SAGGIO

DI

RICERCHE

SULL' INTENSITÀ DEL LUME,

DI

VITTORIO FOSSOMBRONI

ARETINO.

. . . . Haec ego mecum
Compressis agito labris: ubi quid datur oti
Illudo chartis . . . .

HOR. Sat. IV, Lib. I.

IN AREZZO,

Presso la Vedova BELLOTTI, Stampat. Vescov. all'Insegna del PETRARCA.

M. DCC. LXXXI.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

7A3

DISCORSO

PRELIMINARE

INTORNO AI PROGRESSI

DELLE

MATEMATICHE.

LA tranquilla ragione paziente indagatrice della verità, e la fervida immaginativa intollerante di freno sogliono essere riguardate come nemiche fra loro. Veramente, sebbene non si escludano affatto, anzi talvolta si prestino ancora amichevolmente la mano, e la nuda, rozza verità rivestita dei colori della fantasìa, ed ornata delle sue grazie si renda più accetta agli occhi degli uomini: tuttavia non può negarsi, che queste due facoltà dell' animo siano le sorgenti di studj totalmente diversi. Quella inoltrandosi con lento, ma sicuro passo al Tempio della Sapienza, e rischiarando le misteriose tenebre, onde la natura ha velati i suoi arcani, misura la terra, stabilisce i confini ai reciproci moti dell' Oceano, si rende quasi padrona del fulmine, e talora slanciandosi con ardito volo per gl' interminabili spazj dell' Universo, misura le distanze degli Astri, calcola la forza, per cui corrono regolatamente i Pianeti, e giunge fino a tracciare i sentieri varj tanto, e diversi delle Comete.

La fantasìa poi prende a lusingare i sensi, ed ora nelle colorate tele, e nei spiranti marmi imita, e pareggia le opere di natura; ora desta nell'anima per l'udito coll'inarticolata armonica voce passioni dolci, ed incogniti moti; ora animando le labbra di *Tullio*, e di *Demostene* trae insensibilmente ove più le aggrada gli animi degli ascoltanti; e finalmente nel vivo figurato linguaggio delle Muse riunisce insieme quelle forze soavi, colle quali la Pittura, la Musica, e l' Eloquenza separatamente ci dilettano.

Quella illumina placidamente l' intelletto: questa dolcemente lusinga il cuore: quella ammette pochi ai suoi profondi misteri: al contrario non vi ha quasi alcuno, che non senta toccarsi più, o meno dalle arti di questa. Ma se quella nello sviluppare i segreti della Natura puo' sempre avanzarsi, e ne' suoi progressi và continuamente perfezionandosi, e scoprendo un' orizzonte più vasto, non è così delle arti figlie della immaginativa. Sembra, che ad esse siano stati prescritti certi limiti, oltre i quali se ardiscano inoltrarsi, in vece di acquistare perfezioni nuove, e bellezze, vanno decadendo. La sperienza ci mostra, che hanno avuto sempre questa sorte. All' aurea semplicità, alla maschia robustezza degli eleganti Scrittori sono sempre succeduti lo stile ricercato, il falso brillante, e gli ornamenti puerili: ai *Tullj*, ai *Virgilj* sono successi i *Seneca*, i *Lucani*, ai *Michelangioli*, i *Borromini*. Non sanno gli uomini in queste arti fermarsi, ove principia l' eccesso: l' amore della novità trasporta gli artefici, e seduce gli ammiratori di essi; quelli sdegnando l' imitazione chiamata servile, ed anelando a divenire originali, sfuggono le strade fino allora battute; questi per la naturale incostanza nauseati della monotona uniformità delle schiette, e semplici bellezze, applaudiscono alle nuovità, ancorchè si scostino dalla natura: così gli artefici co' studiati ornamenti prima incominciano a ricoprire soverchiamente, indi a sformare le naturali grazie, e si slontanano sempre più dalla vera strada, non accorgendosi dell' errore, finchè non ne sono tanto lontani da cadere nel ridicolo: è convenuto giungere fino ai nauseanti concetti del Cav. *Marino*, e de' suoi seguaci per accorgersi, che l' abuso delle metafore, e delle arguzie ricercate deformava la Poesia Italiana.

Ma se una illimitata carriera si presenta davanti alle arti figlie dell' intelletto, e se frà di esse la più severa indagatrice delle generali, ed astratte verità, cioè la pura Matematica, essendo coltivata con quell' ardore, con cui ella è stata da più di un secolo in quà, vada continuamente avanzandosi con fermo piede, e sicuro nei faticosi sentieri del vero, quali faranno mai i fuoi avanzamenti? Qual farà finalmente la fua forte? Pare, che ella non poffa temere, che l'opinione degli uomini tanto incoftante, o reftìa nel dare il fuo favore alle produzioni dell'ingegno, e perciò capace di far languire colla fua indifferenza, o di ravvivare co' fuoi applaufi or quefta, or quella parte dell' umano fapere, poffa col difprezzo, o colla freddezza arreftarne i progreffi. La Matematica ha tutta la ragione per ifperare di rifquotere dagli uomini una non interrotta ftima, per caufa degl' innumerabili vantaggi, che effi quotidianamente ne ritraggono; poichè per lei gli arditi naviganti non più fervili alle cofte, tratti ove gli chiamava l'avidità del guadagno, ardirono inoltrarfi per immenfi, incogniti mari, e la navigazione, che forma la potenza, e la ricchezza di tante Nazioni, è appoggiata fu i matematici principj: per lei i fiumi obbedendo alle idroftatiche leggi furono raffrenati, e diretti; per lei fi avvicinarono i remoti oggetti, e fù l'imbecillità della vifta fovvenuta; finalmente l'arte iftefla della guerra ha bifogno degli ajuti di effa, e la filofofia nata per confolare gli uomini è ftata coftretta a fomminiftrare i fuoi lumi per diftruggerli. Nè folo adeffo, che l'arte della guerra è divenuta una fcienza tanto complicata, riconofce il principale foftegno dalle Matematiche, ma fino dal nafcer loro nafcofte con *Archimede* frà le mura di Siracufa arreftarono il rapido volo delle Aquile

Romane. Supponghiamo per tanto, che i vantaggi, i quali ritraggono gli Uomini dalle Matematiche, debbano farle coltivar fempre con fervore: lafciamo ancora di confiderare, fe quefta fcienza poffa incorrere il fato, cui fono altre volte foggiaciute le fcienze, e le arti, e cader nell'oblìo, per uno di quei politici, o fifici avvenimenti fingolari, alcuni dei quali fono regiftrati nelle ftorie, di alcuni altri poi ce ne formiamo appena una confufa idea nell'efaminare la faccia, e le vifcere del noftro globo. Poffa adunque quefta fcienza per la natura delle cofe eftrinfeche avanzarfi rapidamente: facciamoci a confiderare, fe nelle fue medefime intrinfeche appartenenze debba incontrare degli oftacoli ai fuoi progreffi.

Volgendo verfo di effa lo fguardo fcorgeremo una catena indefinita di verità più, o meno luminofe, molte delle quali, oltre al fervire di neceffaria conneffione della ferie, poffon diventare il principio di altrettante ferie di verità non meno delle prime intereffanti, e per tutto fi prefenta l' idea d'interminabilità, e d'illimitazione. In oltre, i coltivatori di qualunque altra delle Scienze, che con minor treno di evidenza progredifcono, e nelle quali perciò i nuovi fiftemi fpeflo tolgono la venerazione alle antiche meno veridiche, o meno lufinghiere fentenze, hanno il vantaggio di non doverfi occupare lungamente per informarfi di molte fpeculazioni dei loro lontani predeceffori. Ma nella

Matematica, in quella guiſa che il profondo, ed eruditiſſimo Iſtorico dell' Aſtronomia oſſerva accadere nella ſcienza dei fatti (*a*), eſſendo tutto egualmente vero, niente puo' reputarſi indegno di attenzione; ed il ſublime calcolatore del ſecolo XVIII paſſa per la ſteſſa definizione del punto, che fu il primo paſſo del Geometra delle tre linee nel ſecolo XV. Con tutto ciò l'albero matematico non è giunto ancora a sì grande ampiezza, che non poſſa da un' uomo dotato dell' opportuno vigore di ſpirito, e di corpo abbracciarſi tutto nella prima freſchezza degli anni, per poi conſacrarſi alla coltivazione di eſſo; ma poſſiamo noi aſſicurarci, che con tanto numero di valenti ingegni ad eſſo addetti, non ſia per renderſi così ſmiſurato da ſpaventare in ſeguito i più arditi? Nò certamente, anzi non altro ſembra a prima viſta, dover ſuccedere fra qualche, ſebbene indeterminato, tempo; e gran cagione di convalidare tal congettura avremo, riguardando ſpecialmente nell' ultimo ſecolo la ſtoria di queſta ſcienza.

Newton, e *Leibnizio* portano il lume delle infiniteſime differenze nell' Algebra; i *Bernulli* lo diffondono alle funzioni eſponenziali; il celebre *Eu-*

(*a*) Les déterminations de *Tycho*, quoiqu'agrandies par les vues de *Kepler*, alloient être effacées; mais les Obſervations reſteront, & c'eſt l'avantage des grands obſervateurs: leurs Œuvres ne périſſent point. Les ſyſtêmes s'écroulent, les conjectures s'évanouiſſent, les idées du génie ſont quelquefois remplacées par des idées plus ſaines: mais ſans diſtinction de tems, les faits s'uniſſent aux faits; on ne peut ni les détruire, ni ſe paſſer d'eux; ils durent, parce que ce ſont des vérités. Bailly, *Hiſtoire de l'Aſtronomie moderne*, T. II, P. 369.

lero

lero accenna qualche proprietà delle differenze finite (*a*), e l'inſigne *de la Grange* vi dirige gli sforzi del proprio intendimento, deducendone utiliſſime contemplazioni, non ſolo conſiderate per ſe medeſime (*b*), ma ancora congiuntamente colle differenze parziali (*c*) con tanto frutto immaginate, e maneggiate prima dall' immortale *Alembert*. Il calcolo delle variazioni, quello delle funzioni diſcontinue, le ſoluzioni particolari dell' Equazioni differenziali, e molte altre teorìe, fra le quali non laſcerò di far menzione dei nuovi irrazionali di M. *Vandermond* (*d*), ſono tutte ampliſſime diramazioni Geometriche ignote affatto ai Geometri di circa cent' anni addietro.

Dilatandoſi pertanto ogni giorno i confini di queſta Scienza, e divenendo il ſentiero, che conduce ai ſuoi più alti miſteri ſempre più lungo, e ſcabroſo, è ella vicina a quel ſegno (per adattare ad eſſa le parole applicate da *Livio* alla grandezza Romana) *ut jam magnitudine laboret ſua?* Si dovrà egli temere per le Matematiche il triſto preſagio fatto da alcuni, e ſpecialmente dal celebre ſcrittore dell'Opera: *Penſées ſur l'interprétation de la nature*, eſpreſſo nelle ſeguenti parole: "Au pen„ chant que les eſprits me paroiſſent avoir à la „ Morale, aux Belles-Lettres, à l'Hiſtoire de la na-

(*a*) Calc. Diff. Parte Prima.
(*b*) Mem. dell' Acc. di Torino, T. I, ed in molti altri luoghi.
(*c*) Mem. dell' Acc. di Berlino, Anno 1765.
(*d*) Mem. dell' Acc. Reale di Parigi, Anno 1772.

„ ture, & à la Physique expérimentale, j'oserois „ presque assurer, qu'avant qu'il soit cent ans, on „ ne comptera pas trois grands Géomètres en Eu„ rope. Cette science s'arrêtera tout court, où „ l'auront laissée les *Bernoulli*, les *Euler*, les *Mau*„ *pertuis*, les *Clairaut*, les *Fontaine*, & les d'*Alem*„ *bert*. Ils auront posé les colonnes d'Hercule. On „ n'ira point au-delà. Leurs Ouvrages subsisteront „ dans les siecles à venir, comme ces piramides „ d'Egypte dont les masses chargées d'hierogliphes „ reveillent en nous une idée effrayante de la puis„ sance des hommes qui les ont élevées". Ponghiamo ogni cura a questo umiliante presagio; e cerchiamo se v'è ragione di sperare, che in proporzione, che il sentiero della Matematica và allungandosi, possa rendersi più agevole, e meno spinoso.

Il *Maupertuis* nell'erudito Opuscolo sul progresso delle Scienze, propone per l'avanzamento più pronto di esse, che conviene proscrivere dalla Repubblica Letteraria le ricerche inutili, esprimendosi nel seguente tenore intorno ad alcune: "Après „ avoir parlé de ce qu'on pourroit faire pour le „ progrès des Sciences, je dirai un mot de ce „ qu'il seroit peut-être aussi à propos d'empêcher. „ Un grand nombre de gens destitués des con„ noissances nécessaires pour juger des moyens & „ du but de ce qu'ils entreprennent; mais flattés, „ par des récompenses imaginaires, passent leur

„ vie sur trois problêmes, qui sont les chimeres „ des Sciences: je parle de la Pierre Philosophale, „ de la quadrature du Cercle & du mouvement „ perpétuel. Les Académies sçavent le tems qu'elles „ perdent à examiner les prétendues découvertes „ de ces pauvres gens; mais ce n'est rien au prix „ de celui qu'ils perdent eux-mêmes, de la dépense „ qu'ils font, & des peines qu'ils se donnent. On „ pourroit leur défendre la recherche de la Pierre „ Philosophale comme leur ruine; les avertir que „ la quadrature du Cercle, poussée au-delà de ce „ qu'on a, seroit inutile; & les assurer que le mou„ vement perpétuel est impossibile". Ora una simile legge potrebbe in sulle prime credersi da alcuno, che potesse proporsi nel regno Matematico, affine d'impedire la perdita del tempo, tanto nel comporre, quanto nel leggere Opere, che non riguardino direttamente l'utile; ma chi assumerà l'incarico di classare le ricerche di questo genere, separando le utili, dalle inutili? L'istessa quadratura del Cerchio giudicata inutile dal suddetto Filosofo, è forse tale quanto al suo fine, poichè come egli osserva le approssimazioni fin'ora ritrovate sono sufficienti per qualunque uso voglia farsene in pratica; ma non può assicurarsi, che le speculazioni, le quali intorno a tale oggetto sono uscite dalla penna di varj profondi Geometri, restino affatto immeritevoli; come posson far fede le insigni proprietà ritrovate dall'*Eulero*, bastevoli a giustificare per se medesime qualunque fatica; e dopo l' esposizione delle quali quel sommo Geometra così conclude: *Hujusmodi quaestiones plures non propono, cum methodus eas resolvendi ex his exemplis clare perspiciatur. Ceterum haec Problemata in hunc finem potissimum sunt excogitata, ut circuli natura, cujus quadratura omnibus methodis adhuc usitatis frustra fuit tentata, penitius inspiciatur. Si enim accidisset, ut in solutione cujuspiam Problematis, vel arcus cum tota Circumferentia, commensurabilis, vel ejus sinus, tangensve per radium construibilis prodiisset, tum utique species quaedam quadraturae circuli haberetur...... Nulla vero etiam num ratio patet, quae hujusmodi quadraturam impossibilem esse evincat: atque si talis detur, nulla alia via praeter hanc, quam hoc capite aperuimus, ad eam investigandam magis apta videtur* (*a*). Non è cosa poco frequente nell'istoria della Geometrìa il vedere una serie di Teoremi rimanere per molto tempo privi della comune ammirazione, come oggetti di semplice curiosità speculativa, e poi ritrovarsi utilissimi allo sviluppo d'interessanti conseguenze: non è difficile, per esempio, che la maggior parte delle proprietà delle Coniche curve siano state riguardate come inutili, e poi non vi è chi ignori, quanto la natura abbia in esse lussureggiato, modellando tanti moti della materia, secondo le loro tracce, le quali in conseguenza erano di necessaria cognizione per l'intelligenza

(*a*) Introductio in Analisin Infinitorum, T. II, pag. 320.

dei moti istessi. Ed in proposito della utilità inaspettata sovente dalle verità Geometriche, non è da tacersi il curioso riscontro Istorico, che si ricava dall'esposizione, che fà M. *Gentil* dell'Astronomìa degl'Indiani (*a*). E' noto, che nel calcolare le Eclissi lunari, quando si è determinata la latitudine, il diametro dell'ombra, e l'istante del mezzo dell'Eclisse si forma un triangolo rettangolo composto dalla latitudine, dalla somma dei due semidiametri della Luna, e dell'ombra, e dalla porzione della sua orbita compresa frà il punto ov'è il centro della Luna nel momento del suo contatto coll'ombra, e quello ove sarà alla metà della Eclisse, e questo terzo lato si ottiene con la trigonometrìa: i Bramini adunque, che non conoscono questa dottrina, per determinare quel lato, quadrano la somma dei semidiametri dell'ombra, e della Luna, e la latitudine, e prendono la radice seconda della somma di essi: è evidente pertanto, che questa operazione è fondata sulla famosa Proposizione 47ma di *Euclide*; osservando adunque, che i Bramini adoprano i metodi astronomici, per pura pratica, senza conoscerne le ragioni, tali, e quali gli hanno ricevuti dagli antichi Bracmanni, che gli avevano dai Caldei, facilmente si deduce, che mentre Pittagora mostrava eccessivi segni di gioja per il ritrovamento di quella Geometrica verità, che forse parve a taluno da riguardarsi come

(*a*) Mem. dell'Acc. di Parigi, Anno 1772.

inutile, essa era molto prima conosciuta nell'Asia, ed impiegata nell'analisi di uno dei più rimarcabili fenomeni Celesti.

Se dunque la Matematica è suscettibile d'ingrandimento senza misura, se non vi è causa per cui rimaner debba abbandonata, se qualunque ramo di essa non può caratterizzarsi per meno utile, e negligibile, sembra, che il Fato, il quale sovrasta a questa scienza, rimanga assai tenebroso, e sia soltanto capace di dar luogo a qualche congetturale divinazione.

Quando i progressi dello spirito umano erano ancora pargoleggianti, quelli, che accesi dal sagro fuoco di Minerva, s'incamminavano per la strada della Dottrina, non fermavano forse il loro passo fin tanto, che tutto non conoscevano ciò, che era stato scritto, o detto dai loro predecessori; quindi i sette, che Sapienti furono in Grecia nominati, non ignoravano probabilmente veruna delle verità cognite allora in qualunque ramo del sapere. Ma cresciuto questo insensibilmente fino ad un grado da non potersi dalla mente di un solo Uomo abbracciare tutte le verità precedentemente ritrovate, dovette separarsi a poco a poco l'indagatore delle leggi della natura da colui, ch'espone i doveri degli Uomini, e la legislazione, e susseguentemente il Medico, l'Astronomo, il Geometra ec. fecero ognuno di ogni separata Scienza l'unica occupazione, e la

propria facoltà, ponendosi così in grado di poter tutta compire l'intrapresa carriera. Può esservi alcuno, il quale sia d'opinione, un simil compenso dover forse occorrere nella Matematica, la quale sia creduta suscettibile di diramazioni poco l'una dall'altra dipendenti; ma sebbene nelle Fisicomatematiche possano incontrarsi delle prove di fatto in conferma di tale sentenza, essendo, per cagione d'esempio, fino dai nostri tempi l'Astronomia ridotta un ramo a parte, e capace di sussistere per se medesima con mediocri ajuti delle annesse facoltà, e specialmente dell'Ottica, e della Meccanica; non ostante nella Matematica pura, intorno alla quale quì s'intende far parola, non pare, che possa sussistere questa separazione, giacchè per quanto si supponessero differenti i rami, nei quali si concepisse divisa, ciascuno per altro di essi avrebbe per oggetto i rapporti, e le proprietà di grandezze egualmente astratte, e perciò affini, ed analoghe a quelle degli altri rami, e dalle quali in conseguenza non potrebbe separarsi, senza soffrire un grandissimo detrimento nella celerità dei proprj progressi. Non può esservi alcuno, che essendo mediocremente informato delle Matematiche, supponga poter, per esempio, separarsi l'analisi delle infinite, e quella delle infinitesime quantità: sono troppo frequenti i riscontri che abbiamo della insigne analogia, che passa trà esse, come può vedersi nel metodo, di cui il Chiarissimo Sig. d'

Alembert si è servito per trovare l'integrazioni approssimate pel problema celebre nel nostro secolo dei tre corpi, analogo affatto a quello adoprato da *Newton* nella invenzione delle prossime radici dell'equazioni; e nell'equazione differenziale $ddy + Adxdy + Bdx^2 = o$, in cui posto p, e p^2 in vece di $\frac{dy}{dx}$, e di $\frac{ddy}{dx^2}$, trovasi come osserva l'*Eulero* (a) l'equazione $p^2 + Ap + B = o$, le due radici della quale forniscono due integrali particolari, che congiuntamente compongono il completo integrale della proposta; e nell'uso insigne, che si può fare del calcolo differenziale per la soluzione dell'Equazioni finite, e per dimostrare le proprietà delle radici di esse. Che se alcuno fosse per esser d'avviso, che quella parte di Analisi, la quale esige metodi diretti, e di perfetta evidenza è corredata, potesse comporre un corpo di Scienza alquanto disgiunto da quella, che con indirette contemplazioni, ed in virtù quasi di congetture progredisce, come per esempio, la scienza di certe proprietà de' numeri, e di alcuni problemi indeterminati, cangerà opinione, se verrà informato delle insigni proprietà dimostrate dall'acutissimo la *Grange*, il quale con l'equazioni a differenze finite, e parziali hà dimostrato, come sulla maggior parte di quelle questioni potevano spargersi i raggi più fulgidi

(a) Calc. Integr. T. II.

gidi dell'evidenza, ed esaurirsi direttamente (a). Tralascio molte altre riflessioni, che potrebber farsi sulla difficoltà di ridurre in diramazioni separate la Matematica, intendendo io che il giudicarne decisivamente s'aspetti ai solenni Maestri e profondi, ed essendo d'avviso potersi ancor con altri principj concepire la successiva combinazione del maraviglioso ingrandimento di questa Scienza, e della perseveranza nel coltivarla.

Primieramente osserveremo, che le facoltà intellettuali di coloro, i quali prenderanno con buon esito ad informarsi della immensa Congerie dei Matematici ritrovamenti, acquisteranno una attività tanto maggiore, quanto sarà più lungo, e difficoltoso il cammino, giacchè non può negarsi, che in qualunque genere di cognizioni, e specialmente nelle Matematiche, la forza dell'intendimento (in una mente, che ne sia abbondantemente dotata) sembra, che si sviluppi tantopiù velocemente, quanto è più grande la difficoltà, che si presenta da superare, e l'esercizio fatto nel superare delle difficoltà precedenti; siccome un fiume, che lungi dal ritardare il corso per l'affluenza delle acque nuove, e ridondanti, acquista anzi velocità, ed energìa maggiore.

In oltre, pongasi mente alla costante legge, con cui fino ad ora si sono succeduti i metodi Geometrici, e gli troveremo sempre più concisi, e

(a) Mem. dell'Acc. di Berlino, Anno 1765.

più attivi a condurre per le vie del vero il sagace Geometra, quantunque il contrario possa apparire ad un'occhio volgare, che mira attonito la misteriosa folla delle ignote cifre, in ranghi difformi, e con apparente disordine situate. Non vi è chi non sappia, quanto l'algebra Cartesiana sia generalmente capace di abbreviare i mezzi, con i quali la sintesi espone le verità, e quanto la nuova Analisi di *Newton*, abbia dei vantaggi sull' algebra Cartesiana; e sebbene in ogni genere di ragionato sapere passino le nuove speculazioni dalla mente degl' inventori in quelle dei successivi coltivatori, e vengano ora corredate di una idea necessaria al perfetto sviluppo di esse, ora liberate dalla considerazione di altre superfluamente congiuntevi, prendendo in tal guisa qualche volta un' aria di semplicità, che le rende concepibili per quegl' istessi deboli spiriti, che aveano giudicato se incapaci ad impossessarsene; nondimeno nel rintracciare, ed esporre le Matematiche proprietà sembra, che un continuo, e trascendente facilitamento possa aspettarsi.

In fatti è principio conosciuto da tutti i ragionatori, che la comunicazione delle idee si eseguisce tanto più felicemente, quanto sono meglio adattati, e più precisi i segni a tal fine posti in opera. L' analisi dei linguaggi delle differenti Nazioni conduce ad illustrare questa proposizione, ed il celebre *Maupertuis* giunge fino a ragionare su tal proposito come segue: " Si l'on trouve les

„ idées si différentes chez des Hommes d'un même „ Païs, & qui ont long-tems raisonné ensemble, „ que seroit-ce si nous nous transportions chez „ des Nations fort éloignées, dont les Sçavants „ n'eussent jamais eu de communication avec les „ nôtres, & dont les premiers hommes eussent bâti „ leur Langue sur d'autres principes? Je suis per- „ suadé que si nous venions tout-à-coup à parler „ une Langue commune, dans laquelle chacun „ voudroit traduire ses idées, on trouveroit de „ part & d'autre des raisonnemens bien étranges, „ ou plutôt qu'on ne s'entendroit point du tout. „ Je ne crois pas cependant que la diversité de „ leur Philosophie vînt d'aucune diversité dans les „ premières perceptions; mais je crois qu'elle „ viendroit du langage accoûtumé de chaque Na- „ tion, de cette destination des signes aux diffé- „ rentes parties des perceptions; destination, dans „ laquelle il entre beaucoup d'arbitraire, & que les „ premiers hommes ont pu faire de plusieurs ma- „ nières différentes; mais qui, une fois faite de „ telle manière, jette dans telle ou telle propo- „ sition, & à des influences continuelles sur toutes „ nos connoissances (*a*) ".

