (Torino Mem., II, 59, 1909); G. Marletta, *Per i numeri caratteristici dei sistemi di coniche plurisecanti una curva gobba* (Giorn. di mat., 56, 1918); A. Cavatorta, *Costruzione delle formole di coincidenza per i sistemi algebrici di coppie di punti in un iperspazio* (Note e mem., 1, 1921); B. Segre, *Genere della curva doppia per la*

varietà di S_4 che annulla un determinante simmetrico (Torino Atti, 58, 1921).

A curve speciali degli spazi comunque estesi si riferiscono i seguenti lavori: S. Kantor, *Die Typen der linearen Komplexe elliptischer Kurven in R_r* (Amer. Journ., 23 e 24, 1901-02); A. P. Thompson, *The rational quintic curve in space of four dimensions* (Mess., II, 32, 1903; tale curva appartiene alla categoria di quelle studiate nella nota di G. Loria citata a p. 273); G. Brusotti, *Sulla curva razionale normale dello spazio a quattro dimensioni* (Ann.. di mat., III, 9, 1904); L. Berzolari, *Sulle curve d'ordine* n *dello spazio ad* n *dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 36, 1903) e *Alcuni teoremi sulle curve razionali di uno spazio ad* r *dimensioni dotate di* r+1 *punti d'iperosculazione* (Palermo Rend., 22, 1906); G. Marletta, *Contributo alla teoria delle curve razionali* (Id., 21, 1906) e *Alcuni teoremi sulle curve razionali negli iperspazi* (Id., 25, 1908); C. Rosati, *Sulle curve ellittiche del sest'ordine* (Rend. Ist. Lomb., II, 35, 1900; si tratta ivi di sestiche in S_5 e delle loro proiezioni) e *Sulle corrispondenze permutabili appartenenti a una curva algebrica, e sulle varietà di Jacobi a gruppo di molteplicità abeliano* (Lincei Rend., IV, 5, 1927_1); G. Kowalewski, *Ueber die projektive Gruppe der Normkurve und eine charackteristiche Eigenschaft des sechsdimensionalen Raumes* (Leipziger Ber., 54, 1920); J. R. Conner, *Basic Systems of rational norm Curves* (Amer. Journ., 52, 1910); A. Comessatti, *La curva razionale normale ed i suoi gruppi projettivi* (Math. Ann., 39, 1923; applicazione della teoria delle forme binarie); H. Mohrmann, *Ueber die algebraischen W-Curven in r-dimensionalen Raum* (Palermo Rend., 47, 1923); E. Schubart, *Sur les courbes admettant un groupe de transformations de Möbius* (Enseign., 25, 1926) e *Bestimmung de W-Kurven* (Diss. Basel, 1927); B. Segre, *Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti* (Lincei Mem., VI, 2, 1928).

17, Anche gli studi intorno alle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni non vennero abbandonati in questi ultimi tempi: ne fan fede i seguenti scritti: F. Enriques, *Sugli spazi pluritangenti delle varietà cubiche appartenenti allo spazio a 4 dimensioni* (Giorn. di mat., 31, 1893); H. W. Richemond, *Concerning the locus* $\Sigma\left(x_r^3\right)=0$; $\Sigma\left(x_r\right)=0$ $(r=1,2,3,4,5,6)$ (Quart. Journ., 34, 1903); Angiola Dragoni, *Sulla varietà subica di S_4 dotata di dieci punti doppi* (Giorn. di mat., 40, 1902); G. Fano, *Sul sistema di ∞^2 rette contenuto in una varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni* (Torino Atti, 39, 1904), *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a 4 dimensioni* (Id.; è ivi esteso alle varietà cubiche generali il teorema di Klein, secondo cui una quadrica non singolare di S_4 non contiene che superficie nascenti dal segarla con a'tre varietà algebriche dello stesso spazio), *Sopra una varietà cubica particolare dello spazio a quattro dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., 37, 1904; si tratta della varietà avente per equazione $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_?^3 = 0$, la quale è trasformata in sè stessa da un gruppo di 9720 collineazioni). Dalle analoghe figure in S_5 trattano le note: E. Veneroni, *Intorno ad un fascio di varietà cubiche dello spazio a cinque dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 38, 1905) e *Sopra una varietà cubica con quindici punti doppi dello spazio a cinque dimensioni* (Id., 47, 1914); U. Perazzo, *Sopra una forma cubica con 9 rette doppie dello spazio a cinque dimensioni e i corrispondenti complessi cubici di rette nello spazio ordinario* (Torino Atti, 36, 1900); V. Snyder, *Surfaces and Congruences derived from the cubic Variety having a double Line in four-dimensional Space* (Amer. Journ., 31, 1909), *Birational Transformations of the cubic Variety in four-dimensional Space* (Palermo Rend., 38, 1914) e *The problem of the cubic variety in* S_4 (Bull. A. M. S., 35, 1929; è un resoconto delle relative ricerche con una estesa bibliografia.

Due speciali varietà biquadratiche dello spazio a quattro dimensioni vennero investigate da G. Marletta (*Sulla varietà del quarto ordine con piano doppio dello spazio a quattro dimensioni;* Giorn. di mat., 41, 1903) e F. d'Amico (*Sulla varietà quartica con tre piani semplici dello spazio a quattro dimensioni;* Atti Acc. Gioenia, IV, 18, 1905); mentre altri si occuparono di estendere a spazi superiori le definizioni e le proprietà della superficie delle onde (P. H. Schoute, *Extension of the notion of wave surface to space of* n *dimensions;* Proc. L. M. S., Edinburgh, 1898), della superficie di Steiner (A. Brambilla, *Estensione di una proprietà della superficie di Steiner*, Napoli Rend., III, 4, 1898, e N. Spampinato, *A proposito di un teorema di Lie*, Lincei Rend., V, 28, 1919$_1$; la proprietà di cui si parla è quella espressa dal teorema di Lie ricordato a p. 97 e delle ciclidi (V. Snyder, *On cyclical quartic surfaces in space of* n *dimensions;* Bull. Amer. M. S., II, 6, 1900). Vanno anche qui ricordati i lavori dello Schoute sopra *A tortuous surface of order six and of genus zero in space of four dimensions* (Amsterdam Versl., 1906), quello del Lorenzola, *Sul luogo dei punti di contatto degli iperpiani passanti per un dato spazio lineare e tangenti alle forme di una dato sistema lineare* (Giorn. di mat., 43, 1905), di H. F. Baker, *On tre Generalization of a Theorem of Steiner* (Proc. Cambridge P. S., 22, 1914), di D. V. Steed, su *The hyperspace Generalisation of the lines on the cubic surface* (Univ. of California, 1, 1924), di Maria Castellani sulle

Algebraic surface with reducible bitangent and osculating hyperplanar Sections (Trans. A. M. S., 27, 1925) e di E. G. Togliatti relativa ad *Alcuni esempi di superficie algebriche degli iperspazi che rappresentano un'equazione di Laplace* (Comment. mathem. Helvetiae, 1, 1929). Maggiore generalità hanno le memorie di Maria Miglio (*Di alcune* $V_r^{r!}$ *dotate di* r *fasci di* $V_{r-1}^{(r-1)!}$ Atti Acc. Gioenia 16, 1927) e B. C. Wong (*On the number of apparent multiple points on variety in hyperspace*, Bull. A. M. S., 36, 1930).

18. Alla rappresentazione reale dei punti complessi o delle terne di variabili complesse si rferiscono le indagini di G. Manoury (*Surfaces-images;* Nieuw Arch.,II, 4, 1899) e di S. Kwietniewski (*Ueber Flächen des vierdimensionalen Raumes deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinkling sind und ihre Bezieung zu den ebenen Kurven;* Diss. Zurich, 1902). L'estensione a tutti gli spazi di una questione già risoluta nel piano e nello spazio ordinario, leggesi nella nota di E. Bertini, *Sui sistemi di ipersuperficie di* S_4 *aventi le stesse prime polari* (Rend. Acc. Lincei, V, 7, 1898_2), mentre da idee di S. Lie provengono le ricerche di G. Fano *Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni con un gruppo continuo integrale di trasformazioni proiettive in sè* (Atti Ist. Ven., VII, 7, 1896) e su *Un teorema sulle varietà algebriche a tre dimensioni con infinite trasformazioni proiettive in sè* (Lincei Rend., V, 8, 1899_1). Le superficie di cui trattò F. Palatini nella nota *Sulle superficie algebriche i cui* S_h (h+1) - *seganti non riempiono lo spazio ambiente* (Torino Atti, 41, 1906) sono quelle di S_{3h+2} rappresentabili sul piano mediante il sistema di curve $(O^{2(h-1)}\ D_1^2 \ldots D_{h-1}^2)_{2h}$ e per h= 4 anche quelle rappresentate da tutte le quartiche.

19. Alcune ricerche di trigonometria sferica (v. la Diss. *Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie*, Göttingen, 1895) condussero Grace Crisholm Young (*Sulla varietà razionale normale* M_3^4 *di* S_6 *rappresentante della trigonometria sferica;* Torino Atti, 34, 1899) ad una speciale varietà dello spazio a sei dimensioni; mentre la generazione di curve e superficie mediante sistemi proiettivi di curve e superficie di ordini inferiori diede origine alle ricerche contenute nei seguenti scritti: K. T. Vahlen, *Ueber den Grad des Eliminationssesultante eines Gleichungssystem* (Journ. f. Math., 113, 1894; cfr. anche l'articolo dello stesso autore, *Ueber einige Anwendungen des Correspondenzprincips*, Id., 118, 1897); M. Pieri, *Sull'ordine della varietà generata da più sistemi*

lineari omografici (Palermo Rend., 11, 1897); C. Segre, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinati dei diversi gradi estratti da una data matrice;* Lincei Rend., 9, 1900_2); F. Palatini, *L'ordine delle varietà che annulla i subdeterminanti di un dato grado di un determinante emisimmetrico* (Ivi, 11, 1902_1); P. Lorenzola, *Sul luogo di un punto base comune a* k — 1 *sistemi lineari di forme di dimensioni* h + 1 *corrispondenti in altrettanti sistemi omografici di specie* h + h + 1 (Rend. Ist. Lomb., II, 36, 1903); G. Z. Giambelli, *Ordine della varietà rappresentata coll'annullare tutti i minori di dato ordine estratti da una data matrice* (Lincei Rend., V, 12, 1903_2), *Le varietà rappresentate per mezzo di una matrice generica di forme e le varietà generate da sistemi lineari proiettive di forme* (Lincei Rend., V, 14, 1905_2), *Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche* (Torino Atti, 38, 1903) e *Sulla varietà rappresentate coll'annullare i determinati minori contenuti in un determinante simmetrico od emisimmetrico di forme* (Id., 41, 1906).

20. Il concetto di rigata nello spazio ordinario fu esteso agli spazi superiori e condusse alla considerazione di figure composte d'infiniti spazi lineari; i fondamenti di essa furono posti da C. Segre nella memoria *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi* (Palermo Rend., 30, 1910; cfr. A. Ranum, *On the projective differential geometry of* n*-dimensional spread generated by* ∞^1 *flats*, Ann. di mat., III, 19, 1912). .

Di speciali figure costituite da infiniti spazi lineari (in particolare delle rigate in ispazi superiori) si occuparono nuovamente B. Levi (*Dell'intersezione di due varietà contenute in una varietà semplicemente infinita di spazi;* Torino Atti, 34, 1895), A. Tanturri (*Intorno ad alcune semplici infinità di spazi e sopra un teorema del Prof. Castelnuovo;* Torino Atti, 37, 1902 e *In qual modo alcuni numeri relativi ad infinità ellittiche di spazi, si deducano dagli analoghi, relativi ad infinità razionali*, Ivi), F. Severi (*Sugli spazi plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazi;* Lincei Rend., V, 11, 1902), C. Pagliano (*Sulle varietà algebriche a tre dimensioni costituite da una semplice infinità di piani;* Ann. di mat., III, 5, 1901), M. Morale (*La rigata razionale d'ordine* n *dello spazio a quattro dimensioni e sua rigata trasversale, con particolare considerazione al caso* n = 5; Atti Acc. Gioienia, IV, 14, 1901), A. Bellatalla (*Sulle varietà razionali normali composte di spazi;* Torino Atti, 36, 1901), H. C. Moreno (*On ruled loci in* n*-fold space*, Proc. Amer. Accad., 37, 1901) e F. Chizzoni (*Numero dei punti doppi di una rigata dello spazio a quattro dimensioni;* Modena Mem., III, 5, 1905).

Le ricerche sopra i caratteri di una superficie algebrica del nostro spazio ne ispirarono altre sopra le varietà algebriche comunque estese: a tali ricerche sono dedicate la nota di F. Severi *Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche* (Lincei Rend., V, 16, 1907_2) e la più ampia memoria dal titolo *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (Palermo Rend., 28, 1909). Fra gli altri lavori congeneri citiamo i seguenti: M. Pannelli, *Sul genere aritmetico di una varietà completa intersezione di forme* (Torino Atti, 44, 1909) e *Sopra un carattere di una varietà algebrica a tre dimensioni* (Palermo Rend., 32, 1911); W. Schmeidler, *Ueber die Singularitäten algebraischer Gebilde* (Math. Ann., 81, 1920) e *Zur affinrationalen Geometrie* (Journ. f. Math., 153, 1920); S. Lefschetz, *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to Abelian variety* (Trans. A. M. S., 22, 1921); R. Torelli, *Sulla postulazione di una varietà e sui moduli di forme algebriche* (Ann. di mat., III, 18, 1911) e *Osservazioni di geometria sopra una varietà algebrica* (Napoli Rend., III, 17, 1911); G. Albanese, *Sul genere aritmetico delle varietà algebriche a quattro dimensioni* (Lincei Rend., V, 33, 1924_1) e *Invarianza del genere P_a di una varietà algebrica a quattro dimensioni* (Ivi).

Importanti ricerche intorno alla rappresentabilità delle equazioni di una varietà sotto una data forma e sulle intersezioni di varietà superiori, in particolare con lo scopo di generalizzare il teorema fondamentale di Nöther, vennero compiute da F. Palatini (*Sulla rappresentazione delle forme ed in particolare della cubica quinaria con la somma di potenze di forme lineari*, Torino Atti, 38, 1903 e *Sulla rappresentazione delle forme ternarie mediante la somma di potenze di forme lineari*, Lincei Rend., V, 12, 1903_1), F. Severi (*Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive*, Torino Mem., II, 52, 1903; *Su alcune questioni di postulazione*, Palermo Rend., 17, 1903; *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche*, Torino Atti, 41, 1906 e *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli*, Lincei Rend., V, 15, 1906_2), F. S. Macaulay (*The intersection of planes curves with extensions to n-dimensions and algebraic manifolds;* Verh. III Math. Kongr., 1904), R. Torelli (*Sopra certe estensioni del teorema di Nöther* $Af + B\varphi$; Torino Atti, 41, 1906) e G. Z. Giambelli (*Alcune estensioni del « Fundamentalsatz » di Noether negli iperspazi*, Ivi).

21. La teoria delle trasformazioni fra due spazi superiori trovasi svolta da vari punti di vista negli scritti seguenti: L. Autonne, *Sur les variétés unicursales à deux dimensions* (C. R., 121, 1895), *Sur les variétés unicur-*

sales à trois dimensions (Ivi), *Sur les variétés unicursales à plusieurs dimensions* (Bull. S. M. F., 27, 1899, *Sur les substitions crémoniennes dans l'espace à plusieurs dimensions* (Verh. III, Math. Kongr., 1904) e *Sur les substitutions crémoniennes dans l'espace à* N-1 *dimensions* (Journ. Ec. Pol., II, 17, 1913); E. Ascione, *Sopra alcune involuzioni dello spazio* (Napoli Rend., III, 2, 1896); S. Kantor, *Theorie der Transformationen in* R_r, *welche sich aus quadratischen zusammensetzen lassen* (Amer. Journ., 18, 1896) e *Ueber* 1-*gredienle Verwandschaften ein* R_r, *auf* M_{r-1} *and auf Kurven* (Wiener Ber., 110, 1901); P. del Pezzo, *Una trasformazione cremoniana fra spazi a quattro dimensioni* (Napoli Rend., III, 2, 1896) e *Formole e generalità sulla trasformazione cremoniana degli indici* 2, 4, 8 *fra spazi a quattro dimensioni e suoi casi particolari* (Id., 111, 1897); C. Carrone, *Le trasformazioni birazionali fra due spazi ad* n *dimensioni con particolare considerazione al caso* n = 4 (Atti Accad. Gioenia, IV, 11, 1898; è ivi, fra l'altro svolta l'osservazione fatta nella nota (2) a p. 218 dell'opera presente); M. Morale, *Involuzione di grado* n *e specie* 1 *in uno spazio a* n — 1 *dimensioni* (Palermo Rend., 13, 1893); E. H. Moore, *The cross-ratio of* n! *Cremona-transformations of order* n — 3 *in flat space of* n — 3 *dimensions* (Amer. Journ., 22, 1900); H. E. Slaught, *The cross-ratio group of* 120 *quadratic Cremona-transformations of the plane* (Ivi); E. Veneroni, *Sopra una rappresentazione univoca dello spazio rigato sullo spazio punteggiato a quattro dimensioni* (Giorn. di mat., 36, 1898) e *Sopra una trasformazione birazionale fra due* S_n (Rend. Ist. Lomb., II, 34, 1091); P. H. Schoute, *Ueber das Nullsystem* N_{2n-1} *im Raume* R_{2n-1} (Deutsch. Math. Ver., 11, 1902); G. Kowalewski, *Ueber projective Transformationsgruppen* (Leipzig Ber., 55, 1903; se si esegue una trasformazione lineare sopra una n-ica ternaria, posto $N = \frac{n(n+3)}{2}$, gli N + 1 coefficienti di essa subiscono una trasformazione appartenente ad un G_8, che viene rappresentato in un S_N); J. Eiesland, *On nullsystems in space of five dimensions and their relation to ordinary space* (Amer. Journ., 26, 1904); L. Godeaux, *Sur ue correspondance crémonienne entre deux espaces à* n *dimensions* (Rend. I. L., 4311,43, 1910); J. Fairon, *Sur une correspondance entre les espaces à* n *et à* 2n-1 *dimensions* (Liège Mém., III, 9, 1912); G. Tafani, *Sulle corrispondenze* (1, n) *tra varietà a 3 dimensioni* (Pisa Ann., 13, 1919); L. Antoine, *Sur l'homémorphie* (1) *de deux figures et de leurs voisinage* (Journ. de math., VIII, 4, 1921); G. Marletta, *Alcuni sistemi omaloidici dell'*S_4 (Palermo Rend., 49, 1925); G. Aprile, *Di una trasformazione doppia dello spazio a quattro dimensioni* (Giorn. di mat., 56, 1918); A. Gen-

(1) Cioè corrispondenza univoca.

naro, *Sopra un tipo di trasformazioni cremoniane fra spazi a quattro dimensioni* (Pisa Ann., 1927).

22. Le idee del Reye (v. p. 283) vennero ulteriormente svolte da E. Timerding (*Die Reye'sche Geometrie der Mannigfaltigkeiten projectiver Grundgebilde;* Götting. Nachr., 1898), mentre, in particolare, della geometria della sfera trattarono L. Schlumberger (*Ueber n-dimensionale lineare und quadratische Kugelsysteme;* Diss. Zürich, 1896), A. Loewy (*Ueber die Transformation einer quadratischen Form in sich selbst, mit vorzüglicher Berücksichtigung der uneigentlichen, sowie ihre Anwendungen auf Linien- und Kugelgeometrie;* Leopoldina, 65, 1896), H. E. Timerdig (*Ueber eine Kugelschar,* Journ., f. Math., 121, 1899), Le Vasseur (*Les système de sphères et l'espace non-euclidien à quatre dimensions* (Toulouse Bull., 11, 1899) e T. Reye (*Lehrsätze ueber lineare Mannigfaltigkeiten projettiver Kugelbüschel, Kugelbündel und Kugelgebüsche;* Ann, di mat. III, 5, 1900).

Sulla interessante teoria delle configurazioni negli iperspazi non possiamo che citare i seguenti scritti: H. W. Richemond, *On the figure of six points in space of four dimensions* (Quart. Journ., 31, 1899; Math. Ann., 53, 1900); J. A. Carp. *Combinatorische Configuraties in meerdimensionale ruimten* (Diss. Utrecht, 1902); C. F. Keyser, *Concerning certain 4-space quintic configurations of points ranges and congruences and their sphere analogous in ordinary space* (Amer. Journ., 27, 1905); W. B. Carver, *On the Cayleys-Veronese class of configurations* (Trans. Amer. M. S., 6, 1905), *Associated configurations of the Cayley-Veronese class* (Bull. Amer. M. S., 13, 1907) e *The quadric Spread connected with the Configuration* $\Gamma^{n+2}_{n+4,\,n}$ *and a special Case in the Pascal Hexagram* (Amer. Journ., 31, 1909); J. A. Barran, *Specielle Kummer'sche Konfigurationen in Masspolytop* (Wen. Ber., 117, 1909).

Chiuderemo questa fugace rassegna delle recenti investigazioni di indole algebrica sulle proprietà e le applicazioni degli iperspazi, citando i seguenti scritti di vario argomento: A. Giacomini, *Sulla corrispondenza fra la geometria conforme di* S_4 *e la geometria proiettiva dello spazio ordinario* (Pisa Ann., 8, 1899); E. Ascione, *Sul complesso di 1° ordine delle trisecanti di una superficie immersa in un* S_4 (Lincei Rend., V, 6, 1897_1) e *Sulle superficie immerse in un* S_4, *le cui trisecanti costituiscono complessi di 1° ordine* (Ivi); F. Severi, *Intorno ai punti doppi impropri d'una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni e a' suoi punti tripli apparenti* (Palermo Rend., 15, 1905); S. Kantor, *I numeri razionali in geometria* (Torino Atti, 36, 1901); J. Stringham, *On the geometry of plane in a parabolic* *space of four dimensions* (Trans. Amer. A. M. S., 2, 1901); L. O. Lovett, *Sur la géométrie à* n *dimensions* (Journ. de math., V, 7, 1901) e *Construction of the geometry of euclidian* n*-dimensional space by the theory of continuous groups* (Amer. Journ., 23, 1901); H. Schubert, *Ueber die Incidenz zweier linearen Räume beliebiger Dimension* (Math. Ann., 57, 1903) e *Gleichungen zwischen Bedingungen bei spezieller Lage linearen Räume* (Hamb. Mitt., 4, 1903); G. Marletta, *Sulla varietà di rette contenute in una o più forme algebriche* (Atti Acc. Gioenia, IV, 16, 1903); G. Bordiga, *Di un complesso di cerchi del quarto ordine* (Atti Ist. Ven., 63, 1904); F. Chizzoni, *Sugli spazi lineari contenuti in una varietà algebrica a più dimensioni* (Modena Mem., III, 5, 1905); G. Scorza, *Le varietà a curve sezioni ellittiche* Ann. III, 15, 1908), *Determinazione delle varietà a tre dmensioni di* S_r ($r \geq 7$) *i sui* S_3 *tangenti si tagliano a due a due* (Palermo Rend., 25, 1903), *Sulle varietà di Segre.* (Torino Atti, 45, 1910; se R_{p1}, R_{p2}, ..., R_{pn} sono spazi lineari di dimensioni p_1, p_2, ..., p_n e se $x_0^{(i)}$ $x_1^{(i)}$..., $x_{pi}^{(i)}$ sono le coordinate omogenee di un punto arbitrarie di R_{pi}; se si pone $X_{i_1 i_2 \ldots i_n} = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_n}^{(n)}$ e si considerano le X come coordinate omogenee di un punto di uno spazio a $(p_1 + 1) \ldots (p_n + 1) - 1$ dimensioni, le equazioni precedenti danno la rappresntazione parametriche di una delle varietà in questione) e *Alcune questioni sopra una varietà abeliana qualunque* (Atti Acc. Gioenia, V, II, 1918); F. Palatini, *Sulle varietà algebriche per le quali sono di dimensione minore dell'ordinaria, senza riempire lo spazio ambiente, uno o alcune delle varietà formate da spazi seganti* (Torino Atti, 44, 1909); G. Fano, *Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di spazi* (Ivi), *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali* (Ann. di mat., III, 24, 1915) e *Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni iperpiane collinari* (Lince Mem., VI, 2, 1926); G. Marletta, *Le superficie generali dell'*S_4 *dotate di due punti tripli apparenti* (Palermo Rend., 34, 1912); A. Terracini, *Sulle varietà* V_k *che rappresentano più di ½k (k-1) equazioni di Laplace linearmente indipendenti* (Palermo Rend., 33, 1912), *Sulle varietà di spazi con carattere di sviluppabili* (Torino Atti, 48, 1913) e *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà* (Id., 49, 1914, 50, 1915, 51, 1916, e 55, 1926); E. Brambilla (1893-1919) *Sulle pluritangenti di una superficie algebrica generale* (Ann. di mat., III, 25, 1916)); J. Eiesland, *Flatsphere Geometry* (Bull. A. M. S., 1916; Am. Journ., 40, 1918; Tohoku, 16 e 17, 1919-20); G. Bordiga, *Sul modello minimo della varietà delle* n*-ple ordinate dei punti di un piano* (Ann. di mat., III, 27, 1916); C. Segre, *Su alcune classi particolari di siste-*

mi continui di quadriche e sui rispettivi inviluppi (D'Ovidio Scritti 1918), *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese* (Lincei Rend., V, 30, 1921_1) e *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane e spaziali* (Torino Atti, 56, 1921 e 57, 1922); G. Aprile, *Di una ipersuperficie dell'*S_4 *d'ordine sei con infinite quadriche* (Giorn. di math., 54, 1916); T. C. Lewis, *General pentasperical-coordinates* (Mess. of. Math., 48, 1918); C. C. Hanumanta Rao, *On the Curves which lie on the quartic Surface in Space of four dimensions, and the corresponding Curves on the Cubic surface and the Quartic with a double cone* (Proc. L. M. S., II, 17, 1919); N. Spampinato, *Geometria delle cubiche piane* (Atti Acc. Gioenia, V, 12, 1919); C. Sadowski, *Un criterio d'equivalenza per le varietà* ∞^{p-1} *di una varietà* ∞^r *algebrica* (Pisa Ann., 13, 1919); E. G. Togliatti, *Sulle varietà a k dimensioni contenenti almeno* ∞^k *rette* (Torino Atti, 57, 1921), *Sulle varietà a tre dimensioni e di quart'ordine che sono luoghi di almeno* ∞^2 *rette* (Lincei Rend., V, 30, 1921_1) e *Sulle* V_3 *di* S_5 *con coincidenze di tangenti principali* (Atti Ist. Ven., 87, 1928; sviluppo di una ricerca iniziata da C. Segre, con ampia bibliografia); E. Bompiani, *Studi sugli spazi curvi* (Atti I. V., 80, 1921); F. P. White, *The projective Generation of Curves and Surfaces in Space of four Dimensions* (Proc. Cambridge P. S., 21, 1922); L. Godeaux, *Sur une famille de surfaces algébriques* (Bull. S. M. F., 52, 1924); Maria del Re, *Delle superficie dell'ordine* n *immerse nello spazio ad* n-1 *dimensioni* (Napoli Rend., II, 31, 1925); F. Knoll, *Ueber panalgebraischen Mannigfaltigkeiten* (Wiener Ber., 14, 134, 1925); B. Segre, *Le piramidi inscritte e circoscritte alle piramidi di* S_4 *e una notevole configurazione di rette dello spazio ordinario* (Lincei Mem., VI, 2, 1927); F. Morley, *On the Geometry whose Element is the 3-point of a plane* (Trans. A. M. S., 5, 1904; estensione di un procedimento indicato da S. Kantor nel 1883 nel Journ. f. Math.); F. Severi, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare* (Ann. di mat., III, 24, 1915).

23. Passando al campo differenziale (1), devono venire anzitutto citate le ricerche sulle curve in un iperspazio dovute a L. Berzolari (*Sugli invarianti differenziali delle curve di un iperspazio;* Ann. di mat., II, 26, 1897), E. Piccioli (*Sulle curve in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni;* Giorn. di mat., 36, 1898; cfr. la memoria del Brunel citata p. 266, e *Sur les dévéloppantes de certaines lignes en* S_n *et sur une pro-*

(1) Le principali formole relative vennero esposte con la consueta lucidità dal Bianchi nella trad. tedesca e nelle edizioni italiane a partire dalla III delle sue *Lezioni di geometria differenziale*.

priété caractéristique des courbes hypersphériques à courbure constante, Nouv. Ann., III, 19, 1900), E. O. Lovett (*A property of lines in n-dimensional space;* Amer. Journ., 22, 1900), E. Rath (*Zur Theorie der Krümmungen der Curven in n-dimensionalen nicht-euklidischen Raume*, Böklen Mitth., II, 2, 1900) e I. G. Hardy (*Curves of triples corvature;* Am. Journ., 24, 1902).

I metodi del calcolo differenziale assoluto (1) vennero estesi ed applicati agli spazi superiori dal Ricci stesso (v. le memorie *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, Lincei Mem., V, 2, 1896; *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura*, Lincei Rend., V, 11, 1902_1; *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare sulla varietà a tre dimensioni*, Id., 12, 1903_1; *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*, Atti Ist. Ven., 63, 1904; *Sui gruppi continui di movimenti rigidi negli iperspazi*, Rend. Acc. Lincei, V, 14, 1905_2, e *Sulle varietà a invarianti principali eguali* (Id., 33, 1924_2) e da alcuni suoi discepoli (R. Banal, *Di una classe di superficie a tre dimensioni a curvatura totale nulla*, Atti Ist. Ven., 54, 1895, *Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali*, Ann. di mat., II, 24, 1896, *Sugli spazi a curvatura costante*, Lincei Rend. V, 7, 1898_1; A. dell'Acqua, *Ricerche sulle congruenze di curve in una varietà qualunque a tre dimensioni*, Atti Ist. Ven., 59, 1899, *Sulla teoria delle congruenze di curve in una varietà qualunque a tre dimensioni*, Ann. di mat., III, 6, 1901; P. Cattaneo, *Sulle congruenze di linee in uno spazio piano a tre dimensioni*, Atti Ist. Ven., 61, 1902; A. Finzi, *Spazi normali a tre dimensioni con due curvature principali nulle*, Napoli Rend., III, 28, 1922). Veggasi poi: G. Vitali, *Sopra i sistemi di spazi lineari a ugual numero di dimensioni tangenti ad una varietà data, lungo una curva in essa immersa* (Atti Ist. Ven., 86, 1927); B. Segre, *Les systèmes conjugués et auto-conjugués d'espèce 2 et leur transformation de Laplace* (Ann. Ec. Norm., III, 44, 1927) e *Les systèmes conjugués de 2ª espèce en involution ou grilles* (Toulouse Ann., 1928).

D'altra parte gli eleganti procedimenti, che il Cesàro applicò nella sua *Geometria intrinseca* alle figure del nostro spazio, vennero da lui adattati agli spazi superiori (v. speciamente i lavori *Geometria intrinseca negli spazi di curvatura costante*, Lincei Rend., V, 13, 1904_1 e *Nuova teoria intrinseca degli spazi curvi*, Lincei Mem., V, 5, 1906).

24. Ispirandosi alle idee fondamentali di S. Lie, il Bianchi scrisse un importante lavoro *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo*

(1) Ricordiamo le più recenti esposizioni di esso: J. A. Schouten, *Der Ricci-Kalkül* (Berlin 1924); T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (Roma 1925).

continuo di movimenti (Mem. Soc. XL, III, 11, 1897; cfr. S. C. Davisson, *Ueber die geodätische Linien der Mannigfaltigkeit* $ds^2 = dx^2 + \sin^2 x.\ dy^2 + dz^2$, Diss. Tübingen, 1900); lo seguirono C. Rimini (*Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo a quattro parametri di movimenti*, Pisa Ann., 9, 1904), G. Ricci (*Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni*, Mem. Soc. XL, III, 12, 1899; *Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque à trois dimensions*, C. R., 127, 1898; *Sur les groupes continus de mouvements d'une variété delconque*, Ivi,) e G. Fubini (*Sugli spazi che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, Ann. di mat., III, 8, 1902; *Sugli spazi a quattro dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, Id., 9, 1903). Si connettono a questi lavori, in quanto essi rampollano dalle idee di Lie, questi altri: G. Kowaleski, *Ueber eine Kategorie von Transformationsgruppen einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit* Leipz. Ber., 50, 1898); A. Bemporad, *Sui gruppi di movimenti e similitudini nello spazio a 3, 4, e 5 dimensioni* (Pisa Ann., 8, 1899); L. Bianchi, *Sui gruppi continui finiti di trasformazioni che conservano le aree od i volumi* (Torino Atti, 38, 1903), *Sui gruppi continui di trasformazioni proporzionali* (Ivi; sono le trasformazioni tali che è costante il rapporto di due aree o volumi corrispondenti qualunque) e *Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni* (Mem. Sec. XL, III, 13, 1902); G .Fubini, *Sulla teoria degli spazi che ammettono un gruppo conforme* (Ivi), *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche* (Torino Mem., II, 53, 1903; si tratta dei gruppi di trasformazioni che mutano le geodetiche in geodetiche, cfr. A. Boulanger, *Sur les géodésiques des variétés à trois dimensions*, C. R., 136, 1903), *Sulla teoria delle ipersfere e dei gruppi conformi in una metrica qualunque* (Rend. Ist. Lomb. II, 38, 1905) e *Nuove ricerche intorno ad alcune classi di gruppi discontinui* (Palermo Rend., 21, 1906); E. E. Levi, *Sui gruppi transitivi dello spazio ad* n *dimensioni* (Lincei Rend., V, 14, 1905_2); G. Ricci, *Sui gruppi continui di movimenti* (Ivi).

25. Le eleganti considerazioni cinematiche adoperate dal Darboux nella sua grande opera furono estese agli spazi superiori da T. Craig (*Displacements depending on one, two and three parameters in a space of four dimensions;* Amer. Journ., 20, 1898) e N. J. Hatzidakis (*Sur les équations cinématiques des variétés dans l'espace à* n *dimensons;* C. R., 130, 1900; e *Displacements depending on one, two, ..., k parameters in a space of* n *dimensions*, Amer. Journ., 22, 1900), mentre le soluzioni di altre questioni meccaniche concernenti gli spazi superiori vennero insegnate da G. Land-

sberg (*Ueber den Zusammhang der Krümmungstheorie der Curven mit der Mechanick starrer Systeme des* n*-dimensionalen Raumes;* Journ. f. Math., 118, 1897), E. Jahnke (1863-1921) (*Ueber Drehungen im vierdimensionalen Raum;* Deutsch. Math.-Ver., 11, 1902), P. Stäckel (*De ea mechanicae analiticae parte quae ad varietates complurium dimensionum spectat,* nel vol. *Ioannis Bolyai in memoriam,* 1902) e G. Tiercy, *Sur les éléments immobiles dans une rotation dans l'espace à* n *dimensions* (Enseign., 25, 1926).

L'essere due spazi comunque estesi, aventi la medesima curvatura costante, applicabili uno all'altro fu dimostrato da L. Bianchi (*Sull'applicabilità di due spazi colla medesima curvatura di Riemann costante;* Lincei Rend., V, 7, 1898_2), mentre altre questioni di deformazione si leggono in lavoro di G. Fubini (*Sulle deformazioni infinitesime delle superficie negli spazi a curvatura costante;* Lincei Rend., V, 8, 1899_1).

Dei sistemi n-pli ortogonali di S_n si occuparono con successo J. Drach (*Sur les systèmes complètement orthogonaux dans l'espace à* n*-dimensions et sur la réduction des systèmes différentiels les plus généraux,* C. R., 125, 1897), G. Ricci (*Sur les systèmes complètement orthogonaux dans un espace quelconque,* Ivi), A. Pellet (*Sur les systèmes orthogonaux,* Id., 128, 1899; *Mémoire sur les systèmes orthogonaux,* Toulouse Ann. II, 2, 1900), G. Darboux (*Sur l'application du théorème fondamental d'Abel rélatif aux intégraux algébriques à la recherche de systèmes complètement orthogonaux dans un espace à* n*-dimensions;* Acta, 26, 1902); C. Guichard (*Sur les systèmes triplement indéterminès et sur les systèmes triples orthogonaux,* Paris, 1905); J. Drach, *Sur les systèmes completement orthogonaux de l'espace euclidien à* n *dimensions* (Bull. S. M. F., 36, 1908); L. Bianchi, *Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi* n-pli *ortogonali e il teorema generale di permutabilità* (Ann. di mat., III, 27, 1918).

In particolare dei sistemi «ciclici» (tali, cioè, che ognuno consta di ∞^{n-1} circoli normali ad ∞^1 ipersuperficie; cfr. Darboux, *Systèmes orthog.,* T. I. p. 181) si occupò U. Sbrana (*I sistemi ciclici dello spazio euclideo ad* n *dimensioni;* Palermo Rend., 19, 1905, e *Sui sistemi ciclici,* Id., 21, 1906), mentre della curvatura (vedi p. 264) trattò H. Maschke (*The Kronecker-Gaussian curvature of hyperspace;* Trans. Amer. M. S., 7, 1906).

Di grande importanza si manifestò un concetto del tutto nuovo stabilito da T. Levi Civita nella memoria *Nozioni di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana,* Palermo Rend., 42, 1917; cfr. L. Bianchi, *Sul parallelismo vincolato di Levi-Civita nella metrica degli spazi curvi,* Napoli Rend., III, 28, 1922).

La generalizzazione di teoremi fondamentali della teoria della curvatura delle superficie venne studiata da L. Berzolari (*Una osservazione sull'estensione dei teoremi di Eulero e Meusnier agli iperspazi*, Lincei Rend., V, 6, 1897_2; *Ancora sull'estensione dei teoremi di Eulero e Meusnier agli iperspazi*, Id., 7, 1898_1; *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque*, Torino Atti, 33, 1898), E. Bompiani (*Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier ed Eulero*, Torino Atti, 48, 1913) e F. Severi (*Sulla curvatura delle superficie e varietà*, Palermo Rend., 42, 1917).