Ma i linguaggi più o meno culti ne forniscono dei segni, con i quali si esprimono le idee necessarie per l'acquisto delle scienze in generale, ed avendo i linguaggi medesimi, un determinato

(*a*) *Maupertuis*: Sur l'origine des Langues, & la signification des mots.

numero di ſegni, ed una limitata capacità di aggiungere a ſe medeſimi preciſione, e chiarezza; le Scienze in generale non ſi conducono a quella facilità, che nell' eſporle, e nel coltivarle potrebbe naſcere, dalla ſucceſſiva introduzione di nuovi ſegni, deſtinati ad eſprimere opportunamente le combinazioni varie delle reſpettive idee. Oſſerviamo ciò che in particolare abbia luogo nella Scienza Matematica.

Eſſa aggiraſi ſopra oggetti complicati, ed aſtratti; tanto che nella difficile valutazione delle reciproche affinità, e dei rapporti loro è convenuto probabilmente fino dal principio abbandonare il naturale troppo lungo giro delle parole, e ricorrere ad alcune preciſioni, per mezzo di nuove deſtinazioni di ſegni alle differenti parti delle neceſſarie percezioni: la complicanza degli oggetti dovette forſe farne ſentire il biſogno, e l' aſtrazione dei medeſimi potè favorirne l' introduzione. Chi non vede, per eſempio, che il più elementare teorema Euclideo diventerebbe imbarazzante, ſe nello ſvilupparlo ſi rigettaſſe la ricevuta alfabetica indicazione, e ſi voleſſero le linee, e gli angoli ſignificare, deſcrivendo ogni volta le reſpettive loro appartenenze? Ma quello, che nella naſcente, ed elementare Geometrìa può riſguardarſi come un comodo, diventa una deciſa neceſſità nell' adulta e ſublime. Quindi agevolmente ſi ravviſa la naturale origine dei molti, e differenti linguaggi algebraici, e deduceſi una ben

fondata ſperanza di ſviluppar ſempre più felicemente le Matematiche teorie, in virtù ancora delle novelle eſpreſſioni, le quali dall' accorgimento dei profondi Geometri poſſono attenderſi. Non è facile il deſcrivere quanto una opportuna traſformazione renda una formola docile ed eſpreſſiva avanti all' ingegnoſo Analiſta; là dove prima intrattabile moſtravaſi, ed inſignificante (*a*). Qual'

(*a*) In propoſito di ciò, credo non ſia per eſſere inconveniente che io riporti il metodo da me ritrovato, di ſommare la ſerie

$$1 + \frac{m.\,m-1}{1.\,2} + \frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.\,m-5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6} +,\ \text{ec.}$$

in cui ſi ſupponga m numero frazionario, il qual metodo dipende dal porre il zero ſotto la forma $(1-1)^m$. In fatti, eſſendo

$$(1+1)^m = 1 + m + \frac{m.\,m-1}{1.\,2} + \frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3.} +,\ \text{ec.}$$
$$= (1+1)^m + 0 = (1+1)^m + (1-1)^m,$$

ſviluppando queſt' ultima forma, avremo

$$(1+1)^m + (1-1)^m = 2\left(1 + \frac{m.\,m-1}{1.\,2} + \frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.\,m-5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6} + \text{ec.}\right) = 2^m;$$

ed in conſeguenza $2^{m-1} = 1 + \frac{m.\,m-1}{1.\,2} + \frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3}{1.\,2.\,3.\,4} + \text{ec.}$

che è la ſerie propoſta. Quindi facilmente deduceſi la ſomma dell' altra ſerie infinita

$$1 + \frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.\,m-5.\,m-6.\,m-7}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8} + \text{ec. eſſere} =$$

$$2^{m-2} + \frac{(1+\sqrt{-1})^m + (1-\sqrt{-1})^m}{2},$$

dalle quali due ſomme, che per quanto io ſappia, non ſono ſtate da altri aſſegnate, varie proprietà poſſon dedurſi non diſpregievoli, ma che qui ſarebbero fuori di luogo.

altra coſa è l'utiliſſima ſoſtituzione Euleriana degli eſponenziali in vece delle variabili ordinarie in alcune equazioni differenziali, ſe non che un genere di ſegni più efficace a dilucidare le idee indiſpenſabilmente inviluppate in quelle contemplazioni? (*a*) e quell' altro artifizio dall' iſteſſo *Eulero* ritrovato di porre le quantità p, q, r, ec. in vece delle ragioni dei differenziali (*b*) quanto ha contribuito alla chiara, e preciſa nozione degl' infiniti, e quante ſcoperte elegantiſſimamente furono indi derivate? Finalmente per tralaſciare i molti eſempj, che dalla ſublime analiſi trarre ſi potrebbero, la verità della noſtra propoſizione può manifeſtarſi ancora ai periti nella comune Aritmetica, ſe vorranno prenderſi la pena di ſperimentare, quanto maggior diſpendio di tempo, e di fatica coſterà loro il condurre a fine uno dei più volgari computi economici, ponendo in uſo le cifre romane, in vece delle arabiche, le quali forniſcono eſpreſſioni più ſignificanti, e preciſe.

In oltre, il vantaggio che nella Matematica riſulta dalla introduzione, che ammette, di ſegni ſempre nuovi e diverſi, rendeſi ancor più intereſſante, perchè ciaſchedun genere di eſſi può metterſi in opera promiſcuamente ſecondo l'opportunità; giacchè ſebbene un qualche geometrico linguaggio ſia in generale più perfetto, ed attivo d' un' altro, s'incontrano delle occorrenze, nelle quali

(*a*) *Eulero* Calc. Integr.
(*b*) *Eulero* Calc. Diff.

vicendevolmente queſto diventa più efficace di quello. M. *Dangicourt* ha fatto vedere in propoſito della aritmetica binaria immaginata da *Leibnizio*, e poi negletta come meno atta della decimale a rappreſentare le affezioni dei numeri, che eſſa è nonoſtante più efficace di queſta per l'inveſtigazione dell' indole delle progreſſioni (*a*); ed io ſpero dimoſtrare in una Memoria da pubblicarſi in breve, come con i nuovi irrazionali di M. *Vandermond* poſſano le radici reali delle equazioni cubiche irreducibili liberarſi dalla forma immaginaria, ſenza ricorrere ad un'eſpreſſione infinita.

Volendo vedere in un colpo d'occhio uno ſtraordinario avanzamento nella eleganza, e perfezione dei metodi, baſta ponderare quanto Archimede ha laſciato ſcritto nel divino libro delle Spirali, ove teſtimone inſigne delle difficoltà, che s'incontrano nel comprendere i penſieri del mentovato Autore, è ſpecialmente il *Bullialdo* (*b*), e poi gettar l'occhio ſulle medeſime verità eſpoſte con i metodi della nuova analiſi, e facilmente compreſe da chiunque ſulle prime tracce di eſſa abbia fatto alcun paſſo.

Dopo tutto ciò, ragion vuole, che non omettaſi di far parola intorno al ſentimento del ſom-

(*a*) Mem. dell' Acc. di Pruſſia.
(*b*) Archimedis *de lineis ſpiralibus tractatum cum bis, terque legiſſem, totaſque animi vires intendiſſem, ut ſubtiliſſimarum demonſtrationum de ſpiralium tangentibus artificium adſequerer, nunquam tamen, ingenue fatebor, ab earum contemplatione ita certus receſſi, quin ſcrupulus animo ſemper haereret, vim illius demonſtrationis me non percepiſſe totam* ...... Bull. *Praeſ. de lineis ſpiralibus.*

mo Filosofo e Geometra della *Senna*, che così ragiona sull'abbondanza delle verità matematiche: « Envisagées d'un premier coup-d'œil, elles sont „ sans doute en fort grand nombre, & même „ en quelque sorte inépuisables: mais, lorsqu'a- „ près les avoir accumulées, on en fait le dé- „ nombrement philosophique, on s'apperçoit qu'on „ est en effet moins riche qu'on ne croyoit l'ê- „ tre. Je ne parle point ici du peu d'application „ & d'usage qu'on peut faire de plusieurs de ces „ vérités: ce seroit peut-être un argument assez „ foible contre elles; je parle de ces vérités con- „ siderées en elles-mêmes. Qu'est-ce que la plû- „ part de ces axiomes, dont la Géométrie est si „ orgueilleuse, si ce n'est l'expression d'une même „ idée simple par deux signes ou mots différens? „ Celui qui dit que deux & deux font quatre, „ a-t-il une connoissance de plus que celui qui „ se contenteroit de dire que deux & deux font „ deux, & deux? Les idées de tout, de partie, „ de plus grand & de plus petit, ne sont-elles „ pas, à proprement parler, la même idée sim- „ ple & individuelle, puisqu'on ne sauroit avoir „ l'une, sans que les autres se présentent toutes „ en même-tems? Nous devons, comme l'ont „ observé quelques Philosophes, bien des erreurs „ à l'abus des mots; c'est peut-être à ce même „ abus que nous devons les axiomes. Je ne pré- „ tends point cependant en condamner absolu- „ ment

„ ment l'usage: je veux seulement faire observer „ à quoi se réduit; c'est à nous rendre les idées „ simples, plus familieres par l'habitude, & plus „ propres aux différens usages, auxquelles nous „ pouvons les appliquer: j'en dis à-peu-près au- „ tant, quoiqu'avec les restrictions convenables, „ des Théorèmes mathématiques. Considérés sans „ préjugé, ils se réduisent à un assez petit nom- „ bre de vérités primitives. Qu'on examine une „ suite de propositions voisines se touchant im- „ mediatement & sans aucun intervalle, on s'ap- „ percevra qu'elles ne sont toutes que la premiere „ proposition qui se défigure, pour ainsi dire, suc- „ cesivement & peu-à-peu dans le passage d'une „ conséquence à la suivante, mais qui pourtant „ n'a point été réellement multipliée par cet en- „ chaînement, & n'a fait que recevoir différentes „ formes. C'est à-peu-près comme si on vouloit „ exprimer cette proposition par le moyen d'une „ Langue qui se feroit insensiblement dénaturée, „ & qu'on l'exprimât successivement de diverses „ manieres qui représentassent les différens états, „ par lesquels la Langue a passé (*a*) ".

L'autorità male interpetrata di questo celebre Scrittore, ha dato motivo ad alcuni antimatematici d'inveire con maggior coraggio, contro la pretesa superfluità della Matematica, la quale se veramente potesse ridursi ad un numero determinato di verità primitive, peccherebbe di una

(*a*) Encyclopédie, Discours Préliminaire.

ridondanza inutile, con le tante forme differenti, ſotto le quali preſentando le verità medeſime, oſtenterebbe una ricchezza ſoltanto apparente. Non può negarſi, che una delle primitive Matematiche verità produca talvolta una infinità di Teoremi, ciaſcuno dei quali non è altro intrinſecamente, ſe non che una diverſa repetizione della medeſima verità, ed è veriſſimo, che una generale contemplazione può includere, e rendere meno intereſſanti una infinità di analoghe contemplazioni particolari; per eſempio il metodo generale d' integrazione tentato dall' *Ermanno* (*a*), e da *Fontaine* (*b*), ed ultimamente con tanta felicità dall'inſigne analiſta *Marcheſe di Condorcet* (*c*), quando foſſe poſſibile di ridurlo ad una perfezione, ed eleganza tale, che ſempre metteſſe conto il porlo in uſo a preferenza dei differenti metodi particolari, che per le tanto varie forme differenziali, vengono preſcritti, non laſcerebbe probabilmente di ſpargere ſopra di eſſi una certa oblivione: con tutto ciò, non è generalmente poſſibile l' attuale ſcelta delle primitive verità, e la coſtituzione di un corpo di ſcienza riſultante ſolamente da quelle: i periti non ignorano, quanta contenzione di ſpirito coſtino loro quelle inevitabili repetizioni, o traduzioni delle verità primitive, giacchè in virtù delle medeſime, con maggiore, o minor deſtrezza introdotte, e

(*a*) Vecchi, Comm. di Pietroburgo.
(*b*) Mem. dell' Acc. Reale di Parigi.
(*c*) Traité du Calcul Intégral.

maneggiate ſi viene appunto ad eſtendere più, o meno la sfera delle Matematiche cognizioni; nè ſenza nota di mala fede può imputarſi a quel ſagaciſſimo Autore, eſſer egli di ſentimento contrario, giacchè non laſcia in ſeguito di concludere così: "On peut donc regarder l'enchaînement de
» plusieurs vérités géométriques, comme des tra-
» ductions plus ou moins différentes, & plus ou
» moins compliquées de la même propoſition, &
» ſouvent de la même hypothèſe. Ces traductions
» ſont au reſte fort avantageuſes par les divers
» uſages qu'elles nous mettent à portée de faire
» du théorème qu'elles expriment; uſages plus ou
» moins eſtimables à proportion de leur impor-
» tance & de leur étendue ".

Non può dunque inferirſi dall'addotta ſentenza nulla di contrario a quanto abbiamo in queſto diſcorſo oſſervato, intorno alla moltitudine illimitata dei matematici ritrovamenti, ed alla impoſſibilità di proſcriverne molti come ſe foſſero inutili; ma poſſono bensì riceverne autenticità, ed energìa maggiore le vedute finora eſpoſte, e farci invidiare la ſorte dei ſecoli futuri, nei quali abbondando ſempre più i geometrici lumi, debbono altrettanto prodigioſi riſultarne i vantaggi, ſe verranno impiegati ad illuſtrare le miſterioſe tenebre della natura (*a*), ſenza di che apparterrebbero eſſi ad un mondo intellettuale, ed aſtratto intiera-

(*a*) Veggaſi il Diſcorſo del celebre P. *Gregorio Fontana* ſull'applicazione delle Matematiche alla Fiſica, premeſſo al Saggio Analitico ſull'altezze barometriche.

bemente disgiunto dalla società degli uomini, a benefizio dei quali debbono esser diretti gli sforzi dello spirito umano.

Sogliono le Prefazioni contenere l' esposizione ristretta dell' Opera, che loro succede, o le circostanze, e i motivi, che hanno indotto l' Autore a scriverla, e pubblicarla; io servendomi di quel dritto, che la consuetudine ha dato agli Autori, di premettere una Prefazione alle loro Opere, ho amato meglio scorrere col pensiero forse trà l' oscurità dei possibili, tratto da quel piacere per cui ciascuno ragiona volentieri dei pregj, e della sorte di quell' Arte, a cui si è consegrato. Per l' altra parte non avrei nulla, che dire sul seguente mio Opuscolo. Io lo presento al Pubblico; esso ha il dritto di profondere a suo talento le approvazioni, o le critiche sopra tutto ciò, che gli comparisce davanti: onde rimettendomi di buona voglia al giudizio, che vorranno darne gl' intelligenti, se degneranno di gettarvi sopra uno sguardo, finirò protestando soltanto la mia buona volontà, con l' espressioni dell' Inglese Filosofo. " Jf J „ can any way contribute to the diversion or „ improvement of the country in which J live, „ J shall leave it, when J am summoned out of „ it, with the secret satisfaction of thin king that „ J have not lived in vain (*a*).

(*a*) Addisson Spectator.

SAGGIO

SAGGIO DI RICERCHE
SULL' INTENSITÀ DEL LUME.

DEFINIZIONI.

I°. Chiamo *punto luminoso, o lucido* un punto nel quale, astraendo dalla grandezza, e figura, non si consideri altro, che la facoltà di propagare la luce sfericamente.

II°. Chiamo *intensità del lume* in un dato luogo la quantità dei raggi di luce, che vi cade da un punto lucido.

§. PRIMO.
LEMMA GENERALE.

SUPPONGASI (*Fig.* I) *che il piano* F B *sia illuminato dal punto lucido* A, *il quale si muova in modo da mantenere sempre l' istessa distanza dal centro* C *di un punto fisico preso nel piano istesso, io dico, che l' intensità del lume in detto punto* *ſarà proporzionale al ſeno dell' angolo* A C B, *o ſia dell' inclinazione dei raggi al piano* F B.

Suppoſto il cono lucido DAE, ſegato con infiniti piani parallelli, fra i quali DAE ſia il triangolo per l'aſſe AC; è chiaro che trattandoſi dell' intenſità della luce in un punto, la baſe DE del cono potrà ſupporſi anguſtiſſima, ed in conſeguenza potranno ſupporſi retti gli angoli FDC, CEG, onde il ſeno BA dell' angolo ACB, o ſia dell' obliquità dei raggi di luce ſarà al ſeno totale CA, come $DC : CF :: CE : CG :: DE : FG$; ma l' intenſità della luce, che viene ſecondo il piano DAE nel punto C, mentre il cono hà queſta obliquità, ſta all' intenſità medeſima, mentre il cono ha la ſituazione verticale, come $DE : FG$, cioè come $AB : AG$; dunque l' intenſità della luce, che viene ſecondo il piano DAE ſta in ragione del ſeno AB; l' iſteſſo raziocinio può ripeterſi in tutti gli altri piani parallelli, dunque ec.

§. SECONDO.

SCOLIO.

È EVIDENTE, che ſe il punto illuminato ſi ſupponeſſe privo di eſtenſione a guiſa di un punto mattematico, la queſtione preſente non avrebbe più luogo, giacchè allora non ſarebbe ſuſcettibile di eſſere illuminato; onde convien ſupporre, che i punti da illuminarſi, dei quali ſi avrà occaſione di far parola, ſiano punti fiſici, ed in conſeguenza tanto eſteſi da poterſi concepire più, o meno capaci di ricevere un dato numero di raggi. È da notarſi che oltre la diminuzione, che naſce nell' intenſità della luce, che cade in un punto dalla obliquità dei raggi, vi è quella, che naſce dall' accreſciuta diſtanza del punto lucido dal punto illuminato; ma di queſta ſeconda cauſa non occorre fermarſi a ſtabilire la legge, eſſendo notiſſimo il Canone Ottico, il quale ſtabiliſce, che la luce ſi propaga in ragion reciproca dei quadrati delle diſtanze dal punto lucido. Quindi la completa eſpreſſione dell' intenſità della luce nel punto C ſarà $\frac{AB}{AC^2}$.

§. TERZO.

PROBLEMA PRIMO.

TROVARE *nella linea* A B *l' altezza, a cui va poſto un lume; acciò in un punto* C *del piano* P Q *inclinato comunque a queſta linea, ſegua la maſſima illuminazione* (*Fig.* 2).

Siano m, ed n il ſeno, ed il coſeno dell' inclinazione del piano alla linea: poſto $AB = x$ ſarà tirando AD normale al piano, $AD = mx$, $BD = nx$; ſia di più $CB = c$, $EB = b$, e ſarà $CD = \sqrt{c^2 + 2bnx + n^2x^2}$, $CA = \sqrt{c^2 + 2nbx + n^2x^2 + m^2x^2} = \sqrt{c^2 + 2nbx + x^2}$; dunque avremo l' intenſità della luce nel punto $C = \frac{mx}{(c^2 + 2nbx + x^2)^{\frac{3}{2}}}$ eſpreſſione, che differenziata, ed uguagliata a zero, ci fa trovare l' equazione $x^2 + \frac{nbx}{2} - \frac{c^2}{2} = 0$, onde ricavaſi $x = -\frac{nb}{4} \pm \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{n^2b^2}{16}}$.

§. QUARTO.

COROLLARIO PRIMO.

Se la linea $A\ B$ fosse normale al piano $P\ Q$ essendo allora $n = o$ avrebbesi $x = \pm c \sqrt{\frac{1}{2}}$, dal che facilmente si deduce, che quando la linea $A\ B$ è perpendicolare al piano $P\ Q$, l'altezza, a cui va posto il lume dee stare alla distanza $C\ B$, della linea $A\ B$ dal punto illuminato C, come il lato d'un quadrato alla sua diagonale, avendosi dalla ritrovata equazione $x : c :: \sqrt{2} : 1$; La qual regola può essere utile in occasione, che vogliasi in una Torre situare un Fanale per illuminare l'imboccatura d'un Porto, o altro ec.

§. QUINTO.

COROLLARIO SECONDO.

Quindi può dedursi la curva, secondo la quale dovrebbe disporsi una moltitudine qualunque di lumi esistenti ciascheduno in altrettante linee come $A\ B$, le quali formassero il piano $T\ S$ inclinato comunque al piano $P\ Q$, acciò nel punto C di quest' ultimo piano segua la massima illuminazione. Infatti tirando $C\ O = a$ normale all' intersezione dei piani $R\ S$, e facendo $O\ B = z$, che si prenda per ascissa della curva cercata, avremo $C\ B = \sqrt{a^2 + z^2}$, e sostituendo questo valore in vece di c nell' espressione $x = -\frac{n\,b}{4} \pm \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{n^2 b^2}{16}}$, avremo l'equazione $x^2 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} n\ b\ x - \frac{1}{2} a^2 = o$; onde si vede la curva richiesta essere un' Iperbola.

§. SESTO.

COROLLARIO TERZO.

(*Fig.* 4) sia $M\ D$ una curva, le di cui coordinate ortogonali siano $A\ B = x$, $B\ D = y$, e sia $x = Y$ (supposto Y funsione qualunque di y) l'equazione della medesima curva, è chiaro, che se la linea indeterminata $M\ N$ radendo il perimetro $M\ D$, cammini perpendicolarmente al piano $A\ B\ D$, descriverà una superficie del genere delle cilindriche, o prismatiche, la quale dipenderà dalla natura della curva $M\ D$, ed in conseguenza, come è noto, verrà espressa dall' equazione $x = Y$, data una moltitudine di lumi si cerca la curva, secondo la quale essi devono disporsi nelle linee $M\ N$, $P\ C$; componenti la detta superficie curva, acciò nel punto A dell' altro piano segua la massima illuminazione.

Si avverta primieramente, che il supporre l'origine delle ascisse in A non toglie in modo alcuno a questa ricerca la sua generalità, mentre in qualunque luogo esista il punto da illuminarsi, che nel nostro caso è in A, potrà sempre, con i metodi conosciuti dai Geometri, ridursi ivi l'origine delle ascisse. Ciò posto, conducasi la $A\ D$, che sarà $= \sqrt{x^2 + y^2}$, e suppongasi z l'altezza $D\ C$, a cui va posto un lume nella linea $D\ C$, acciò segua in A la massima illuminazione, ed avremo (§. IV) $z^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, equazione, che unita con la $x = Y$ potrà far conoscere la curva richiesta; poichè dato x si avrà dall' equazione $x = Y$ un valore di y, che sostituito nella equazione $z^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ darà z, ed in conſeguenza il punto della curva corriſpondente alla data aſciſſa.

Sia $Y = \sqrt{1 - y^2}$, cioè ſia la data ſuperficie quella di un Cilindro retto, ed avremo $z = \sqrt{\frac{1}{2}}$, ed $x^2 + y^2 = 1$; il che moſtra che i lumi dati devono diſporſi in un cerchio, il di cui piano diſti dal punto illuminato della $z = \sqrt{\frac{1}{2}}$, ciò che ancora ſenza calcolo potrebbe dimoſtrarſi. Sia $Y = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - y^2}$, cioè ſia la data ſuperficie quella d'un cilindro ſcaleno, le di cui ſezzioni parallelle alla baſe ſiano elliſſi, aventi a, c per ſemiaſſi comuni; ciò poſto avremo $z^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)y^2\right)$ ed $x = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - y^2}$, che ſaranno le due proiezioni (una nel piano delle coordinate z, y, l'altra nel piano delle coordinate x, y), in virtù delle quali potrà coſtruirſi la curva richieſta, la quale, come facilmente può concepirſi, dee eſſere di doppia curvatura; ma ſe ciò venga indicato dalle noſtre equazioni potremo agevolmente conoſcerlo, impiegando il metodo propoſto dal Sig. *Eulero* nell' eccellente Trattato delle Superficie, ove al Capo ſeſto eſpone la teorìa dell' interſezioni di due ſuperficie, ed in conſeguenza quella delle linee di doppia curvatura: ſiano propoſte due equazioni, ogn' una delle quali eſprima una ſuperficie, ſe la linea, che forma la loro interſezione comune, ſia tutta nell' iſteſſo piano, ſi conoſcerà determinando le due variabili y, z per la terza x, in modo, che ſia $y = P$, $z = Q$, ed eſaminando quindi ſe troviſi un tal numero n, il quale faccia sì che in $P + n\,Q$ non vi ſiano le poteſtà di x ſuperiori

alla prima; il che ſe avvenga, e troviſi per eſempio $P + n\,Q = m\,x + k$, avremo $y + n\,z = m\,x + k$, che ſarà l'equazione di quel piano, in cui è ſituata la curva in queſtione. Dalle noſtre due equazioni per tanto avremo

$$P = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ e } Q = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2c^2}{2} + \frac{a^2x^2}{2} - \frac{c^2x^2}{2}},$$

dal che ſi vede manifeſtamente, che $P + n\,Q$ (qualunque numero ſia n) non può mai ridurſi alla forma $m\,x + k$ (ſuppoſte m, e k due coſtanti), onde ſarà di doppia curvatura la ritrovata curva. Sia finalmente $Y = a$, cioè ſia piana la propoſta ſuperficie, ed avraſſi $2\,z^2 - y^2 = a^2$ equazione, che rappreſenta iperbola eſſere la curva richieſta; lo che combina con quello, che ſi è veduto al (§. V).

§. SETTIMO.

SCOLIO.

L'EQUAZIONE $2\,z^2 = x^2 + y^2$ è chiaro per la nota dottrina delle ſuperficie del ſecond' ordine, che appartiene ad un cono, che hà l'aſſe perpendicolare al piano, in cui poſa il ſuo vertice; queſto adunque dagli addotti ragionamenti ſi può dedurre, che avrà queſta proprietà, che ponendo cioè in un punto qualunque della interna ſuperficie di eſſo un lume, queſto produrrà in quel punto del piano normale all' aſſe ove poſa il vertice del cono l'illuminazione maggiore di ogni altra, che ſi produrrebbe da un lume poſto in qualunque altro punto della linea retta, che dal detto punto della ſuperficie conica ſi conduca normale al piano ove poſa il vertice del cono. Quindi facilmente ſi può con il ſolo raziocinio ſintetico dedurre, ciò che hà moſtrato il calcolo al (§. v) poichè ſupponendo, che il piano normale all' aſſe del cono venga ſegato da un' altro ad angoli retti, è chiaro, che queſto ſecondo ſegherà il cono ſuddetto, ed eſſendo parallello all' aſſe del medeſimo, la ſezione ſarà un' iperbola, onde queſta ſarà la curva, ſecondo la quale debbono diſporſi de' lumi in quel piano, acciò nel punto dell' altro piano, in cui poſa il vertice del cono ſegua la maſſima illuminazione: in fatti il piano ſegante il cono può concepirſi compoſto d' infinite normali al piano, in cui poſa il vertice del cono medeſimo; ma in ciaſcuna di queſte normali ponendo un lume, ove incontra la ſuperficie conica, ſi avrà la illuminazione nel punto a cui corriſponde il vertice del cono maggiore di ogni altra che ſi avrebbe, ponendo il lume in qualunque altro punto di eſſa normale; dunque diſponendo i lumi nell' interſezione del piano e del cono, ſi avrà quello, che ſi chiedeva.

§. OTTAVO.

PROBLEMA SECONDO.

SIANO (*Fig. 6*) R S, T Q *due piani, che ſi ſeghino ſotto qualunque angolo, e ſia nel piano* Q T *delineata la curva* N A, *di cui ſia data la equazione, e la poſizione dell' aſſe* P G, *ſi cerca il punto* A *nel perimetro della curva, in cui poſto un lume, ſegua nel punto* C *dell' altro piano la maſſima illuminazione.*

Sia $P\,G = x$ l' aſciſſa della curva $N\,A$, e ſia $G\,A = y$ l' ordinata eguale in conſeguenza ad una funzione d' x, che chiameremo X; pel punto richieſto A ſi tiri la $F\,A\,B$ normale all' interſezione dei piani $P\,Q$, quindi poſto $P\,M = p$, $M\,N = q$, per i triangoli ſimili $P\,M\,N$, $A\,G\,F$ ſarà $p : q :: X : \frac{q\,X}{p} = G\,F$; ed in oltre avremo $P\,N = 1 : q :: x + \frac{q\,X}{p} : q\left(x + \frac{q\,X}{p}\right) = B\,F$, e $p : 1 :: X : \frac{X}{p} = A\,F$; dunque

$$A\,B = B\,F - A\,F = q\,x + \frac{q^2\,X}{p} - \frac{X}{p} = q\,x - p\,X.$$

Siano m, ed n il ſeno, ed il coſeno dell' inclinazione dei piani fra loro, e dal punto cercato A condotta ſul piano $R\,S$ la normale $A\,D$, avremo $A\,D = m\,(q\,x - p\,X)$, $B\,D = n\,(q\,x - p\,X)$; per i triangoli ſimili $P\,N\,M$, $P\,F\,B$ ſarà $1 : p :: x + \frac{q\,X}{p} : p\,x + q\,X = P\,B$, onde condotta $C\,H$ perpendicolare ſopra $P\,Q$, e ſuppoſto $P\,H = a$, $C\,H = B\,E = b$, avremo $H\,B = C\,E = p\,x + q\,X - a$; e per l' angolo retto $C\,E\,D$, ſarà $C\,D =$

$$\sqrt{(p\,x + q\,X)^2 - 2\,a\,(p\,x + q\,X) + a^2 + n^2\,(q\,x - p\,X)^2 + 2\,b\,n\,(q\,x - p\,X) + b^2};$$

dunque $C\,A =$

$$\sqrt{(p\,x + q\,X)^2 - 2\,a\,(p\,x + q\,X) + a^2 + n^2\,(q\,x - p\,X)^2 + 2\,b\,n\,(q\,x - p\,X) + b^2 + m^2\,(q\,x - p\,X)^2}:$$

ma ſiccome $m^2 + n^2 = 1$, avremo $C\,A =$

$$\sqrt{(p x + q X)^2 - 2 a (p x + q X) + a^2 + 2 b n (q x - p X) + b^2 + (q x - p X)^2} =$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2 a (p x + q X) + 2 b n (q x - p X) + x^2 + X^2},$$

e poſto per brevità $2 b n q - 2 a p = \alpha$, $- 2 a q - 2 b n p = \beta$, $a^2 + b^2 = \gamma$, avremo finalmente $C A = \sqrt{(X^2 + \beta X + x^2 + \alpha x + \gamma)}$. Ma perchè la luce nel punto C ſta in ragion diretta del ſeno d' obliquità dei raggi, cioè $\frac{m (q x - p X)}{\sqrt{(X^2 + \beta X + x^2 + \alpha x + \gamma)}}$, ed inverſa del quadrato della diſtanza $A C^2 = X^2 + \beta X + x^2 + \alpha x + \gamma$, avremo l' eſpreſſione della luce nel punto C, che ſarà $\frac{m (q x - p X)}{(X^2 + \beta X + x^2 + \alpha x + \gamma)^{\frac{3}{2}}}$; queſt' eſpreſſione differenziata, e poſta $= o$ (ſoſtituendo in vece di X la funzione d' x dipendente dall' equazione della curva) darà il punto cercato qualunque ſia la curva propoſta.

§. NONO.

COROLLARIO PRIMO.

LA formola generale per tanto ſarà

$$2 (X^2 + \beta X + x^2 + \alpha x + \gamma) (q d x - p d X) - 3 (q x - p X) (2 X d X + \beta d X + 2 x d x + \alpha d x) = o;$$

eſaminiamone alcuni caſi particolari: Sia $X = x$, cioè ſia la propoſta curva una parabola, ſia l' aſſe $P G$ normale all' inter-

ſezione dei piani, i quali ſi ſeghino ad angolo retto, e ſiano $P H$, $H C$ uguali a zero; ciò poſto nella noſtra formola diventa $q = 1$, $p = o$, $\beta = o$, $\alpha = o$, $\gamma = o$, e ſi ottiene l' equazione $4 x^2 + x = o$, cioè $x = o$, $x = -\frac{1}{4}$, la prima delle quali è coerente alla ragione, e l' altra eſſendo negativa, non ha luogo in tale occaſione.

Sia $X = \sqrt{1 - x^2}$, cioè ſia la curva un cerchio coll' origine dell' aſciſſe nel centro, e la formola darà l' equazione $d x = o$, cioè $x = 1$, come in fatti dee eſſere.

Sia $X = x - 1$, cioè ſia la propoſta curva una Parabola, che abbia il vertice diſtante dalla quantità 1 dall' origine dell' aſciſſe, o ſia dal punto illuminato, è chiaro, che il lume dee ſituarſi nel vertice iſteſſo, ove $x = 1$, mentre in ogni altro punto della curva rimane più obliquo, e più lontano dal luogo illuminato; la noſtra formola ci da l' equazione

$x^2 + \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} = o$, cioè $x = \frac{1 \pm \sqrt{-31}}{8}$ dai quali valori immaginarj ſembra doverſi dedurre, che la noſtra formola ſia in queſto caſo imperfetta, ed erronea, mentre annunzia l' impoſſibilità di ſciorre un problema ſenza dubbio ſolubile; ma ci accorgeremo facilmente della eſattezza della formola ſuddetta oſſervando, che realmente in queſto caſo eſſa ci da l' equazione $\left(x^2 + \frac{1}{4} x + \frac{1}{2}\right) d x = o$, ed eſſendo inutile l' equazione $x^2 + \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} = o$, convien far conto dell' altra $d\,x = o$, dalla quale (essendo $d\,x = 2\,y\,d\,y$) avremo $y\,d\,y = o$, cioè $y = o$, ed $x = 1$ come richiede la circostanza del Problema.

Sia $X = (a + 2)\,x - x^2 - a - 1$ cioè sia la proposta curva un cerchio col diametro $= a$, la di cui estremità inferiore disti della quantità 1 dall'origine delle ascisse, o sia dal punto illuminato, avremo dalla nostra formola dividendo per $d\,x$ l'equazione $2\,(a + 2)\,x - 2\,a - 2 - 3\,x\,(a + 2) = o$,

cioè $x = -\dfrac{2\,a + 2}{a + 2}$, il qual valore comecchè negativo, è

manifesto non essere opportuno nel nostro caso, onde di nuovo convien ricorrere all'equazione $d.x = o$, dalla quale si deduce $x = 1 + a$, ed $x = 1$, il secondo dei quali valori scioglie il Problema.

Senz' altra difficoltà che di una maggior lunghezza di calcolo, ed ulteriore complicazione, potrebbe da questo Problema dedursi, come abbiam fatto dal Problema primo, la curva secondo la quale doverebbe disporsi una moltitudine di lumi in una superficie curva nata dal moto della curva $N\,A$, secondo la periferìa di una curva qualunque, acciò seguisse in un punto dato la massima illuminazione, ed ancora in questa ricerca si perviene all'invenzione di una curva dotata di una proprietà massima, senza l'uso del calcolo delle variazioni.

§. DECIMO.

COROLLARIO SECONDO.

Dalla formola $\dfrac{m\,(q\,x - p\,X)}{(X^2 + \beta\,X + x^2 + \alpha\,x + \gamma)^{\frac{3}{2}}}$ posta uguale ad una costante, si deduce l'equazione di una curva, la quale avrà questo di proprio, che movendo un lume secondo la sua periferìa $N\,A$, questo in qualunque punto si ritrovi, produrrà sempre l'istessa illuminazione nel punto C: ponendo pertanto nella suddetta formola y in vece d' X, avremo l'equazione $m\left(q\,x - p\,y\right) = \left(y^2 + \beta\,y + x^2 + \alpha\,x + \gamma\right)^{\frac{3}{2}}$, che apparterrà alla curva richiesta; esaminiamone i casi principali.

I.° Sia il piano $P\,T$ normale all'altro $R\,S$, ed avremo $n = o$, e supponendo inoltre, che l'ascisse siano normali all' interfezione $P\,Q$, avremo $p = o$, $q = 1$, $a = o$, onde divenendo $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = b^2$, l'equazione si ridurrà a questa $x = \left(x^2 + y^2 + b^2\right)^{\frac{3}{2}}$, il che combina con quanto vedremo ancora in seguito.

II.° Nel caso, che i due piani non facciano alcun' angolo, è evidente, che divenendo zero il seno m dell' inclinazione dei due piani, e venendo in conseguenza il punto lucido situato nel piano istesso, ove è il punto da illuminarsi, l'illuminazione da quello in questo prodotta sarà costantemente $= o$; dunque qualsivoglia curva, ed in qualunque maniera situata, soddisfarà alla questione, giacchè mosso il punto lucido secondo qualunque direzione, produrrà sempre l'istessa illuminazione $= o$ nel punto C: ma fatto $m = o$ la nostra equazione diventa $y^2 + \beta y + x^2 + \alpha x + \gamma = o$, onde sembra doversi dedurre dalla nostra equazione generale, che il punto lucido abbia a muoversi nella linea del second'ordine espressa da quell' equazione, lo che come abbiamo osservato, è contrario alle circostanze del Problema. Per togliere all'analisi l'apparente contraddizione si rimonti alla espressione superiore

$$\frac{m(qx - pX)}{(X^2 + \beta X + x^2 + \alpha x + \gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

la quale si è posta uguale alla costante 1, che dunque rappresenta la costante intensità del lume nel punto C; ma questa costante nel caso di $m = o$, diventa $= o$, onde allora l'equazione generale diventa $o.(qx - pX) = o.(y^2 + \beta y + x^2 + \alpha x + \gamma)$, dalla quale non si deduce come sopra $y^2 + \beta y + x^2 + \alpha x + \gamma = o$, ma bensì $o = o$, che mostra l'evanescenza dell'equazione dalla curva cercata, e corrisponde al raziocinio precedente.

§. UNDECIMO.

PROBLEMA TERZO.

Data una superficie qualunque, trovare in essa il luogo, in cui va posto un lume, acciò in un punto preso in un piano qualunque, succeda la massima illuminazione. (Fig. 3).

Sia $AB = x$, $BD = y$, $DC = z$ (che si suppone perpendicolare al piano della Fig.), e suppongasi $x = P$ essere l'equazione della data superficie. Ciò posto è chiaro, che non si turberà punto la generalità del Problema, supponendo che il punto da illuminarsi sia A, cioè nell'origine dell'ascisse, e nel piano delle coordinate x, y. Sia adunque C il punto cercato, è chiaro, che essendo retti gli angoli ABD, ADC, avremo $AC = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, onde l'intensità della luce nel punto A sarà $= \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, si sostituisca in vece di x il suo valore preso dall'equazione della superficie, ed avremo

$$\frac{z}{(P^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si ponga $= o$ il differenziale di questa funsione, ed avremo

$$dz\,(P^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3z}{2}\,(P^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \times$$

$\overline{2PdP + 2ydy + 2zdz} = o$, cioè (siccome $dP = Mdy + Ndz$)

$$dz\,(P^2 + y^2 + z^2) -$$
$$3z\,(PMdy + PNdz + ydy + zdz) = o;$$

onde si avranno le due equazioni,

$$P^2 + y^2 + z^2 - 3zPN - 3z^2 = o$$
$$-PM - y = o,$$

che determineranno i valori di z, e y da sostituirsi nella funzione P, acciocchè $x = P$ sia l'ascissa corrispondente al punto cercato.

§. DUODECIMO.

Supponganſi $P = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$, cioè che la data ſuperficie ſia sferica, e l'origine dell'aſciſſe ſia nel centro di un cerchio maſſimo, ed avremo

$$M = \frac{-y}{\sqrt{1 - y^2 - z^2}}, \quad N = \frac{-z}{\sqrt{1 - y^2 - z^2}};$$

onde le due equazioni daranno $1 + 3z^2 - 3z^2 = o, y - y = o$; cioè $1 = x^2 + z^2 + y^2 = o$. È evidente, che il punto richieſto dee in queſto caſo corriſpondere all'origine dell'aſciſſe, ove le coordinate x, y ſono $= o$, e la z è $=$ al raggio della sfera: quindi il noſtro metodo dandoci $x^2 + y^2 + z^2 = o$; non pare, che eſprima queſta proprietà, ſe non nel caſo, che il Diametro ſia $= o$. Per togliere frattanto l'apparente inutilità del metodo, ſi riaſſuma l'equazione $dz\,(P^2 + y^2 + z^2) - 3z\,(PM\,dy + PN\,dz + y\,dy + z\,dz) = o$, e ſoſtituendo in eſſa i valori di P, M, N avremo $dz = o$, che integrata dà $z = 1$.

Ponendo inoltre il valore di z in P, ſi trova $x = \sqrt{-y^2}$; che come ognuno vede, è l'equazione, che eſprime il centro della sfera nel piano delle coordinate x, y, al qual centro in fatti corriſponde la $z = 1$, cioè il punto cercato.

§. DECIMOTERZO.

SCOLIO.

L'addotta eſemplificazione del precedente Problema, ſembra che veramente conduca alla ſoluzione, per mezzo del calcolo integrale, mentre ponendo nell'eſpreſſione generale

$$\frac{z}{(P^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad P = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$$

avremo la quantità di luce, che dee diventar maſſima $= z$, che differenziata, e poſta $= o$, non dà alcun noto valore, ſe non che integrando; ſi oſſervi per altro, che eſſendo per la natura della ſuperficie

$$dz = -\frac{2y\,dy}{\sqrt{1 - y^2 - x^2}} - \frac{2x\,dx}{\sqrt{1 - y^2 - x^2}},$$

ponendo $= o$ queſto valore, avremo $x = o, y = o$, che è quello, che ſi richiede per la ſoluzione propoſta, ed è in tal guiſa dedotto, con le ordinarie regole dal calcolo differenziale.

§. DECIMOQUARTO.

Sia $x = P = \sqrt{\frac{m^2 n^2 z^2 - m^2 y^2}{n^2}}$,

che ſarà l'equazione generale delle ſuperficie coniche, ed avremo

$$M\,dy = -\frac{m}{n} \times \frac{y\,dy}{\sqrt{n^2 z^2 - y^2}}, \quad N\,dz = \frac{m}{n} \times \frac{n^2 z\,dz}{\sqrt{n^2 z^2 - y^2}},$$

onde le due equazioni

$$P^2 + y^2 + z^2 - 3\,z\,P\,N - 3\,z^2 = o,$$

$$P\,M + y = o,$$

diventeranno

$$\frac{m^2\,n^2\,z^2 - m^2\,y^2}{n^2} + y^2 + z^2 - 3\,m^2\,z^2 - 3\,z^2 = o,$$

$$-\frac{m^2}{n^2}\,y + y = o\,;$$

dalla feconda fi ha $y = o$, onde la prima fi trova $-2\,m^2\,z^2 - 2\,z^2 = o$, onde ancora $z = o$, e foftituendo quefti valori nella funfione P, avremo $x = o$, che è quello, che ancora fnteticamente potrebbe dimoftrarfi in conferma del metodo precedente. Nel cafo che l'equazione della propofta fupèrficie foffe $R = o$, e non fi poteffe efplicitamente determinare la funfione $P = x$, fi potrà feguire il metodo propofto al §. XXIII.

§. DECIMOQUINTO.

PROBLEMA QUARTO.

Dati due punti lucidi (Fig. 9), *la facoltà di propagare la luce dei quali fia nella ragione di* P: Q, *trovare nella linea, che gli congiunge* P Q, *il punto ove la fomma delle intenfità della luce è minima.*

Sia $B\,Q = x$, $P\,Q = a$, ed avremo $P\,B = a - x$; ciò pofto, la fomma dell' intenfità della luce farà

$$= \frac{P}{(a-x)^2} + \frac{Q}{x^2};$$

quefta differenziata a dovere, ed eguagliata a zero, produrrà l' equazione

$$\frac{P}{(a-x)^3} - \frac{Q}{x^3} = o,$$

la quale afcende al terzo grado; ma facilmente fi rifolve, ponendola fotto la forma

$$\frac{x^3}{(a-x)^3} = \frac{Q}{P},$$

mentre eftraendo la radice terza, fi ottiene immediatamente

$$x = \frac{a\sqrt[3]{\frac{Q}{P}}}{1 + \sqrt[3]{\frac{Q}{P}}}.$$

§. DECIMOSESTO.

COROLLARIO.

Essendo i due punti lucidi dotati di egual facoltà di propagare la luce, il punto cercato dee effere equidiftante da ciafcheduno di effi; in fatti la noftra formola, ponendo $P = Q$, fi riduce ad $x = \frac{a}{2}$.

§. DECIMOSETTIMO.

SCOLIO.

Con la fintesi più rigorosa può giungersi a dimoftrare la coftruzione dell' efpofto Problema, che cioè il punto richiefto B fia in luogo tale, che produca $P : Q = PB^3 : BQ^3$. In fatti, fia PM perpendicolare a PQ, e QN fia ad effa parallella; fi tagli in mezzo PQ in E, e fi conduca la parallella DE, prodotta in R, in maniera, che fia DE ad ER come P a Q; per i punti in oltre DR fra gli afintoti PM, PQ, QN, fi conduchino le Iperbole ordinarie OD, IR, in virtù delle quali fiano le ordinate reciprocamente come i quadrati delle diftanze dai punti P, Q. Giacchè il punto E è equidiftante dai punti lucidi, farà l' intenfità del lume, che da effi ivi fi produce in ragione della loro facoltà d' illuminare; l' intenfità poi, prodotta dal punto lucido P in E a quella, che effo produce in B, farà reciprocamente come il quadrato BP, al quadrato PE, cioè come ED, ACB, e l' intenfità prodotta dal punto lucido Q nel punto E, farà all' intenfità, che effo produce in B per l' isteffa ragione come ER, a BS, onde la fomma delle due intenfità del lume in E, farà alla loro fomma in B come l' aggregato delle linee ordinate ad ambedue l' Iperbole; ma effendo nel noftro cafo $\overline{PB}^3$ a $\overline{BQ}^3$ come P a Q condotte le tangenti CH, SF potrà dimoftrarfi, che fono fra loro parallelle; poichè CB a BS, cioè l' intenfità prodotta in B dal lume P, a quella prodottavi dal lume Q, fta in ragion compofta di $P : Q$, e del quadrato BQ al quadrato PB; onde la ragione di P a Q farà compofta delle ragioni di CB a BS, e del quadrato BP al quadrato BQ; ma P a Q come il cubo di PB al cubo di BQ, onde il cubo di PB al cubo di BQ, è in ragion compofta di CB a BS, e del quadrato BP al quadrato BQ; ma la ragione dei fuddetti cubi fi compone ancora delle ragioni del quadrato PB, al quadrato BQ, e della linea PB alla linea BQ; onde tolte le ragioni comuni del quadrato PB, al quadrato BQ, la refidua ragione di CB a BS, farà eguale alla ragione di BP a BQ, ovvero delle futtangenti BH, BF, le quali fono la metà delle diftanze dal centro per la natura dell' Iperbola quadratica; fono dunque parallelle le due tangenti FS, BH; dunque la linea CS è minore di qualunque altra interpofta fra le due Iperbole, ed in confeguenza l' intenfità della luce in B è minima di qualunque altra nella linea PQ, come dovea dimoftrarfi.

§. DECIMOTTAVO.

PROBLEMA QUINTO.

Dato un piano mobile in tutti i fenfi fopra un punto fiffo, ed una moltitudine indefinita di punti luminofi (i quali poffono ancora effere difeguali fra loro, in modo che la loro facoltà d' illuminare fia differente in ciafcuno di effi) trovare la fituazione, in cui va pofto il detto piano, acciò nel punto corrifpondente al punto fiffo, fia maffimamente illuminato (Fig. 11).

Si concepisca sostituirsi nel luogo dei proposti lumi altrettanti pesi, i quali stiano fra loro nell' istessa ragione della potenza illuminante di ciascheduno, e si trovi il centro di gravità dei pesi medesimi; ciò posto, si congiunga il detto centro con il punto fisso del piano, il quale essendo situato ad angoli retti alla medesima linea, soddisfarà alla questione.

Questa semplice costruzione si può dimostrare considerando in primo luogo, che l' intensità dell' illuminazione prodotta da qualunque dei proposti lumi, è proporzionale in ciascuna posizione del piano al perpendicolo, che dal detto lume cade sul piano istesso, giacchè la distanza si conserva sempre l' istessa fra il lume, ed il punto da illuminarsi; quindi supponendo, che i lumi proposti siano due, facilmente si deduce la dimostrazione, che può estendersi a tutti i casi più complicati. In fatti suppongasi nei punti F, ed H sostituirsi due pesi proporzionali all' intensità dei lumi, che ivi concepivamo situati, e sia G il loro centro di gravità, dal quale si conduca la $G\,A$ al punto fisso, intorno al quale è mobile il piano $D\,N$, che si supponga situato non normale alla $G\,A$; è evidente pertanto, che condotte le normali $F\,E$, $H\,B$, e concepito tutto il sistema $F\,E\,B\,H$ dei pesi, e del piano, situato in modo che il piano $E\,B$ sia normale alla direzione della gravità, l' azione dei pesi contro il punto fisso A, o sia lo sforzo, che essi fanno per far muovere il piano parallello a se stesso, sarà proporzionale alle normali suddette, giacchè risolvendo le forze $F\,A$, $H\,A$ si vede, che le forze componenti $E\,A$, $B\,A$ non influiscono niente a tal' effetto; onde l' azione suddetta dei due pesi sul punto A, è proporzionale all' intensità dell' illuminazione, che vi producono i due lumi proposti, giacchè anch' essa abbiamo osservato esser come quelle normali. È chiaro pertanto, che supponendo riuniti i due pesi nel centro comune di gravità G, e risolvendo la forza totale $G\,A$ nelle due $G\,C$, $C\,A$ si trova, che quest' ultima non hà alcun' influsso nell' azione suddetta, che sarà dunque espressa dalla normale $G\,C$ solamente, la quale è sempre minore di $G\,A$ fuorchè nell' unico caso, in cui il piano si trovi normale alla medesima $G\,A$, mentre allora gli diventa eguale, ed in conseguenza i pesi fanno il massimo sforzo contro il punto fisso A per muovere il piano parallello a se stesso; dunque in tale circostanza i proposti lumi produrranno la massima illuminazione nel punto istesso A del piano suddetto.