Altre questioni di varia specie (in metriche anche non euclidee) trovansi trattate in un gruppo di lavori che citiamo come chiusa: K. Kommerell, *Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde in ebenen Raum von vier Dimensionen* (Diss. Tübingen, 1897), e *Riemann'sche Flächen in ebenen Raum von vier Dimensionen* (Math. Ann., 60, 1905); A. Buchholz, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Mannigfaltigkeiten deren Linienlemente auf die Form* $ds^2 = f\left(\sqrt{\Sigma\, d\, X_k^2}\right) \cdot \Sigma\, X_k^2$ *gebracht werden kann* (Bonn., 18989); E. Cotton, *Sur la représentation conforme des variétés à trois dimensions* (C. R., ;127, 1898) e *Sur les variétés à trois dimensions* (Toulouse Ann., II, 1, 1899); H. Kühne, *Ueber Striktionen* (Math. Ann., 54, 1901), *Die Grundgleichungen einer beliebigen Mannigfaltigkeit* (Archiv. f. Math., III, 4, 1903) e *Ueber die Krümmung einer beliebigen Mannigfaltigkeit* (Id., 6, 1905); G. O. James, *Some differential equations connected with hypersurfaces* (Amer. Journ., 24, 1903); E. Merlin, *Sur une famille de réseaux conjugués à une même congruence* (C. R., 142, 1906); U. Sbrana, *Sulla deformazione infinitesima delle ipersuperficie* (Ann. di mat., III, 15, 1908) e *Sulle varietà ad* n-1 *dimensioni nello spazio euclideo ad* n *dimensioni* (Palermo Rend., 27, 1909); W. Fr. Meyer, *Ausdehnung der Frenetschen Formeln und verwandter auf den* R_n (Deutsch. M. V., 19, 1910); C. L. E. Moore, *Infinitesimal Properties of Lines in* S_4, *with Applications to Circles in* S_2 (Proc. Amer. Acad., 46, 1911); C. Guichard, *Etude des propriétés métriques des courbes dans un espace d'ordre quelconque* (Bull. Sc. math., II, 36, 1912); L. P. Eisenhart, *Minimal surfaces in Euclidean four-space* (Amer. Journ., 34, 1912); H. Mohrmann, *Ueber die Hauptangentenkurven auf den Netzflächen* (Math. Ann., 73, 1913); A. Ranum, *On the differential Geometry of Ruled surfaces in 4-space and cyclic Surfaces in 3-space* (Trans. A. M. S., 16, 1915); L. E. Moore, *Translations surfaces in Hyperspace* (Bull. A. M. S., 25, 1918); H. Vermeil, *Bestimmung der quadratischen Differentialform aus der Riemanschen und den Christoffelschen Differentiaalinvariante mit Hilfe von Normalkoordinaten* (Math. Ann., 79, 1918); E.

Cartan, *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien* (Bull. S. M. F., 47, 1919, e 48, 1920); T. Boggio, *Geometria assoluta degli spazi curvi* (Lincei Rend., V, 24, 1919_1) e *Sulla geometria assoluta degli spazi curvi* (Torino Atti, 54, 1919); A. Carpanese, *Parallelismo e curvatura in una varietà qualunque* (Ann. di mat., III, 28, 1919); W. Blaschke, *Frenets Formeln für den Raum von Riemann* (Math. Zei., 6, 1920); P. Calapso, *Sulle trasformazioni dei sistemi di linee conjugati ed ortogonali nello spazio* S_n (Ann. di mat., III, 30, 1921); H. Weyl, *Zur Infinitesimalgeometrie* p*-dimensionalen Fläche in* n*-dimensionalen Raum* (Mat. Zeit., 12, 1922); E. Bompiani, *Determinazione delle ipersuperficie che ammettono rappresentazioni geodetiche* (Ann. di mat., III, 31, 1922); S. Calapso, *Sulle congruenze cicliche* (Id., IV, 2, 1925); C. H. Sisam, *On the three-spread satisfying four or more homogeneous linear partial Differential Equations of the second Order* (Amer. Journ., 33, 1911).

26. - Alcuni dei risultati contenuti nella letteratura iperspaziale sinora analizzata — al pari di quelli esposti nelle memorie C. Segre, *Su una classe di superficie degli iperspazi legata colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* (Torino Atti, 42, 1907) e E. E. Levi, *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio* (Pisa Ann., 10, 1908) — appartengono alla geometria differenziale projettiva; di essi rende conto il rapporto dal titolo *Recenti progressi nella geometria projettiva differenziale degli iperspazi* (Proc. Congr. Cambridge 1912) di E. Bompiani. In prosieguo di tempo la geometria projettiva differenziale ha assunto l'attitudine di disciplina autonoma, come è attestata dal volume di D. J. Struyk, *Gründzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung* (Berlij, 1922) e dal Cap. XII dell'opera già citata di Fubini e Cech. La collezione di ricerche ad essa relative va aumentando di giorno in giorno con esito oltremodo confortante; limitiamoci a ricordarne alcuni elementi: E. Cartan, *La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à* n *dimensions* (Bull. S. M. F., 44, 1916), *La déformation des hypersurfaces dans l'espaces réel à* $n>5$ *dimensions* (Id., 45, 1917) e *Sur certaines hypersurfaces de l'espace conforme réel à cinq dimensions* (Ivi); A. L. Miller, *System of Pencils of Lines in ordinary Space* (Amer. Journ., 40, 1918); E. Bompiani, *Alcune proprietà projettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi* (Palermo Rend., 37, 1914), *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie* (Lincei Rend., V, 29, 1920_1), *Le trasfomazioni puntuali fra varietà che conservano il parallelismo di Levi-Civita* (Ivi), *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici*

(Lincei Mem., V, 13, 1921, *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi* (Palermo Rend., 46, 1922) e *Spazi riemanniani luoghi di varietà totalmente algebriche* (Palermo Rend., 48, 1924); G. Fubini, *Geometria projettivo-differenziale di una superficie* V_2 *nello spazio* S_4 (Math. Ann., 85, 1922) e *Sulle varietà a sezioni piane collineari* (Lincei Rend., VI, 1925); L. Berwald, *Zur Geometrie einer* n*-dimensionalne euklidischen Raum* (Deutsch. M. V., 31, 1922), e *Die Grundgleichungen der Hyperflächen im Euklidischen* R_{n+1} *gegenüber der inhaltstreuen Affinität* (Monatshefte, 32, 1922) e *Ueber Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Massebestimmung* (Deutschen M. V., 34, 1925); J. A. Schouten, *Ueber die Einordnung der Affingeometrie in der höheren Uebertragungen* (Mat. Zeit., 16, 1923), *Ueber die konforme Abbildung* n*-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massebestimmung* (Id., II, 1921) e *Ueber die verschiedenen Arten der Ubertragung in einer* n*-dimensionalen Manigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können* (Id., 13, 1922); J. Lalan, *Sur les propriétés infinitésimales projéctives des variétés à trois dimensions* (Journ. de math., IX, 2, 1923); E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité générale* (Ann. Ecc. norm., III, 40-42, 1923-25) e *Sur les variétés à connéxion projective* (Bull. S. M. F., 52, 1924); Enea Bortolotti, *Parallelismo assoluto e vincolato negli* S_3 *a curvatura costante ed estensione alle* V_3 *qualunque* (Atti Ist. Ven., XI, 8, 1923-24); V. Hlavaty, *Sur les courbes quasiasymptotiques* (Huygens, 3, 1924); E. Vessiot, *Contribution à la géométrie conforme* (Journ. Ec. Pol. II, 25, 1925); D. J. Struik, *On the geometry of linear displacement* (Bull. A. M. S., 33, 1927); A. Terracini, *Sulla geometrie projettiva differenziale delle ipersuperficie* (Lincei Rend., VI, 6, 1927_1); A. Kawaguchi, *Ueber projektive Differentialgeometrie dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten in vierdimensiolanel Raume* (Japan. Journ. of Mathem., 4, 1927); T. Takasura, *Differentialkugelgeometrie* (Rep. Tôhokn Imp. Univ., I, 18, 1928).

27. I recenti studi sopra le equazioni integrali portarono a sistemi di equazioni lineari con infinite incognite e alla considerazione di funzioni con infinite variabili. Da ciò l'idea di un'ulteriore estensione della nozione di spazio superiore sì da abbracciare gli spazi con infinite dimensioni. Investigazioni in tale senso furono fatte da M. Fréchet (*Essai de géométrie analytique à une infinité de cordonnées*, Nouv. Ann., IV, 8, 1908), F. Hjemslev (*Sullo spazio a infinite dimensioni*, in danese, Zeuthen Fest., 1909: ivi si definisce uno spazio a p dimensioni come quello tale che da un suo punto

si spiccano p direzioni a coppie ortogonali) e L. Ingold (*Functional differential Geometry*, Trans. A. M. S., 13, 1902). Con intenti più geometrici lo stesso tema fu affrontato da G. Marletta — a cui devesi il nome di *ultraspazio* — (*Saggio di geometria ad infinite dimensioni*, Atti Acc. Gioenia, V, 9, 1917; *Preliminari di geometria projettiva ad infinite dimensioni*, Atti Ist. Ven., 76, 1917; *Geometria ad infinite dimensioni*, Boll. un. mat. ital., 4, 1925). Ma alcune difficoltà che ancora debbonsi sormontare (1) (p. es. la determinazione di una definizione di distanza applicabile a qualunque coppia di punti) mostra che non fu ancora detta l'ultima parola sull'interessante soggetto. Intanto G. Vitali ha iniziato e portato innanzi con alcuni suoi discepoli (fra cui G. Aliprandi) lo studio degli spazi di cui ogni punto è determinato da infiniti numeri n_1, n_2, ... tali che le serie n_1^2, n_2^2, ... risulti convergente; le relative ricerche sono esposte metodicamente nel suo volume *Geometria nello spazio* Hilbertiano (Bologna, 1930).

§ 12. Altre ricerche. Conclusione.

28. Ci rimane da dir qualche cosa sopra alcune altre indagini che non possono entrare in alcuna delle categorie di studi che finora esaminammo.

Un'inattesa relazione fra il calcolo logico e la geometria di posizione venne scoperta dal Kempe (*On the relation between the logical theory of classes and the geometrical theory of points*, Proc. L. M. S., 21, 1890; cfr. Schröder, *Vorl. ueber die Algebra der Logik*, II Bd., II Abth., Leipzig, 1905; Anhang, 8).

Le considerazioni cinematiche, che vedemmo sfruttate in tante occasioni per risolvere questioni di geometria infinitesimale seguendo l'esempio del Mannheim, vennero applicate alla geometria descrittiva da J. Petersen nella Diss. *Grundprinciper for den infinitesimal Descriptivgeometri, med Anvendelse paa Laeren on variable Figuren* (Kjobenhavn Ofv., 1897) e ad altre questioni da C. Rodenberg (*Ueber Raumkurven, welche sich vermöge der Rollbewegung zweir krummen Fläche oder Polyeder aufeinander entsprechen, und mit ihnen verkuüpften Frangen* (Arch. Math. Phys., III, 14, 1909).

Dell'indirizzo dato dal compianto E. Müller alla geometria descrittiva, è agevole prendere notizia grazie alle sue *Vorlesungen über darstellenden*

(1) Cfr. N. Spampinato, *Geometria analitica degli ultraspazi projettivi* e *Geometria analitica degli ultraspazi metrici ampliati* (Note e Mem., 2, 1934).

Geometrie, di cui furono pubblicati due volumi (Leipzig und Wien,. 1923 e 1929 (1).

La rappresentazione delle forme binarie sui gruppi di punti di una conica (cfr. G. Loria, *Geometrischer Beweis der bekanntesten Eigenschften einer binären cubischen Form;* Zeitschr. f. Math., 29, 1884), venne nuovamente applicata da F. Morley (*A construction by the ruler alone of a point covariant with five given points*, Math, Ann.. 49, 1897; *Some polar constructions*, Id., 51, 1897) e da F. Lindemann (*Binäre kubische Formen und Dreiecksgeometrie in der komplexen Ebene*, Münch. Ber., 1919).

29. La geometria elementare, i cui fondamenti furono, come vedemmo, analizzati con la più minuziosa cura da coloro che procedettero lungo la via aperta da Gauss, Lobatschewski e Bolyai, venne esaminata anche in altre sue parti al lume dei concetti e dei metodi moderni; a stabilire l'importanza di tale orientazione del pensiero geometrico citiamo l'articolo di E. Study, *Die Begriffe Links, Rechts, Windungsinn und Drehungssinn* (Arch. Math. Phys., III, 21, 1913). A conferma ricorderemo, oltre a ben noti volumi di F. Klein (*Vorträge ueber ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, Leipzig, 1905; già tradotto in italiano, francese ed inglese, e *Elementar-Mathematik vom höheren Standpunk aus*, III, Aufl., Berlin, 1924-25) e F. Enriques (*Questioni riguardanti le matematiche elementari;* III ed. *Bologna*, 1927), le ricerche di C .Stéphanos (*Sur les rélations qui existent entre les problèmes de la trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes binaires biquadratiques;* Bull. S. M. F., 10, 1882), F. Klein (*Ueber die hypergeometrische Funktion*, autogr. Vorlesungen, 1894, p. 285-357), E. Study, (cfr. p. 284, e inoltre: *Some researches in spherical trigonometry*, Chicago Papers, 1896; *Das Apollonische Problem*, Math. Ann., 49, 1897; *Mathematische Mittheilungen;* I. *Ueber das Pascal'sche Sechseck*, Leipz. Ber., 1895) e Fr. Meyer (*Der Resultantenbegriff in der sphärischen Trigonometrie*, Journ. f. Math., 115, 1895; *Die Resultantebildungen der Trigonometrie*, Deutsch. L. Math.-Ver., 4, 1894-95; *Ueber volle Systeme in der ebene Trigonometrie*, Id., 5, 1896); *Ueber den Ptolemäischen Zatz*, Archiv., III, 7, 1904-05), ove teorie elevate vengono abilmente utilizzate per lumeggiare umili soggetti.

La medesima tendenza è visibile in alcuni fra i molti contributi recenti alla geometria del triangolo (1), contributi che appunto per ciò giova qui

(1) Cfr. A. Comessatti, *Considerazioni intorno ai metodi generali di rappresentazione della geometria descrittiva, ed al teorema di Pohlke* (Atti Ist. Ven., 87, 1928).

(2) Cfr. J. Neuberg, *Note* III, *Sur la géométrie récente du triangle* in Rouché e de Comberousse, *Traité de géométrie*, VII ed., T. I (Paris, 1900).

menzionare: E. Cesàro, *Sulle radici dell'Hessiana d'una cubica in relazione con quelle della cubica stessa* (Giorn. di mat., 39, 1901; è ivi applicata, seguendo l'esempio del Beltrami, la nota rappresentazione geometrica dei numeri complessi); F. Caspary, *Zur neuen Dreiecksgeometrie* (Arch. f. Math., III, 1, 1901; in questo articolo, come nei due seguenti, sono applicati i metodi di Grassmann); L. Ripert, *Sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle* (Ivi); E. Jahnke, *Konstruktion gewisser Punkte an der Dreiecksgeometrie* (Journ. f. Math., 123, 1901); J. Schick, *Beziehung zwischen Isogonalcentrik und Invariantentheorie* (München. Ber., 30, 1900, applicazione delle *Grundlagen iner Isogonalcentrik*, Tübigen, 1887 del medesimo autore) *Barytomik* (München, 1907) e *Isomorphopolizentryk* (München, 1910); W. Gallatley, *The modern Geometry of Triangles* (II. ed., London, 1910). Inoltre l'articolo di G. Barkham e W. Fr. Meyer, *Neuere Dreiecksgeometrie* nella Encykl. math. e la *Bibliographie du triangle et du tétraèdro*, pubblicata da J. Neubrg (1840-1926) a partire dal 1922, nel periodico Mathésis. Vanno ancora citati i seguenti scritti: J. G. Hun, *On certain invariants of two triangles* (Trans. Amer. M. S., V, 1904); E. Wälsch, *Binäranalyse zur Geometrie des Dreiecks* (Monatshefte, 16, 1905); G. Berkhan, *Zur proiektivisehen Behandlung der Dreiecksgeometrie* (Archiv., III, 6, 1906); C. H. Racolins jr. *Complete Systems of Concomitants of the three -point and of four-point in elementary Geometry* (Amer. Journ., 40, 1918); H. Wolf, *Ueber die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der ebenen Dreiecke mit reellen Seiten* (Journ. f. Math., 153, 1923); S. Breuer, *Zur Dreiecksgeometrie* (Deutsch. M. V., 32, 1923). A. Oppermann, con l'opuscolo *Premiers éléments d'une théorie du quadrilatère complet* (Paris, 1919), ha mostrato che anche questa figura possiede proprietà non meno eleganti di quelle di cui gode il triangolo piano.

Siaci lecito segnalare qui il primo periodo di vita di una geometria del tetraedro analoga alla geometria del triangolo (v. E. Hellwig, *Die Tetraedrometrie und Trigonometrie, oder Darstellung der Eingenschaften des Tetraeders mit Berücksichtigung der entsprechenden Verhältnisse am Dreieck*, Erfurt, 1872; J. Neuberg, *Mémoire sur le tétraèdre* (Belgique Mém., 45, 1884), *Ueber drei Sähze von Dr. P. Zeeman* (Arch. f. Math., III, 11, 1906), e *Zur Tetraedengeometrie*, Arch. Math. Phys., III, 16, 1910); E. Rouchè e C. de Comberousse, *Traité de géométrie*, VII ed., Paris, 1900, T. II, Nota IV; Fr. Meyer, *Ueber Grundzügen einer Theorie des Tetraeders* (Verh. III, Math. Kongr., 1904) e *Ueber die Höhen des Tetraeders* (Arch. f. Math., III, 8, 1904); V. Eberhard, *Ein Beitrag zur Tetraederlehre* (Monatshefte, 17, 1906).

Alla parte più elementare della geometria appartengono pure l'opuscolo di E. Eckardt, *Zurückführung der sphärischen Trigonometrie auf die Geometrie des ebenen Kreisvierecks* (Leipzig, 1900) e così dicasi dei seguenti lavori che vanno collocati fra quelli dei commentatori di Steiner: R. Sturm, *Maxima unr Minima in der elementaren Geometrie* (Leipzig, 1910), *Ueber das grösste Tetraeder, wenn die Inhalte der Fläche gegeben ist* (Journ. f. Math., 152, 1922) e *Zwei Minimalprobleme* (Ivi); K. Rohn, *Ueber das Malfattische Problem* (Leipzig. Ber., 62, 1910).

30. A queste notizie concernenti la storia recente della geometria elementare, giova aggiungerne altre a conferma dell'essere i più cospicui progressi compiuti da questo ramo di scienza dovuti all'applicazione di considerazioni e metodi appartenenti alle matematiche superiori. Ricordisi perciò che, seguendo i principii posti, od almeno costantemente osservati da Euclide, una costruzione geometrica è legittima soltanto quando sia eseguibile teoricamente mediante rette e circoli, praticamente col solo uso di riga e compasso; essa è tanto più semplice quanto minore è il numero di linee che esige ed è tanto più esatta quanto maggiormente predomina in essa il cerchio sulla retta. Donde la ragion d'essere della *Geometria del compasso* di L. Mascheroni (cfr. p. 10) (1); donde l'idea, già balenata alla mente di Steiner (*Ges. Verke*, I, p. 510), di istituire un paragone fra le varie soluzioni di uno stesso problema per decidere quale sia la più conveniente, in parte svolta da Chr. Wiener (1826-1895) (2) nella nota *Ueber die möglichstgenaue mechanische Rektification eines verzeichneten Kurvenbogen* (Zeitschr. f. Math., 16, 1871) e poi nel suo esteso *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Leipzig, 1884) ed alla quale E. Lemoine (1840-1912) (3) (senza conoscere i suoi predecessori) a partire dal 1888, dedicò tanta attività. I principali risultati da questo conseguiti trovans compendiati nel volumetto *Géométrographie ou art des constructions géométriques* (Paris, 1902) (4).

---

(1) Del Mascheroni fu ai di nostri scoperto un precursore in G. Mohr, grazie all'opuscolo intitolato *Euclides Danicus* (Amsterdam, 1672, testè ristampato con traduzione tedesca (Kopenhagen, 1928). Sello stesso ordine di idee vanno ricordati: G. Cesàro, *Les problémes de géométrie résolues par le compas, sans le règle* (Liége, Mem., III, 1, 1899); L. Gérard, *Construction du polygone régulier de 17 côtés au moyen du seul compas* (Math. Ann., 48, 1896); Guttulsow, *Mascheroni'sche Constructionen* (Progr. Scherin, 1898).

(2) Cfr. la necrologia scrittane da A. Brill e L. Sohnke in Deutsch. Math. Ver. 6, 1899.

(3) C. A. Lovisant, *Emile Lemoine* (Enseign. math., 14, 1912.

(4) V. anche gli articoli dello stesso autore, *Le rapport auharmonique étudié au point de vue de la géométrographie. Application de la géométrographie à la géométrie déscriptive* (Ass. fr. Caen, 1894) e *La géométrographie dans l'espace ou stéréometrographie* (C. R., 131, 1900), nonchè la nota IV *Sur la géométrographie* nel succitato *Traité de géométrie* di Rouché et de Comberousse: inoltre due scritti di L. Godeaux, *Application des méthodes géométrographiques*

Ma la questione dell'esattezza dei disegni geometrici si può anche considerare da un altro punto di vista, *quantitativamente* invece che *qualitativamente*, cioè applicandovi la teoria degli errori di osservazione, idea che può farsi risalire ai lavori di R. Côtes e Chr. von Wolf (1679-1754) e della quale esistono traccie anche in Lambert. Le ricerche in tale direzione vennero di recente riprese da P. Geuer nel lavoro *Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen behandelt nach dem Gauss'schen Ausgleichungsverfahren, wonach die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird* (Progr. Durlach, 1902), applicando le idee di Gauss (1). Con criteri totalmente differenti la stessa questione trovasi trattata nella Diss. di P. Böhner, *Ueber geometrische Approximationen* (Göttingen, 1904), ispirata ai concetti svolti da F. Klein nel suo corso nell'anno 1901 (cfr. *Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie*, Leipzig, 1901). Una terza risoluzione della stessa questione trovasi nella Diss. di K. Nitz, *Anwendung der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal* (Königsberg, 1905),ove trovansi abilmente sfruttati i principii posti da A. Bravais (1811-1863) nella sua *Analyse mathématique sur la probabilité des erreurs de situation d'un point* (Sav. étr., 9, 1846); al lettore desideroso di più minuti ragguagli sulla questione, consigliamo la lettura dei recenti pregevoli *Beiträge zu eine Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen* (Zeitschr. f. Math., 53, 1903) dello stesso Nitz e dell'articolo di G. Loria, *La geometrografia e le sue trasformazioni. Pagine di storia contemporanea* (Per. mat., III, 6, 1908).

31. I metodi vettoriali (2) (sui quali l'attenzione degli studiosi fu nuovamente attratta dalla pubblicazione delle opere complete di Grassmann), vennero coltivati con ardore da non molti ma valenti scienziati (3), i quali per aumentare il numero dei discepoli di Wessel e Bellavitis, Hamilton e Grassmann, fondarono un'Associazione destinata appunto a promuovere le

---

au tracé mécaniques des courbes planes e *Sur la géometrographie des courbes planes* (Ens., 8, 1906) e l'ultimo Cap. della *Theorie der geometrischen Konstruktionen* di A. Adler (Leipzig, 1906).

(1) Per porgere ai lettori un'idea dei risultati così ottenuti segnaliamo la prima dimostrazione del seguente teorema empirico di Chr. Wiener: «Volendo bisecare un segmento rettilineo con la massima esattezza, si scelgano come raggi dei cerchi ausiliari, le cui intersezioni individuano la retta ausiliare che guida allo scopo, una lunghezza di poco maggiore della metà del segmento da bisecare».

(2) Ad essi sono consacrati due articoli dell'*Encikl. math.*, uno di H. Rothe e l'altro di A. Lotze e C. Betsch.

(3) Per la storia del periodo anteriore a quello di cui ci occupiamo si vegga: V. Schlegel, *Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzehn Jatren* (Zeitschr. f. Math., Hist.-lit. Abt., 41, 1896).

ricerche vettoriali (1), ma ebbe vita effimera; il più palese risultato che essa diede, sta in una ricca bibliografia dei relativi lavori (2); ad essa noi rimandiamo i lettori desiderosi di ulteriori informazioni su tale soggetto e ci limitiamo a ricordare quei lavori che arrecarono qualche modificazione e semplificazione nei fondamenti delle relative teorie o ne additarono nuove applicazioni: P. Molenbroek, *Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie* (Leiden, 1893); F. Kraft, *Aequivalenz der Linienteilsystem* (Zeitschr. f. Math., 39, 1894); E. W. Hyde, *The screw as a unit in a Grassmanian system of the sixt order* (Ann. of. math., 8, 1894), *An analogue to de Moivre's theorem in a plane point system* (Id., 21, 1897), *Loci of the equations* $u = \varphi^u e$ $p = \varphi^u \Psi^v$ e (Zeitschr. f. Math., 42 1897) e *Grassmann's space alysis* (IV ed., New York, 1906); C. J. Joly, *The theory of linear vector functions* (Dublin Trans., 30, 1895); E. Müller, *Anwendung der Grassmann'schen Methoden auf die Theorie der Curven und Flächen zweiten Grades* (Journ. f. Math., 115, 1895), *Die Geometrie der Punktpaare und Kreise im Raume nach Grassmann'schen Principien* (Monatshefte, 7, 1898); *Ueber dar gemischte Product* (Math. Ann., 48, 1897) e *Die Geometrie orientierter Kugeln nach Grassmann's Methoden* (Monatshefte, 9, 1898); G. Peano, *Saggio di calcolo geometrico* (Torino Atti, 31, 1896), *Trasformazioni lineari dei vettori di un piano* (Ivi) e *Analisi della teoria dei vettori* (Id., 33, 1898); C. Burali-Forti, *Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva* (Palermo Rend., 10, 1896; 11, 1897; 15, 1901), *Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann* (Paris, 1897), *Sopra alcune questioni di geometria differenziale* (Id., 12, 1898), *Sopra alcuni punti singolari delle curve piane e gobbe* (Torino Atti, 36, 1901), *Le formole di Frenet per superfici* (Id., 37, 1902), *Applicazioni del metodo di Grassmann* (Mat. pure e applic., 1, 1901) e *Lezioni di geometria metrico-proiettiva* (Torino, 1903); F. Graefe, *Strecke-und Punktrechnung, insbesondere die Rechnung mit parallelen Strecken* (Archiv. f. Math., II, 15, 1896); G. Fonténé, *Géométrie dirigée* (Paris, 1897); E. Lasker, *An essay on the geometrical calculus* (Proc. L. M. S., 28, 1897); J. B. Schaw, *Developement of the A-process in quaternions, with a geometrical application* (Amer. Journ., 19, 1897); G. Nédélec, *Le calcul vectoriel et ses applications en géométrie et en mécanique*, 1 (Paris, 1897); G. Ferraris (1847-1897) (3), *Teoria geometrica dei*

(1) Cfr. *Boll. bibliogr. e storia*, 2, 1899, p. 111; 5, 1902, 38, ecc.

(2) *Bibliography of quaternions and allied systems of mathematics* (Dublin, 1904). Alcune aggiunte vennero indicate da K. E. Kawkes nel *Bull. Amer. M. S.*, II, 13, 1906, p. 30-32

(3) A. Naccari, *Commemorazione di Galileo Ferraris* (Torino Mem., II, 47, 1897).

campi vettoriali come introduzione allo studio della elettricità, del magnetismo, ecc. (Torino Mem., II, 47, 1897); G. Combébiac (1862-1912), *Sur l'application du calcul des biquaternions à la géométrie plane* (Bull. S. M. F., 26, 1898) e *Calcul des triquaternions* (Journ. Ec. pol., II, 7, 1902); E. Rudert, *Grundlagen zu einer Geometrie der Kugel nach Grassmann's Ausdehnungslehre* (Progr. Leipzig, 1899) e *Ueber kleine Kugelkreise. Eine Anwendung von Grassmann's Ausdehnungslehre* (Diss. Leipzig, 1900); E. Study, *Die Hauptsätze der Quaternionentheorie* (Naturf. Ges. f. Neuvorpommern und Rügen, 1899); F. Caspary, *Applications des méthodes de Grassmann; vecteurs dans le plan; définitions, propriétés* (Nouv. Ann., III, 18, 1899) e *Sur le centre de gravité d'un quadrilatère* (Bull. S. M. F., 28, 1900); H. Fehr, *Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitésimale* (Thèse, Paris, 1899); H. Valentiner, *Application de la théorie des quaternions de Caspar Wessel à la démonstration d'un théorème connu* (Kjöb. Overs., 1900); R. Bricard, *Sur la similitude directe dans le plan; application de la méthode des equipollences;* Nouv. Ann., IV, 1, 1901); A. Macfarlane, *Application of space analysis to curvilinear coordinates* (C. R. du II Congrés int., 1900); J. Lüroth, *Zwei Beispiele für die Ableitung des wahren aus den scheinbaren Gestalt ines Körpers* (Freiburg Festschrift, 1902; è ivi dimostrato essere una quadrica ogni superficie di cui tutte le sezioni piane sono coniche e una sfera una superficie di cui tutte le sezioni piane sono circoli); M. Lelieuvre, *Sur un théorème de la théorie des surfaces* (Nouv. Ann., IV, 4, 1904); E. Genty, *Note de géométrie vectorielle sur le systemes orthogonaux* (Bull. S. M. F., 32, 1904; si dimostra ivi la nota equazione di Darboux soddisfatta dalle superficie di una serie ∞^1 appartenente ad un sistema triplo ortogonale); J. Kürschák, *Anwendung der komplexen Zahlen zum Beweis eines elementar-geometrischen Satzes* (Archiv., III, 8, 1905); K. Eichler, *Beitrag zur Grassmannschen Punktrechnung* (Hamburg Festschrift, 1905); F. Castellano, *Il birapporto di quattro punti dello spazio con applicazioni alla geometria del tetraedro* (Torino Atti, 40, 1905); F. Lucas *Sur la généralisation du rapport anharmonique* (Bull. S. M. F., 33, 1905); R. Schimmack, *Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition* (Leopoldina, 90, 1909); M. Bottasso, *Le curvature degli inviluppi di rette e di piani, con applicazione alle polari reciproche di una linea data* (Atti Ist. Ven., 72, 1913) e *Teoremi su massimi e minimi geometrici e su normali a curve e superficie* (Torino Atti, 51, 1916); R. Mehmke, *Dyaden und Kontrajektivitäten* (Deutsch. M. V., 26, 1917); H. Mohrman, *Ueber die Grassmann'sche Doppelverhältnisse von vier Geraden im Raume* (Math. Ann., 79, 1918); P. C. Delens, *Applications des méthodes de Grass-*

mann à la géométrie du plan (Enseign., 23, 1923); C. D. Rice, *Quelques méthodes de géométrie intrinsèque* (Id., 24, 1924-25). Una menzione speciale va fatta dell'opera di R. Mehmke, *Vorlesungen über Punkt-und Vektorenrechnung* (Leipzig, 1913, rimasta incompleta per le condizioni create dalla recente guerra) e altra della *Projektive Geometrie der Ebene unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt* (Leipzig, 1909, 1913, 1927) di H. Grassmann jr., che, anche morto l'autore, potè vedere la luce grazie al generoso concorso di enti e privati.

La geometria della sfera trovò nel Coolidge un ottimo espositore in una opera da noi già citata, e in A. V. Bäcklund un cultore (*Einiges über Kugelkomplexe*, Ann. mat., III, 20, 1913); in particolare le relative idee del Lie ebbero ottimi svolgimenti per opera di E. Study (*Ueber S. Lie Geometrie der Kreise und Kugeln;* Math. Ann., 86, 87, 88, 89 ,91, 1922-24) e di altri (T. Kubota, *Einige Bemerkungen zur Lie'schen Kugelgeometrie*, Tohoku, 9, 1920) e H. Beck, *Die Fundamentalsatz der Lie'schen Kugelgeometrie im Euklidischen Raum*, Math. Zeit., 15, 1922).

Finalmente il calcolo con Würfe di Staudt condusse G. Hessemberg a concepirne altro congenere (*Ueber einem geometrischen Kalkül*, Acta, 29, 1904).

32. Se oltremodo spinosa è la questione di determinare di dove devasi prendere le mosse nell'esporre le fasi di sviluppo di qualunque ramo dello scibile, altrettanto penoso riesce il decidere il punto a cui arrestarsi, chè, non appena presa una decisione al riguardo, si è assaliti dal rammarico — per non usare la parola rimorso — di avere omesso qualche particolare importante. Quantunque da tale sentimento noi pure ci sentiamo compresi, benchè siamo convinti dell'imperfezione dell'opera nostra, pure, nello scrivere la parola *fine* a questa nostra purchessia rassegna delle conquiste fatte dalla geometria in questi ultimi centocinquant'anni, riteniamo che essa sia sufficiente per fissare alcune linee generali di svolgimento, che essa ha seguito nelle sue più recenti fasi di sviluppo.

Negletta quasi totalmente durante il secolo che s'intitola dai nomi di Eulero e Lagrange, sotto l'irresistibile impulso di Monge e Carnot — ben tosto seguiti da un gruppo di valorosi discepoli, fra cui emergono Poncelet e Chasles — e quasi trasfigurata per opera del concetto di « corrispondenza » (come l'analisi ebbe nuova vita da quello generale di « funzione ») essa acquistò l'unità e sicurezza d'indirizzo che caratterizza le discipline aventi un sicuro avvenire.

La potenza e la malleabilità dei nuovi metodi che emanarono da quel concetto fu valutato a un così alto grado da coloro che per primi se ne servirono, che uno fra i più illustri di essi — M. Chasles — nel suo entusiasmo di neofita fu indotto a dichiarare: « Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en géométrie; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice ».

33. I fatti dimostrarono l'esagerazione di siffatto apprezzamento; chè se l'applicazione, quasi automatica, delle trasformazioni geometriche potè procurare qualche effimera soddisfazione a spiriti mediocri, al genio erano sempre riserbati i compiti più vasti e importanti, nell'assolvere i quali esso aveva campo di rifulgere in tutta la sua grandezza. E le conquiste fatte, circa nel tempo in cui venivano scritte le frasi surriferite, da un geometra tedesco, pienamente edotto di quanto erasi operato dai geometri d'oltre Reno del periodo che va dalla grande rivoluzione francese del 1789 alla piccola del 1830, mentre da un lato accrebbero la geometria di capitoli interessanti, dall'altro incoraggiò alla pugna i più giovani pionieri. Alludiamo a J. Plücker, il quale, applicando i nuovi sistemi di coordinate da lui creati e profittando della fantasia geometrica di cui natura avevale dotato, pose basi definitive alla teoria delle curve algebriche piane; inoltre col segnalare, in unione a Steiner, alcune proprietà delle curve del terzo ordine (configurazione dei flessi) e di quelle di quarto (distribuzione delle tangenti doppie), mostrò che i geometri Greci, con i loro assidui e geniali studi sopra le sezioni coniche, non avevano esaurita la collezione delle figure geometriche dotate di notevoli prerogative. Fatto questo ben presto confermato dai memorabili lavori sulle superficie del terzo ordine, che sono gloria perenne di Steiner, Cayley e Cremona. In tal modo veniva iniziato lo studio delle superficie algebriche speciali che naturalmente seguono le quadriche, cioè di quelle superficie nella cui investigazione si erano illustrati i primi alunni della Scuola Politecnica di Parigi. In pari tempo veniva rivelata la somma importanza della determinazione delle proprietà comuni a tutte le superficie algebriche: tema questo che, affrontato nella seconda metà del Secolo XIX, non potè condurre a conclusioni veramente definitive che più tardi, quando cioè fu vasta e profonda la cognizione intorno alle funzioni algebriche di due variabili indipendenti.

Circa nello stesso periodo venivano iniziate metodiche ricerche intorno alle curve algebriche a doppia curvatura: le più semplici (cubiche gobbe e quartiche di I specie) erano state studiate con soddisfacente profondità applicando i concetti di projezione e sezione; questi avevano anche permesso di stabilire le equazioni che legano le relative singolarità (formole di Cayley, analoghe alle formole di Plücker): ma il problema di ottenere tutte le varie specie di curve gobbe di ordine assegnato e di classificarle razionalmente non poteva risolversi se non ricorrendo alla teoria delle funzioni algebriche: e infatti ad essa fecero appello l'Halphen e il Nöther che lo risolsero rispondendo ad un pubblico invito rivolto dall'Accademia di Berlino.

34. Curve e superficie sono le uniche figure che ci giunsero per eredità dai Greci; ma, avendo Plücker avvertito che nello spazio potevasi assumere la retta come elemento generatore delle figure, nuovi enti s'imposero all'attenzione dei geometri e tutta la splendida letteratura sopra i complessi e le congruenze sta a dimostrare quanto ubertosa fosse la nuova colonia di cui quell'eminente matematico seppe arricchire l'impero geometrico. In tale occasione si rinnovò il fenomeno che, mentre considerazioni geometriche dirette bastano allo studio dei più semplici fra i nuovi enti, chi voglia scoprirne proprietà generali deve ricorrere a quegli strumenti raffinati che soltanto l'analisi più elevata è in grado di fornire.

Così per altra via veniva confermato che i metodi puramente geometrici creati durante la prima metà del Secolo XIX e perfezionati nella seconda, malgrado gli sforzi compiuti per estenderne la portata (1), avevano una portata fatalmente ristretta.

Battendo due strade si tentò di accrescerne il potere. Percorrendo l'una si crearono, con la Geometria numerativa, nuovi tipi di ragionamenti, indipendenti dall'impiego di coordinate, ma nel fondo essenzialmente algebrici. Seguendo l'altra si estese il concetto di trasformazione geometrica, sì da ottenere procedimenti atti a dedurre da una figura altre di ordine più elevato. In tal modo dalle trasformazioni lineari si passò alle cremoniane, dalla procedura che associa ad un ente tutti quelli collineari e correlativi, si ottennero altri metodi per generare figure del tutto nuove; in pari tempo dal problema di determinare le qualità delle figure che non si perdono per projezione o sezione, si passò alla multiforme questione di determinare le prerogative degli enti algebrici che permangono quando questi vengono sottoposti a una trasformazione algebrica qualsivoglia, questione che da anni viene studiata col maggiore impegno, sfruttando, come è indispensabile, la teoria recente delle funzioni algebriche (2)

(1) Fra coloro che vi si provarono vanno ricordati E. Kötter e R. de Paolis, del primo dei quali esiste un'ottima memoria che fu premiata nel 1887 dall'Accademia di Berlino. A questa si è ispirato J. Rey Pastor nel lavoro *Teoria geometrica de la polaridad en la figuras de primera y segnuda categoria* (Madrid, Mem., II, 8, 1929).