§. DECIMONONO.

COROLLARIO PRIMO.

Quindi senz' altra dimostrazione si manifesta il seguente generalissimo teorema. Dato un numero qualunque di lumi quanto si voglia differenti fra loro in grandezza, o sia in facoltà d' illuminare, se concepiscasi, che acquistino una facoltà di gravitare proporzionale a quella, che hanno di illuminare, e trovisi il loro centro comune di gravità, il quale poi si congiunga con un punto qualunque di una superficie piana, o curva, l' illuminazione, che in questo punto sarà prodotta dai suddetti lumi, sarà proporzionale al seno dell' angolo fatto dalla linea, che congiunge il centro di gravità col punto illuminato, e dal piano tangente nel medefimo punto illuminato la propofta fuperficie.

§. VIGESIMO.

COROLLARIO SECONDO.

FACILMENTE per tanto fi può dimoftrare la feguente rimarchevole proprietà del circolo. Se fiano dati quanti fi voglia lumi differenti fra loro nella facoltà d' illuminare, e fi concepifcano acquiftare una facoltà di gravitare proporzionale in ciafcuno, a quella, che aveva d' illuminare, e nel centro comune di gravità di quefti pefi fi faccia il centro di un cerchio di qualfivoglia raggio, la periferìa di quefto cerchio farà il *luogo* d' infiniti maffimi; mentre l' illuminazione prodotta dai lumi fuddetti in ciafchedun laterculo elementare della periferìa medefima, farà la maffima di qualunque altra, che verrebbe prodotta fe il laterculo dato aveffe una pofizione differente da quella, che ha neceffariamente, per effere parte di una periferìa circolare. In fatti, fuppongafi DA effere tangente ad un punto della periferìa, il di cui centro fia in G, è evidente, che effendo GA normale a DA, l' illuminazione prodotta dai lumi F, H nel laterculo A farà maffima di qualunque altra potrebbero produrvi, nel cafo che GA non foffe ad effo normale; l' ifteffo potrà dirfi di qualunque altro punto.

§. VIGE-

§. VIGESIMOPRIMO.

COROLLARIO TERZO.

L'ISTESSO potrà dirfi ancora di una sfera per le ragioni medefime, che abbiamo efpofte nel dimoftrare nel cerchio tale proprietà, che quì fpecialmente fi rende fingolare, giacchè non farà frequente il ritrovare un' intiera fuperficie curva, ogni punto della quale fia dotato di una proprietà maffima.

§. VIGESIMOSECONDO.

SCOLIO PRIMO.

L'INTRODURRE opportunamente le meccaniche proprietà nelle fpeculazioni di genere diverfo, fpeffo hà influito al più facile, ed elegante fviluppo di effe, come ne poffono far fede moltiffime proprietà Geometriche, dimoftrate dagli Antichi colla Dottrina del moto, ed il celebre Problema di ritrovare cioè il colore, che dee rifultare dalla miftione di un numero dato di colori diverfi, fciolto elegantemente dal *Newton*, riducendolo all' invenzione del centro di gravità di un' egual numero di pefi. Il precedente noftro Problema ancora, riceve dalla riduzione, che ne abbiamo fatta alla Meccanica, ftraordinario facilitamento, mentre ancora per mezzo dell' analifi riefcirebbe difficile il ridurlo ad una coftruzione altrettanto elegante.

In fatti facendo, $HB = x$, $HA = a$ $FE = y$, $FA = b$ avremo l' intenfità della luce nel punto A,

$$= \frac{x}{a^3} + \frac{y}{b^3};$$

che dee diventar maſſima; ma per introdurvi le altre neceſſarie condizioni del Problema ſi ſupponga condotta la linea $FH = c$, e ſi produca fino a tanto che incontri la linea BE, che eſprime il piano mobile; fatto queſto dalla contemplazione dei triangoli ſimili, e rettangoli, con un poco di deſtrezza, ſi dedurrà l'equazione

$$(c^2 - a^2 - b^2 + 2xy)^2 = 4(a^2 b^2 - a^2 y^2 - b^2 x^2 + x^2 y^2),$$

che unita coll'eſpreſſione

$$\frac{x}{a^3} + \frac{y}{b^3}$$

contiene tutte le condizioni opportune. Ciò poſto, l'ordinario metodo ſarebbe, di ſoſtituire nell'eſpreſſione

$$\frac{x}{a^3} + \frac{y}{b^3}$$

il valore dedotto dall'equazione trovata di una delle variabili, ma ſi otterrà l'iſteſſo operando come ſegue. Si differenzi la ritrovata equazione, ed averemo

$$(c^2 - a^2 - b^2 + 2xy)(x\,dy + y\,dx) = -2a^2 y\,dy -$$
$$2b^2 x\,dx + 2x^2 y\,dy + 2y^2 x\,dx;$$

ſi prenda da queſta il valore di dy, che trovaſi

$$= -\frac{c^2 y - a^2 y - b^2 y + 2b^2 x}{c^2 x - a^2 x - b^2 x + 2a^2 y}\,dx;$$

e ſi ſoſtituiſca nella differenza della quantità

$$\frac{x}{a^3} + \frac{y}{b}, \text{ ed avremo}$$

$$dx\left(\frac{b^3}{a^3} - \frac{c^2 y - a^2 y - b^2 y + 2b^2 x}{c^2 x - a^2 x - b^2 x + 2a^2 y}\right),$$

che fatta $= o$, produrrà l'equazione

$$b^3(c^2 x - a^2 x - b^2 x + 2a^2 y)$$
$$- a^3(c^2 y - a^2 y - b^2 y + 2b^2 x) = o,$$

la quale inſieme coll'altra ritrovata precedentemente, darà i valori cercati delle incognite x, y. Dalla ſeconda adunque delle due equazioni

$$(c^2 - a^2 - b^2 + 2xy)^2 - 4(a^2 b^2 - a^2 y^2 - b^2 x^2 + x^2 y^2) = o,$$

$$b^3(c^2 x - a^2 x - b^2 x + 2a^2 y)$$
$$- a^3(c^2 y - a^2 y - b^2 y + 2b^2 x) = o,$$

ſi otterà primieramente

$$x = \frac{a^3(c^2 - a^2 - b^2) - 2a^2 b^3}{b^3(c^2 - a^2 - b^2) - 2a^3 b^2}\,y,$$

cioè per brevità $x = Ay$, e fatto quindi $c^2 - a^2 - b^2 = B$, la prima diventerà

$$(4BA + 4a^2 + 4b^2 A^2)y^2 + B^2 - 4a^2 b^2 = o,$$

$$\text{onde } y = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2b^2 - B^2}{BA + a^2 + b^2A^2}},$$

$$\text{ed } x = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{4a^2b^2 - B^2}{BA + a^2 + b^2A^2}}.$$

Nel caſo, che le due linee HA, FA ſiano eguali, e facciano un angolo retto, le due linee ignote x, y dovranno eſſere eguali ciaſcuna a $\sqrt{\frac{b^2}{2}}$, come facilmente può dimoſtrarſi; ed in fatti, le noſtre eſpreſſioni ſi riducono in tale circoſtanza ambedue $= \sqrt{\frac{b^2}{2}}$, lo che è una delle tante riprove, che potrebbero darſi della giuſtezza delle medeſime. Quindi ſi manifeſtano i valori delle linee AB, AE, ed un ſemicerchio deſcritto ſul diametro AH, ovvero AF, darà l'opportuna coſtruzione del Problema.

L'Analiſi trigonometrica ſomminiſtra un' altra ſoluzione, che può comparire più elegante. L'angolo coſtante FAH ſia $= m$, e gli angoli ignoti FAE, HAB ſiano eguali a z, e t. Ciò poſto, ſupponendo il ſemicerchio $= p$, avremo $z + t + m = p$, e l'intenſità del lume nel punto A, ſarà

$$= \frac{\text{ſin.}\, z}{b^2} + \frac{\text{ſin.}\, t}{a^2}.$$

Differenziando per tanto l'equazione $z + t + m = p$, e l'eſpreſſione $\frac{\text{ſin}\, z}{b^2} + \frac{\text{ſin.}\, t}{a^2}$,

e ſoſtituendo in queſta il valore di dz, tolto da quella, avremo la quantità da farſi $= o$, ed in conſeguenza le due equazioni

$$a^2\, \text{Coſ.}\, z - b^2\, \text{Coſ.}\, t = o$$

$$z + t + m - p = o,$$

eliminando ſi troverà

$$a^2\, \text{Coſ.}\, (p - m - t) - b^2\, \text{Coſ.}\, t = o,$$

cioè $\text{ſin.}\, m\ \text{ſin.}\, t - \text{Coſ.}\, m\ \text{Coſ.}\, t = \frac{b^2}{a^2}\, \text{Coſ.}\, t$,

ed in conſeguenza avremo l'equazione

$$\text{ſin.}\, m^2 = \text{Coſ.}\, t^2 \left(1 + \frac{b^4}{a^4} + 2\frac{b^2}{a^2}\, \text{Coſ.}\, m\right),$$

e finalmente

$$\text{Coſ.}\, t = \frac{\text{ſin.}\, m}{\sqrt{\left(1 + \frac{b^4}{a^4} + 2\frac{b^2}{a^2}\, \text{Coſ.}\, m\right)}},$$

$$\text{Coſ.}\, z = \frac{b^2\, \text{ſin.}\, m}{a^2\sqrt{\left(1 + \frac{b^4}{a^4} + 2\frac{b^2}{a^2}\, \text{Coſ.}\, m\right)}},$$

ognuno dei quali valori, nel caſo particolare eſaminato ſopra, ſi riduce $= \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, come in fatti dee ſuccedere. Se nelle due precedenti ſoluzioni non ſi foſſero introdotte le equazioni $(c^2 - a^2 - b^2 + 2xy)^2 = 4(a^2b^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + x^2y^2)$,

$z + t + m = p$, ma si fossero soltanto differenziate, ed uguagliate al zero le due espressioni

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}, \frac{\sin. z}{b^2} + \frac{\sin. t}{a^2},$$

avremmo ottenuto la soluzione di un Problema diverso da quello, che abbiamo sciolto, e ritrovata; cioè la situazione che debbono avere i due lumi H, F, per mantenersi sempre all'istessa distanza $A H$, $A F$ dal punto A, e produrvi la massima illuminazione: in fatti, dalla seconda espressione si avrebbe

$$a^2\, d\, z\, Cos.\, z + b^2\, d\, t\, Cos.\, t = o,$$

cioè

$$Cos.\, z = o,\ Cos.\, t = o,$$

che mostra dovere le due linee $A H$, $A F$ essere ad angolo retto ambedue colla linea, ove è il punto illuminato; e dalla prima espressione

$$\frac{x}{a^3} + \frac{y}{b^3},$$

si avrebbe

$$b^3\, d\, x + a^3\, d\, y = o, \text{ cioè } d\, x = o, d\, y = o,$$

ed integrando $x = A$, $y = B$, supponendo A, e B due costanti, le quali facilmente si determinano in tal circostanza, e ritrovansi eguali ad a, e b; onde $x = a$, $y = b$, sono i valori cercati. Questi resultati sono conformi a quanto si sarebbe possuto dedurre dal Lemma generale (§. I) senza calcolo alcuno, ma intanto gli abbiamo riportati, in quanto

nel secondo caso si perviene al ritrovamento delle ignote quantità, per mezzo del calcolo integrale, come abbiamo visto succedere al § XII.

§. VIGESIMOTERZO.

SCOLIO SECONDO.

Il metodo impiegato nello Scolio precedente per la soluzione di quei Problemi, conduce alla contemplazione di un metodo ancor più generale, che siamo quì per esporre brevemente, comechè estraneo all'argomento principale di questo Opuscolo. Dopo che *Maclaurin*, nell'eccellente Trattato delle Flussioni, arricchì il metodo de' massimi, e minimi di molte importanti osservazioni, dimostrando fra l'altre cose, che qualora l'equazione nata dal differenziare la proposta quantità, abbia un numero pari di radici uguali, non si dà nè massimo, nè minimo; dopo che l'*Eulero*, nella seconda parte del calcolo differenziale, hà esposto sotto nuovo aspetto il metodo dei massimi, e minimi tanto per le algebraiche, quanto per le trascendenti funzioni, e dopo che finalmente il Sig. *De la Grange*, nel primo tomo delle Miscellanee di Torino, hà proposto degli ingegnosissimi criteri per distinguere in ogni caso il massimo dal minimo; non resta più alcuna difficoltà per ritrovare i massimi, e minimi di una funzione qualunque P di quante si voglia variabili.

Sia $P = o$ un'equazione contenente un numero di variabili qualunque, e sia P' una funzione di tutte le medesime variabili, è chiaro, che se queste sono più d'una, i loro valori determinati dall' equazione $P = o$ possono essere infiniti; se dunque questi si sostituischino nella funzione P', essa può essere suscettibile d' aumento, e di diminuzione, onde può diventare massima, o minima. È evidente, che con una sostituzione potrebbero introdursi nella funzione P' le condizioni dell' equazione $P = o$, e cercarne il massimo, o il minimo con il solito metodo; ma questa sostituzione non è sempre possibile, onde il metodo accennato, può ritrovarsi in molti casi necessario, ed ecco come io l' espongo in tutta la sua generalità.

Sia un numero qualunque di equazioni $P = o$, $P' = o$, $P'' = o$, e sia P''' funzione di tutte le variabili contenute nelle quantità P, P', P'', trovare (supponendo che il numero delle variabili ecceda quello delle equazioni) fra tutti i valori delle variabili definiti dalle suddette equazioni quelli, che sostituiti nella funzione P''' la rendono massima, o minima.

Siano x, y, t, z le variabili contenute in P''' (giacchè queste, e le tre equazioni suddette servono per mostrare la generalità del metodo): dovendo P''' esser massimo, o minimo, avremo $d P''' = o$, cioè $\alpha''' d x + \beta''' d y + \gamma''' d t + \delta''' d z = o$, e differenziando ancora le proposte equazioni, si otterrà

$$\alpha d x + \beta d y + \gamma d t + \delta d z = o$$

$$\alpha' d x + \beta' d y + \gamma' d t + \delta' d z = o$$

$$\alpha'' d x + \beta'' d y + \gamma'' d t + \delta'' d z = o$$

$$\alpha''' d x + \beta''' d y + \gamma''' d t + \delta''' d z = o.$$

Si prenda dalla prima equazione il valore di $d x$, e si sostituisca nelle altre equazioni, che diventeranno queste

$$(\alpha \beta' - \alpha' \beta) d y + (\alpha \gamma' - \alpha' \gamma) d t + (\alpha \delta' - \alpha' \delta) d z = o$$

$$(\alpha \beta'' - \alpha'' \beta) d y + (\alpha \gamma'' - \alpha'' \gamma) d t + (\alpha \delta'' - \alpha'' \delta) d z = o$$

$$(\alpha \beta''' - \alpha''' \beta) d y + (\alpha \gamma''' - \alpha''' \gamma) d t + (\alpha \delta''' - \alpha''' \delta) d z = o$$

eliminando adesso il $d y$, troveremo

$$\big((\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma) - (\alpha\beta'' - \alpha''\beta)(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)\big) d t +$$
$$\big((\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\alpha\delta'' - \alpha''\delta) - (\alpha\beta'' - \alpha''\beta)(\alpha\delta' - \alpha'\delta)\big) d z = o,$$
$$\big((\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\alpha\gamma''' - \alpha'''\gamma) - (\alpha\beta''' - \alpha'''\beta)(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)\big) d t +$$
$$\big((\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\alpha\delta''' - \alpha'''\delta) - (\alpha\beta''' - \alpha'''\beta)(\alpha\delta' - \alpha'\delta)\big) d z = o;$$

suppongasi per brevità, che M, ed N siano i coefficienti di $d t$, e $d z$ nella prima di queste due equazioni, ed i coefficienti dei medesimi differenziali nella seconda siano M', ed N', ed avremo

$$M d t + N d z = o$$

$$M' d t + N' d z = o,$$

dalle quali eliminando $d t$ avremo finalmente l' equazione $M N' - M' N = o$, che contiene la condizione del massimo, e le determinazioni di tutte l' equazioni proposte, le quali serviranno inoltre per ottenere i valori delle variabili, che resteranno perfettamente determinate dalle seguenti equazioni

$$P = o,\ P' = o,\ P'' = o,\ M N' - M' N = o.$$

Per concepire chiaramente lo ſpirito, e la giuſtezza del metodo eſpoſto ſi oſſervi, che dovendo la funzione P''' diventar maſſima, o minima in virtù dei valori delle variabili determinati dalle equazioni $P = o$, $P' = o$, $P'' = o$; il metodo naturale è di ſoſtituire il valore di una di eſſe variabili, tolto dalla prima equazione in tutte le altre funzioni P', P'', P''', e poi ſeguitare con l' iſteſs' ordine fino a tanto che P''' non contenga altro che una ſola delle variabili medeſime, e allora differenziare ſecondo il ſolito, e porre eguale a zero il riſultato della differenziazione; ma ſiccome nel caſo noſtro ſi ſuppone che l' equazioni $P = o$, $P' = o$, $P'' = o$, ſiano tali da non permettere queſta operazione, giacchè le funzioni delle reſpettive variabili ſono ineſplicabili, ſuppongaſi, che la funzione P''' diventaſſe Z allor quando ſi foſſe effettuata quella ſoſtituzione delle funzioni delle variabili, in vece delle variabili medeſime, ſoſtituzione, che per ipoteſi è impoſſibile; ciò poſto Z ſarà la quantità, che dee diventar maſſima, o minima, e l' equazione $d\,Z = o$ ſcioglierà il Problema; ſi tratta adunque di avere la equazione $d\,Z = o$ ſenza conoſcere la funzione Z: per far ciò ſi differenzi P''', ed averemo

$$d\,P''' = \alpha'''\,d\,x + \beta'''\,d\,y + \gamma'''\,d\,t + \delta'''\,d\,z,$$

ma in virtù della prima equazione abbiamo

$$d\,x = -\frac{\beta\,d\,y + \gamma\,d\,t + \delta\,d\,z}{\alpha};$$

onde ſoſtituendo queſto valore s' introdurranno in $d\,P'''$ le con-

dizioni della prima equazione, e avremo

$$d\,P''' = (\alpha\,\beta''' - \alpha'''\,\beta)\,d\,y + (\alpha\,\gamma''' - \alpha'''\,\gamma)\,d\,t + (\alpha\,\delta''' - \alpha'''\,\delta)\,d\,z$$

in virtù della ſeconda equazione abbiamo

$$d\,y = -\frac{(\alpha\,\gamma' - \alpha'\,\gamma)\,d\,t + (\alpha\,\delta' - \alpha'\,\delta)\,d\,z}{\alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta},$$

onde ſoſtituendo queſto valore s' introdurranno in $d\,P'''$ le condizioni ancora della ſeconda equazione, e diventerà $d\,P''' = M'\,d\,t + N'\,d\,z$; ſoſtituendo finalmente il valore di $d\,t = -\frac{N}{M}\,d\,z$, preſo dalla terza equazione, diventerà

$d\,P''' = (M\,N' - M'\,N)\,d\,z$, e conterrà tutte le condizioni eſpreſſe dalle equazioni $P = o$, $P' = o$, $P'' = o$, onde ſarà manifeſtamente $d\,P''' = d\,Z$, e l' equazione $M\,N' - M'\,N = o$ ſcioglierà il Problema non meno che l' altra $d\,Z = o$.

Nel caſo che il numero delle variabili ſia n, il numero delle equazioni dee eſſere $n - 1$, affinchè in Z non reſti, che una ſola variabile, ovvero in $d\,P'''$ una ſola differenziale; ma ſe il numero m delle equazioni, ſia minore di $n - 1$, è chiaro, che fatte tutte le ſoſtituzioni poſſibili, reſterebbe in $d\,P'''$ un numero $n - m$ di differenziali; onde in tal caſo ſi otterrebbero dalla equazione $d\,P''' = o$, $n - m$ equazioni, che unite alle precedenti m formerebbero un numero n di equazioni, eguale a quello delle variabili, che dunque ancora in tale circoſtanza rimarrebbero determinate.

A questo caso appunto conduce la soluzione del Problema terzo, allor quando l'equazione $R = o$ della proposta superficie non ammetta di esprimere il valore di una delle tre variabili per l'altre due: in fatti differenziando, avremo

$$dR = Q\,dx + M\,dy + N\,dz = o,$$

ed il differenziale della espressione

$$\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

sarà come sopra

$$\frac{dz\,(x^2 + y^2 + z^2) - 3z\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

ove ponendo

$$dx = -\frac{M\,dy + N\,dz}{Q},$$

avremo il differenziale della quantità, che dee diventar massima, o minima, il qual differenziale posto $= o$, ci conduce all' equazione

$$(Q\,(x^2 + y^2 - 2z^2) + 3zxN)\,dz + (xM - yQ)\,dy = o;$$

ed in conseguenza le tre equazioni

$$Q\,(x^2 + y^2 - 2z^2) + 3zxN = o$$

$$xM - yQ = o$$

$$R = o,$$

determineranno le tre variabili x, y, z. Lo che può servire per esemplificazione di quanto abbiamo asserito, e che dalla ragione ancora può dedursi.

In tutti i casi per tanto, nei quali riuscirà difficile, o impossibile il determinare esplicitamente le funzioni delle variabili espresse dalle equazioni $P = o$, $P' = o$, $P'' = o$, per sostituirle in vece delle variabili medesime nella quantità P''', che dee diventare massima, o minima, si potrà ricorrere con frutto all' esposto metodo, mentre quantunque dopo ritrovata l'equazione $MN' - M'N = o$, possa ritrovarsi eguale difficoltà nella eliminazione delle variabili, da farsi per mezzo delle equazioni date, molte volte dalla sola equazione $MN' - M'N = o$, si possono dedurre le circostanze più interessanti del Problema.

Sia per esempio l'equazione $x^5 + y^5 - xy = o$, e fra tutte le coordinate x, y espresse dalla medesima, siano da trovarsi quelle, che formano il minimo, o massimo rettangolo xy. È evidente, che essendo dall'equazione $x^5 + y^5 - xy = o$ impossibile il dedurre il valore di y, o x, per sostituirsi nella funzione xy, che dee diventar massima, o minima, converrà ricorrere al nostro metodo, in virtù del quale sarà

$$5x^4\,dx + 5y^4\,dy - x\,dy - y\,dx = o$$

$$x\,dy + y\,dx,$$

e sostituendo il valore di dx, tolto dalla equazione, nella differenziale della funzione, che dee diventar maſſima, o minima ſarà

$$x\,dy + \frac{xy - 5y^5}{5x^4 - y}\,dy = o,$$

ed $x^5 - y^5 = o$; onde ſubito ſi deduce, che il Problema è riſoluto nel caſo, che le coordinate ſiano eguali fra loro; lo che in virtù dell' altra equazione $x^5 + y^5 - xy = o$, ſi trova ſuccedere quando $x = o$, ed in conſeguenza ancor $y = o$, ed inoltre quando

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Prendaſi la ſeconda differenza per diſcernere il maſſimo dal minimo, ed avremo

$$\frac{(5x^4 - y)(25x^4\,dx - 25y^4\,dy) - (5x^5 - 5y^5)(20x^3\,dx - dy)}{(5x^4 - y)^2};$$

quindi ponendo come ſopra

$$dx = \frac{x - 5y^4}{5x^4 - y}\,dy;$$

e dividendo per dy, ſi otterrà

$$\frac{25x^4(x - 5y^4) - 25y^4(5x^4 - y) + 5x^5 - 5y^5}{(5x^4 - y)^2} -$$

$$\frac{20x^3(5x^5 - 5y^5)(x - 5y^4)}{(5x^4 - y)^3};$$

ed eſſendo $x = y$, queſta eſpreſſione diventerà

$$= -\frac{50x^4}{5x^4 - x},$$

ove ponendo

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ſi ottiene la ſeconda differenza

$$= -\frac{50\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}}{5\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}},$$

quantità ſempre negativa, eſſendo

$$5\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}};$$

onde nel caſo di

$$x = y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

il rettangolo xy, è un maſſimo. Nel caſo d' $x = y = o$, il detto rettangolo non è nè un maſſimo, nè un minimo, mentre trovandoſi $x^2 = o$, cioè un numero pari di radici eguali, queſte non poſſono produrre nè un maſſimo, nè un minimo, come è noto a tutti Geometri.