(2) A chi voglia dedicarsi a questo ordine di ricerche va consigliato lo studio delle seguenti opere: F. Eurique e O. Chisini, *Teoria geometrica delle e-*

35. In un'altra grande sezione della geometria, l'analisi matematica prestò inapprezzabili servigi, cioè nella ricerca delle proprietà infinitesimali delle figure. Quando i contemporanei di Monge, seguendo le orme di questo geniale investigatore, intrapresero la coltura di questo campo, in molti casi poterono servirsi di semplici considerazioni geometriche; ma, dopo che la geometria infinitesimale, per l'impulso e le direttive di Gauss, si avviò a identificarsi con la teoria delle forme differenziali, a quei procedimenti, quasi infantili, non fu più possibile ricorrere. Grazie all'intervento costante dell'analisi infinitesimale ebbe origine una splendida disciplina che, mentre sfrutta i risultati conseguiti dai maggiori analisti, a questi suggerisce nuovi e attraentissimi problemi; una disciplina che ragiona sopra figure di tanta generalità che riesce vano ogni tentativo per raffigurarselo e che — al pari della teoria generale delle superficie algebriche — di geometrico non ha ormai più che il nome. Cosicchè se, verso il terminedel Sec. XIX, si poteva solennizzare la pace fra analisi e geometria, suggellandola con un patto di cordiale collaborazione, nei fini se non nei mezzi, l'alba del nuovo assistè alla nascita di nuove vigorose creature nate loro ben auspicato connubio.

Mentre è appena necessario rilevare come tale carattere metageometrico delle ricerche matematiche moderne fu accentuata per effetto dell'introduzione di sistemi geometrici diversi dall'euclideo e delle considerazioni di spazi a più (persino a infinite) dimensioni, va esplicitamente notato come le ricerche sull'Assiomatica della scienza dell'estensione guidarono ad un nuovo campo che si è titubanti nell'ascrivere fra i dominii della geometria, potendo benissimo considerarsi come di pertinenza della logica pura; è quel campo, dovuto in gran parte all'influenza di D. Hilbert, che guidò il Russell alla seguente originale definizione: « Mathematics is the science in which never know what we are talking about, nor whether what we say is true » (1).

36. Malgrado questo predominio dell'algebra sulla geometria — contro il quale riuscirebbe insensato qualunque tentativo di ribellione — gli amatori dei procedimenti basati sull'intuizione non sono del tutto scomparsi, come ben sanno i lettori che ci seguirono sin qui. Prescidendo da risultati di notevole eleganza ma di limitata estensione, ci piace ricordare ancora

---

quazioni (3 Vol., Bologna, 1915-24); F. Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (trad. E. Löffler, Leipzig, 1921) e *Trattato di geometria algebrica* (Volume I, Bologna, 1926).

(1) *Recent Work in the Principles of Mathematics* (The intern. Monthly, T. IV, 1901). E' appena necessario rilevare come la riferita definizione abbracci non tutta la matematica, ma soltanto una piccola parte di essa.

una volta le ricerche con cui un distinto matematico danese — C. Juel — insegnò a studiare le curve e le superficie che — al pari delle « linee grafiche » che s'incontrano nella geometria descrittiva — non si possono rappresentare mediante equazioni; appunto perciò furono chiamate non-algebriche e la relativa teoria costituisce un recinto della matematica che, oggi almeno, è precluso all'analisi e che quindi può essere citato come prova di superiorità su questa della geometria. A siffatti geniali studi si possono avvicinare quelli di J. Hjelmslev sulla « geometria della realità »; essi furono inspirati dall'osservazione che gli enti di cui si occupa la classica geometria sono parti della nostra mente non esistenti in natura; ma poichè, in fatto, esistono punti fisici, linee fisiche, ecc., è ragionevole il desiderio di farne oggetto di una soddisfacente teoria. Ad essa si giunse facendo spesso appello alle più delicate teorie analitiche moderne, onde per un altro cammino si è condotti ad una norma a cui sembra ragionevole debba attenersi chiunque aspiri a far progredire la geometria. Consci della limitatezza delle nostre forze, addattiamoci pure a scegliere un campo ristretto in cui esercitare la nostra attività, ma non si dimentichi che, se si vuole trarne tutti i frutti che esso è capace di somministrare, si ha il diritto, e forse il dovere, di utilizzare tutti gli strumenti che l'intelligenza umana ha accumulati in non meno venti secoli di incessante lavoro e che si trovano a disposizione di chiunque abbia l'accortezza di domandarne l'aiuto e l'abilità di usarne. La preferenza dei metodi «misti» sopra i «puri», che caratterizza l'ultima fase della ricerca geometrica, sta a provare che questa direttiva, che può dirsi utilitaria, venne generalmente seguita, come non confessata, od inconscia, applicazione del grande principio della economia del pensiero.

Veggasi la memoria *Die Geometrie der Wirklichkeit* (Acta mathematica, T. XL, 1916), a cui preluse il volumetto *Geometrische Experimente* (Leipsig und Berlin, 1915). Una conferenza dello stesso autore sull'argomento fu riprodotta dallo Speiser nella sua raccolta *Klassische Stücke der Mathematik* (Zürich, 1923).

ELENCO DEI NOMI CITATI

Abel: 27, 38, 46, 47, 246, 437.
dell'Acqua: 435.
Adam (C.): 13.
Adam (P.): 131, 143, 153, 354, 358.
Adler: 122, 320, 445.
Affolter: 88, 107, 287.
Agnesi: 17.
Aguglia: 299, 317.
Aguillon: 212.
Ahmes (egiz.): 3, 4, 7.
Ahmes (L. D.): 373, 376.
Ahrens: 378.
Albanese (G.): 316, 336, 337, 402, 430.
Alembert (d'): 19, 81, 245, 254.
Alexander: 337, 392.
Alexandroff: 420.
Alibrandi: 419.
Aliprandi: XII, 441.
Allé: 265.
Allégret: 126.
Allen (E. S.): 305.
Allen (F. E.): 395.
Almeyer: 322.
Amaldi: 319, 333, 363, 387, 400, 413.
Ambrosetti: 389.
Ameseder: 57, 61, 120, 192, 198, 221.
Amico (d'): 427.
Amigues: 36.
Amiot: 73, 82.
Amodeo: 16, 211, 282, 314.
Ampère: 19, 99.
Anassagora: 5.
Anassimandro: 5.
Anassimene: 6.
Anassimoff: 354.
Andrade: 407.
Andreeff: 179.
Andreini: 379.
Andreoli: 377.
Anschütz: 11.
Angas Scott (Charlotte): 303, 306.
Antoine: 431.
Antomari: 286.
Aoust: 126, 130, 131, 134, 150, 160, 161.
Apollonio: 6, 7, 13, 14, 81, 196, 201, 256.
Appell: 118, 123, 159, 301, 333.
Aprile: 431, 434.
Arago: 13, 15, 19, 20, 99.
Archibald: 29.
Archimede: 6, 8, 14, 17, 27, 80, 111, 409, 410, 413.
Archita: 5, 6, 17, 95, 111.
Argaud: 286.
Aristeo: 6.
Aristotile: 3, 5, 6.
Armenante: 107, 122, 211, 215, 277.
Arnoldt: 188.
Aroldi (Giovanna) 397.
Aronhold: 59, 61, 285.
Aschieri: 184, 185, 186, 192, 194, 219, 220, 221, 222, 258, 276, 418.
Ascione: 90, 91, 219, 279, 321, 431, 432.
August: 26, 30, 55, 88, 137, 140, 222.
Augusto: 9.
Aulay: 287.
Autonne: 112, 205, 337, 398, 421, 424, 430.

Bacharach: 38.
Backes: 337.
Bäcklund: 157, 214, 356, 448.
Bagnera: 231, 319, 391.
Bailey: 307.
Baker: 43, 47, 318, 323, 391, 397, 418, 427.
Baldus: 387, 391, 405, 409.
Balitrand: 65, 128.
Ball (Rouse): 32, 167, 258.
Ball (Stawel): 186, 261, 329, 387.
Balser: 410.
Baltzer: 28, 150, 248, 284.
Banal: 435.
Bang: 258.
Barbarin: 266, 405, 407.
Barbier: 138.
Barkham: 443.
Baroni: 159.
Barraco: 395.
Barrau: 381, 432.
Barré: 365.
Bartels: 248.
Basset: 303, 307, 312, 313, 316.

Bateman: 311, 312, 327, 329.
Battaglini: 44, 56, 66, 70, 85, 102, 104, 181, 183, 186, 192, 202, 211, 212, 227, 250, 251, 255, 257, 260. 385
Bauer: 29, 40, 89, 172, 313, 380.
Baule: 123, 417.
Baumberger: 329.
Baur: 168.
Beck: 40, 74, 302, 329, 332, 395, 417, 448.
Becker: 261.
Bedarida: 280.
Bedetti: 77.
Beer: 169, 310.
Beez: 261, 265, 266, 287.
Bellatalla: 429.
Bellavitis: 21, 167, 168, 169, 170, 201, 287, 294, 445.
Belloch (Piazzolla Margherita): 319, 323, 326, 328, 374, 395.
Beltrami: 30, 34, 63, 67, 88, 97, 117, 131, 144, 145, 150, 152, 153, 155, 156, 157, 160, 173, 184, 208, 213, 244, 246, 252, 253, 255, 256, 260, 263, 264, 267, 293, 294, 371, 377, 442.
Bemporad: 386, 436.
Benedetti (G. B.): 10.
Benedetti (P.): 173.
Benett: 324.
Berdon: 299.
Berenguer: 13.
Bergstedt: 106.
Berliner: 309, 408.
Berner: 227.
Bernhard: 306.
Bernoulli (Giac.): 36, 70.
Bernoulli (Giov.): 154.
Bernstein (F.): 343, 373, 414.
Bernstein (S.): 355, 360.
Berry: 319, 335.
Bertini: 42, 46, 47, 48, 49, 68, 88, 114, 122, 123, 156, 174, 175, 187, 205, 209, 276, 277, 278, 306, 310, 313, 379, 418, 421, 428.
Bertrand: 11, 19, 20, 26, 39, 41, 81, 95, 100, 128, 129, 133, 152, 159, 163, 165, 294, 347, 349, 358, 362, 363, 405.
Berwald: 364, 369, 400, 440.
Berzolari: 46, 60, 79, 94, 114, 119, 123, 205, 266, 274, 281, 297, 301, 307, 313, 317, 324, 338, 341, 344, 380, 381, 384, 390, 422, 425, 426, 434, 438.
Bessel: 248.
Betsch: 445.
Bettazzi: 254.
Betti: 164, 265, 267, 294.
Beutel: 297.
Beyel: 57, 65, 308, 342.
Beyer: 84.
Bézout: 227.
Bianchi: 70, 89, 131, 143, 145, 154, 157, 158, 159, 161, 164, 165, 190, 217, 253, 259, 280, 293, 345, 351, 355, 356, 358, 359, 362, 364, 365, 366, 367, 388, 415, 416, 434, 435, 436, 437.
Bissi: 393.
Bickhoff: 199.
Bieberbach: 68, 365, 404, 413.
Biel: 369.
Biermann: 207, 270.
Biggiogero: 373.
Binder: 64, 307, 311.
Binet: 70, 81, 86, 158.
Bioche: 40, 119, 138, 140, 141, 149, 325, 334, 341, 343.
Birkeland: 35.
Bischoff: 40, 77, 114, 226, 228.
Bjerkness: 27 60.
Björling: 64, 106, 113, 145, 171, 209.
Blake: 330.
Blaschke: 345, 367, 368, 369, 370, 372, 398, 416, 439.
Blasendorff: 190.
Blichfeld: 419.
Bliss: 351, 354.
Bloch: 329, 373, 410.
Blumental: 364.
Blutel: 107, 143.
Blythe: 308, 324, 374.
Bobek: 34, 51, 55, 64, 69, 89, 90, 94, 115, 124, 206, 323, 325.
Bobillier: 31, 39, 51, 81.
Boccalatte: 413.
Boccardini: 404.
Boegnell (Ilse): 392.
Bôcher: 199.
Bockwoldt: 142.
Bogehold: 320.
Boggio: 439.
Bohlmann: 394.
Böhmel: 312.
Böhner: 445.
Bohnert: 148.
Bois-Reymond (E. du): 12.
Böklen: 155, 342, 101, 119.
Bolyai (G.): 248, 249, 251, 403, 404, 407, 408, 410, 437, 442.
Bolyai (W.): 246, 250, 251, 403, 404, 407, 408, 410, 442.
Bolza: 388.
Bompiani: 329, 352, 368, 369, 424, 434, 438, 439.
Bonferroni: 322.
Bonicelli: 397.
Bonnet: 128, 142, 145, 147, 152, 154, 160, 163, 213, 214 363, 364, 365, 416.
Bonola: 173, 371, 391, 403, 405, 407, 415.
Boole: 287.
Borchardt: 27, 98, 271.
Bordiga: 194, 276, 277, 279, 280, 331, 386, 421, 433.
Borel: 351.
Borghese: 210.
Borgmeyer: 91, 188.
Bortolotti (Enea): 369, 440.
Bortolotti (Ettore): 174.
Boscovich: 21.
Bossut: 21.
Bottari: 394.
Bottasso: 315, 346, 447.
Boulanger: 436.
Bouman: 360.
Bouniakowsky: 260.
Bouquet: 128, 162, 163.
Bour: 152.
Bourget: 184.
Bourlet: 362.
Boutroux: 76.
Bouwman: 302.
Boy: 378.
Boyd: 395.
Bragelogne: 169.
Braikenridge: 33.
Brambilla (A.): 122, 123, 198, 275, 279, 326, 331, 427.

Brambilla (E.): 433.
Bramble: 391.
Brassine: 86.
Braude: 297.
Braunmühl (A. von): 155.
Bravais: 445.
Bregaglia: 393.
Bremiker: 310.
Bresch: 273.
Breton (de Champ): 15, 95.
Bretschneider: 20.
Breuer: 443.
Brewster: 15.
Breyer: 371.
Brianchon: 20, 81, 82, 177.
Bricard: 296, 333, 342, 398, 423, 447.
Brill: 41, 42, 46, 49, 50, 63, 64, 69, 101, 107, 124, 155, 167, 170, 171, 209, 215, 231, 236, 237, 265, 274, 275, 306, 318, 339, 341, 343, 371, 401, 444.
Brioschi: 24, 63, 68, 88, 90, 98, 100, 127, 141, 142, 150, 154, 157, 160, 161, 163, 267, 293, 294.
Brisse: 165.
Brocard: 287, 307.
Broden: 314.
Bromwich: 396.
Brouwer: 377.
Brückner: 270, 378, 379.
Brunel: 266, 267, 301, 374, 420, 434.
Brunn: 170, 171, 172, 176, 372, 374, 376, 377.
Bruno: 85.
Bruns: 310.
Brusotti: 314, 322, 371, 372, 422, 423, 426.
Buch: 332.
Büchel: 373.
Buchheim: 45, 188, 250.
Buchholz: 438.
Buckle: 16.
Bücking: 312.
Buhl: 405.
Bullard: 371.
Burali-Forti: 210, 241, 346, 411, 446.
Burgatti: 350, 388.
Burgess: 303.
Burkhardt: 89, 254, 305, 306, 411.
Burmester: 178.
Burnside: 143, 169, 259, 309, 324, 379, 396, 406, 420.
Busche: 260, 296, 422.
Busse: 357, 362.
Bützemberger: 327.

Cadenat: 405.
Cajori: 417.
Calapso (P.): 351, 355, 356, 357, 363, 365, 439.
Calapso (S.): 439.
Calderara: 396.
Calinon: 350.
Calò: 144, 354, 388.
Campbell: 85.
Cantone: 114, 118.
Cantor (G.): 196.
Cantor (M.): 3, 4, 9, 245.
Capelli: 217.
Caporali: 48, 58, 62, 68, 88, 90, 99, 104, 178, 182, 185, 195, 198, 205, 206, 215, 216, 237, 279, 307, 313, 381.
Carbone: 421.
Carda: 362.
Cardano: 10.
Cardinal: 63, 84, 85, 92, 93, 95, 119, 169, 173, 313, 385.
Carnera: 359.
Carnot: 19, 20, 21, 248, 300, 448.
Caronnet: 143, 153, 159.
Carp: 432.
Carpanese: 439.
Carpenter: 368.
Carrone: 385, 386, 431.
Carslaw: 405, 408.
Cartan: 367, 369, 439, 440.
Cartesio: v. Descartes.
Carvallo: 289.
Carver: 432.
Casey: 65, 94, 219.
Casorati: 47, 149, 156.
Caspar: 402.
Caspary: 83, 103, 114, 289, 443, 447.
Cassani: 271, 275.
Cassini: 17.
Castellano: 447.
Castellani (Maria): 427.
Castelli (Teresa): 397.
Castelnuovo: 41, 47, 48, 49, 69, 76, 106, 210, 222, 223, 243, 271, 276, 277, 278, 279, 280, 305, 318, 319, 334, 335, 336, 392, 395, 399.
Castels: 308.
Catalan: 101, 106, 134, 140, 145, 146, 149, 158, 241.
Cattaneo: 351, 435.
Cauchy: 99, 263, 351.
Cavalieri: 14.
Cavatorta: 425.
Cavazzoni: 314.
Cayley: 24, 26, 36, 38, 41, 44, 45, 51, 54, 57, 62, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 73, 74, 75, 76, 78, 85, 87, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 98, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 108, 112, 113, 114, 115, 116, 120, 121, 136, 139, 141, 143, 147, 152, 155, 160, 162, 168, 169, 170, 171, 175, 176, 180, 181, 189, 190, 192, 201, 209, 214, 215, 218, 229, 230, 232, 233, 234, 236, 237, 242, 255, 256, 257, 258, 263, 268, 273, 274, 275, 279, 283, 293, 327, 337, 338, 401, 414, 432, 449.
Cébycef: v. Tchebytcheff.
Cech: 367, 368, 369, 389, 439.
Cesàro: 129, 133, 175, 184, 260, 264, 266, 268, 272, 293, 297, 346, 347, 352, 378, 416, 345, 443, 444.
Ceva: 20.
Chace: 287.
Chapman: 287.
Chasles: 16, 21, 26, 29, 32, 33, 34, 51, 52, 55, 57, 63, 65, 67, 77, 78, 79, 81, 82, 84, 85, 86, 92, 103, 105, 116, 117, 120, 122, 168, 186, 197, 214, 215, 224, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 255, 284, 285, 294, 299, 323, 402, 448, 449.
Chaundy: 295.
Chelini: 150, 162, 182, 183, 284.
Cherubino: 302, 314.
Chieffi: 356.