È da notarſi, che parrebbe a prima viſta poterſi ottenere l'iſteſſo, ſenza ricorrere al metodo eſpoſto, ſoſtituendo, cioè il valore implicito di una variabile, nella funzione, che dee diventar massima, o minima, e poi trattar questa come una funzione a più variabili; ma in tal guisa non può giungersi ad una soluzione completa, come dal raziocinio potrebbe dedursi, e come da questo esempio medesimo si manifesterà. Dall' equazione $x^5 + y^5 - xy = o$, si hà

$$x = \frac{x^5 + y^5}{y},$$

che sostituito nella funzione xy, la rende $= x^5 + y^5$; differenziando adunque trovasi

$$5 x^4 dx + 5 y^4 dy = o,$$

cioè

$$x = o, y = o,$$

e l' altro valore

$$x = y = (\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{5}},$$

che è appunto quello necessario per la soluzione, non si manifesta se non con ulteriori artifizj.

Inoltre, il metodo esposto è da preferirsi, mentre si estende ancora ai casi, nei quali le equazioni date contenessero dei segni d' integrazione quanto si voglia complicati, nella quale occorrenza il suddetto ripiego resta affatto inefficace. Suppongasi per esempio il seguente:

PROBLEMA

PROBLEMA.

DATA una quantità di curve qualunque all' istesso asse, ed origine di ascisse, ascindere in ciascuna curva una porzione di arco (computando dall' origine dell' ascisse) in maniera, che la somma di tutti gli archi sia eguale ad una data quantità, ed i tempi impiegati a percorrergli da un grave, che cada lungo di essi, sia un massimo, o un minimo.

Suppongasi $= 2$ il numero delle curve, e siano x, y le ascisse appartenenti a ciascuna curva, e z, t le respettive ordinate: ciò posto, supponendosi note le equazioni delle curve proposte, avremo $dz = p\,dx$, e $dt = q\,dy$, l' equazione adunque esprimente la prima condizione del Problema sarà

$$\int. dx \sqrt{1 + p^2} + \int. dy \sqrt{1 + q^2} = 1,$$

e la funzione, che dee diventar massima, o minima sarà

$$\int. \frac{dx \sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{x}} + \int. \frac{dy \sqrt{1 + q^2}}{\sqrt{y}};$$

differenziando adunque, e sostituendo il valore di dx tolto dalla equazione, avremo per l' equazione determinatrice del massimo, o minimo

$$\left(\sqrt{\frac{1 + q^2}{y}} - \sqrt{\frac{1 + q^2}{x}}\right) dy = o,$$

dalla quale manifestamente deducesi $x = y$; onde debbono gli archi richiesti essere egualmente alti, o sia corrispondere ad eguali ascisse; lo che concorda con la ragione, ed ancora finteticamente potrebbe dimostrarsi nel modo seguente.

Suppongasi, che ascissi gli archi, ad eguale altezza equivagliano in somma la data quantità 1; e se neghisi che siano tali da esser percorsi nel massimo tempo, si dia un aumento piccolissimo ad uno di essi, in maniera che, diminuito l'altro opportunamente, facciano l'istessa somma 1; si troverà, che il tempo impiegato a percorrere i due archi ineguali, è minore di quello impiegato a percorrere i due eguali; poichè la porzioncella d'arco aggiunto sarà percorsa dal mobile cadente con maggior velocità di quella, con cui percorreva la porzioncella tolta all'altro arco, rimanendo tutto il resto come prima; dunque il tempo sarà cresciuto meno da una parte di quello, che diminuito dall'altra, ed in conseguenza la somma dei due tempi sarà diminuita.

Questo istesso ci vien indicato dalla seconda differenza della quantità proposta. In fatti, differenziando l'espressione

$$\left(\sqrt{\frac{1+q^2}{y}} - \sqrt{\frac{1+q^2}{x}}\right) dy,$$

troveremo

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\, d.\sqrt{1+q^2} - \frac{dy\sqrt{1+q^2}}{2y\sqrt{y}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x}}\, d.\sqrt{1+q^2} + \frac{dx\sqrt{1+q^2}}{2x\sqrt{x}},$$

e ponendo come sopra

$$dx = -\frac{dy\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}},$$

e dividendo per dy^2 otterremo

$$-\frac{\sqrt{1+q^2}}{2y\sqrt{y}} - \frac{1+q^2}{2x\sqrt{x(1+p^2)}},$$

quantità negativa, come esige la natura del Problema.

Facilmente potranno ritrovarsi molti esempj di simil genere, coi quali si manifesti l'utilità del proposto metodo, specialmente riflettendo all'eccellenti proprietà dimostrate dal sommo *Eulero*, nel Calcolo integrale, Tomo I°, Sezione II, Capo VI, intorno alla comparazione delle formole trascendenti,

$$\frac{dz}{\sqrt{(A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4)}},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(a+bz^2+cz^4+ez^6)}};$$

onde ritrovasi algebraicamente espressa la differenza di due archi, ovvero la ragione, che passa tra due archi, sebbene l'integrazione di quelle formole non sia effettuabile; e quindi si presenta la soluzione di molti Problemi eleganti, fra i quali è rimarchevole il seguente. *Data una catena estensibile, o nò, attaccata per le due estremità, determinare la situazione, che essa prenderebbe, quando fosse accavalciata sopra una puleggia, esistente fra i due punti ove è fissata, in qualunque ipotesi di gravità*, la soluzione del quale si riduce alle esposte questioni di massimi, e minimi; ma dobbiamo riserbare ad altro luogo, mentre ci condurrebbe troppo lontano dal primario argomento.

Nel prendere la seconda differenza per distinguere il massimo dal minimo, abbiamo nei due esempi esposti, considerate variabili ambedue le incognite x, y; ma si osservi, che avendo presa per variabile solamente y (il di cui solo differenziale trovasi in quelle quantità) avremmo ottenuto nel primo esempio

$$\frac{-(5x^4-y)\,25y^4\,dy+(5x^5-5y^5)\,dy}{(5x^4-y)^2},$$

cioè
$$-\frac{25y^4}{5x^4-y},$$

e nel secondo esempio

$$-\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+q^2}{y}}+\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)d.\sqrt{1+q^2},$$

cioè
$$-\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+q^2}{y}},$$

dai quali resultati potevamo, come sopra, venire in chiaro, essere in quelle circostanze un massimo la quantità proposta.

Per venire in chiaro come possa profittarsi di tale abbreviamento di calcolo, suppongasi che l'equazione $P=o$, abbia due variabili x, y, e la funzione di esse P' debba diventare massima, o minima; avremo dunque

$$\alpha\,dx+\beta\,dy=o,\quad \alpha'\,dx+\beta'\,dy,$$

e l'equazione determinatrice il massimo, o minimo sarà

$$\left(\frac{\beta'\alpha-\alpha'\beta}{\alpha}\right)dy=o.$$

Per giungere adesso alla cognizione della seconda differenza, suppongasi primieramente

$$d\alpha=A\,dx+B\,dy$$
$$d\beta=B\,dx+C\,dy$$
$$d\alpha'=A'\,dx+B'\,dy$$
$$d\beta'=B'\,dx+C'\,dy;$$

ed essendo in generale la differenza della proposta quatità

$$\frac{\beta'\alpha-\alpha'\beta}{\alpha},$$

uguale a questa espressione

$$\frac{\alpha^2\,d\beta'-\alpha\alpha'\,d\beta-\alpha\beta\,d\alpha'+\alpha'\beta\,d\alpha}{\alpha^2},$$

nel caso che veruna delle variabili si prenda per costante, essa sarà $=$

$$\frac{\alpha^2B'\,dx-\alpha\alpha'B\,dx-\alpha\beta A'\,dx+\alpha'\beta A\,dx}{\alpha^2}+$$
$$\frac{\alpha^2C'\,dy-\alpha'\alpha C\,dy-\alpha\beta B'\,dy+\alpha'\beta B\,dy}{\alpha^2},$$

e ponendo

$$dx=-\frac{\beta\,dy}{\alpha},$$

e dividendo per dy diventerà $=$

$$\frac{\beta^2\left(A'-\frac{\alpha'A}{\alpha}\right)+2\beta(\alpha'B-\alpha B')+\alpha(\alpha C'-\alpha'C)}{\alpha^2}:$$

Nel caſo poi che prendaſi y ſolamente variabile, ed x coſtante, l'iſteſſa differenziale, dividendo per dy, ſarà $=$

$$\frac{\beta(\alpha' B - \alpha B') + \alpha(\alpha C' - \alpha' C)}{\alpha^2}.$$

Analizzando con un poco di deſtrezza le due eſpoſte eſpreſſioni, ſi manifeſteranno le intrinſeche circoſtanze di eſſe, coerentemente alle condizioni contenute nelle equazioni

$$P = o,\ \alpha\beta' - \alpha'\beta = o,$$

ed in conſeguenza potrà giudicarſi quale analogìa paſſi tra le affezioni dell'una, e dell'altra. Volendo eſtendere queſta diſcuſſione ai caſi più complicati, ſi potrà ſeguire la medeſima ſtrada, oſſervando nei coefficienti dei differenziali, la legge dipendente dalla natura medeſima del calcolo differenziale, (vedaſi la bella Memoria ſu i maſſimi, e minimi del Sig. *Luigi de la Grange* nel Tom. I° delle Miſcellanee di Torino) la qual legge, nel caſo che in $P = o$, vi ſiano le quattro variabili x, y, z, t, e che ſia

$$dP = \alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz + \delta\,dt = o,$$

conduce alle ſeguenti eſpreſſioni

$$d\alpha = A\,dx + B\,dy + D\,dz + G\,dt$$
$$d\beta = B\,dx + C\,dy + E\,dz + H\,dt$$
$$d\gamma = D\,dx + E\,dy + F\,dz + I\,dt$$
$$d\delta = G\,dx + H\,dy + I\,dz + L\,dt;$$

l'iſteſſo dicaſi delle altre funzioni P', P'', ec.

§. VIGESIMOQUARTO.

PROBLEMA SESTO.

Dato un corpo luminoſo di qualunque figura, e la diſtanza di eſſo da un punto preſo in un piano qualunque, trovare la ſituazione, che dee prendere queſto piano, acciò in quel dato punto di eſſo ſegua la maſſima illuminazione.

Il dato corpo luminoſo può conſiderarſi come un' aggregato di punti lucidi, che ricoprano la ſuperficie di eſſo; quindi trovando il centro di gravità di quella porzione di ſuperficie, che guarda il punto da illuminarſi, e tirando indi una retta al punto dato, queſto ſarà maſſimamente illuminato, quando il piano ſarà normale alla retta predetta, come può dedurſi da quanto abbiamo dimoſtrato al §. XVIII.

§. VIGESIMOQUINTO.

COROLLARIO PRIMO.

Se i corpi luminoſi foſſero più d'uno, ſi potrebbe coll'iſteſſo metodo, ritrovare l'illuminazione maſſima, da quelli prodotta in un punto ſituato ad una diſtanza data in un piano qualunque, mentre facilmente ſi vede, dovere il piano eſſere normale alla linea, che congiunge il dato punto, con il centro di gravità comune alle ſuperficie illuminanti dei corpi ſuddetti.

§. VIGESIMOSESTO.

COROLLARIO SECONDO.

QUINDI facilmente si può determinare, in quale situazione debba essere un piano posto nella superficie terrestre, per ricevere il massimo lume del Sole, e della Luna; mentre per un breve spazio di tempo, si può supporre, che si mantenga fra questi due astri costante la distanza, e questa potrà concepirsi divisa in ragione reciproca della forza illuminante del primo, a quella del secondo, cioè nella ragione di 259970: 1.

§. VIGESIMOSETTIMO.

SCOLIO PRIMO.

INTORNO alla forza illuminante del Sole, e della Luna, oltre alli Signori *Thumingio*, e *Kiesio*, quegli in alcuni Opuscoli, questi nelle Memorie di Berlino, hanno speculato, il Sig. *Eulero:* „ Réflexions sur les divers degrés de lumiere du „ Soleil, & des autres corps céleſtes; *Mem. di Berlin.* “; il Sig. *Bouguer* „ Essai Dioptrique sur la gradation de la lu„ miere“; ed il Sig. *Smith* „ A compleat system of Opticks “. Il Sig. *Bouguer* stabilì per mezzo dell'esperienza, la sopraddetta ragione essere come 300000: 1, ed il Sig. *Smith*, dalla teoria dedusse la forza illuminante del Sole, a quella della Luna essere come 90000: 1; ma dal di lui raziocinio si rileva, che questa è un poco più piccola del dovere, ed egli stesso sembra inclinato ad avvicinarsi alla sentenza Bougueriana, giacchè così s'esprime: „ By the like experiments this ingenious author, „ (cioè il Sig. *Bouguer*) finds the light of the full moon, „ to be about 300000 times weaker, than that of the sun, „ at a medium of several tryals. I found it by theory not „ much above 90000 times weaker; the difference may arise „ chiefly from the loss of light in the moon's body, which „ could not be allowed for in theory “. E quindi se nella superficie lunare non si perdessero dei raggi di luce, egli assume la ragione di 90900: 1. Il Sig. *Eulero* stabilì queste due forze nella ragione di 374000: 1, cioè quattro volte incirca maggiore di quella del Sig. *Smith;* la ragione per cui egli perviene ad un resultato maggiore degli altri due, si potrà vedere accennata dal Sig. *Lambert* „ (Photometria) “ il quale ha imputato qualche imperfezione al metodo Euleriano, e dopo varie discussioni ha assunto la chiarezza del Sole, a quella della Luna come 277000: 1 in circa. Io rifacendo l'esperienze del Sig *Bouguer*, (lo che si protesta di non aver fatto il Sig *Lambert*) e combinandone i resultati, con un metodo, che avrò altrove occasione di sviluppare, ho creduto di poter fissare la forza illuminante del Sole, alla forza illuminante della Luna, nella ragione sopra esposta di 259970: 1.

§. VIGESIMOTTAVO.

SCOLIO SECONDO.

IL principio da me posto in uso della riduzione dei punti luminosi ad altrettanti pesi, e delle superficie luminose considerate, come uno strato continuo di punti luminosi, ed in conseguenza di pesi proporzionali alle facoltà illuminanti dei respettivi punti luminosi, questo principio, io dico, combinato opportunamente con altri canoni ottici, conduce con grandissima facilità, ed eleganza allo sviluppo delle questioni più complicate, che potessero farsi intorno alla diretta, e riflessa propagazione del lume da qualsivoglia corpo di qualsivoglia figura. Il Sig. *Lambert* nell' Opera sopracitata ha introdotto ne' suoi Calcoli un' elemento negletto da molti, cioè la considerazione della posizione, in cui trovasi la superficie illuminante, relativamente a quella illuminata, osservando, che l' illuminazione decresce in ragione dell' angolo, che fanno i raggi, che illuminano con la superficie luminosa, e chiama l' angolo suddetto, *angolo d' Emanazione:* egli deduce principalmente questa legge Ottica dall' esperienza, e nell' atto, che tenta dimostrarla, sembra, che dubiti se sia suscettibile di dimostrazione *a priori*, mentre così s' esprime: *Ut jam, quod supra nos passim facturos promisimus & huic propositioni qualemcumque addamus demonstrationem, sequentem tentabo, quam admittere ista propositio videtur. Sit* A D (Fig. 11) *superficies corporis luminosi, cujus quaevis particula lumen quaquaversum diffundat. Utcumque vero concipiamus luminis emanationem, concedendum erit, singulas corporis lucentis particulas esse in continua agitatione, ita ut particula* A *ab omnibus ipsi contiguis feriatur, easque vicissim percutiat. Has vero in hemisphaerio circum eam esse sitas, vel per se est evidens, cum in superficie posita statuatur. Quare motum, vel lumen in partem aversam diffundet per alterum haemisphaerium. Demonstrandum jam est, luminis quantitatem secundum* A B *emissum esse ad lumen, quod*

normaliter evibratur secundum directionem G A *ut sinus anguli emissionis* B A N *ad sinum totum. Quod ut fiat assumemus, vim, quae lumen secundum* A B *ejaculatur, deberi particulis in recta* F A *sitis. Sit haec vis* = F A. *Resolvatur in normalem* F D, *& parallelam* A D, *haec ad emittendum lumen nil confert, quod ergo sola vi* F D *evibratur. Est vero* F D *ut sinus anguli emissionis, quare & in hac ratione vis ista decrescit. Quodsi ergo lumen emissum ceu effectum spectmus, hincque causae statuamus proportionalem, consequens erit, quantitatem luminis oblique emanantis esse in ratione sinus anguli, sub quo emanat.*

Hoc itaque vel simili modo res ista videtur concipienda. Quodsi quis secundum Newtonum *statuere velit, cum lumine emigrare quoque corporis luminosi particulas, utique simili utetur demonstratione. Quo enim vis* D F, *qua evibratur, erit minor, eo quoque minor erit particularum numerus, quae simul ejiciuntur. Celeritas enim, qua per rectam* A B *procedunt eadem erit, quicunque sit angulus emissionis.* Pochi momenti di riflessione servono per ritrovare le objezioni, alle quali soggiace l' addotta dimostrazione, intorno alla quale per altro non è imputabile il sagacissimo Autore, giacchè egli non appoggia sopra di essa le sue asserzioni, avendo, come abbiam detto, verificato per mezzo dell' esperienza questa legge ottica, che egli vuole essere stata contrastata dal grande *Eulero*, e che col principio da me esposto può dimostrarsi facilmente nel senso, in cui rigorosamente si verifica, giacchè enunciata generalmente può comparire anfibologica: in fatti, sia *M N*

(*Fig.* 1) un piano luminoso, dal quale sia illuminato il punto C del piano $D\,E$, è evidente, che i raggi $C\,O$, $C\,A$, $C\,N$, emanano tutti sotto angoli diversi dal piano luminoso; onde il dire, che l'illuminazione prodotta nel punto C, a circostanze pari in tutto il restante, sia in ragion dell'angolo d'emanazione, è una maniera poco felice d'esprimersi, quando il piano $M\,N$ non fosse piccolissimo, nel qual caso gli angoli $M\,O\,C$, $M\,A\,C$, $M\,N\,C$, potrebbero supporsi eguali tra loro.

§. VIGESIMONONO.

PROBLEMA SETTIMO.

TROVARE *la curva* B E, *la quale sia illuminata egualmente in ogni punto*, *dal punto lucido* D (Fig 5).

Sia $D\,C = x$, $C\,E = y$, ed avremo la suttangente

$$C\,A = \frac{y\,dx}{dy}, \text{ e } D\,E = \sqrt{x^2 + y^2};$$

supposto inoltre, che dal lume D si tiri la normale $D\,F$ sulla tangente, avremo i triangoli simili $A\,C\,E$, $A\,F\,D$; onde $A\,E : E\,C = A\,D : D\,F$,

cioè

$$\frac{y}{dy}\sqrt{dx^2 + dy^2} : y$$

$$= \frac{y\,dx}{dy} - x : \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = D\,F;$$

quindi avremo l'intensità della luce nel laterculo E della curva

$$= \frac{D\,F}{D\,E^3},$$

che dovendo essere costante, darà

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{dx^2 + dy^2}} = 1,$$

$$\text{o sia } y\,dx - x\,dy =$$

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

che sarà l'equazione richiesta.

§. TRIGESIMO.

SCOLIO.

PRIMA di passare all'integrazione di questa equazione, conviene fare alcune riflessioni sulla natura di essa, giacchè può succedere di trovarla differente in alcune circostanze, sebbene dedotta da principj, non meno sicuri, ed in conseguenza potrebbe in ambedue cadere in sospetto di paralogismo. In fatti, (*Fig.* 8) suppongasi, che in questa ricerca si fosse descritta in modo la figura, che la suttangente $H\,D$ corrispondente al punto G della curva, rimanesse dalla medesima parte delle ascisse positive $O\,B$, $O\,C$, ed in conseguenza dovesse considerarsi come negativa, allora nel trovare l'espressione della perpendicolare

$O\,F$, si sarebbe dovuto instituire la analogìa fra i proporzionali lati dei triangoli HGD, DOF, facendo $DG : GH :: DO : OF$, ed essendo

$$HD = -\frac{y\,dx}{dy},\ OH = -x,$$

avremmo $$OD = x - \frac{y\,dx}{dy},$$

onde $$OF = \frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

e finalmente si troverebbe l'equazione

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{(dx^2 + dy^2)(x^2 + y^2)^3},$$

la quale parimente si sarebbe trovata, se si fosse descritta la figura in maniera, che la suttangente $C\,M$ cadesse dalla parte delle ascisse positive, e appartenesse al punto N, che corrisponde all'ascissa positiva $O\,C$; siccome ancora alla prima equazione si sarebbe pervenuti, descrivendo la figura, in modo che la suttangente $B\,V$ cadesse dalla parte delle ascisse negative, e corrispondesse al punto P della curva, che appartiene all'ascissa positiva $O\,B$. In quattro casi per tanto differenti, nei quali si può descrivere diversamente la figura, due casi conducono alla prima equazione, e gli altri due alla seconda. Si osservi per tanto, che ambedue sono dotate di eguale evidenza, e la differenza loro risulta dalla permutazione delle coordinate,

ed è soltanto accidentale, giacchè togliendo gl' irrazionali, ambedue si riducono alla seguente

$$x^2\,dy^2 - 2\,y\,x\,dy\,dx + y^2\,dx^2 =$$
$$(dx^2 + dy^2)(x^2 + y^2)^3.$$

§. TRIGESIMOPRIMO.

COROLLARIO.

PER togliere a questa equazione le potestà dei differenziali, io opero come segue; primieramente si osservi, che subito si deduce

$$\frac{x^2\,dy^2 - 2\,x\,y\,dx\,dy + y^2\,dx^2}{(x^2 + y^2)^3} =$$

$$(dx^2 + dy^2)(x^2 + y^2) = x^2\,dx^2 + y^2\,dy^2 + x^2\,dy^2 + y^2\,dx^2 =$$
$$(x\,dx + y\,dy)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2,$$

ed in conseguenza

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)^3} = 1 + \left(\frac{x\,dx + y\,dy}{x\,dy - y\,dx}\right)^2,$$

cioè

$$(x\,dy - y\,dx)\sqrt{\left(1 - (x^2 + y^2)^3\right)} =$$
$$(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy);$$

ed avendo posto

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) =$$
$$(x\,dx + y\,dy)^2 + (y\,dx - x\,dy)^2,$$

si avrebbe

$$(y\,dx - x\,dy)\sqrt{1-(x^2+y^2)^2} =$$
$$(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy).$$

Prenderemo frattanto ad integrare la seconda di esse, giacchè ogn' uno conosce, che i metodi adattati per una, servono ancora per l' altra.

Ridotti adunque alla forma $P\,dx + Q\,dy = 0$, avrassi

$$P = y\sqrt{1-(x^2+y^2)^2} - x(x^2+y^2)$$

$$Q = -x\sqrt{1-(x^2+y^2)^2} - y(x^2+y^2);$$

ma dal noto criterio d' integrabilità, cioè

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},$$

si deduce

$$1-(x^2+y^2)^2 - 2y^4 = -1 + (x^2+y^2)^2 + 2x^4;$$

onde si vede che non è integrabile per se medesima, e convien ricorrere ad altri artifizj.

Facciasi $x^2+y^2 = z^2$, ed $x = z\,Cos.\,m$; (suppongasi $m =$ all' angolo BDE) ed avrassi $y\,dx - x\,dy =$

$$(dz\,Cos.\,m - z\,dm\,sin.\,m)\left(z^2 - z^2\,Cos.\,m^2\right)^{\frac{1}{2}} -$$

$$z\,Cos.\,m\left(\frac{z\,dz - z\,dz\,Cos.\,m^2 + z^2\,Cos.\,m\,dm\,sin.\,m}{z\sqrt{1-Cos.\,m^2}}\right)$$

$=$

$= -z^2\,dm$, ed essendo

$$\frac{(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}} = \frac{z^3\,dz}{\sqrt{1-z^4}},$$

avrassi

$$dm = -\frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^4}};$$

facciasi adesso $1-z^4 = z^4 t^2$, ed avremo

$$z = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{4}}},\ \text{e}\ dz = -\frac{t\,dt}{2(1+t^2)^{\frac{5}{4}}},$$

ed in conseguenza

$$dm = \frac{dt}{2(1+t^2)},$$

onde facilmente si perviene all' integrale

$$m = \frac{1}{2}\,Arc.\,Tang.\,t + C.$$

Dovendo essere, quando $m = 0$, $z = 1$, avremo la costante $C = 0$, riducendo adunque l' equazione alle coordinate x, y sarà

$$2m = Arc.\,Tang.\,\frac{\sqrt{1-z^4}}{z^2} = Arc.\,Cos.\,z^2;$$

ma

$$Cos.\,m = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

onde

$$Cos.\,2m = \frac{x^2-y^2}{y^2+x^2};$$

ed essendo ancora $2\,m = Arc.\ Cos.\ z^2$ avremo $Cos.\ 2\,m = z^2 =$

$$x^2 + y^2 = \frac{x^2 - y^2}{y^2 + x^2},$$

ed in conseguenza la richiesta equazione sarà

$$(y^2 + x^2)^2 = x^2 - y^2.$$

§. TRIGESIMOSECONDO.

COROLLARIO PRIMO.

ALLA questione presente soddisfà dunque la celebre curva Lemniscata, di cui questa

$$(y^2 + x^2)^2 = x^2 - y^2,$$

è l'equazione, la qual curva fù da *Giacomo Bernoulli* ritrovata, e dal Conte *Fagnano* analizata ingegnosamente in due *Opuscoli* inseriti tra l'altre Opere di lui, e che posson vedersi ancora nel *Giornale de' Letterati di Venezia.* Per quanto è a mia notizia nessuno, prima di me, ha osservato, che questa curva tra le altre speciose, e rimarchevoli proprietà, ha quella di essere illuminata egualmente in ogni suo punto da un lume situato nel centro di essa.

§. TRIGESIMOTERZO.

COROLLARIO SECONDO.

SI osservi, che se in vece di trasformare la formola

$$-\frac{z\,dz}{\sqrt{1 - z^4}},$$

si fosse integrata, considerandola, come in fatti è il differenziale di $\frac{1}{2}\ Arc.\ Cos.\ z^2$ saremmo a dirittura pervenuti alla ritrovata equazione; ma colla trasformazione $1 - z^4 = z^4 t^2$, abbiamo dato luogo a varj casi: in fatti, quando si è preso

$$Arc.\ Tang.\ \frac{\sqrt{1 - z^4}}{z^2} = Arc.\ Cos.\ z^2,$$

si poteva prendere

$$Arc.\ Tang.\ \frac{\sqrt{1 - z^4}}{z^2} = Arc.\ sin.\ \sqrt{1 - z^4},$$

ed avremmo, $\left(\text{essendo } sin.\ m = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$

$$sin.\ 2\,m = \frac{2\,y\,x}{y^2 + x^2},\ \frac{2\,y\,x}{x^2 + y^2} =$$

$$\sqrt{1 - \left(x^2 + y^2\right)^2},$$

ed inoltre

$$\frac{4y^2x^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 - (x^2+y^2)^2;$$

onde

$$(x^2+y^2)^4 - (x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2 = 0,$$

dalla quale equazione deduconsi le due seguenti

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$$

$$(x^2+y^2)^2 = y^2 - x^2,$$

le quali parimente si sarebbero ottenute dalla equazione

$2m = Arc.\,Tang.\,t$; giacchè, essendo $Tang.\,m = \frac{y}{x}$,

abbiamo $$Tang.\,2m = \frac{2xy}{x^2-y^2};$$

onde $$\frac{2xy}{x^2-y^2} = \frac{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}{(x^2+y^2)},$$

cioè $$4x^2y^2(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2\left(1-(x^2+y^2)^2\right),$$

e finalmente $$(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2;$$

$$(x^2+y^2)^2 = y^2 - x^2.$$

§. TRIGESIMOQUARTO.

COROLLARIO TERZO.

È FACILE l'accorgersi, che ancora il cerchio deve soddisfare alla questione presente, giacchè, come insegna la meno sublime Geometrìa, ogni porzioncella elementare della circonferenza equidista dal centro, e fa un'egual angolo col raggio, ed in conseguenza tutta la curva dee essere illuminata egualmente da un lume situato nel centro. Trovasi frattanto che l'equazione $z^2 = 1$ soddisfà all'equazione differenziale

$$dm = -\frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^4}},$$

mentre in tal caso $dm\sqrt{1-z^4} = 0$, $z\,dz = 0$.

§. TRIGESIMOQUINTO.

SCOLIO.

SENZA l'uso delle premesse trasformazioni, avremmo possuto togliere le potestà dei differenziali all'equazione

$$y\,dx - x\,dy = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{dx^2+dy^2},$$

che è del genere di quelle integrate dall' *Eulero* nel Tomo I° del Calcolo Integrale; ma che con i metodi ivi proposti non può integrarsi: in fatti, facendo $\frac{dy}{dx} = p$,

avremmo quadrando

$$(x^2+y^2)^3 + p^2(x^2+y^2)^3 = y^2 - 2yxp + p^2x^2,$$

cioè
$$p = -\frac{x\,y}{(x^2+y^2)^3 - x^2} +$$

$$\sqrt{\frac{y^2 - (x^2+y^2)^3}{(x^2+y^2)^3 - x^2} + \frac{x^2\,y^2}{((x^2+y^2)^3 - x^2)^2}} =$$

$$-\frac{x\,y}{(x^2+y^2)^3 - x^2} +$$

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^3 - x^2}\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}\,;$$

ma $p\,d\,x = d\,y$, onde ſoſtituendo in vece di p il trovato valore, avremo l'equazione differenziale

$$((x^2+y^2)^3 - x^2)\,d\,y = -y\,x\,d\,x +$$

$$d\,x\,(x^2+y^2)^2\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}\,,$$

nella quale fatte le ſoſtituzioni $x = z\,Coſ.\,m$, $y = z\,ſin.\,m$, perverremo come ſopra alla integrazione della traſformata. In fatti eſſendo

$$d\,x = d\,z\,Coſ.\,m - z\,d\,m\,ſin.\,m,\quad d\,y = d\,z\,ſin.\,m + z\,d\,m\,Coſ.\,m$$

avremo $(z^6 - z^2\,Coſ.\,m^2)\,(d\,z\,ſin.\,m + z\,d\,m\,Coſ.\,m) =$

$$(z^4\sqrt{1-z^4} - z^2\,Coſ.\,m\,ſin.\,m)\,(d\,z\,Coſ.\,m - z\,d\,m\,ſin.\,m),$$

che facilmente ſi riduce alla forma precedente, deducendoſi ſubito

$$z^6\,d\,z\,ſin.\,m + z^7\,d\,m\,Coſ.\,m - z^3\,d\,m\,Coſ.\,m =$$

$$z^4\,Coſ.\,m\,d\,z\sqrt{1-z^4} - z^5\sqrt{1-z^4}\,d\,m\,ſin.\,m,$$

ed in conſeguenza

$$d\,m = \frac{z^4\sqrt{1-z^4}\,Coſ.\,m - z^6\,ſin.\,m}{z^5\,ſin.\,m\sqrt{1-z^4} - z^3\,Coſ.\,m\,(1-z^4)}\,d\,z\,;$$

ma
$$\frac{Coſ.\,m\sqrt{1-z^4} - z^2\,ſin.\,m}{z^2\,ſin.\,m - Coſ.\,m\sqrt{1-z^4}} = -1\,;$$

dunque
$$d\,m = -\frac{z\,d\,z}{\sqrt{1-z^4}}$$

appunto come ſopra.

§. TRIGESIMOSESTO.

Altra ſoluzione del precedente

PROBLEMA.

SIA (*Fig.* 7) il punto lucido in A, e la curva cercata ſia $E\,B$; ſuppongaſi in oltre $A\,B = z$, è l'angolo infiniteſimo $B\,A\,E = d\,m$; è chiaro che ſarà $C\,B = z\,d\,m$, ed eſſendo $C\,E = d\,z$, avremo

$$E\,B = \sqrt{z^2\,d\,m^2 + d\,z^2},$$

che sarà un laterculo della curva richiesta; l'angolo dunque d'incidenza $A\,E\,B$ avrà per suo seno la quantità

$$\frac{z\, d m}{\sqrt{z^2\, d m^2 + d z^2}},$$

che divisa per z^2 darà l'intensità della luce nel laterculo $E\,B$, la quale intensità sarà

$$\frac{d m}{z \sqrt{z^2\, d m^2 + d z^2}};$$

ponendo in conseguenza questa espressione $= 1$, avremo l'equazione cercata, che sarà

$$d m = z \sqrt{z^2\, d m^2 + d z^2},$$

cioè
$$d m = \frac{z\, d z}{\sqrt{1 - z^4}}.$$

§. TRIGESIMOSETTIMO.

COROLLARIO.

Con il metodo precedente abbiam ritrovato $d m =$ al differenziale di un arco dato per il coseno, e adesso lo troviamo eguale al differenziale di un arco dato per il seno, ciò per altro non contrasta con la retta ragione. In fatti, integrando avremo $2\, m = Arc.\, sin.\, z^2 + C$, supponendo C la costante arbitraria, la quale dovrà determinarsi in maniera, che essendo $m = 0$ sia $z = 1$; sarà dunque $C = -\, Arc.\, sin.\, 1$,

cioè

cioè
$$C = -\, \frac{2\, n + 1}{4}\, \pi$$

(supponendo π eguale alla periferìa del cerchio, ed n un numero pari qualunque) ed in conseguenza l'integrale perfetto sarà

$$z^2 = sin.\left(2\, m + \frac{2\, n + 1}{4}\, \pi\right),$$

cioè

$$z^2 = sin.\, 2\, m\; Cos.\, \frac{2\, n + 1}{4}\, \pi + Cos.\, 2\, m\; sin.\, \frac{2\, n + 1}{4}\, \pi,$$

ovvero (qualunque sia il valore di n, purchè sempre numero pari) $z^2 = Cos.\, 2\, m$, che è l'equazione trovata con il metodo superiore.

§. TRIGESIMOTTAVO.

SCOLIO PRIMO.

Sebbene adunque possa a principio comparire vago il valore di $2\, m$, dedotto dall'integrazione, comecchè dipendente dalla formola

$$\frac{2\, n + 1}{4},$$

che può avere infiniti valori, si riduce sempre nonostante alla medesima quantità, $Arc.\, Cos.\, z^2$. Merita adesso di essere esaminato il caso in cui sia $2\, n + 1 = \infty$, dal quale si può dedurre una conseguenza quanto lusinghiera, altrettanto fallace. In fatti, avendosi allora

$$sin.\left(2\, m + \frac{\infty\, \pi}{4}\right) = z^2,$$

I

potrebbe crederfi, che annichilandofi la quantità finita $2m$, relativamente alla infinita $\frac{\infty\ \pi}{4}$, l'equazione fi riduca a quefta

$$fin. \frac{\infty\ \pi}{4} = z^2,$$

ed in confeguenza $z^2 = 1$, che è l'equazione del cerchio, che in tal guifa fi concepirebbe comprefa nell'integrale completo, dando un dato valore alla coftante arbitraria. Per venire in cognizione di tutte le incoerenze di un tal raziocinio, fi attendano le feguenti offervazioni.

I.

Se nell'integrale completo $2m = Arc.\ fin.\ z^2 + C$, foffe comprefa come integrale particolare l'equazione $z^2 = 1$, dovrebbe quefta da quello dedurfi in virtù di un determinato valore affegnato alla coftante C; ma fupponendo

$$C = -\frac{\infty\ \pi}{4},$$

ed in confeguenza

$$z^2 = fin. \left(2m + \frac{\infty\ \pi}{4}\right) = fin. \frac{\infty\ \pi}{4},$$

il valore della coftante non è fiffo come fi ricerca; mentre effendo infallibilmente $\infty + 1 = \infty$, è chiaro, che all' ∞ non può annetterfi l'idea di pari, ed impari; in confeguenza, ancora ammeffa l'equazione

$$fin. \left(2m + \frac{\infty\ \pi}{4}\right) = fin. \frac{\infty\ \pi}{4},$$

onde deducefi queft' altra

$$z^2 = fin. \frac{\infty\ \pi}{4};$$

non può quindi inferirfi $z^2 = 1$, poichè

$$fin. \frac{\infty\ \pi}{4},$$

tanto può fupporfi $= 1$, quanto $= -1$, ed $= o$, nei quali due cafi non fi ottiene più l'equazione del cerchio; nè può rifponderfi, che la formola

$$fin. \frac{\infty\ \pi}{4}$$

contenga quefti valori $1, o, -1$, fimultaneamente nel modo ifteffo, che un' equazione contiene alle volte tanti diverfi valori della incognita, quante unità fono nel maffimo efponente di effa, nel qual cafo può fupporfi eguale a qualunque di quei valori medefimi: in fatti, il cafo di

$$fin. \frac{\infty\ \pi}{4} = z^2$$

è differente, mentre la formola

$$fin. \frac{\infty\ \pi}{4}$$

non è fufcettibile, fe non di un folo di quei valori $1, o, -1$; e ftabilito uno di effi, gli altri due non hanno più luogo, ma non vi è maggior ragione per ammetterne uno piuttofto, che un' altro; in conseguenza il supporre

$$\textit{sin.}\ \frac{\infty\ \pi}{4} = 1,$$

è un arbitrio, mentre

$$\textit{sin.}\ \frac{\infty\ \pi}{4}$$

ha un significato incerto, e vago; e la deduzione dell' integrale particolare $z^2 = 1$, è altrettanto equivoca.

I I.

Se non ostante le addotte ragioni, si volesse sostenere, che nel caso sopracitato possa prendersi

$$\textit{sin.}\ \frac{\infty\ \pi}{4} = 1,$$

allora diverrebbe paralogistica, ed impossibile a sostenersi, l' altra supposizione di

$$\textit{sin.}\left(2\,m + \frac{\infty\ \pi}{4}\right) = \textit{sin.}\ \frac{\infty\ \pi}{4},$$

come facilmente può dimostrarsi in tal guisa. Se fosse vero che

$$\textit{sin.}\ \frac{\infty\ \pi}{4} = 1,\ \text{e}\ \textit{sin.}\left(2\,m + \frac{\infty\ \pi}{4}\right) = \textit{sin.}\ \frac{\infty\ \pi}{4},$$

dato un' arco qualunque a, il coseno di esso si troverebbe $= 1$: in fatti,

$$\textit{Cos.}\ a = \textit{Cos.}\ a\ \textit{sin.}\ \frac{\pi}{4} + \textit{sin.}\ a\ \textit{Cos.}\ \frac{\pi}{4};$$

ma per l' ipotesi

$$\textit{Cos.}\ \frac{\pi}{4} = o = \textit{Cos.}\ \frac{\infty\ \pi}{4}$$

$$\textit{sin.}\ \frac{\pi}{4} = 1 = \textit{sin.}\ \frac{\infty\ \pi}{4};$$

dunque

$$\textit{Cos.}\ a = \textit{Cos.}\ a\ \textit{sin.}\ \frac{\pi}{4} + \textit{sin.}\ a\ \textit{Cos.}\ \frac{\pi}{4} =$$

$$\textit{Cos.}\ a\ \textit{sin.}\ \frac{\infty\ \pi}{4} + \textit{sin.}\ a\ \textit{Cos.}\ \frac{\infty\ \pi}{4} = \textit{sin.}\left(a + \frac{\infty\ \pi}{4}\right) =$$

(parimente per l' ipotesi) $\textit{sin.}\ \dfrac{\infty\,\pi}{4} = 1,$

dunque $\textit{Cos.}\ a = 1$; lo che è assurdo manifesto. Quindi è che le due supposizioni, alle quali s' appoggia il raziocinio sopra citato, non solamente son fallaci ciascuna considerata separatamente; ma contrastano ancora fra loro. È facile l' accorgersi, che in generale l' equazione

$$\textit{sin.}\left(a + \frac{\infty\ \pi}{4}\right) = \textit{sin.}\ \frac{\infty\ \pi}{4},$$

non sussiste, ancora prescindendo dalla supposizione

$$\textit{sin.}\ \frac{\infty\ \pi}{4} = 1,$$

dopo che abbiam dimostrato, che quelle espressioni non hanno un valore fiſſo, e determinato; lo che ſi manifeſta ancora ulteriormente dalla ſeguente oſſervazione.

III.

Le conoſciute eſpreſſioni dei logaritmi di

$$\text{ſin.}\ \frac{m\pi}{4n},\ \text{e}\ \text{Coſ.}\ \frac{m\pi}{4n},$$

ſono

$$l\,\text{ſin.}\,\frac{m\pi}{4n} = l\,m + l\,(2n - m) + l\,(2n + m) - 3\,l\,n + l\,\frac{\pi}{4} - l\,8$$

$$- \frac{mm}{nn}\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{12^4} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{12^6} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{10^8} + \frac{1}{12^8} + \text{ec.}\right)$$

ec. ec.

$$l.\ \text{Coſ.}\,\frac{m\pi}{4n} = l\,(n - m) + l\,(n + m) - 2\,l\,n$$

$$- \frac{mm}{nn}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{3^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{ec.}\right)$$

ec. ec.

Se adunque facciaſi in eſſe $n = o$, troveremo

$$l\,\text{ſin.}\,\frac{\infty\,\pi}{4},\ \text{e}\ l\,\text{Coſ.}\,\frac{\infty\,\pi}{4},$$

eguali ad un' infinito, e ad una quantità impoſſibile, come è il logaritmo d'una quantità negativa. Ciò poſto, una prova dell' aſſurdità della predetta equazione,

$$\text{ſin.}\left(a + \frac{\infty\,\pi}{4}\right) = \text{ſin.}\,\frac{\infty\,\pi}{4},$$

può eſſere la ſeguente;

eſſendo $\text{ſin.}\left(a + \frac{m\pi}{4n}\right) = \text{Coſ.}\ a\ \text{ſin.}\,\frac{m\pi}{4n} + \text{ſin.}\ a\ \text{Coſ.}\,\frac{m\pi}{4n}$;

poſto $n = o$, avremo

$$\text{Coſ.}\ a\ \text{ſin.}\,\frac{\infty\,\pi}{4} + \text{ſin.}\ a\ \text{Coſ.}\,\frac{\infty\,\pi}{4} = \text{ſin.}\left(a + \frac{\infty\,\pi}{4}\right);$$

ora dalla ſuppoſta equazione

$$\text{Coſ.}\ a\ \text{ſin.}\,\frac{\infty\,\pi}{4} + \text{ſin.}\ a\ \text{Coſ.}\,\frac{\infty\,\pi}{4} = \text{ſin.}\,\frac{\infty\,\pi}{4},$$

si deduce $l\,\text{sin.}\,a + l\,\text{Cos.}\,\frac{\infty\,\pi}{4} = l\,(1-\text{Cos.}\,a) + l\,\text{sin.}\,\frac{\infty\,\pi}{4}$,

cioè $$\frac{\text{sin.}\,a}{1-\text{Cos.}\,a} = \frac{\text{sin.}\,\frac{\infty\,\pi}{4}}{\text{Cos.}\,\frac{\infty\,\pi}{4}} = \text{Tang.}\,\frac{\infty\,\pi}{4},$$

equazione manifestamente impossibile, essendo

$$\frac{\text{sin}\,a}{1-\text{Cos.}\,a},$$

una quantità reale, e determinata, la quale dunque non può essere eguale all'altra

$$\text{Tang.}\,\frac{\infty\,\pi}{4},$$

che $\left(\text{per l'istesse ragioni che vagliono per } \text{sin.}\,\frac{\infty\,\pi}{4}\right)$,

non ha un valore determinato e reale.

§. TRIGESIMONONO.

SCOLIO SECONDO.

Non mancano nella sublime analisi esempj di espressioni, che non hanno alcun fisso, e determinato valore, specialmente dopo che l'insigne *Eulero*, nell'immortale Opera del Calcolo Differenziale (Cap. VIII, Parte I) ha dimostrato essere tali tutte le formole differenziali di grado superiore al primo, nelle quali non si assuma per costante veruno dei differenziali primi; la formola dunque

$$\text{sin.}\,\frac{\infty\,\pi}{4},$$

è di questa specie, con la differenza che le suddette possono ridursi a significato reale, e fisso, col solo assumer costante un differenziale primo; laddove questa non può in conto alcuno ridursi a significare una determinata quantità. Questo, come abbiam visto, dimostrasi per mezzo delle più comuni nozioni dell'∞, che non ammette l'idea di *pari*, *o impari*, *o frazionario*, ed in conseguenza, non può determinarsi qual arco risulti dal prodotto $\infty\,\pi$, e molto meno dunque il respettivo seno, coseno, ec.; quindi è che la quantità

$$l\,\text{sin.}\,\frac{\infty\,\pi}{4},\ l\,\text{Cos.}\,\frac{\infty\,\pi}{4}$$

debbono essere impossibili, e immaginarie. Posto ciò, la precedente osservazione *III* si rende interessante per la forma, che, nel caso di $n=o$, prendono le formole generali ivi esposte: in fatti, avendo noi già dimostrato, che

$$l\,\text{sin.}\,\frac{\infty\,\pi}{4},\ l\,\text{Cos.}\,\frac{\infty\,\pi}{4}$$

sono quantità impossibili, senza che bisogni dedurlo dalle sopraddette formole; si osservi, che nel caso di

$m=n$, dee essere $l\,\text{Cos.}\,\frac{\pi}{4} = -\infty$, giacchè $$Cos.\,\frac{\pi}{4} = o;$$

ed in fatti, eſſe danno

$$l\,Cos.\,\frac{\pi}{4} = l\,o + l\,2\,n - 2\,l\,n - \text{ec.} = -\infty:$$

nel caſo poi di $n = o$, abbiamo dall' iſteſſa formola

$$l\,Cos.\,\frac{\infty\,\pi}{4} = l\overline{-m} + l\,m - 2\,l\,o - \infty - \infty - \infty - \text{ec.}$$

all' infinito. Vedaſi adeſſo ciò che dee raccoglierſi da tale eſpreſſione; è noto che $-2\,l\,o = 2\,\infty$, e che la quantità finita $l\,m$ ſvaniſce relativamente alle infinitamente maggiori; avremo dunque

$$l\,Cos.\,\frac{\infty\,\pi}{4} = 2\,\infty - \infty^2 + l\overline{-m} = -\infty^2 + l\overline{-m};$$

ma $$l\,Cos.\,\frac{\infty\,\pi}{4},$$

è immaginario; eſſendo adunque

$$= -\infty^2 + l\overline{-m},$$

conviene, che $l\overline{-m}$ ſia immaginario, non eſſendo tale ∞^2. Ecco per tanto una prova del ſentimento del Sig. *Eulero*, il quale ha fatto vedere, (*Mem. di Berlino* 1749) che i logaritmi delle quantità negative ſono immaginarj, ſecondo l'opinione ſoſtenuta, prima da *Leibnizio* contro *Giovanni Bernoulli*. Inoltre, ſe nella formola $-\infty^2 + l\,m + l\overline{-m}$, ſi

diſprezzaſſe $l\overline{-m}$, come ſi è diſprezzato $l\,m$, eſſa diventerebbe $= -\infty^2$, ed avremmo

$$l\,Cos.\,\frac{\infty\,\pi}{4} = -\infty^2;$$

onde la formola medeſima non annunzierebbe alcun carattere d' impoſſibilità nell' eſpreſſione

$$l\,Cos.\,\frac{\infty\,\pi}{4};$$

ma queſta dee comparire impoſſibile; onde, affine che ciò ſucceda, converrà non diſprezzare la quantità $l\overline{-m}$, quantunque ſia unita ad un' infinito, in paragone del quale può bensì diſprezzarſi l' altra quantità finita, e reale $l\,m$. Quindi ſi viene a confermare la regola preſcritta, prima che da qualunque altro, dal Sig. d' *Alembert*, il quale (*Mem. dell' Accademia di Berlino Anno* 1746) oſſervò, che in una ſerie compoſta di termini reali, e immaginarj, ſi poſſono diſprezzare i termini infinitamente piccoli, ſempre che per altro non ſiano immaginarj, perchè in tal caſo queſti rendono immaginaria tutta la ſerie, ſebbene compoſta di termini infinitamente maggiori. Con una ſola modificazione per tanto fatta ſubire alla formola

$$l\,Cos.\,\frac{m\,\pi}{4\,n} = l\,(n - m) + l\,(m + n) - 2\,l\,n - \frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ec.}\right)$$

$$-\frac{m^4}{2\,n^4}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\text{ ec.}\right)$$

ec. ec.

possono verificarsi due diverse importantissime osservazioni, che l'analisi riconosce dai due genj sublimi, dei Signori d'*Alembert*, ed *Eulero*.

§. QUADRAGESIMO.

OSSERVAZIONI

Che servono di supplemento necessario alla completa soluzione del precedente Problema.