Chini : 144, 154, 360.
Chiò : 131.
Chisini : 304, 306, 316, 374, 392, 450.
Chizzoni : 107, 186, 429, 433.
Christoffel : 145, 155, 160, 265, 365, 366, 376.
Ciani : 34, 49, 63, 90, 91, 108, 131, 310, 311, 313, 343, 344, 380, 381, 390, 391, 422.
Cicerone : 9.
Cifarelli : 387.
Cipolla (Isabella) : 304.
Clairaut : 18, 19, 111, 127, 168.
Clapier : 360.
Clebsch : 25, 30, 31, 41, 44, 45, 46, 55, 56, 59, 63, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 75, 76, 77, 78, 83, 89, 90, 94, 95, 97, 106, 107, 114, 174, 177, 181, 182, 183, 203, 211, 214, 215, 216, 227, 233, 240, 277, 281, 288, 294, 311, 314, 422.
Clifford : 35, 50, 58, 174, 175, 203, 209, 214, 231, 237, 250, 252, 254, 258, 259, 267, 273, 275, 279, 283, 321, 400, 415.
Coble : 325, 341, 396.
Codazzi : 139, 150, 153, 157, 162, 266, 352, 368.
Cohen : 311.
Cole : 268.
Colpitts : 344.
Combebiac : 447.
Comberousse : 405, 442, 443, 444.
Combescure : 100, 140, 143, 153, 161, 346, 359.
Commessati : XII, 305, 318, 336, 337, 339, 375, 410, 426, 442.
Commines de Marsilly : 261.
Comte : 17, 254.
Concina : 423.
Condorcet : 14, 17, 19.
Conner : 344, 395, 426.
Connor : 397.
Conti : 195.
Cook Wilson : 378.
Coolidge : 296, 302, 384, 398, 399, 405, 415, 448.
Copernico : 250.
Cosentius : 191.
Cosserat : 42, 96, 133, 138, 148, 190, 192, 283, 333, 350.
Côtes : 33, 445.
Cotterill : 207.
Cotton : 415, 438.
Courant : 70.
Courcier : 111.
Cousinery : 284.
Cox : 258, 310.
Craig : 108, 132, 213, 264, 436.
Cramer : 32, 33, 36, 37, 38, 51, 54, 169, 291.
Creanga (Silvia L.) : 352.
Crelier : 299.
Crelle : 27.
Cremona : 34, 40, 46, 47, 50, 52, 54, 63, 66, 69, 72, 82, 85, 86, 87, 88, 91, 92, 94, 96, 104, 105, 114, 117, 118, 120, 122, 123, 168, 184, 186, 203, 214, 215, 216, 217, 218, 226, 229, 240, 241, 288, 293, 294, 299, 324, 341, 342, 390, 394, 395, 396, 431, 449.
Crepas : 425.
Crespi (Anna) : 343.
Crocchi : 202.
Crofton : 65.
Crone : 65, 169, 170, 173, 211, 372.
Culmann : 186.
Curjel : 418.
Curtis : 128, 130, 150.
Curtze : 46, 52, 72.
Czuber : 26, 124, 286.

Dandelin : 83.
Daniele : 357.
Darboux : 50, 65, 68, 70, 79, 94, 97, 98, 100, 101, 121, 138, 141, 143, 148, 154, 155, 157, 162, 163, 165, 200, 214, 216, 232, 256, 286, 294, 295, 322, 328, 345, 349, 351, 355, 356, 357, 358, 363, 365, 366, 396, 414, 436, 437, 447.
Darmois : 349.
Darval : 404.
Daublescky von Sterneck, 179.
Dauge : 407.
Dautheville : 208.
Davaux : 350.
Davies : 15.
Daviet de Foncenex : 247.
Davisson : 436.
Dawis : 374.
Debeaune : 14.
Decio (Camilla) : 298.
Dedekind : 252.
Dehn : 377, 405, 407, 410, 414, 419.
Delambre : 248.
Delaporte : 405.
Delassus : 315.
Delaunay : 144, 155, 325, 375.
Delboeuf : 405.
Delens : 300, 447.
Delin : 394.
Deltour : 296.
Dematres : 151, 158.
Democrito : 3, 5.
Demoulin (A.) : 129, 146, 151, 188, 190, 193, 194, 300, 333, 394, 350, 352, 353, 354, 359, 364, 365, 387, 416.
Dersch : 45.
Deruyts : 195, 222, 223, 307, 343, 344.
Desargues : 11, 12, 80, 202, 410, 412, 422.
Descartes : 12, 13, 14, 17, 37, 180, 262, 269.
Dewulf : 35, 203.
Dickson : 202, 324.
Dickstein : 9.
Diekmann : 214.
Dietrich : 151.
Diguet : 152.
Dina : 133.
Dingeldey : 54, 60, 176.
Dini : 59, 131, 140, 142, 144, 153, 160, 213, 293.
Dinostrato : 6.
Diocle : 7, 60.
Diodoro Siculo : 3.
Dirichlet (Lejeune-) : 23, 259.
Distell : 25, 57, 60, 168, 310.
Dixon : 308, 309, 378.
Dobriner : 84, 143, 148, 157, 414.
Doehlemann : 49, 79, 108, 119, 206, 390, 393, 397.
Dohn : 423.
Dolezwal : 140.
Dölle : 309.
Dominioni : 315.
Domsch : 94.

Donadt : 261.
Dowlin : 371.
Drach (C. A. von) : 117, 183.
Drach (J.) : 437.
Dragoni (Angiola) : 426.
Drasch : 60.
Dürer : 37.
Dühring : 244.
Duhamel : 14, 34.
Duhem : 266, 375, 420.
Dumont : 307, 323, 325.
Dupin : 19, 81, 95, 96, 137, 138, 139, 141, 189, 259, 265, 358, 388.
Duporcq : 295, 393.
Duport : 387, 411.
Durande : 100.
Durège : 55, 56, 59, 60, 61, 168, 207, 269, 272.
Dyck : 173, 174, 267.
Dziobek : 331.

Eberhard : 120, 175, 219, 281, 382, 443.
Eberle : 66.
Ebner : 307.
Eck : 193.
Eckardt (E.) : 444.
Eckardt (E. F.) : 66, 90, 97, 102, 109, 124, 327.
Eckardt (L.) : 384, 421.
Escherich (von) : 78.
Egan : 384.
Egorov : 350.
Eichler : 447.
Eiesland : 319, 385, 424, 431, 433.
Einstein : 417.
Eisenhart : 345, 351, 356, 359, 361, 362, 363, 364, 388, 438.
Eisenlohr : 4.
Elliot : 50.
Emch : 285, 311, 323, 387, 396, 399.
End : 80.
Enders : 342.
Eneström : 36, 353.
Engel : 70, 223, 245, 246, 248, 249, 250, 253, 288, 299, 399, 403, 407, 424.
Enneper : 131, 133, 135, 137, 138, 139, 142, 145, 147, 153, 157, 160, 162, 163, 213, 214, 353.
Enriques : 41, 49, 80, 107, 109, 193, 205, 277, 278, 304, 305, 318, 319, 334, 335, 336, 362, 395, 405, 411, 413, 418, 426, 442, 450.
Epstein : 348.
Erdmann : 244, 261.
Ernst : 193, 333.
Erodoto : 3.
Erone : 3, 8, 12.
Errera : 378.
Escherisch (von) : 150, 157, 253.
Estanave : 356.
Euclide : 6, 8, 14, 17, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 253, 254, 256, 257, 260, 268, 404, 405, 409, 411, 413, 444.
Eudosso : 6, 17.
Eulero : 14, 18, 19, 36, 37, 38, 39, 51, 54, 72, 81, 105, 112, 134, 149, 150, 169, 267, 269, 438, 448.
Eutocio : 8, 95.
Everett : 379.

Fabry : 133, 314, 349.
Falron : 340, 431.
Fais : 129, 140.
Falchi : 361.
Fano : 107, 194, 205, 278, 280, 282, 319, 328, 333, 387, 400, 411, 423, 426, 428, 433.
Faure : 255.
Favaro : 167, 288.
Favini : 364.
Feder : 381.
Fehr : 447.
Feigl : 371, 413.
Feil : 175.
Fergola : 16, 80.
Fermat : 12, 13, 14, 16, 262.
Fernandez Baños : 304, 425.
Ferrari (A.) : 373.
Ferrari (L.) : 10.
Ferraris : 446.
Ferrers : 56.
Ferretti : 306, 394.
Ferro : 10.
Ferry : 325.
Feuerbach : 273.
Fibbi : 142, 159, 259.
Fibonacci (Leonardo Pisano) : 10.
Fichtenholtz : 403.
Fiedler : 25, 64, 87, 105, 169, 186, 187, 211, 256, 284, 293, 301, 304, 323.
Field : 313, 371.
Fields : 303.
Figuemont : 299.
Fine : 113, 278.
Fink : 19, 20, 22, 262.
Finsterwalder : 83, 374.
Finzi : 435.
Fiorini : 213.
Fischer (Anna) : 384.
Fischer (R.) : 408.
Flauti : 16.
Flye S.te Marie : 261.
Folie : 58, 241.
Fonténé : 281, 295, 311, 322, 329, 340, 381, 415, 446.
Fontenelle : 15, 17.
Forchhammer : 270.
Forder : 410.
Forsyth : 24, 26, 123, 315, 345, 351, 360.
Forti : 251.
Fouché : 333, 399.
Fouret : 34, 35, 36, 70, 71, 75, 79, 109, 182, 188, 194, 231, 233, 234, 238, 239.
Fourier : 247.
Fowler : 367.
Frahm : 61, 66, 198, 216, 258.
di Francesco : 408.
Franciosi : 392.
de Franchis : 42, 231, 299, 306, 319, 328, 330, 336, 395, 425.
Franel : 188, 192.
Franck : 353, 369, 399.
Franke : 151.
Frankland : 264.
Fraser : 312, 328.
Frauenfelder : 343.
Frichet : 440.
Freda : 408.
Frege : 410, 412.
Frenet : 128, 160, 347, 348, 446.
Fresdorf : 259.
Fresnel : 99.
Freyberg : 62.
Frézier : 19.
Frischauf : 20, 361, 261, 408.
Frobenius : 62.
Fromm : 266.
Frost : 141.
Fubini : 280, 355, 367, 368, 388, 389, 400, 415, 416, 436, 437, 439, 440.

Fuchs : 59.
Funk : 364.
Fuss : 18, 23, 25,119.

Gabs : 412.
Galàtola : XI, XII.
Gale : 325, 350.
Galeno : 250.
Galilei : 17, 290.
Gallatley : 443.
Gallestrand : 315.
Gallucci : 340, 380, 381, 382.
Gambier : 305, 306, 349, 355, 356, 358.
Ganguli : 297.
Garbinski : 20.
Gattorno : 350.
Gauss : 27, 29, 134, 135, 148, 149, 150, 152, 154, 155, 159, 161, 189, 207, 212, 213, 246, 248, 249, 250, 251, 252, 262, 263, 286, 287, 344 ,350, 351, 366, 403, 404, 414, 442, 445, 451.
Garbieri : 67.
Geck : 316.
Geisenheimer : 118.
Geiser : 11, 29, 50, 57, 61, 62, 83, 90, 94, 114, 145, 146, 201, 206, 236, 285, 327, 331, 358, 360.
Gennaro : 431.
Genocchi : 246, 247, 253, 263, 267, 294, 377.
Gent : 56.
Gentry (miss. Ruth) : 371.
Genty : 125, 153, 188, 189, 307, 357, 447.
Gérard : 406, 444.
Gerbaldi : 44, 50, 59, 62, 97, 119, 307, 317.
Gerberto (Papa Silvestro II) : 9.
Gergonne : 22, 37, 146, 189, 262.
Gerlich : 386.
Gerling : 414.
Germain (Sofia) : 149.
Geuer : 445.
Gherardinelli : 337.
Giacomini : 396, 424, 432.
Giambelli : 401, 402, 421, 425, 429, 430.
Giampaglia : 422.
Giannattasio : 16.
Gigli : 416.
Gilbert : 132, 151, 160.
Gilles : 244.
Gillesl (Ph.) : 132.
Giordano : 16.
Giorgini : 186.
Giudice : 286.
Giulio Cesare : 9.
Giustiniano : 9.
Giusto : 422.
Glaisher : 11, 42.
Glaser : 148, 325.
Glenn : 298.
Gob : 36, 300, 312.
Godeaux : 294, 319, 336, 339, 353, 390, 431, 434, 444.
Godt : 211, 312.
Goedseels : 141.
Goldschmidt (C. W. B.) : 147.
Goldschmidt : 199.
Gordan : 46, 59, 70, 88, 298, 309.
Gorton : 188, 190.
Gosset : 418.
Gotting : 148.
Goupillière (Haton de la) : 70, 334, 349.
Gournerie (de la) : 41, 65, 71, 95, 105, 106, 150, 165.
Goursat : 108, 130, 146, 153, 159, 301, 308, 350, 358.
Gouventak : 348.
Graefe : 446.
Graf : 174, 382, 418.
Grandhaudt : 321.
Grandi : 17.
Grassi (Anaide) : 313.
Grassmann (H.) : 28, 50, 51, 52, 55, 56, 58, 63, 64, 77, 87, 181, 188, 249, 288, 289, 294, 299, 309, 310, 346, 443, 445, 446, 447.
Grassmann (H. jr.) : 289, 448.
Graustein : 352.
Graves : 100.
Green : 263, 368, 389.
Greul : 339.
Griensberger : 196.
Grieve : 323.
Grimaldi : 331.
Gross : 67.
Grossmann : 25, 390, 408, 410.
del Grosso : 78.
Grünwald (A.) : 340, 387.
Grünwald (J.) : 297, 383.
Grüttner : 381.
Gua de Malves : 37.
Guareschi : 297.
Guccia : 42, 48, 49, 53, 80, 97, 116, 203, 204, 216, 302, 306, 307, 315, 339.
Gudermann : 120.
Guichard : 118, 148, 157, 159, 161, 189, 190, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 363, 365, 415, 418, 437, 438.
Guldin : 8.
Gundelfinger : 226.
Günther : 12, 37.
Guttulsow : 444.
Gwyther : 298.

Haag : 359, 361.
Haak : 362.
Haase : 67.
Habicht : 295.
Hachette : 20, 81.
Hadamard 301, 354, 395.
Hagen : 287.
Hahn : 413.
Hall : 270.
Halley : 16.
Halphen : 24, 25, 42, 44, 47, 59, 73, 77, 112, 113, 115, 138, 143, 151, 185, 216, 232, 240, 241, 242, 274, 285, 294, 337, 450.
Halsted : 11, 244, 246, 249, 250, 251, 403, 404, 405, 406, 410.
Hamel : 68, 410.
Hamilton : 28, 99, 127, 141, 188, 189, 287, 288, 445.
Handel : 327.
Hankel : 19, 245.
Hanumanta Rao (C. V.) : 332, 434.
Hardcastle (Miss F.) : 305.
Hardy : 435.
Harmuth : 271.
Harnack : 15, 26, 55, 59, 92, 121, 170, 343.
Harris : 207.
van der Harst : 350.
Hart : 57, 65, 169.
Härtenberg : 51.
Hatton : 296.
Hauck : 186, 223, 392.
Haure : 303.
Haussdorff : 408.
Hayashi : 349.

Hazzidakis : 133, 157, 158, 347, 354, 436.
Heath : 259.
Heavood : 176, 378.
Hedrick : 412.
Heegard : 376, 377.
Heffter : 176, 329, 412.
Heger : 55, 84.
Heiberg : 245.
Heilermann : 82.
Heller : 351.
Hellwig : 443.
Helmholtz : 252, 253, 413.
Henneberg : 146, 147.
Henrici : 371.
Hensel : 190, 304, 423.
Hermann : 313.
Hermes : 60, 82, 187, 287, 378.
Hermite : 45, 59, 63, 294, 309, 315.
Herschel : 99.
Herting : 172.
Herz : 213.
Hess : 177, 178, 179, 270, 381, 406, 419.
Hesse (E.) : 43, 44, 45, 51, 63, 83, 114, 182, 196, 217, 422.
Hesse (O.) : 56, 61, 86.
Hessenberg : 346, 354, 408, 410, 448.
Hettner : 68, 361.
Hicks : 173.
Hierholzer : 176, 232.
Hilbert : 25, 65, 170, 254, 309, 350, 372, 375, 377, 378, 401, 402, 409, 412, 413, 451.
Hill (J. E.) : 315, 330, 331.
Hill (M. J. M.) : 245.
Hilton : 297, 302.
Himpel : 391.
Hinton (C. H.) : 415, 417.
de la Hire : 285.
Hirst : 194, 195, 196, 202, 204, 220, 229, 235, 241, 384.
Hjemslew : 412, 440, 452.
Hlavaty : 440.
Hoefer : 2.
Hofmann (F.) : 174, 193.
Hofmann (L.) : 409.
Hofmann (Lulu) : 389.
Hölder : 34, 408, 412, 420.
Hollkroft : 303.
Holmgren : 378.
Holst : 19, 35.
Holzmüller : 207.
Hopf : 409.
de l'Hôpital : 36.
Hoppe : 129, 132, 134, 137, 138, 141, 155, 162, 163, 165, 213, 265, 266, 268, 269, 270, 271, 272.
Horseley : 16.
Hossfeldt : 169, 177, 235, 338.
Hostinsky : 348.
Hoüel : 246, 247, 250, 251, 252, 253, 254.
Howe : 395.
Huber : 330, 343.
Hudson (Hilda) : 390, 395, 397.
Hudson (P.) : 316.
Hudson (R. W. H. T.) : 327, 383, 415.
Hugi : 301.
Hugo : 10.
Humbert : 36, 47, 64, 68, 89, 94, 102, 103, 104, 109, 231, 295, 296, 298, 301, 306, 322, 327, 328.
Humboldt : 247.
Hun : 443.
Huntington : 412.
Hurwitz : 25, 26, 35, 55, 114, 118, 119, 237, 241, 298, 304.
Hutchinson : 323, 327, 329.
Huygens : 15, 285, 440.
Hyde : 288, 289, 446.

Igel : 60.
Ingold : 412, 441.
Intrigila : 66.
Ipparco : 212.
Ippia : 5, 6.
Ippocrate : 5.
Ipsicle : 7.
Irmer : 194.
Isocrate : 3.
Issaly : 353.

Jacobi : 13, 20, 23, 25, 27, 38, 45(47, 73, 82, 129, 161, 182, 197, 213, 426.
Jaeckel : 330.
Jahnke : 437, 443.
James (C. G. F. : 332, 339, 342, 422.
James (G. O.) : 438.
Jamet : 54, 71, 132, 308.
Janicefsky : 250.
Janisch : 330.
Janni : 182.
Jessop : 328, 382, 385.
Joachimsthal : 83, 86, 117, 142, 165, 328, 360.
Joerres : 51.
Johnson (A. R.) : 162, 340.
Johnson (W. W.) : 94, 201.
Jolles : 122, 137, 308, 323, 324, 341, 384, 391.
Joly : 330, 385, 446.
Jonas : 356, 357, 358.
de Jonquières : 33, 51, 63, 67, 73, 77, 78, 114, 186, 202, 204, 219, 227, 228, 229, 230, 231, 285, 299, 395, 400.
Jordan : 24, 89, 99, 172, 175, 265, 266, 267, 294, 373, 379.
Jouffret : 417.
Joung : 329.
Juel : 26, 29, 30, 60, 94, 208, 287, 309, 372, 375, 414, 452.
Juga : 361.
Juhnke : 83.
Julia : 345.
Jung (G.) : 49, 108.
Jung (H. W. E.) : 43, 178, 203, 209, 303, 336, 337.
Junker : 236.

Kagan : 406, 411, 414.
Kaliaum : 299.
Kanser : 321, 334.
Kant : 252, 262, 406.
Kantor : 57, 66, 69, 90, 104, 177, 199, 204, 205, 206, 210, 274, 306, 312, 314, 319, 324, 327, 338, 391, 393, 394, 397, 424, 425, 426, 431, 432, 434.
Kapferer : 303.
Karagiannides : 244, 261.
Karda : 351.
Kasner : 324, 399.
Kawaguchi : 368, 391, 440.
Kawkes : 446.
Keiser : 419, 424.
Kelland : 403.
Kelvey : 314.
Kelvin Lord : v. W. Thomson.