Abbiamo visto, che dalla equazione

$$2\,m = Arc.\,Cos.\,z^2 + C, \text{ ponendo } C = -\frac{\infty\,\pi}{4},$$

non si può dedurre legittimamente l'altra $z^4 = 1$, del che facilmente si può ciascuno convincere, ancor prescindendo da quanto abbiam rilevato, mentre l'equazione $z^2 = 1$, non apparisce integrale particolare di

$$d\,m = -\frac{z\,d\,z}{\sqrt{1-z^4}},$$

specialmente attendendo il canone fissato dal Sig. *Eulero* (Calcolo Integrale Tom. I°) che in tal guisa decide: *Quo circa in genere affirmare licet, si fuerit*

$$d\,y = \frac{P\,d\,x}{Q},$$

denominatorque Q *factorem habeat* $(a+x)^\lambda$, *cujus exponens* λ *unitate non sit minor, semper aequationem* $a + x = 0$, *fore integrale particulare. Sin autem* λ *sit unitate minor, etsi positivus, non erit* $a + x = 0$, *integrale particulare, etiamsi posito* $x = -a$ *aequationi differentiali satisfaciat.* Ma volendo ulteriormente riconoscere la relazione, che passa tra le due equazioni

$$z^2 = 1,\; d\,m = \pm\frac{z\,d\,z}{\sqrt{1-z^4}}:$$

possono consultarsi i due insigni Analisti Marchese di *Condorcet*, e *de la Place* nel Tomo V delle *Miscellanee di Torino*, e nelle *Memorie dell' Accademia Reale di Parigi Anno* 1772.

§. QUADRAGESIMOPRIMO.

Ciascheduno frattanto conoscerà, che il cerchio soddisfar dee alla proposta questione, quando il lume sia situato nel centro di esso: in fatti, rimontando all' equazione primaria

$$\frac{y\,d\,x - x\,d\,y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3\,(d\,x^2+d\,y^2)}} = 1,$$

si manifesta, che essa esprime ancora la periferìa del cerchio, mentre essendo x, y, coordinate rettangole

$$\frac{y\,d\,x - x\,d\,y}{\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}},$$

esprime il perpendicolo tirato dall' origine dell' ascisse, nella tangente, il qual perpendicolo nel circolo, (posta l'origine suddetta nel centro) è costante; come costante è pure

$$\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

onde nel supporre la ragione, che passa tra questa quantità, eguale ad una costante, si esprimono le caratteristiche del circolo, che dunque dee comparire atto a soddisfare alla questione.

§. QUADRAGESIMOSECONDO.

Il Sig. *Eulero* si serve di una simile induzione per confermare la realtà della soluzione $x^2+y^2=a^2$ della equazione

$$(x^2-a^2)\,dy-xy\,dx=\pm a\,dx\,\sqrt{(x^2+y^2-a^2)},$$

alla quale egli applica il metodo dei fattori, osservando che il primo membro, diviso per $y\,(x^2-a^2)$, diventa integrabile, essendo

$$\int.\frac{(x^2-a^2)\,dy-xy\,dx}{y\,(x^2-a^2)}=l\,\frac{y}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

onde in generale il moltiplicatore, che lo rende integrabile, trovasi essere

$$\frac{1}{y\,(x^2-a^2)}\,\varphi:\frac{y}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

determinando adunque tal funzione in modo, che ancora l'altro membro

$$a\,dx\sqrt{x^2+y^2-a^2}$$

ne divenga integrabile, avremo

$$\frac{1}{(xx-aa)\sqrt{(xx+yy-aa)}},$$

in virtù del quale moltiplicatore si ottiene l'equazione

$$\frac{(xx-aa)\,dy-xy\,dx}{(xx-aa)\sqrt{(xx+yy-aa)}}=\frac{\pm a\,dx}{xx-aa};$$

considerando adunque x come costante, l'integrale del primo membro sarà $=$

$$l\left(y+\sqrt{(xx+yy-aa)}\right)+X,$$

denotando X una funzione di x tale, che presa per costante y, si abbia

$$\frac{x\,dx}{\left(y+\sqrt{(xx+y^2-a^2)}\right)\sqrt{\left(x^2+y^2-a^2\right)}}+$$

$$dX=\frac{-xy\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}};$$

onde deducesi $\qquad dX=\dfrac{-x\,dx}{x^2-a^2},$

ed $\qquad X=l\,\dfrac{C}{\sqrt{(x^2-a^2)}};$

posto ciò, per l'integrale richiesto, trovasi l'equazione

$$l\left(y+\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}\right)+$$

$$l\,\frac{C}{\sqrt{(x^2-a^2)}}=\pm\frac{1}{2}\,l\,\frac{a+x}{a-x},$$

che si riduce a questa

$$x\mp a=\alpha^2\,(x\pm a)-2\,\alpha\,y;$$

ma l'altra equazione $x^2+y^2=a^2$, non viene a manifestarsi; onde il sopraccitato sommo Geometra suppone, che possa considerarsi, come se fosse stata tolta di mezzo, con una divisione, giacchè egli osserva, che dee assolutamente aver luogo nell'integrale dell' equazione

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=a,$$

dalla quale estraendo la radice seconda, si deduce l'altra

$$(a^2-x^2)\,dy+xy\,dx=\pm a\,dx\sqrt{x^2+y^2-a^2},$$

che egli riduce a separazione di variabili ponendo

$$y=u\sqrt{a^2-x^2},$$

lo che si ottiene ancora con le sostituzioni, delle quali abbiamo fatto uso nell' integrare l' equazione

$$\left(x\,dy-y\,dx\right)^2=\left(dx^2+dy^2\right)\left(x^2+y^2\right)^3,$$

come potrà in seguito riscontrarsi.

§. QUA-

§. QUADRAGESIMOTERZO.

Se in vece di supporre di $x=z\,Cos.\,m$, $y=z\,sin.\,m$, avessimo fatto

$$x=zu,\ y=u\sqrt{1-z^2}$$

(lo che in sostanza è l'istesso) l'equazione precedente si sarebbe ridotta a questa

$$\frac{dz}{\sqrt{u^2\,dz^2+(1-z^2)\,du^2}}=-u,$$

dalla quale si perviene all'altra

$$\left(x^2+y^2\right)^3=y^2-x^2,$$

senza che apparisca l'equazione $x^2+y^2=1$. È stato creduto che da quella equazione differenziale si possa ottenere un fattore, onde dedurre ancor l'equazione al cerchio; e ciò nel modo seguente: Facciasi $dz=p\,du$, ed avremo

$$\frac{p\,du}{\sqrt{u^2\,p^2+1-z^2}}=-u\,du,$$

equazione, che divisa per du, produce $du=0$, ed in conseguenza

$$u=\sqrt{x^2+y^2}=1,\ \text{cioè}\ x^2+y^2=1.$$

Io non credo che l'esposto raziocinio sia per essere approvato, se non forse da chi lo percorra con tanta fretta da non permettere un mediocre grado d'attenzione; in fatti, du non

L

può mai comparire un fattore dell' equazione proposta, nella quale, acciò diventi divisibile per du, abbiamo dovuto introdurre una nuova quantità $p =$ alla ragione dei differenziali, ed in sostanza è diventata con tale sostituzione

$$\frac{-\frac{dz}{du}\,du}{\sqrt{\left(u^2\frac{dz^2}{du^2}+1-u^2\right)}}=u\,du,$$

la quale può è vero dividersi per du, ma dopo la divisione abbiamo

$$\frac{-\frac{dz}{du}}{\sqrt{\left(u^2\frac{dz^2}{du^2}+1-u^2\right)}}=u,$$

che è l'istessa equazione, della quale du è comparso un fattore, ma moltiplicata per $\frac{1}{du}$. In oltre si manifesta l'assurdità di tale deduzione, osservando, che si fosse posto $du = p\,dz$ (lo che poteva farsi con egual ragione, che $dz = p\,du$) avremmo ottenuto

$$\frac{-dz}{\sqrt{(u^2+(1-z^2)p^2)}}=u\,dz,$$

equazione, che seguendo il citato raziocinio ci darebbe $dz = o$, ed in conseguenza $z = 1$, che sarebbe una soluzione reale della proposta; anzi in qualunque equazione differenziale

$$P\,dx + Q\,dy = o,$$

si potrebbe giudicare, che $x = 1$, ovvero $y = 1$, fossero soluzioni ammissibili, mentre facendo $dy = p\,dx$, ovvero $dx = p\,dy$, avremmo $dx = o$, ovvero $dy = o$; lo che è, come ognun vede, un assurdo grandissimo.

§. QUADRAGESIMOQUARTO.

Sia (*Fig.* 10) il punto lucido E situato nella periferìa del cerchio ABE, ed alle estremità del piccolissimo arco AB si conducano le linee EA, EB; ciò posto, per la natura del cerchio è manifesto, che se in un'altro luogo qualunque della periferìa si ascinda un'altro arco eguale ad AB, le linee, che dal punto E anderanno all'estremità di esso, faranno in E un'angolo eguale all'angolo AEB; ma il numero dei raggi, che si propagano secondo il piano della periferìa ABE, e tra le due linee EA, EB, è proporzionale all'angolo AEB; dunque nell'archetto AB, cadrà dal punto lucido E un numero di raggi eguale a quello, che cadrà in qualunque altro, eguale archetto preso nell'istessa periferìa, giacchè gli angoli insistenti col vertice in E sono sempre eguali; ma se cada egual numero di raggi in due spazi eguali, questi faranno egualmente illuminati; dunque ogni punto della periferìa di un cerchio, è egualmente illuminato da un punto lucido, situato nella periferìa medesima.

6 Sagg
400 p. 12.c 8 100
16.

§. QUADRAGESIMOQUINTO.

L'EQUAZIONE del cerchio corrispondente a tale ipotesi è $x^2 + y^2 = x$; sostituendo per tanto nell'equazione

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\sqrt{x - x^2}\text{, in vece di } y\text{, e } \frac{dx - 2x\,dx}{2\sqrt{x - x^2}},$$

in vece di dy, troveremo, che quell'equazione finita non è neppure atta a soddisfare a questa differenziale, al contrario di quanto abbiamo osservato nell'equazione $x^2 + y^2 = 1$, relativa all'ipotesi del lume, situato nel centro del cerchio: quindi potrebbe in sulle prime comparire imperfetta la ritrovata equazione differenziale, comecchè incapace di rappresentare tutte le circostanze possibili della questione; giacchè è senza eccezione il raziocinio, con cui abbiamo dimostrato, che il lume, situato nella periferìa illumina egualmente ogni punto della medesima; ma l'equazione suddetta, è dedotta dai più sicuri canoni ottici; onde in se medesima non può contenere assurdi, ed internandosi nelle intrinseche appartenenze del Problema, resterà dissipata ogni ombra di paradosso.

§. QUADRAGESIMOSESTO.

SI consideri, che nel cercare le curve egualmente illuminate, allor quando abbiamo trovato l'equazione

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}},$$

abbiamo in sostanza cercato le curve dotate di una data proprietà geometrica, cioè quella di avere il perpendicolo condotto sulla tangente dall'origine dell'ascisse, diviso pel cubo della linea, che dalla medesima origine và al punto del contatto, eguale ad una quantità costante; in fatti, l'Ottica ci ha fatto vedere, che le curve dotate di tale proprietà saranno egualmente illuminate; ma non siamo per questo sicuri, che non vi possano essere altre curve dotate di altre proprietà, le quali siano pure illuminate egualmente. Si cerchino le curve, che sottendono archi eguali sotto eguali angoli fatti nell'origine delle ascisse, le quali come può dedursi dal §. XLIV, sono egualmente illuminate. Sia (*Fig.* 7) $AD = x$, $DE = y$, e conducasi AB infinitamente prossima ad AE; ciò posto, l'angolo EAB, comecchè differenziale dell'angolo DAE, cioè dell'*Ang. Tang.* $\frac{y}{x}$ sarà

$$= \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

e l'archetto di curva EB corrispondente sarà

$$= \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

l'equazione adunque

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \sqrt{dx^2+dy^2},$$

darà le curve cercate.

§. QUADRAGESIMOSETTIMO.

QUESTA equazione posta sotto la forma

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{(x\,dy-y\,dx)^2+(x\,dx+y\,dy)^2},$$

si riduce facilmente a non aver più le potestà dei differenziali, e diventa

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{x\,dy-y\,dx}\right)^2},$$

cioè
$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x\,dy-y\,dx} = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}};$$

facciasi $x = z\,Cos.\,m$, $y = z\,sin.\,m$, ed avremo

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x\,dy-y\,dx}=\frac{dz}{z\,dm};$$

onde l'equazione con le variabili separate sarà

$$dm = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

che integrata ci fa ottenere $m = Arc.\,sin.\,z + C$; ma $C = -Arc.\,sin.\,1$; onde $Cos.\,m = z$,

cioè
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2},$$

e finalmente $y^2+x^2-x=0$, che è l'equazione del cerchio relativa al lume situato nella periferia; e se in vece di trasporre la costante avessimo fatto

$$sin.\,m = sin.\,(Arc.\,sin.\,z - Arc.\,sin.\,1) = -\sqrt{1-z^2},$$

avremmo ottenuto ancor più generalmente

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\sqrt{1-(x^2+y^2)},$$

cioè
$$(x^2+y^2-x)\,(x^2+y^2+x)=0,$$

equazione, che esprime due cerchi a contatto, i quali vengono a rappresentare una specie di Lemniscata.

§. QUADRAGESIMOTTAVO.

NON può adunque recar meraviglia, se l'equazione $x^2+y^2=x$ non soddisfà alla prima equazione differenziale, appartenendo essa alla seconda, la quale è dedotta da un principio differente da quello, onde è nata la prima; l'equazione poi $x^2+y^2=1$ del cerchio coll'origine delle ascisse nel centro, soddisfà ad ambedue l'equazioni differenziali, ed in fatti in tale circostanza esso è dotato di ambedue le proprietà generatrici delle equazioni differenziali suddette.

§. QUADRAGESIMONONO.

La fostanziale differenza, che paffa tra i due principj fopra efpofti, confifte nella fuppofizione, a cui s'appoggia il fecondo di effi, cioè che la luce fi propaghi foltanto nel piano della curva, ed il numero dei raggi fia nella femplice ragione dell' angolo $E\,A\,B$ (*Fig.* 7); fuppofizione, che non può rigettarfi nel cafo che fia da efaminarfi l'illuminazione prodotta in una linea, e che introdotta ancora nel primo principio, rende le due equazioni identiche; in fatti, fe quando fi trovò il feno dell' angolo $D\,E\,F$ (*Fig.* 5)

$$= \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)}},$$

in vece di dividerlo per il quadrato x^2+y^2 della diftanza, fi foffe divifo folamente per la diftanza $= \sqrt{x^2+y^2}$ (come farebbe ftato neceffario di fare, fe fi foffe confiderata foltanto la luce propagata nel piano della curva, giacchè allora l'intenfità decrefce in ragione della femplice diftanza) fi farebbe ottenuto

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = x^2+y^2,$$

equazione, che togliendo gl'irrazionali, fi riduce identica con quella dedotta dal fecondo principio.

§. QUIN-

§. QUINQUAGESIMO.

L'equazione $d\,m = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ potrebbe direttamente ritrovarfi nel modo ifteffo praticato al § XXXVI per rintracciare l'altra $d\,m = \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^4}}$; ed in confeguenza ancora l'equazione finita $m = Arc.\ Sin.\ z + C$, nella quale può la coftante C più generalmente di quello, che abbiam fatto, determinarfi. In fatti fuppongafi, che allorquando $m = o$ diventi $z = a$, ed avremo $m = Arc.\ Sin.\ z - Arc.\ Sin.\ a$, ovvero $z = Sin.\ m\ Cof.\ b + Cof.\ m\ Sin.\ b$, (fupponendo $a = Sin.\ b$); ma facendo $t^2 + u^2 = z^2$, e

$$Sin.\ m = \frac{u}{\sqrt{t^2+u^2}},\quad Cof.\ m = \frac{t}{\sqrt{t^2+u^2}},$$

avremo fra le coordinate rettangole l'equazione

$$t^2 + u^2 = u\ Cof.\ b + t\ Sin.\ b,\ \text{cioè}$$

$$(u\,Sin.\,b + t\,Cof.\,b)^2 + (u\,Cof.\,b - t\,Sin.\,b)^2 = u\,Sin.\,b + t\,Cof.\,b,$$

la quale manifeftamente fi fcorge appartenere ad un cerchio referito ad un affe, che ha l'origine delle afciffe nella periferìa, ma che è inclinato al diametro fotto un angolo $= b$. Quindi viene ad inferirfi direttamente dal calcolo ciò, che fu di fopra dedotto dalla uniforme fituazione di ciafchedun laterculo della periferìa circolare relativamente a tutti gli altri, cioè che in qualunque punto

M

della periferìa sia posto il lume, la periferìa medesima è per tutto investita egualmente dalla luce.

§. QUINQUAGESIMOPRIMO.

APPLICANDO questa determinazione alla equazione $2m = Arc.\, Sin.\, z^2 + C$, avremo $2m = Arc.\, Sin.\, z^2 - Arc.\, Sin.\, a^2$; onde $z^2 = Sin.\, 2m\, Cos.\, 2b + Cos.\, 2m\, Sin.\, 2b$ (supponendo $a^2 = Sin.\, 2b$), ed in oltre facendo come sopra $t^2 + u^2 = z^2$,

e $$Sin.\, 2m = \frac{2tu}{t^2+u^2},\quad Cos.\, 2m = \frac{t^2-u^2}{t^2+u^2},$$

tra le coordinate rettangole t, u avremo l'equazione

$$(t^2+u^2)^2 = 2tu\, Cos.\, 2b + (t^2-u^2)\, Sin.\, 2b,$$ cioè

$$(t^2+u^2)^2 = 2tu\, Sin.\left(\frac{\pi}{4} - 2b\right)$$
$$+ (t^2-u^2)\, Cos.\left(\frac{\pi}{4} - 2b\right);$$

supponendo quindi $c = \frac{\pi}{8} - b$, avremo l'equazione

$$(t^2+u^2)^2 = 4tu\, Sin.\, c\, Cos.\, c + (t^2-u^2)\,(Cos.\, c^2 - Sin.\, c^2),$$

che, posta sotto la forma

$$(u^2\, Sin.\, c^2 + 2ut\, Cos.\, c\, Sin.\, c + t^2\, Cos.\, c^2 +$$
$$u^2\, Cos.\, c^2 - 2ut\, Cos.\, c\, Sin.\, c + t^2\, Sin.\, c^2)^2 =$$

$$u^2\, Sin.\, c^2 + 2ut\, Cos.\, c\, Sin.\, c + t^2\, Cos.\, c^2 - u^2\, Cos.\, c^2 +$$
$$2ut\, Cos.\, c\, Sin.\, c - t^2\, Sin.\, c^2,$$ si riduce alla seguente

$$\left((u\, Sin.\, c + t\, Cos.\, c)^2 + (u\, Cos.\, c - t\, Sin.\, c)^2\right)^2 =$$
$$(u\, Sin.\, c + t\, Cos.\, c)^2 - (u\, Cos.\, c - t\, Sin.\, c)^2,$$

la quale facilmente si scorge appartenere alla Lemniscata referita ad un asse che passa pel centro, ed è inclinato al diametro d'un angolo $= c$.

§. QUINQUAGESIMOSECONDO.

SIA la Lemniscata BDE (*Fig.* 12) è chiaro che essendo AB il diametro che passa pel centro, $BE = z$, $ABE = m$, avremo $z^2 = Cos.\, 2m$; volendo permutare questa equazione con altre indeterminate dell'istesso genere, l'origine delle quali sia in un punto qualunque D; io conduco $BD = a$, e pel punto D, DF parallela al diametro AB, e DE, che suppongo $= z'$; siccome l'angolo $FDE = m'$; e l'angolo $ABD = b$; ciò posto, per trovare la relazione che passa tra le seconde indeterminate z', m' e le prime z, m, io osservo, che pel noto canone trigonometrico della proporzionalità tra i lati dei triangoli, ed i seni degli angoli opposti, avremo $Sin.\, m' : Sin.\,(b - m') =$

$$a : \frac{a\, Sin.\,(b-m')}{Sin.\, m'} = BC,$$

in oltre $$Sin.\, m' : Sin.\,(m - m') =$$

$$z : \frac{z\, Sin.\,(m-m')}{Sin.\, m'} = BC;$$

dunque $\frac{a}{z}$ $Sin.\ (b - m') = Sin.\ (m - m')$;

ma $z' : a = Sin.\ (b - m) : Sin.\ (m - m') =$

$\frac{a}{z'}$ $Sin.\ (b - m)$; dunque $z\, Sin.\ (b - m) = z'\, Sin.\ (b - m')$,

e finalmente $m = b - Arc.\ Sin.\ \frac{z'\, Sin.\ (b - m')}{z}$.

Sostituendo questo valore nell' equazione

$$\frac{a\, Sin.\ (b - m')}{Sin.\ (m - m')} = z,$$

troveremo $a = \sqrt{z^2 - z'^2\, Sin.\ (b - m')^2} - z'\, Cos.\ (b - m')$;

ed in conseguenza $z = \sqrt{a^2 + 2\, a\, z'\, Cos.\ (b - m') + z'^2}$.

Le formole dunque per permutare le indeterminate di questo genere saranno

$$m = b - Arc.\ Sin.\ \frac{z'\, Sin.\ (b - m')}{\sqrt{a^2 + 2\, a\, z'\, Cos.\ (b - m') + z'^2}}$$

$$z = \sqrt{a^2 + 2\, a\, z'\, Cos.\ (b - m') + z'^2}$$

$$m' = b - Arc.\ Sin.\ \frac{z\, Sin.\ (b - m)}{\sqrt{a^2 - 2\, a\, z\, Cos.\ (b - m) + z^2}}$$

$$z' = \sqrt{a^2 - 2\, a\, z\, Cos.\ (b - m) + z^2};$$

e nella Lemniscata è chiaro che, facendo $a^2 = Cos.\ 2\, b$, l'origine delle seconde indeterminate sarà nel perimetro, posto che l'origine delle prime fosse nel centro.

§. QUINQUAGESIMOTERZO.

Sostituendo nell'equazione al cerchio $z = Cos.\ m$, i valori di z, ed m trovati di sopra, avremo

$$\sqrt{a^2 + 2\, a\, z'\, Cos.\ (b - m') + z'^2} =$$

$$Cos.\left(b - Arc.\ Sin.\ \frac{z'\, Sin.\ (b - m')}{z}\right),$$

cioè $a^2 + 2\, a\, z'\, Cos.\ (b - m') + z'^2 =$

$$Cos.\ b\left(a + z'\, Cos.\ (b - m')\right) + z'\, Sin.\ b\, Sin.\ (b - m'),$$

che supponendo $a = Cos.\ b$,

diventerà $z' = Sin.\ b\, Sin.\ (b - m') - Cos.\ b\, Cos.\ (b - m') =$

$$- Cos.\ 2\, b\, Cos.\ m' - Sin.\ 2\, b\, Sin.\ m' =$$

$$Sin.\left(\frac{3\,\pi}{4} - 2\, b\right) Cos.\ m' + Cos.\left(\frac{3\,\pi}{4} - 2\, b\right) Sin.\ m',$$

ed in conseguenza $z' = Sin.\left(\frac{3\,\pi}{4} - 2\, b + m'\right)$,

lo che combina con quanto fu trovato al §. I.; ed in fatti, ponendo $m' = o$, sarà $z' = - Cos.\ 2\, b$; ma essendo $a = Cos.\ b$, avremo $z' = 1 - 2\, a^2$, come appunto dee essere; poichè nel cerchio $B\ D\ E$ (*Fig.* 12) essendo $B\ D$ una corda $= a$, e l'angolo $A\ B\ D = b$, è chiaro che avremo $D\ F = 1 - 2\, a\, Cos.\ b = 1 - 2\, a^2$.

§. QUINQUAGESIMOQUARTO.