Kempe : 176, 441.
Kendal : 389.
Keplero : 6, 11, 14.
von Kerekjarte : 377.
Keyser : 432.
Kiefer : 387.
Kiepert : 66, 145.
Killing : 121, 254, 257, 261, 264, 268.
Kippels : 341.
Kirchner : 235.
Kirkman : 175.
Kleiber : 320.
Klein (B.) : 91, 215, 216, 280, 293, 294.
Klein (F.) : 46, 70, 89, 93, 98, 107, 124, 134, 169, 170, 171, 172, 175, 176, 178, 181, 182, 184, 185, 186, 197, 222, 249, 251, 256, 261, 265, 272, 277, 281, 286, 301, 310, 313, 374, 380, 403, 414, 427, 442, 445.
Klöres : 320.
Klug : 177, 322, 379, 419.
Kluyver : 25, 114, 121, 194, 242, 342.
Kneser : 35, 42, 128, 171, 408, 410.
Kniat : 327.
Knoblauch : 101, 141, 156, 165, 345, 350, 351.
Knoll : 434.
Knott : 288.
Kobb : 73.
Kober : 85.
von Koch : 297.
Koehler : 174.
Köhler : 52.
Koenigs : 107, 110, 133, 138, 140, 155, 158, 182, 184, 283, 347.
Kohn : 52, 53, 56, 61, 64, 87, 88, 91, 296, 297, 322, 323, 340, 380, 401, 422.
Kokott : 295.
Koller : 176.
Kölmel : 169, 309.
Kommerel (K.) : 345, 391, 416, 438.
Kommerell (V.) : 161, 165, 345, 350.
König : 369, 422.
Königsberger : 252.
Korkine : 213.
Korn : 100.
Korndörfer : 95, 125, 214, 215.
Korselt : 410, 412.
Kortum : 11, 144, 300.
Kortweg : 74, 172, 375.
Köstlin : 303.
Kötter : 52, 57, 169, 300, 320, 450.
Kowalewski : 346, 348, 400, 424, 426, 431, 436.
Kraft : 446.
Krames : 325, 333.
Kraus : 199.
Krause (A.) : 252.
Krause (K) : 39.
Krause (R.) : 212, 391.
Kretschner : 142.
Krey : 77, 216, 225, 231, 236, 242.
von Krieg : 219.
Kroman : 244.
Kronecker : 42, 109, 112, 265, 268, 293, 294.
Krüger : 118, 341.
Kruppa : 354, 409.
Kubota : 341, 448.
Kuhne (H.) : 438.
Kuhne (K.) : 419.
Kummer : 93, 96, 97, 98, 102, 104, 173, 189, 190, 191, 194, 311, 327, 328, 330, 363, 375, 379, 384, 389.
Kunnerth : 420.
Küpper : 25, 31, 48, 51, 56, 69, 95, 116, 188, 199, 237, 299, 305, 314, 337.
Kürschak : 403, 447.
Kwietniewski : 428.

Lampe : 29, 93, 102, 129, 223, 326.
Lancret : 127.
Landsberg : 266, 281, 377, 436.
Lane : 332.
Lange : 58, 100, 121, 308.
Lansberg : 22.
Laplace : 19, 23, 248, 351, 428, 433, 435.
Lardner : 16.
Lasker : 381, 446.
Lattès : 229.
Laufer : 348.
Laura : 365.
Laurent : 134, 418.
Laurin : 207.
Lazzeri : 205, 212, 216, 221, 381, 383.
Léauté : 121.
Lacaze : 319.
Lachlan : 94.
Lacour : 326, 328.
Lacroix : 20, 40.
Lafargue : 406.
Lagally : 352, 357.
Lagrange : 12, 19, 129, 134, 136, 137, 182, 212, 247, 248, 283, 291, 448.
Laguerre : 35, 45, 58, 63, 64, 66, 94, 96, 97, 118, 120, 121, 158, 160, 208, 216, 255, 298, 310, 353, 398.
de Lahire : 15.
Laisant : 167, 207, 287.
Lalan : 440.
Lamarle : 147, 286.
Lambert : 212, 246, 247, 250, 286, 406, 445.
Lamé : 39, 71, 100, 141, 161, 163, 182, 291, 314, 358, 359.
Lampariello : 348.
Landbserg : 304.
Lebesgue : 295, 300, 360.
Lebon : 108.
Lecornu : 108, 131, 143.
Lecxon : 323.
Lefschwetz : 430.
Lefschetz : 302.
Legaut : 337.
Legendre : 19, 23, 154, 246, 248, 249, 286, 407, 413.
Legoux : 230.
Lehmann : 15.
Lehmer : 327.
Leibniz : 6, 15, 17, 36, 161, 168, 262, 287.
Lejenne-Dirichlet (v. Dirichlet)
Lelieuvre : 119, 138, 140, 295, 342, 363, 447.
Lem : 347.
Lemoine : 444.
Lemoyne : 307, 402.
Lennes : 412.
Leone : 6.
Le Paige : 58, 63, 64, 90, 207, 222, 264.
Lery : 384.
Leslie : 16.
Levi (A.) : 317.
Levi (B.) : 36, 298, 316, 338, 407, 410, 412, 425, 429.
Levi (E. E.) : 355, 436, 439.

Levi (F.): 382.
Levi-Civita: 155, 347, 435, 437, 438, 439.
Levistal: 189.
Lévy: 164, 358.
Lewis (F. P.): 268, 340.
Lewis (T. C.): 420, 434.
Libri: 1, 9.
Lichtenfels: 139.
Lie: 22, 46, 50, 70, 97, 98, 107, 124, 132, 136, 143, 146, 154, 155, 157, 158, 184, 192, 208, 223, 252, 253, 260, 265, 282, 285, 293, 294, 326, 333, 334, 339, 341, 349, 350, 352, 353, 360, 364, 387, 392, 399, 400, 403, 413, 427, 428, 436, 448.
Liebheit: 95.
Liebmann: 34, 89, 295, 320, 352, 357, 369, 377, 394, 399, 404, 405, 407, 408, 410, 413.
Lilienthal: 144, 148, 151, 156, 158, 160, 189, 345, 349, 351, 353, 354, 358.
Lindelöf: 29, 295, 378.
Lindemann: 45, 72, 203, 231, 240, 259, 261, 286, 371, 379, 405, 417, 442.
Linneborn: 415.
Liouville (J.): 34, 79, 82, 129, 133, 134, 135, 150, 152, 154, 158, 217, 266, 300, 396.
Liouville (R.): 157, 201, 213.
Lipschitz: 144, 157, 160, 259, 265, 267, 366.
Listing: 175, 176, 375.
Livet: 81.
Lloyd: 100.
Lobacefsky: 244, 246, 249, 250, 251, 260, 377, 403, 404, 407, 408, 410, 411.
Locchi (Pia): 343.
Loewy: 432.
Löffler: 304.
Lo Monaco Aprile: 317.
London: 57, 84, 123, 199, 222, 300, 321, 391, 422.
Long: 311.
Longhi: 312.
Longo: 338.
Lo Piano: 334.
Lorenzola: 427, 429.
Loria: 12, 15, 34, 46, 48, 51, 56, 80, 94, 96, 108, 111, 113, 119, 121, 131, 151, 156, 173, 186, 187, 192, 195, 218, 220, 258, 273, 281, 284, 297, 307, 323, 334, 339, 341, 343, 348, 349, 355, 366, 385, 396, 399, 419, 421, 426, 435, 442, 445.
Lotze: 244, 445.
Lovett: 400, 433, 435.
Lovisant: 444.
Lucas: 208, 447.
Lücktenmeyer: 378.
Lüroth: 30, 49, 62, 67, 106, 133, 155, 174, 197, 205, 232, 256, 258, 314, 353, 447.
Ludwig: 54, 408.
Lyon: 133.

Macaulay: 304, 407, 430.
Mac Cullagh: 82, 99.
Macfarlane: 288, 447.
Machover: 192.
Maclaurin: 15, 33, 54.
Mac-Leod: 405.
Mac-Mahon: 66.
Maennchen: 295.
Magnus: 112, 120, 197, 200, 203, 217.
Maillard: 232.
Maillet: 373, 413.
Mainardi: 78, 136, 153, 352, 368.
Maisano: 45, 66.
Majcen: 324, 325, 329.
Malet: 41.
Malfatti: 45, 273.
Malus: 138, 189, 259, 388.
Manchester: 303.
Mancinelli: 332.
Manfredini: 309, 311, 356.
Mangeot: 298, 315.
Mangodolt: 141, 155, 345.
Mannheim: 96, 100, 129, 131, 150, 160, 165, 189, 217, 285, 295, 328, 329, 347, 441.
Mannoury: 420, 428.
Mansion: 191, 202, 246, 249, 259, 260, 261, 405, 409, 414.
Marcks: 79.
Marcolongo: 213.
Markoff: 25.
Marletta: XII, 320, 330, 331, 338, 343, 344, 393, 394, 398, 421, 422, 424, 425, 426, 427, 431, 433, 441.
Martinetti: 25, 48, 56, 58, 177, 178, 188, 205, 219, 380, 381, 382, 402.
Mascheroni: 10, 444.
Maschke: 138, 164, 179, 204, 315, 437.
Masoni: 191, 212.
Mathet: 145.
Mathieu: 100.
Matthiessen: 190.
Maupertuis: 36.
Maurer: 145.
Maurolico: 16.
Maxwell: 173, 186, 217.
Mayor: 381, 383.
Meder: 338.
Medici: 421.
Medolaghi: 359.
Mehler: 163, 266, 358.
Mehling: 363.
Mehmke: 118, 151, 271, 289, 352, 447, 448.
Menecmo: 6.
Menelao: 8, 20.
Menger: 374.
Mention: 25.
Menzel: 193.
Méray: 20, 86, 320.
Mercatanti: 364, 416.
Mercatore: 212.
Mercuri: 424.
Merlin: 438.
Mertens: 184.
Meusnier: 134, 136, 149, 438.
Meyer (E.): 64, 342, 383, 385, 391, 412.
Meyer (W. Franz): 64, 67, 114, 119, 122, 170, 171, 172, 280, 285, 295, 322, 325, 342, 345, 380, 409, 438, 442, 443.
Meyer (Th.): 86.
Michel (C.): 300.
Michel (P.): 355.
Miglio: 424, 428.
Milinowski: 56, 58, 63, 66, 90, 120, 373.
Miller: 439.
Minding: 35, 139, 149, 152, 155.
Mineo: 317.
Minkowski: 291, 378.
Mlodzieiowski: 153, 350, 355, 393.
Möbius: 27, 28, 29, 67, 116,

168, 172, 174, 175, 186, 190, 197, 201, 208, 257, 272, 351, 375, 399, 422, 426.
Möller : 131, 217.
Mohr : 444.
Mohrmann : 330, 332, 337, 342, 371, 386, 405, 413, 426, 438, 447.
Molenbroeck : 287, 446.
Molins : 129, 130, 131, 133, 140, 141, 159, 164, 359.
Molke : 300.
Mollerup : 410.
Monge : 12, 18, 19, 20, 21, 22, 80, 81, 82, 105, 127, 133, 134, 135, 136, 137, 141, 144, 154, 159, 189, 213, 214, 217, 344, 366, 448, 451.
Monro : 268.
Montag : 210.
Montel : 375.
Montcheuil : 360, 362, 363.
Montesano : 85, 95, 119, 123, 191, 193, 194, 198, 219, 220, 221, 283, 326, 328, 330, 339, 384, 393, 394, 395, 396, 397.
de Mantessus de Ballore : 342.
Moore (C. L. E.) : 329, 422, 438.
Moore (E. Hastings) : 179, 279, 382, 410, 412, 431.
Moore (R. L.) : 377, 412, 413.
Morale : 385, 429, 431.
Moreno : 429.
Morera : 160.
Morgan (de) : 247.
Morgan (F. M.) : 395, 396.
Morin : 160.
Morley : 312, 313, 324, 380, 434, 442.
Morse : 354.
Most : 259.
Moutchot : 296.
Moulton : 410.
Moutard : 25, 77, 78, 93, 97, 153, 163.
von der Mühl : 396.
Müller (E.) : 53, 57, 85, 117, 188, 189, 296, 322, 352, 361, 365, 383, 391, 421, 441, 446.
Müller (F.) : 328.
Müller (R.) : 271.
Müller (W) : 313.
Münich : 416.
Müntz : 412, 413.
Murdoch : 168.
Murhard : 249.
Muth : 199.
Mydorge : 11.
Myller : 348.

Naccari : 446.
Nagel : 64.
Nagy (A.) : 290.
Nagy (J. v. Sz.) : 298, 374.
Nakajima : 370.
Nannei : 159.
Nasir-Eddin : 245.
Natucci : 422.
Nauson : 419, 422.
Navier : 131.
Nédélec : 446.
Neeley : 312.
Nelson : 406.
Nencini : 392.
Neovius : 147.
Netto : 42.
Neuberg : 294, 312, 342, 386, 442, 443.
Neuendorff : 351.
Neumann (C.) : 34, 79, 295.
Neumann (H.) : 320, 321.
Neville : 409.
Newcomb : 264, 272, 417.
Newmann : 168.
Newson : 390, 399.
Newton : 6, 12, 15, 17, 32, 33, 51, 54, 62, 167, 168, 169, 300.
Nichols : 313.
Nicole : 33, 168.
Nicoletti : 361, 379.
Nicomede : 7, 65.
Nielsen : 377.
Nitz : 445.
Niven : 100.
Nievenglowski : 129, 131, 145.
Nobile : 397.
Noevius : 361.
Nöther (E.) : 303.
Nöther (M.) : 24, 29, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 55, 59, 63, 68, 73, 75, 76, 77, 104, 115, 185, 203, 209, 215, 218, 219, 274, 275, 303, 311, 318, 337, 392, 393, 400, 430, 450.
Nügtern : 343.
Nyberg : 367.

Obsborne : 398.
d'Ocagne : 300.
Ogivara : 368.
Ogura : 352.
Olivier : 51, 127.
Omerique : 13.
Onali : 337.
Opitz : 267.
Oppenheimer : 221, 299, 310.
Oppermann : 443.
Oresme : 13.
Osgood : 199, 314, 373.
Ostwald : 375.
Ota : 409.
Otra : 391.
Ovens : 418.
d'Ovidio : 56, 85, 105, 118, 119, 183, 187, 247, 257, 281, 305, 346, 388, 422, 434.

Paci : 146.
Pacioli : 10.
Padoa : 411.
Padova : 157, 162, 164, 260.
Padula : 41, 65, 147.
Page : 400.
Pagliano : 429.
Painlevé : 109, 306, 319, 334.
Painvin : 42, 43, 66, 74, 132, 149, 150, 193, 194, 228.
Palatini : 401, 413, 424, 428, 429, 430, 433.
Pannelli : 88, 103, 114, 186, 195, 210, 211, 220, 315, 317, 395, 430.
Panzi : 303.
de Paolis : 20, 50, 52, 89, 99, 174, 175. 182, 209, 219, 220, 221, 222, 256, 258, 450.
Pappo : 8, 10, 20, 111, 412.
Parent : 17, 72, 90.
Pascal (B.) : 11, 81, 91, 176, 379, 432.
Pascal (E.) : 34, 63, 88, 98, 104, 123, 327, 330, 374, 375.
Pasch : 24, 44, 67, 183, 199, 254, 256, 383, 405, 411, 412.

Pasquini : 348.
Pastori : 352.
Patrassi : 310.
Peano : 211, 254, 286, 287, 289, 412, 446.
Peche : 148, 361.
Péclet : 262.
Peet : 4.
Pell : 322.
Pellet : 131, 358, 437.
Pensa : 330, 332, 348, 419.
Perazzo : 397, 421, 424, 427.
Pereno : 95.
Perna : 298, 347.
Perrin : 170.
Perron : 133.
Perseo : 7, 65.
Peter : 334.
Peters : 39.
Petersen : 260, 383, 415, 441.
Peterson (K.) : 350.
Peterson (V.) : 105.
Petot : 123, 143, 158, 164, 222.
Petr : 295.
Petri : 305.
Petronievisc : 404, 406.
del Pezzo : 50, 73, 86, 133, 175, 182, 185, 198, 241, 267, 277, 278, 279, 282, 331, 393, 396, 418, 431.
Piazza : 211.
Picard : 59, 65, 68, 76, 97, 109, 127, 141, 188, 318, 319, 334, 335, 336.
Picart : 142, 163, 165, 253.
Piccioli : 420, 434.
Pick : 184, 369.
Picone : 358, 388.
Picquet : 59, 84, 88, 114.
Pieri : 29, 36, 42, 79, 104, 114, 186, 220, 221, 237, 243, 254, 265, 282, 283, 297, 315, 339, 346, 383, 386, 387, 396, 410, 418, 428.
Pierpont : 404.
Pilgrim : 271, 316.
Pilot : 11.
Pincherle : 145, 391.
Pionchon : 86.
Piper : 169.
Pirondini : 131, 133, 140, 141, 143, 159, 161, 217, 266, 359, 363, 416.
Pitagora : 5, 406, 407, 419.
Pittarelli : 60, 91, 106, 118, 124.
Plamiker : 299.
Plamitzer : 334.
Plateau : 146, 361.
Platone : 3, 5, 6.
Plücker : 22, 27, 30, 31, 35, 38, 39, 40, 42, 51, 54, 61, 62, 73, 74, 77, 82, 84, 85, 93, 100, 106, 113, 150, 168, 169, 170, 180, 181, 182, 183, 186, 189, 200, 211, 214, 275, 282, 283, 284, 288, 301, 302, 338, 449, 450.
Poggendorff : X.
Pohlke : 409.
Poincaré : 24, 35, 76, 113, 127, 174, 260, 267, 269, 294, 298, 319, 336, 354, 376, 377, 393, 405, 419, 420.
Poinsot : 291.
Poisson : 19, 40, 145, 149.
de Polignac : 175, 378.
Pomey : 128.
Poncelet : 11, 12, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 30, 35, 40, 74, 75, 77, 92, 120, 177, 197, 200, 217, 255, 294, 322, 340, 448.
Porchiesi : 185.
da Porto : 423.
Poudra : 11.
Prasad : 350, 362, 378.
Predella : 276, 413, 423.
del Prete : 421.
Probst : 159.
Proclo : 8.
Pucci : 138.
Puctha : 164, 266, 267, 270.
Puiseux : 25, 70, 129, 152, 163.
Pyrkosch : 294.

Queirós : 410.
Quetelet : 69, 99, 189, 246, 263.

Racolins : 443.
Radon : 369, 370.
Raffy : 47, 140, 144, 153, 158, 159, 345, 360, 363.
Ragsdale : 372.
Rahnsen : 272.
Ramorino : 296, 348.
Ranum : 348, 429, 438.
Rath : 127, 435.
Rausenberger : 414.
Ravier : 84.
Razzaboni : 142, 148, 153, 159, 217, 363.
del Re (A.) : 104, 123, 194, 195, 198, 212, 329, 338, 384, 419, 422.
del Re (Maria) : 397, 434.
Rebs : 361.
Redemeister : 367, 369.
Reech : 172.
Reichardt : 98.
Reidmeister : 369.
Reina : 138, 156, 157, 253.
Reinhardt : 175.
Rémy : 329.
Résal : 139, 165.
Retali : 202.
Réthy : 258, 414.
Reuleaux : 96.
Révillout : 4.
Rey-Pastor : 300, 450.
Reye : 57, 64, 73, 78, 83, 85, 87, 88, 92, 97, 98, 99, 117, 120, 121, 168, 177, 184, 187, 192, 197, 199, 200, 204, 205, 220, 221, 283, 286, 293, 321, 322, 323, 333, 341, 384, 385, 390, 391, 432.
Reyes y Prosper : 256.
Rhind : 3.
Ribaucour : 141, 142, 145, 148, 153, 160, 163, 165, 357, 365, 388, 437.
Ricca : 387.
Ricci (Giovanni) : 365.
Ricci (Gregorio) : 155, 156, 158, 162, 264, 265, 271, 346, 354, 366, 435, 436, 437.
Rice : 368.
Richelot : 23, 197, 286.
Richemond : 91, 305, 312, 343, 349, 360, 408, 423, 426, 432.
Richter : 65, 311.
Ricordi : 257.
Riemann : 62, 145, 171, 174, 175, 207, 252, 253, 261, 263, 413, 416, 437, 439.
Riess : 373.

Rimini : 436.
Rindi : 79.
Ripert : 443.
de la Rive : 264, 448.
Roberts (A.) : 58.
Roberts (M.) : 82, 146, 147.
Roberts (R. A.) : 64, 66, 67, 79, 122, 125, 296, 301, 309, 310, 312, 313, 322.
Roberts (S.) : 101, 203, 254, 281.
Roberts (W.) : 100, 118, 163.
Roberts (W. R. W.) : 313.
Roberval : 14, 285.
Roccella : 193.
Roch : 61.
Rodenberg : 90, 172, 279, 379, 441.
Rodrigues : 137, 148, 213, 351.
Roelke : 362.
Roger : 149, 162.
Rogers : 24.
Rohn : 66, 73, 74, 84, 89, 92, 98, 102, 123, 172, 173, 295, 308, 314, 320, 321, 322, 326, 337, 372, 375, 381, 402, 444.
Rosa : 423.
Rosanes : 24, 86, 97, 177, 199, 203, 222, 252, 261.
Rosati : 306, 311, 326, 327, 426.
Rosermann : 413.
Rosen : 69.
Rosenblatt : 332, 336, 337, 372.
Rosenow : 60.
Rosenthal : 372, 377, 371, 412.
Rossi : 388.
Roth : 331, 421.
Rothe (H.) : 445.
Rothe (R.) 101, 346, 363.
Röthig : 141, 158.
Rouché : 35, 405, 442, 443, 444.
Rouchonnet : 347.
Rouquet : 129, 130, 131, 142, 193, 309, 347, 349, 359.
Rouyer : 329.
Rowe : 313.
Royce : 412.
Rudel : 269, 271.
Rudert : 447.
Rudio : 95, 137, 423.
Rudolf : 262.
Ruffini : 204.
Ruggeri : 364.
Ruif : 412.
Roussel : 57, 392, 405, 451.
Ruth : 86.

Saccheri : 246, 247, 249, 250, 404, 406, 407.
Sadowski : 434.
de Saint-Germain : 131.
Saint-Venant : 127, 128, 129.
Salkowski : 72, 134, 344, 345, 347, 348, 349, 355, 365, 369, 416.
Salmon : 44, 51, 54, 55, 72, 75, 87, 89, 106, 113, 122, 203, 232, 237, 256, 283, 293, 304, 308, 326, 401.
Saltel : 96, 125, 202, 219, 236, 238, 240, 241.
Salvatore - Dino : 105, 114, 229.
de Salvert : 149, 151, 164.
Sancto Vincenzo : 15.
Sannia : 199, 347, 348, 367, 368, 369, 385, 389.
Sansone : 365.
Sapalski : 20.
Sauer : 352, 382.
Saurin : 36.
de Saussure : 273, 300, 383.
Savile : 12.
Sbrana : 364, 388, 416, 437, 438.
Sceffer : 269.
Schafstein : 265.
Schaumberger : 386.
Schaw : 446.
Schatz : 389.
Schatunowski : 414.
Scheeffer : 268.
Scheffers : 22, 50, 126, 192 223, 297, 345, 349, 353, 361, 363, 399.
Scheibner : 408.
Schell (A.) : 291.
Schell (W.) : 133, 347.
Schellbach : 328.
Schepp : 254.
Schering : 27, 154, 248, 259, 264, 267.
Scherk : 145.
Schiaparelli : 200.
Schick : 443.
Schilling (B.) : 400.
Schilling (C.) : 146.
Schilling (F.) : 371, 405.
Schimmack : 447.
Schläfli : 87, 90, 163, 172, 264, 273, 418, 422.
Schlegel : 52, 269, 270, 271, 272, 273, 288, 289, 417, 419, 445.
Schleiermacher : 295.
Schlesinger (L.) : 404, 408.
Schlesinger (O.) : 58, 59, 69.
Schlumberger : 432.
Schmeidler : 430.
Schmid : 223, 254, 323, 385.
Schmidt (A.) : 204.
Schmidt (Fr.) : 403, 404.
Schmitz : 314.
Schober : 295.
Schoelcher : 329.
Schollmeyer : 410.
Schönemann : 285.
Schöner : 195.
Schönfliess : 38, 73, 86, 148, 177, 178, 196, 219, 286, 349, 373.
Schondorff : 147.
Schooten : 14, 16, 17.
Schor : 410.
Schoute : 25, 36, 60, 65, 67, 89, 193, 202, 207, 268, 270, 301, 414, 417, 420, 423, 427, 431.
Schouten : 347, 367, 413, 435, 440.
Schottky : 103, 268, 308, 317.
Schröter : 29, 55, 61, 66, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 97, 99, 117, 119, 121, 177, 178, 198, 286.
Schubart : 426.
Schubert (H.) : 47, 77, 106, 119, 185, 222, 232, 233, 235, 240, 242, 243, 281, 401, 402, 417, 419, 421, 433.
Schubert (T. F.) : 120.
Schumacher (H. C.) : 248.
Schumacher (R.) : 53, 185, 191, 194, 386.
Schur (A.) : 388.
Schur (F.) : 25, 53, 57, 66, 78, 90, 103, 186, 187, 192, 256, 264, 268, 321, 322, 384, 408, 410, 411, 412.
Schverk : 420.
Schwan : 413.

Schwarz : 68, 76, 105, 106, 144, 145, 146, 293, 294, 361.
Schweinkart : 249, 250.
Schweitzer : 410, 412.
Schweting : 296.
Scorza : 16, 306, 309, 310, 311, 319, 326, 423, 433.
Scott : 42, 59, 209, 305, 372, 414.
Segen : 93.
Segre (B.) : 425, 426, 434, 435.
Segre (C.) : 29, 30, 47, 48, 49, 50, 53, 62, 69, 74, 94, 98, 101, 102, 116, 173, 174, 183, 184, 185, 192, 193, 198, 199, 220, 235, 260, 273, 276, 277, 278, 279, 280, 282, 293, 296, 303, 304, 316, 324, 334, 352, 364, 385, 387, 388, 390, 392, 398, 399, 404, 413, 418, 424, 425, 429, 433, 434, 439.
Semikolenow : 406.
Sereno : 8.
Serret (A.) : 70, 126, 128, 142, 146, 147, 151, 312, 347.
Serret (P.) : 50, 58, 86, 120, 134.
Servais : 55, 118, 321, 340, 342, 385.
Servant : 351, 355, 416.
Servois : 20.
Sesostri : 3.
Severi : 41, 304, 305, 306, 319, 335, 336, 338, 375, 402, 425, 429, 430, 432, 434, 438, 451.
Seydewitz : 84, 116, 200.
Sforza : 30, 301, 420.
Sharpe : 306, 328, 395, 379.
Siacci : 247, 348.
Sibirani : 346, 348, 352, 365.
Siebeck : 58, 65, 66, 207.
Signorini : 356, 417.
Sikstel : 407.
Sildorf : 187.
Simart : 42, 318.
Simon (M.) : 24, 260, 261, 407, 413.
Simon (P.) : 157, 257, 258.
Simony : 176.
Simson : 15.
Sinigaglia : 361.
Sintzoff : 359.
Sisam (C.) : 330, 332, 425.
Sisam (C. H.) : 319, 331, 332, 365. 439.
Slaught : 431.
de Sluse : 36.
Smith (A.) : 100.
Smith (A. W.) : 350.
Smith (B.) : 364.
Smith (H. J. S.) : 11, 26, 30, 32, 35, 42, 58, 70, 197, 250, 300, 390.
Smith (P. F.) : 329, 352, 398.
Snellio : 22.
Snyder : 302, 306, 327, 328, 331, 332, 333, 336, 374, 395, 397, 398, 422, 427.
Sobotka : 114, 118, 341.
Socrate : 6.
Sohnke : 209, 444.
Somigliana : 406.
Sommer : 305, 423.
Sommerfeld : 358.
Sommerville : 405, 408, 416, 418, 420.
Somoff : 291.
Sonin : 25.
Sousley : 323.
Spampinato : 320, 337, 427, 434, 441.
Speiser : 452.
Spencer : 291.
Spieweck : 348.
Sporer : 300, 306, 308.
Spottinswoode : 44, 113, 231, 283.
Stahl (H.) : 165, 258, 345.
Stahl (W.) : 64, 67, 122, 124, 125, 187.
Staigmüller : 178.
Stäkel : 133, 152, 153, 154, 158, 245, 246, 248, 249, 268, 350, 351, 352, 354, 360, 361, 363, 374, 375, 379, 403, 404, 408, 437.
Stallo : 244.
Staude : 80, 83, 128, 320, 321, 323, 342.
Staudt : 27, 29, 30, 52, 81, 84, 87, 117, 120, 121, 166, 180, 251, 284, 286, 296, 411, 448.
Steed : 427.
Steeker : 309, 385.
Stegmann : 414.
Steiner : 7, 11, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 34, 45, 51, 52, 55, 56, 60, 61, 65, 79, 84, 86, 87, 93, 96, 97, 100, 104, 109, 113, 115, 122, 145, 155, 173, 177, 180, 200, 201, 211, 213, 215, 226, 227, 228, 273, 281, 312, 324, 326, 327, 330, 378, 427, 444, 449.
Steinitz : 379, 380, 381, 382.
Steinmetz : 124, 209, 210, 221.
Stenfors : 324.
Stéphanos : 35, 178, 199, 208, 211, 442.
von Sterneck : 179, 381.
Stewart : 16.
Stifel : 262.
Stiner : 60, 312, 314, 394.
Stirling : 32, 168.
Stoltz : 108, 128.
Stolz : 30, 41.
Story : 116, 257, 287, 411.
Stouff : 361, 419.
Strabone : 3.
Stransk : 416.
Strazzeri : 352, 355, 365.
Stringham : 269, 287, 432.
Stromquist : 410.
Struik : 367, 439, 440.
Stuart : 312.
Stubbs : 201.
Study : 11, 51, 98, 122, 241, 242, 271, 284, 296, 330, 348, 360, 383, 401, 405, 408, 412, 415, 442, 447, 448.
Stupuy : 149.
Sturm (C.) : 69, 144, 189.
Sturm (R.) : IX, 9, 28, 29, 30, 46, 54, 55, 79, 83, 84, 85, 87, 88, 89, 93, 97, 107, 114, 116, 117, 118, 122, 146, 188, 191, 194, 198, 207, 221, 233, 235, 243, 293, 321, 322, 323, 324, 341, 352, 374, 383, 386, 390, 392, 396, 402, 444.
Stuyvaert : 298, 315, 317, 333, 340, 342, 343, 386, 398.
Sucharda : 96, 325.
Süss : 370, 413.
Sullivan : 364.
Suppantisch : 328.
Suter : 10.
Suworoff : 265.

Sylow : 46.
Sylvester : 55, 65, 87, 100, 110, 180, 273, 285, 288, 290, 293, 294, 304.

Tacchella : XII.
Tafani : 431.
Tagliaferri : 360.
Tait : 170, 176.
Takasa : 349.
Takasura : 440.
Talete : 5.
Tallquist : 147.
Tanneberg : 349, 351.
Tannery (J) : 118.
Tannery (P.) : 13, 252.
Tanturri : 425, 429.
Tappan : 313.
Tarry : 248.
Tartaglia, 10.
Taurinus : 249, 250, 403.
Taylor (C.) : 12, 21, 33.
Taylor (H. M.) : 90, 308, 309, 324, 374.
Tchébytcheff : 25, 138.
Teixeira : 307, 310.
Tempel : 385.
Teone : 8.
Terquem : 79, 285.
Terracini : 48, 310, 324, 332, 357, 365, 368, 388, 423, 433, 440.
Tesorone : 281.
Thaer : 420.
Thieme : 53, 85, 90, 91, 299.
Thienemann : 148.
Thomae : 84, 171, 211, 256, 294, 295, 308, 309, 311, 312, 320, 331, 340, 342.
Thomsen : 369, 370.
Thomson (A. P.) : 426.
Thomson (W.) : 170, 201, 293.
Thybaut : 355.
Tiercy : 437.
Tietze : 377, 420.
de Tilly : 246, 259, 260, 261.
Timerding : 118, 298, 311, 326, 327, 339, 340, 343, 385, 398, 432.
Tinseau : 127.
Tirelli : 257.
Tissot : 213.
Toeplitz : 61, 120, 242.
Togliatti : 320, 330, 331, 368, 421, 423, 428, 434.
Tognoli : 187, 216, 220, 229, 231, 240.
Tolomeo : 7, 8, 212, 245, 250.
Tonelli : 267, 268.
Torelli : 305, 306, 314, 336, 375, 430.
Torrey : 398.
Torricelli : 14, 15.
Torroja y Miret : 421.
Tortorici : 357, 360.
Tötössy : 95.
Townsend : 82.
Toxopeus : 423.
Tracey : 313.
Trainard : 328, 331.
Transon : 150, 189, 200.
Traub : 407.
Trudi : 24.
Tschetweruchin : 413.
Tucker : 35.
Tummarello : 331, 397.
Tummers : 406.
Turner : 310.
Turrière : 334, 388.
Tweedie : 32.
Tzitzeica : 349, 368.

Umpfenbach : 73.
Uven : 325.

Vahlen : 97, 112, 264, 294, 300, 326, 410, 414, 428.
Vailati : 404.
Valée : 127.
Valentiner : 50, 55, 115, 447.
Valeri : 118.
de la Vallée-Poussin : 406.
Valson : 99.
Valyi : 59, 121, 380.
Vanecek : 78.
de Vargas y Aguire : 307.
Vasilieff : 250, 403.
le Vasseur : 349, 432.
Vassura : 15.
Veblen : 373, 412, 418, 420.
Veneroni : 339, 342, 386, 387, 395, 398, 425, 427, 431.
Venske : 133.
Verhulst : 99.
Vermeil : 438.
Veronese : 46, 94, 177, 182, 254, 255, 261, 272, 274, 275, 277, 278, 279, 282, 293, 326, 338, 406.
Versluys : 301.
Verzi : 320.
Vesalio : 250.
Vessiot : 200, 345, 370, 440.
Vieille : 150.
Viète : 11, 16, 22.
Vietor : 177.
Vigarié : 289.
Villarceau : 95, 329.
Visalli : 108, 194, 195, 209, 210, 235, 386, 421.
Visconti : 382.
Vital de Porte : 306.
Vitali : 365, 435, 441.
Viterbi : 360.
Vivanti : 24, 141, 144, 148, 151, 360.
Viviani : 16.
Vogt : 86, 120, 321, 341.
Voizot : 128, 130.
Volterra : 76, 154, 266.
Voretsch : 143.
Voss : 26, 43, 46, 62, 77, 79, 85, 89, 106, 112, 118, 138, 149, 150, 159, 185, 198, 214, 221, 265, 274, 345, 348, 352, 357, 363, 364, 365, 416.
Voulet : 388.
de Vries (H.) : 177, 178, 179 208, 300, 324, 408, 421.
de Vries (J.) : 59, 63, 66, 302, 311, 327, 328, 333, 339, 340, 343, 344, 346, 386.

Wachter : 403.
Wakeford : 341.
Wälsch : 25, 119, 158, 184, 187, 190, 277, 281, 302, 323, 363, 443.
Walker : 309.
Wallis : 14, 15, 245, 248.
Wallstraff : 397.
Walter : 55.
von Walterhausen : 27, 249, 262.
Walther : 187.
Wangerin : 135, 212.
Wantzel : 34, 146.
Waring : 33.
Warren : 150, 162.
Wartburg : 385.
Weatherburn : 345.
von Weber : 138, 321, 383, 393, 398.
Weber : 42, 62, 98, 327, 328, 388, 405.
Weddle : 57, 103, 208.

Wedekind : 208.
Weicholdt : 171.
Weierstrass : 96, 100, 145, 293, 310.
Weiler : 94, 107, 187, 190, 192, 193, 194.
Weingarten : 137, 142, 143, 144, 148, 153, 155, 157, 162, 190, 259, 265, 351, 354, 359, 360.
Weinholdt : 330.
Weill : 295.
Weiss (E. A.) : 387.
Weiss (S.) : 402.
Weiss (W.) : 302, 304.
Weitzenböck : 421, 423.
Wellstein : 348, 365.
Weltzien : 67, 70.
Wendersen : 324.
Wendler : 364.
Wenzel : 197.
Wernicke : 378, 420.
Wessel : 287, 445, 447.
Westphal : 26, 121.
Weyer : 17, 341.
Weyl : 252, 370, 377, 439.
Weyr (Ed.) : 25, 60, 107, 112, 123, 124.
Weyr (Em.) : 4, 52, 56, 58, 60, 67. 68, 69, 91, 104, 107, 117, 118, 122, 123, 124, 204.
Weyrich : 352.
White (F. P.) : 434.
White (H. S.) : 61, 199, 308, 309, 318, 342, 374, 390.
Whitehead : 412, 416.
Whittemore : 361.
Wiegner : 363.
Wieleitner : 297, 307.
Willczinski : 331, 332, 339, 364, 367, 368, 389, 417.
Willgrod : 142.
Wiener : 61.
Wilkinson : 351.
Williams (A. R.) : 330.
Williams (F. W.) : 330, 332.
Williams (W. L. G.) : 308.
Wilson : 408, 409.
Wiman : 56, 106, 394, 226, 314, 372.
Winants : 352.
Winger : 313.
Winternitz : 369.
Wirtinger : 56, 102, 119, 280, 327, 344, 354, 415.
de Witt : 14.
Witting : 179.
Witzenboch : 369.
Woepcke : 38.
Wogt : 392.
Wolf : 197.
von Wolf : 443, 445.
Wölffing : 298, 315, 328, 338, 339, 346.
Wolstenholme : 266.
Wodd (P. W.) : 342.
Wodd (R. G.) : 390.
Woods : 361, 405, 416.
Wren : 80, 397.
Wright : 358.
Wythoff : 423.

Young (A. E.) : 364.
Young (G. H.) : 424.
Young (Grace) : 373, 428.
Young (J. W.) : 396, 412.
Young (W. H.) : 373, 409, 419.

Zacharias : 324, 326, 409.
Zangl : 324.
Zech : 100, 190.
Zeemann : 361.
Zeller : 4.
Zenodoro : 7.
Zenone : 5.
Zeuthen : 12, 38, 42, 43, 48, 64, 74, 75, 76, 83, 84, 85, 90, 94, 113, 129, 169, 170, 171, 172, 173, 183, 230, 231, 232, 236, 237, 241, 242, 256, 294, 401, 402, 411.
Zimmermann (F.) : 329.
Zimmermann (O.) : 299, 301, 302.
Zindler : 188, 282, 381, 382, 388.
Zöllner : 272, 723.
Zoll : 363.
de Zolt : 257.
Zoppritz : 213.
Zorawski : 364, 400.
Zoukis : 381.

⁂