TRASFORMANDO nel modo iſteſſo l'equazione $z^2 = \text{Cof.}\ 2m$ appartenente alla Lemniſcata, troveremo

(ſupponendo $n = \text{Arc. Sin.}\ \frac{z'\ \text{Sin.}\ (b - m')}{z}$)

$$z^2 = \text{Cof.}\ 2b\ \text{Cof.}\ 2n + \text{Sin.}\ 2b\ \text{Sin.}\ 2n\ ;$$

ma eſſendo $z^2 = a^2 + 2az'\ \text{Cof.}\ (b - m') + z'^2$

$$z^2\ \text{Cof.}\ 2n = a^2 + 2az'\ \text{Cof.}\ (b - m') + z'^2\ \text{Cof.}\ (2b - 2m')$$

$$z^2\ \text{Sin.}\ 2n = 2az'\ \text{Sin.}\ (b - m') + z'^2\ \text{Sin.}\ (2b - 2m')$$

avremo la trasformata $\left(a^2 + 2az'\text{Cof.}\ (b - m') + z'^2\right)^2 =$

$$\text{Cof.}\ 2b \times \overline{a^2 + 2az'\ \text{Cof.}\ (b - m') + z'^2\ \text{Cof.}\ (2b - 2m')} +$$

$$\text{Sin.}\ 2b \times \overline{2az'\ \text{Sin.}\ (b - m') + z'^2\ \text{Sin.}\ (2b - 2m')}.$$

Supponendo adeſſo che l'origine delle nuove indeterminate z', m' cada in un punto qualunque del perimetro della curva, ed in conſeguenza $a^2 = \text{Cof.}\ 2b$; ed introducendo opportunamente i ſeguenti teoremi trigonometrici, dei quali facilmente ritrovaſi la dimoſtrazione,

I°. $\text{Cof.}\ 2b\ \text{Cof.}\ (b - m') + \text{Sin.}\ 2b\ \text{Sin.}\ (b - m') = \text{Cof.}\ (b + m')$

II°. $\text{Cof.}\ 2b\ \text{Cof.}\ (2b - 2m') + \text{Sin.}\ 2b\ \text{Sin.}\ (2b - 2m') = \text{Cof.}\ 2m'$

III°. $2\ \text{Cof.}\ (b - m')^2 = \text{Cof.}\ (2b - 2m') + 1$

IV°. $2a^2\ \text{Cof.}\ (2b - 2m') - \text{Cof.}\ 2m' = \text{Cof.}\ (4b - 2m')$

V°. $2a\left(2a\ \text{Cof.}\ (b - m') - \text{Cof.}\ (b + m')\right) = 2a\ \text{Cof.}\ (3b - m')$

otterremo l'equazione

$$z'^3 + 4az'^2\ \text{Cof.}\ (b - m') +$$

$$z'\left(4a^2 + \text{Cof.}\ (4b - 2m')\right) + 2a\ \text{Cof.}\ (3b - m') = 0,$$

la quale, come ognuno vede, è diverſa dell'altra $z^2 = \text{Sin.}\ (C + 2m)$ dedotta dalla precedente integrazione; e quindi non appariſce poſſibile illuminare egualmente ogni punto del perimetro della Lemniſcata, con un lume ſituato in un punto qualunque del perimetro iſteſſo; ma ſe poſſa aſſerirſi che il lume debba neceſſariamente eſſer nel centro della Lemniſcata, per illuminare egualmente ogni punto di tutto il perimetro, o di una porzione di eſſo, verrà a manifeſtarſi dopo una diligente analiſi della ritrovata equazione, che facilmente può liberarſi dalla moltiplicità degli angoli variabili

$$b - m'$$

$$4b - 2m'$$

$$3b - m',$$

e ridurſi a non contenere ſe non il primo di eſſi, traſformandoſi allora in queſta

$$z'^6 +$$

$$8 a z'^5 \, Cos. \left(b - m' \right) +$$

$$\left(20 a^2 \, Cos. (b - m')^2 + 6 a^2 \right) z'^4 +$$

$$\left(28 a^3 \, Cos. (b - m') + 16 a^3 \, Cos. (b - m')^3 \right) z'^3 +$$

$$\left(32 a^4 \, Cos. (b - m')^2 - 4 \, Cos. (b - m')^2 + 9 a^4 + 4 \, Cos. (b - m')^4 \right) z'^2 +$$

$$\left(20 a^5 \, Cos. (b - m') - 8 a \, Cos. (b - m') + 8 a \, Cos. (b - m')^3 \right) z' +$$

$$4 a^2 \left(Cos. (b - m')^2 - 1 + a^4 \right) = 0,$$

la quale maneggiata con un poco di ſagacità, condurrà il Lettore a diſſipare ogni dubbiezza ſu tal propoſito, ſupplendo alla brevità, che attualmente ci ſiamo prefiſſi.

§. QUINQUAGESIMOQUINTO.

RISULTA dalle precedenti oſſervazioni, che i Solidi aventi la ſuperficie egualmente illuminata in ogni punto, poſſono avere infinite forme diverſe, prodotte dalla rotazione di archi diverſi di Lemniſcata, e di Cerchio.

§. QUIN-

§. QUINQUAGESIMOSESTO.

SCOLIO.

ABBIAM veduto poterſi integrare ambedue le equazioni

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2)}$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2)}$$

per mezzo delle iſteſſe traſformazioni $x = z \, Cos. \, m$, $y = z \, Sin. \, m$; è facile pertanto il ſoſpettare che queſte poſſano utilmente porſi in opera, ancora in altre equazioni a quelle analoghe: ſoffermiamoci brevemente intorno a tale diſcuſſione.

Primieramente ſi oſſervi che ſupponendo $F. \, x, y$ una funzione qualunque di x, y tutte le equazioni compreſe ſotto queſta forma generale

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2)}} = F. \, y, x$$

ſi ſpogliano delle poteſtà dei differenziali ponendo la formola

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2)}$$

ſotto la forma $\sqrt{(x\,dy - y\,dx)^2 - (x\,dx + y\,dy)^2}$, e riduconſi tutte a queſta

N

$$F.y,x\,(x\,dx+y\,dy)=(x\,dy-y\,dx)\,\sqrt{1-F.^2\,x,y}\,;$$

ponendo pertanto $F.y,x=x^2+y^2$, questa equazione generale diventa quella della Lemniscata, e ponendo

$$F.\,x,y=\sqrt{x^2+y^2}$$

quella del Cerchio, come può riscontrarsi alli §§. XXXI, e XLVII.

Abbiamo visto che facendo $x=z\,Cos.\,m,\,y=z\,Sin.\,m$ si ottiene

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x\,dy-y\,dx}=\frac{dz}{z\,dm}\,;$$

se dunque la quantità

$$\frac{1}{F.\,x,y}\sqrt{1-F.^2\,x,y}$$

sia tale, che facendo $x=z\,Cos.\,m,\,y=z\,Sin.\,m$, si ottenga

$$\frac{1}{F.\,x,y}\sqrt{1-F.^2\,x,y}=F.\,z,$$

cioè diventi essa soltanto funzione qualunque della variabile z, la proposta sarà ridotta manifestamente alla separazione delle variabili, cangiandosi allora in questa

$$dm=\frac{dz}{z\,F.\,z}.$$

In oltre, se la quantità

$$\frac{1}{F.\,x,y}\sqrt{1-F.^2\,x,y},$$

con quelle sostituzioni diventi $=F.\,m$, cioè una funzione qualunque di m, avremo parimente le variabili separate in questa forma

$$\frac{dz}{z}=dm\,F.\,m.$$

Finalmente, se

$$\frac{1}{F.\,x,y}\sqrt{1-F.^2\,x,y}\,,$$

con le dette sostituzioni potesse prendere una di queste tre forme

$$F.\,z\times F.\,m$$

$$F.\,z\times\frac{1}{F.\,m.}$$

$$\frac{1}{F.\,z}\times F.\,m,$$

cioè divenire eguale al prodotto, o alla ragione di due qualunque, e ancor fra loro differenti funzioni di m, e z avremmo le variabili separate come segue

$$\frac{dz}{z\,F.\,z}=dm\,F.\,m$$

$$\frac{dz}{z\,F.\,z}=\frac{dm}{F.\,m}.$$

$$\frac{dz\,F.\,z}{z} = dm\,F.\,m.$$

Acciò il primo caſo abbia luogo, conviene che $F.\,x,y$ ſia funzione qualunque di x^2+y^2, cioè $F.\,x,y = f.\,x^2+y^2$, ed in tale occorrenza avremo infinite equazioni integrabili ſotto la general forma

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x\,dy-y\,dx} = \frac{1}{f.\,x^2+y^2}\sqrt{1-f.^2\,x^2+y^2},$$

alla quale ſi riduce l'altra affetta delle ſeconde potenze dei differenziali

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{\sqrt{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)}} = f.\,x^2+y^2.$$

Il ſecondo caſo avrà luogo allorquando $F.\,x,y$ ſarà funzione qualunque di una di queſte quattro quantità

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{x^2+y^2}{yx},\quad \frac{x}{y};$$

onde infinite equazioni integrabili ſaranno contenute in ciaſcheduna delle ſeguenti

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x\,dy-y\,dx} = \frac{1}{f.\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}\sqrt{1-f.^2\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x\,dy-y\,dx} = \frac{1}{f.\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}\sqrt{1-f.^2\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x\,dy-y\,dx} = \frac{1}{f.\,\frac{xy}{x^2+y^2}}\sqrt{1-f.^2\,\frac{xy}{x^2+y^2}}$$

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x\,dy-y\,dx} = \frac{1}{f.\,\frac{x}{y}}\sqrt{1-f.^2\,\frac{x}{y}},$$

alle quali ſi riducono queſt'altre

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{\sqrt{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)}} = f.\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{\sqrt{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)}} = f.\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{\sqrt{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)}} = f.\,\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{\sqrt{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)}} = f.\,\frac{x}{y},$$

dalla combinazione, delle quali altre, per avventura, potrebber formarſene, che facilmente potranno ritrovarſi.

In quanto poi al terzo caſo, quantunque eſſo non ſembri a prima vista possibile, attesa la forma della quantità

$$\frac{1}{F. x, y} \sqrt{1 - F.^2 x, y,}$$

che non ammette generalmente quelle modificazioni, non ostante in alcuni casi può riuscire utile averlo osservato: in fatti, se $F. x, y$ sia tale che possa prendere una delle tre forme

$$F. z \times F. m, F. z \times \frac{1}{F. m}, \quad \frac{1}{F. z} \times F. m,$$

e sia così piccola che possano disprezzarsi le potenze di essa superiori alla prima, allora otterremo la desiderata separazione delle variabili.

Per esempio suppongasi l'equazione

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x\,dy - y\,dx} = \frac{1}{x y^2} \sqrt{1 - x^2 y^4};$$

sostituendo come sopra, avremo

$$\frac{dz}{z\,dm} = \frac{1}{z^3\, Cos.\, m\; Sin.\, m^2} \sqrt{1 - z^6\, Cos.\, m^2\, Sin.\, m^4};$$

se dunque possa assumersi piccolissimo l'angolo m, è chiaro che potrà, senza error sensibile, ridursi quella equazione a questa

$$\frac{dz}{z\,dm} = \frac{1}{z^3\, Cos.\, m\; Sin.\, m^2},$$

ed in conseguenza avremo

$$z^3 = 3 \int. \frac{dm}{Cos.\, m\; Sin.\, m^2} + C.$$

§. Quinquagesimosettimo.

LEMMA.

Data l'equazione di una superficie qualunque, la quale sia toccata da un piano in un punto, suppongasi che dall'origine dell'ascisse sia condotta una normale sopra al piano suddetto, io dico che l'espressione generale di quella normale sarà questa

$$\frac{z\,dy\,dx - y\,dx\,dz - x\,dy\,dz}{\sqrt{dy^2\,dx^2 + dz^2\,dy^2 + dz^2\,dx^2}}.$$

Sia A (*Fig.* 13) l'origine delle ascisse, e siano $AB = x$, $BD = y$, $DC = z$ (che sarà in conseguenza perpendicolare al piano della figura) le coordinate rettangole; ciò posto suppongasi CE esser la tangente al punto C della curva, prodotta dall'entersezione della proposta superficie con il piano CDE delle coordinate y, z; ed in oltre suppongasi CF esser la tangente al punto C della curva, prodotta dall'intersezione della proposta superficie con il piano CDF normale ai piani BDC, ABD. La sottangente DE sarà $= \frac{z\,dy}{dz}$, e l'altra $DF = \frac{z\,dx}{dz}$;

conducasi adesso DG normale alla linea FE, che è l'interfezione del piano ABD con il piano FCE, che tocca la proposta superficie nel punto C, e congiunti i due punti G, C avremo l'angolo DGC, che esprimerà l'inclinazione del piano FCE al piano ABD, e potendosi facilmente dimostrare essere

$$GD = \frac{z\,dy\,dx}{dz\sqrt{dy^2 + dx^2}},$$

troveremo la tangente dell'angolo DGC

$$= \frac{dz\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy\,dx}.$$

Per l'origine dell'ascisse A si conduca MN parallela a GD, e pel punto M si conduca nell'altro piano FCE la linea MO parallela a GC; è chiaro che il triangolo MNO sarà simile, e parallelo al triangolo DGC, e se dal punto A si conduca sulla linea MO la normale AH, questa sarà normale ancora al piano tangente FCE, ed il valore di essa può ritrovarsi nel modo seguente. Da quanto fino ad ora abbiam visto deducesi agevolmente

$$GC = \frac{z}{dz}\sqrt{\frac{dy^2\,dx^2 + dy^2\,dz^2 + dz^2\,dx^2}{dx^2 + dy^2}};$$

ma per i triangoli simili EDF, EBP abbiamo $DE : BE = DF : BP$, onde

$BP =$

$$BP = \frac{z\,dy\,dx - y\,dx\,dz}{dy\,dz};$$

inoltre, per i triangoli simili BEP, PAM si ottiene l'analogia $PE : PA = BE : AM$, cioè

$$\sqrt{\left(\frac{z\,dy}{dz} - y\right)^2 + \left(\frac{z\,dy\,dx - y\,dx\,dz}{dy\,dz}\right)^2}$$

$$: \frac{z\,dy\,dx - y\,dx\,dz}{dy\,dz} - x =$$

$$\frac{z\,dy}{dz} - y : AM;$$

onde sarà $AM = \dfrac{z\,dy\,dx - y\,dx\,dz - x\,dy\,dz}{dz\sqrt{dy^2 + dx^2}}$;

si osservi finalmente che i triangoli MAH, DGC sono simili, e ci danno l'analogia $GC : DC = MA : AH$, cioè

$$\frac{z}{dz}\sqrt{\frac{dy^2\,dx^2 + dz^2\,dy^2 + dz^2\,dx^2}{dy^2 + dx^2}} : z =$$

$$\frac{z\,dy\,dx - y\,dx\,dz - x\,dy\,dz}{dz\sqrt{dy^2 + dx^2}} : AH,$$

ed in conseguenza

$$AH = \frac{z\,dy\,dx - y\,dx\,dz - x\,dy\,dz}{\sqrt{dy^2\,dx^2 + dz^2\,dy^2 + dx^2\,dz^2}},$$

che è l'espressione proposta.

O

§. Quinquagesimottavo.

PROBLEMA OTTAVO.

Dato un punto luminoso in qualsivoglia luogo, trovare l'illuminazione dal medesimo prodotta sopra un punto assegnato, in una data qualunque superficie.

Riducasi l'origine delle ascisse x nel punto A (*Fig.* 13) ove si suppone il punto lucido; inoltre si concepisca la proposta superficie toccata nel punto C (che è quello di cui si cerca l'illuminazione) dal piano FCE, nel quale si conduca la perpendicolare

$$AH = \frac{z\,dy\,dx - y\,dx\,dz - x\,dy\,dz}{\sqrt{dy^2 dx^2 + dz^2 dy^2 + dz^2 dx^2}};$$

ciò posto conducendo

$$AC = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

avremo, per i principj di sopra stabiliti, la ricercata illuminazione espressa generalmente dalla formola

$$\frac{z\,dy\,dx - y\,dx\,dz - x\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3 (dy^2 dx^2 + dz^2 dy^2 + dz^2 dx^2)}}.$$

§. Quinquagesimonono.

COROLLARIO PRIMO.

Ponendo la ritrovata formola eguale ad una costante qualunque, avremo l'equazione differenziale delle superficie egualmente illuminate in ogni punto.

§. Sessagesimo.

COROLLARIO SECONDO.

Data l'equazione di una superficie qualunque, ridotta ad avere l'origine delle ascisse in un punto, ove sia situato un lume, troveremo facilmente il punto della superficie medesima, ove dal lume suddetto è prodotta la massima, o minima illuminazione: in fatti differenziando a dovere la ritrovata formola, e nel risultato eguagliato a zero, sostituendo opportunamente i valori tolti dalla proposta equazione, avremo le coordinate corrispondenti al punto richiesto. Tutto ciò è troppo chiaro per dispensarne dal diffondersi in calcoli esemplificativi, che possono svilupparsi ulteriormente da ciascheduno, che abbia in queste materie alcuna perizia.

§. Sessagesimoprimo.

SCOLIO PRIMO.

È Manifeſto che la formola

$$\frac{z\,dy\,dx - y\,dx\,dz - x\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3(dx^2\,dy^2+dy^2\,dz^2+dz^2\,dx^2)}},$$

ponendo $x=o$, ovvero $y=o$ ſi riduce, nel primo caſo, a queſta

$$\frac{z\,dy - y\,dz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3\left(dy^2+dz^2+\frac{dy^2\,dz^2}{dx^2}\right)}},$$

e nel ſecondo caſo a queſt'altra

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{\sqrt{(x^2+z^2)^3\left(dz^2+dx^2+\frac{dz^2\,dx^2}{dy^2}\right)}};$$

ma parrebbe doveſſe prendere le forme

$$\frac{z\,dy - y\,dz}{\sqrt{(z^2+y^2)^3(dx^2+dy^2)}}$$

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{\sqrt{(z^2+x^2)^3(dz^2+dx^2)}},$$

che eſprimono l'illuminazione prodotta in un punto qualunque della curva nata della interſezione del piano CDB con la propoſta ſuperficie, o della curva nata della interſezione del piano CDF, con la ſuperficie iſteſſa, prodotta dico, da un lume ſituato nelle reſpettive origini delle coordinate; ſi oſſervi pertanto che acciò la noſtra formola ſi renda atta a rappreſentare quelle eſpreſſioni, non ſerve il ſupporre $x=o$, ovvero $y=o$, ma conviene ancora che la normale AH non eſca dal piano CDB nel primo caſo, ovvero dal piano CDF nel ſecondo, alla quale condizione io trovo che può ſoddisfarſi ponendo

$$\frac{z\,dx}{dz} = \infty \text{ , ovvero } \frac{z\,dy}{dz} = \infty;$$

in tale occorrenza adunque avendo dz una ragione infiniteſima a dx, ovvero a dy, la quantità

$$\frac{dy^2\,dz^2}{dx^2}\text{, ovvero }\frac{dx^2\,dz^2}{dy^2}$$

ſarà infinitamente minore dell'altra dy^2+dz^2, ovvero dx^2+dz^2, ed in conſeguenza otterremo nel primo caſo

$$\frac{z\,dy - y\,dz}{\sqrt{(z^2+y^2)^3\left(dy^2+dz^2+\frac{dy^2\,dz^2}{dx^2}\right)}} = \frac{z\,dy - y\,dz}{\sqrt{(z^2+y^2)^3(dy^2+dz^2)}},$$

e nel caſo ſecondo

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{\sqrt{(x^2+z^2)^3\left(dx^2+dz^2+\frac{dx^2\,dz^2}{dy^2}\right)}} =$$

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{\sqrt{(x^2+z^2)^3\,(dx^2+dz^2)}},$$

come appunto richiedesi.

§. Sessagesimosecondo.

SCOLIO SECONDO.

Al §. xxviii fu avvertito che il principio da me immaginato, consistente nel considerare le superficie luminose come uno strato di punti lucidi, e nel sostituire in vece dei punti lucidi altrettanti proporzionali punti gravitanti, combinato convenevolmente con le modificazioni, che nascono dalle varie situazioni della superficie illuminante relativamente all'illuminata, conduce a risolvere con maravigliosa eleganza la maggior parte delle questioni, che in sì fatto proposito possano occorrere; ma rilasciando queste ad altra opportunità, porremo fine al presente Saggio con l'osservazione seguente. La Matematica è in grado di assegnare in qual ragione variano nelle diverse circostanze, le quantità dei raggi di luce, che un dato corpo luminoso può trasmettere sopra una superficie data di posizione, grandezza, e figura; ma l'illuminazione in essa prodotta, risulta soltanto da quei raggi, che dopo averla incontrata vengono riflessi, e sono in grado d'investire l'organo della Visione; quindi fu necessario fino dal principio il definire (*Defin. II.*) particolarmente l'illuminazione, giacchè per

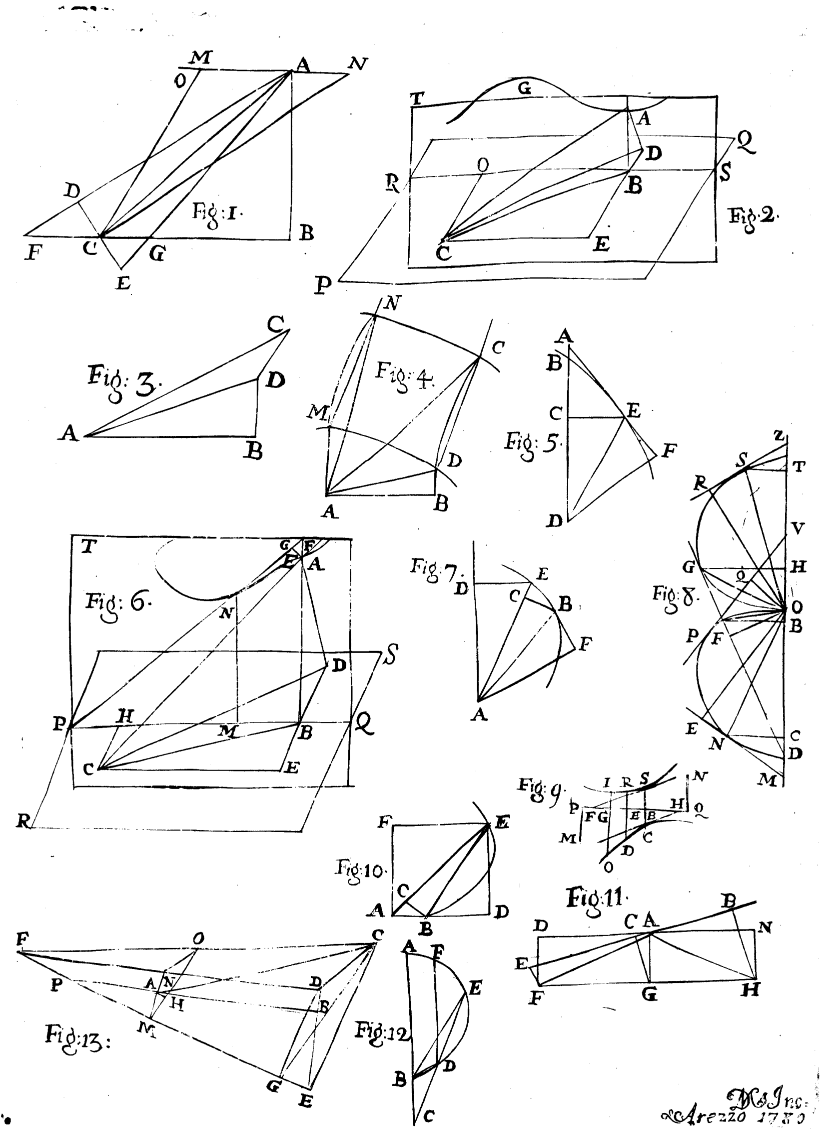
esprimere rigorosamente l'illuminazione prodotta sopra un dato corpo, converrebbe dare alle formole, che nei diversi casi rappresentano le quantità dei raggi ivi tramandati, una equazione dipendente dalle quantità dei raggi assorbiti, o riflessi dai diversi corpi, o dal corpo istesso diversamente presentato incontro ai raggi medesimi che l'investono. L' Illustre Sig. *Lambert* lasciò (*Pyrometria*) una osservazione analoga a questa, in tal guisa tradotta dall'Originale Tedesco, ed inserita dal Celebre P. *Gregorio Fontana* in uno de' suoi ingegnosi Opuscoli ultimamente pubblicati. " Quadratum sinus altitudinis solaris nullum hic sibi locum „ vindicat. In numero tantum & densitate radiorum sola„ rium, minime vero in illorum percussione, vel ictu me„ chanico totius rei cardo vertitur. Ignearum corporis „ molecularum numerus, hoc est calor ipsius non augetur „ ab illis igneis particulis, quæ in corporis superficiem „ impingunt, indeque necessario reflectuntur, sed ab iis „ tantum, quæ superficiem prætereuntes intra corporis „ meatus se insinuant. Hæcque est caussa cur nigra cor„ pora soli objecta vehementius quam alba incalescant „. Sebbene adunque matematicamente parlando, una formola sola possa esprimere tanto l'illuminazione, quanto il calore proveniente da un corpo lucido, nonostante resulta per quanto abbiamo accennato, che per giungere all'esattezza, conviene modificare la formola istessa diversamente, colla considerazione fisica dei raggi riflessi, e di quelli assorbiti. Sembra pertanto, che la Fisica Sperimentale, con tanto decoro dell' Intelletto Umano coltivata ai dì noſtri, debba invitarſi ad iſtituire ſopra tal propoſito ricerche tali, che ponghino in chiaro, ſe poſſa corredarſi la Matematica degli Elementi neceſſarj, per eſaurire queſte utili non meno, che dilettevoli contemplazioni.

FINE.

AGGIUNTE, E VARIAZIONI.

Nel Diſcorſo Preliminare.	*Leggaſi,*
Pag. 15, *verſo* 26, infinite	finite
Pag. 28, *verſo* 26, thin king	thinking

Nel Saggio.	*Leggaſi,*
Pag. 1, *verſo* 7, un punto lucido.	uno, o più punti lucidi.
Pag. 4, *in fine del Corrollario Primo.*	*Vedaſi una Mem. di M. Parent fra quelle dell' Acc. di Parig.*
Pag. 56, *verſo* 7, Ridotti	Ridotta
Pag. 73, *verſo* 11, $\infty \pi$,	$\frac{\infty \pi}{n}$,
Pag. 73, *verſo* 12, la	le



Inc:
Arezzo 1780